

*Научная статья***Течение жидкости в толстом торе под действием распределённых сил****А.В. Чупин***Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

В работе численно исследуется ламинарное стационарное течение несжимаемой жидкости в криволинейном канале кругового сечения. Проанализировано влияние профиля массовой силы, инициирующей стационарное течение, на его параметры. Рассмотрены три основные естественные причины, создающие эту силу: градиент давления в канале, однородное воздействие внешних полей и равноускоренное торможение вращающегося канала (силы инерции). Одним из ключевых параметров при изучении течений в тороидальных каналах выступает число Дина, которое в дополнение к интенсивности потока, обуславливаемой числом Рейнольдса, учитывает кривизну канала. Проведённое прямое численное моделирование при всех геометрически возможных кривизнах канала и числах Рейнольдса до 300 показало, что для полного описания особенностей течения в тороидальных каналах с сечением большого радиуса («толстых торах») одного числа Дина недостаточно. Выявлено, что положение максимума продольной скорости определяют число Рейнольдса, кривизна и профиль силы. При малых числах Рейнольдса (меньших 40) максимум может смещаться к внешней оси тора, при больших – только от неё. Обнаружено раздвоение максимума скорости и появление третьего локального максимума, причём эти эффекты возникают только при градиентной силе и достаточно большой кривизне. Для силы инерции как массовой силы число Дина однозначно идентифицирует положение максимума скорости, но не даёт представления об интенсивности вторичного течения при числах Рейнольдса от 50 и выше. При постоянной силе число Дина применимо лишь до определённых величин числа Рейнольдса, а для градиентной силы использование этого параметра вообще не имеет смысла. Установлено, что интенсивность вторичного течения (при выполненном в работе обезразмеривании) имеет максимум при числах Рейнольдса в диапазоне 50–100, причём кривизна, обеспечивающая этот максимум, зависит от профиля силы. Полученные результаты важны для проектирования систем с криволинейными каналами (теплообменников, химических реакторов).

Ключевые слова: течение в криволинейной трубе, учёт криволинейных границ, уравнения Навье–Стокса, нелинейная динамика, число Дина, прямое численное моделирование, метод искусственной сжимаемости

Получение: 25.11.2025 / *Публикация онлайн:* 25.02.2026

УДК 532.5; 532.517; 532.542

1. Введение

Течение несжимаемой жидкости в искривлённых геометриях (даже независимо от времени) является сложным процессом, который требует детального анализа для понимания его особенностей и механизмов и представляет значительный интерес для различных инженерных и научных дисциплин. Применения криволинейной геометрии варьируются от теплообменников в ядерных [1] и химических реакторах до биологических систем [2]. В частности, любой изгиб трубы приводит к криволинейности. Понимание сложного взаимодействия инерционных и вязких сил в этих геометриях имеет решающее значение для оптимизации производительности систем и прогнозирования поведения потока.

Среди разнообразия криволинейных каналов в данной работе рассматривается важный частный случай — тороидальный канал, представляющий собой замкнутый канал кругового сечения, ось которого образует окружность. Он же выступает простой моделью поворота прямолинейного канала, и в этом случае самым важным геометрическим параметром служит коэффициент кривизны (или просто кривизна):

$$\kappa = R_i / R_o, \quad (1)$$

где R_i — радиус сечения канала, R_o — радиус кривизны центральной линии канала. Ранние исследования, такие как работы Дина 1927 года [3], заложили основу для анализа возникновения вторичных потоков, обусловленных центробежными силами в изогнутых трубах. Основываясь на этом фундаменте, исследователи изучали различные аспекты тороидальных течений, как аналитически для малых чисел Рейнольдса, так и численно для более сложных режимов течения. Ключевой вклад вносят работы [4, 5], рассматривающие линейную устойчивость течений, влияние кривизны канала и множественные ветви решений. Несмотря на значительный прогресс особенности течения жидкости в тороидальных каналах с параметром κ свыше 0.3 остаются недостаточно исследованными.

Существует три основных подхода к анализу течения в тороидальных каналах: теоретический, лабораторные эксперименты и компьютерное моделирование.

Теоретическое изучение течений в криволинейных каналах имеет долгую историю и начинается с работ Дина ([3, 6]), в которых получена оценка предельного параметра устойчивости (критического числа Рейнольдса) в форме $36/\sqrt{\kappa}$ (в современных обозначениях). Уже в статье Уайта 1929 года [7], по-видимому впервые, явно использован «критерий Дина», который может содержать числовой коэффициент, варьирующийся от работы к работе. В данной статье этот параметр вводится без дополнительных коэффициентов и имеет вид:

$$De = Re\sqrt{\kappa}.$$

Здесь $Re = VR_i/\nu$ — число Рейнольдса, где V — некоторая характерная скорость, ν — кинематическая вязкость. В последующих исследованиях этот параметр получил название числа Дина, и рассматривался как безразмерный

параметр, который характеризует относительную важность инерционных и вязких сил в искривлённых геометриях. Считалось, что этого числа достаточно для описания характеристик течения в тонких тороидальных каналах, то есть в ситуациях, близких к цилиндрическому течению Пуазейля. Например, в статье [8] теоретически обоснована зависимость от него практически значимой величины — коэффициента сопротивления. Также в этой работе в одной из первых используются компьютерные вычисления, хотя и с целью лишь построения картины течения. В работах [9] и [10] теоретически проанализирован переход от ламинарного режима к турбулентному при увеличении числа Дина, сопровождающийся образованием вихревых структур, известных также как «вихри Дина». В работе [11] предпринята попытка вывести аналитическое приближение в виде степенного ряда по числу Дина для течения в торе, но отброшенные члены ряда сделали его не применимым для описания течения при больших κ . Уравнения без отброшенных членов рассмотрены в [12]. Более того, анализы, сосредоточенные на асимптотическом поведении для больших Re и малых κ , такие как работы Денниса и Райли [13], выявляют структуры типа «ядро плюс пограничный слой», но требуют упрощения управляющих уравнений. Аналогично, исследование Смита [14] по течениям в изогнутых каналах с треугольным и прямоугольным поперечными сечениями демонстрирует отличия и необходимость модификаций градиента давления для получения точных решений.

Первые экспериментальные исследования течений в криволинейных каналах относятся к концу XIX – началу XX века и активно продолжаются по настоящее время. Следует отметить работы [15, 16], показывающие, что при определённых условиях в тороидальных каналах возникают сложные структуры течения, которые нельзя полностью объяснить с использованием только числа Дина. В серии экспериментов с течениями в тороидальных каналах при разных методах визуализации и измерений [17] обнаружено, что при высоких значениях числа Рейнольдса образуются дополнительные структуры, такие как вихри и волны, которые требуют дальнейшего изучения. Эксперименты Айдера [18] по течениям в изогнутых трубах демонстрируют сложности, которые не могут быть полностью описаны одним параметром. Более того, Гонцов [19] провёл эксперименты с 90-градусным изгибом в аэродинамической трубе при $Re \sim 10^5$ и обнаружил, что минимум давления смещается от внутреннего края, а максимум скорости смещается к нему. Эти явления противоречат приближению Дина.

В реальности создать течение в тороидальном канале довольно сложно, поскольку замкнутость канала не даёт возможности поместить внутрь него какие-либо насосы или моторы. Поэтому часто замкнутый канал в экспериментах размыкают, заменяя каналом, искривлённым по винтовой линии. Однако существуют эксперименты и с замкнутой тороидальной трубой. Так, в работе [20] течение жидкости внутри канала вызывается подогнанным по размеру к внутреннему сечению трубы стальным шариком,двигающимся под действием магнитного поля. Другой метод генерации течения в замкнутом торе — резкое замедление быстро вращающегося канала [21]. Но это вряд ли можно считать стационарным случаем. Нестационарные течения вносят дополнительный уровень сложности, который не описывается одним числом Дина.

Развитие компьютерных технологий привело к эре численных методов, которые открыли новые возможности в изучении течений в тороидальных каналах. Они позволяют «заглянуть» внутрь канала и организовать любой метод генерации течения. Работы [22] и [23] продемонстрировали возможность использования метода крупных вихрей (LES) для моделирования сложных турбулентных течений в тороидальных каналах. В [24] переход к турбулентности рассматривается для кривизн до $\kappa = 0.3$ методом конечных объёмов. В работе [25] рассматривается вязкое течение под давлением через изогнутую трубу, которая внезапно останавливается, и течение не поддаётся описанию числом Дина.

Таким образом, хотя число Дина и служит ценным начальным параметром, все подходы показывают его неадекватность в охвате сложного взаимодействия факторов, управляющих течением в торе, особенно при высоких числах Рейнольдса, значительных коэффициентах кривизны, неньютоновских жидкостях и в нестационарных условиях. Большинство существующих исследований рассматривают течения в изогнутых каналах с коэффициентом кривизны менее 0.1, причем некоторые [26] называют даже 0.2 «произвольным» коэффициентом кривизны. Однако при этом отмечается, что существуют некоторые «эффекты второго порядка» даже при малых кривизнах [27].

Автор [5] использует численные методы и выявляет существование двух решений с разным числом вихрей для $De > 950$. Этот результат подтверждает, что одно и то же число Дина может соответствовать нескольким состояниям. Исследования посредством методов возмущений и численного моделирования, такие как [28], используют и другие параметры: число вращения и величину кручения канала (характеристику спиральности канала). Приведённые примеры указывают на необходимость включения в постановки задач дополнительных параметров для однозначного описания поведения гидродинамических систем.

Применимость числа Дина также ставится под сомнение при рассмотрении неньютоновских жидкостей. Исследование [29] поведения жидкостей Олдройд-Б демонстрирует появление уникальных эффектов, обусловленных упругостью жидкости и временной задержкой. Это свидетельствует, что только одного числа Дина недостаточно для характеристики этих потоков и что свойства жидкости, выходящие за рамки простой вязкости, имеют решающее значение. Таким образом, для полного описания потока в подобного рода задачах требуется включение дополнительных безразмерных групп. Подходы для преодоления ограничений числа Дина можно почерпнуть во всестороннем обзоре литературы [30], посвящённом течениям несжимаемой жидкости в изогнутых каналах и упоминающем большое количество дополнительных параметров. А в [31] обнаружено, что такими дополнительными параметрами могут служить число Россби и отношение массовых сил.

Предлагаемая вниманию читателей работа фокусируется на каналах с большим κ — толстых торах. Такие

геометрии встречаются в биологических приложениях, в охлаждающих структурах ядерных реакторов, в микрофлюидике, причём в последней течения жидкости имеют низкую интенсивность.

Наиболее близкой по духу является работа [32], в которой описываются результаты численного моделирования течений в толстых торах (с параметрами $(\kappa, Re) \in [0.005, 1] \times [500, 10^4]$) и изучается нарушение линейной устойчивости течения (построены нейтральные кривые устойчивости). Однако в ней учитывается только градиентная сила и не рассматриваются течения при малых числах Рейнольдса. На плоскости параметров κ – Re (Рис. 1) эта работа представлена заштрихованным прямоугольником.

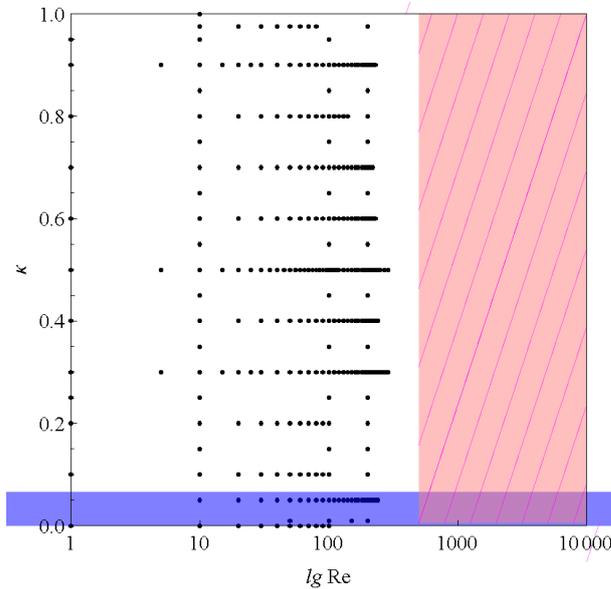


Рис. 1. Область рассмотренных параметров течений; эксперименты из [7] и [33] (находятся в закрашенном прямоугольнике); диапазон параметров режимов из [32] изображён заштрихованным прямоугольником; результатам расчётов из текущей работы отвечают точки

Таким образом, обзор литературы показывает, что течение несжимаемой жидкости в толстом тороидальном канале является востребованной фундаментальной задачей, в которой ещё имеются пробелы. Настоящее исследование является попыткой заполнить некоторые из них, вводя в рассмотрение различные силы и проводя детальное численное исследование течения несжимаемой жидкости в толстом тороидальном канале. Особое внимание уделено тому, как число Дина и кривизна канала влияют на структуру течения и его интегральные характеристики.

2. Постановка задачи и методы решения

Рассматривается стационарное однородное течение линейно-вязкой несжимаемой жидкости через замкнутый тороидальный канал круглого поперечного сечения радиуса R_i (Рис. 2). Вводятся цилиндрические координаты (r, ζ, z) , при этом ось z является внешней осью тора. Течение инициируется и поддерживается массовыми силами \mathbf{F} , не зависящими от ζ , направленными вдоль неё и по-разному распределёнными в поперечном сечении $\zeta = \text{const}$. Центры поперечных сечений находятся на окружности, имеющей радиус R_o . Отношение радиусов даёт основной геометрический параметр задачи κ (1) — кривизну тороидального канала.

Опишем задачу уравнением Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{v}. \tag{2}$$

Приведём его к безразмерной форме аналогично работе [12]. Выберем в качестве характерных величин: радиус сечения R_i , максимальную скорость V потока вдоль прямого цилиндрического канала, градиент давления вдоль канала Q , единицу времени R_i/V , а также используем постоянную плотность жидкости ρ_0 , кинематическую вязкость ν и безразмерные комплексы $Re = VR_i/\nu$ и $G = (QR_i^2)/(\rho_0 \nu V)$. Тогда радиус центральной окружности становится безразмерной величиной ($R_o/R_i = 1/\kappa$), а безразмерная сила принимает вид: $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}R_i/V$.

Особо следует отметить, что в данной работе число Рейнольдса Re является априорным параметром, который определяет величину сил и косвенно — интенсивность основного течения. Вследствие того, что этот параметр не пересчитывается по окончанию моделирования поля скорости, фактическая амплитуда поточной скорости $v_{\zeta \max}$ может оказаться отличной от 1, и появится возможность судить по ней о потерях интенсивности течения вследствие кривизны канала. При необходимости сравнения с фактическими измерениями следует использовать эффективное (апостериорное) число Рейнольдса: $Re_{\text{eff}} = Re \cdot v_{\zeta \max}$.

Для учёта несжимаемости жидкости воспользуемся методом искусственной сжимаемости, представленным в [34] в виде безразмерного уравнения:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \text{div} \mathbf{v},$$

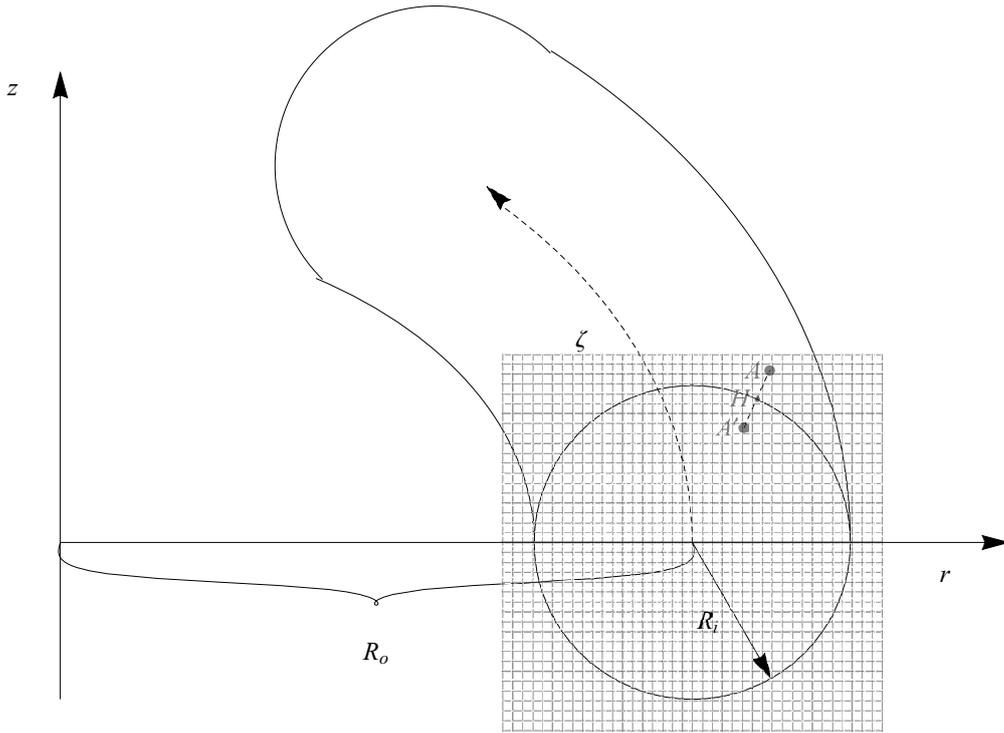


Рис. 2. Схема расчётной области; на переднем плане приведён пример вычислительной сетки в поперечном сечении канала

где по сути $\sqrt{\gamma} = c$ — скорость распространения возмущений давления за счёт сжимаемости среды. В случае нахождения стационарного течения этот параметр является вспомогательным, поэтому выберем его исходя из удобств моделирования: не слишком большим, чтобы не понизить адаптивный шаг по времени, и не слишком маленьким, чтобы эффективно влиять на возникающие нефизические возмущения давления, — $\gamma = 10^{-4}$. В таком случае стационарное решение будет совпадать с решением задачи для несжимаемой жидкости, а нестационарное может отличаться. Существуют и другие варианты получения эволюционной системы уравнений гидродинамики несжимаемой среды, например, двухполюсовый метод [35] и алгоритм SIMPLE [36].

Для двумерного моделирования запишем уравнение Навье–Стокса (2) в цилиндрических координатах (r, ζ, z) , отбросив слагаемые, связанные с зависимостью от координаты ζ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\zeta^2}{r} &= F_r^* - \frac{G}{\text{Re}} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_\zeta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\zeta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\zeta}{\partial z} + \frac{v_r v_\zeta}{r} &= F_\zeta^* - \frac{G}{\text{Re}} \frac{R_o}{r} \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_\zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\zeta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\zeta}{\partial r} - \frac{v_\zeta}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_z^* - \frac{G}{\text{Re}} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Исследуем входящие в (3) три распределённые силы $\mathbf{F}^* = f \mathbf{e}_\zeta$, направленные вдоль канала:

– силу, пропорциональную расстоянию от внешней оси, имеющую природу силы инерции при замедленном вращении с угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\mathbf{F}^* = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} \Rightarrow F_\zeta^* = f^{(i)} \sim r$. Она создаёт течение, возникающее при резком замедлении вращающегося тора как целого, — такая конфигурация использована в лабораторном воспроизведении эффекта магнитного динамо [37];

– силу, однородную в поперечном сечении канала: $\mathbf{F}^* = f^{(u)} \mathbf{e}_\zeta$, где $f^{(u)}$ постоянна. Это простой аналог постоянной массовой силы для задачи Пуазейля;

– силу, обратную расстоянию до внешней оси тора: $\mathbf{F}^* = f^{(p)} \mathbf{e}_\zeta \sim 1/r$. Именно таким оказывается слагаемое градиента давления $(\nabla p)_\zeta = (1/r) \partial p / \partial \zeta$ в уравнении движения (3) в цилиндрической системе координат. Аналогичная сила используется в [32] для сравнения с течением Пуазейля.

В пределе нулевой кривизны все силы вырождаются в массовую силу, однородную в поперечном сечении, совпадающую с градиентом давления в задаче Пуазейля. Модуль силы выберем таким, чтобы в центре поперечного

сечения он оставался постоянным и равным $f|_{r=R_o, z=0} = G/\text{Re}$, тем самым обеспечим единичную максимальную скорость при $\kappa = 0$. Однако, как сказано выше, в криволинейном канале максимальная скорость отклоняется от 1, поэтому используется априорное значение числа Рейнольдса. Тогда для безразмерного случая имеем:

$$f^{(i)} = \frac{G}{\text{Re}} \frac{r}{R_o}, \quad f^{(u)} = \frac{G}{\text{Re}}, \quad f^{(p)} = \frac{G}{\text{Re}} \frac{R_o}{r}.$$

Для повышения устойчивости и, следовательно, ускорения расчётов при больших числах Рейнольдса в (2) иногда добавляется слагаемое $(\nu/3)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$ со второй (объёмной) вязкостью. Этот член гасит нефизические звуковые волны, вызванные искусственной сжимаемостью, но не влияет на стационарное решение.

Для численного моделирования в поперечном сечении (r, z) вводим декартову равномерную сетку (Рис. 2а). Моделируемые компоненты скорости и давление задаём в центрах ячеек. В этой системе координат уравнения записываются проще и не содержат сингулярных точек, однако граница канала не совпадает с линиями сетки. С целью более точного описания границы добавляем необходимые для задания граничных условий фиктивные ячейки вне канала (см. Рис. 2, ячейка с центром в точке A), в которых уравнения (3) не решаем. Количество концентрических слоёв фиктивных ячеек должно быть достаточным для применения конечно-разностных шаблонов производных. Значения моделируемых величин в центрах фиктивных ячеек получаем из точки A' на рисунке, найденной с помощью геометрического отражения A внутрь сечения канала: $AH = A'H$, здесь H — основание нормали, проведённой из точки A к границе канала. Так, в случае условия прилипания используем соотношения: $\mathbf{v}_A = -\mathbf{v}_{A'}$, $p_A = p_{A'}$. Если A' не попадает в центр внутренней ячейки, прибегаем к бикубической интерполяции, что позволяет сохранить итоговый третий порядок разностной аппроксимации по пространству.

В данной работе задача решается с помощью прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS), то есть без добавленных моделей турбулентности. Для получения решения безразмерных уравнений движения Навье–Стокса (3) разработан конечно-разностный численный код на языке C, адаптированный для параллельных вычислительных систем с помощью библиотеки MPI (Message Passing Interface) передачи сообщений между процессорами. Код имеет две версии: трёхмерную и двухмерную. Когда речь идёт о

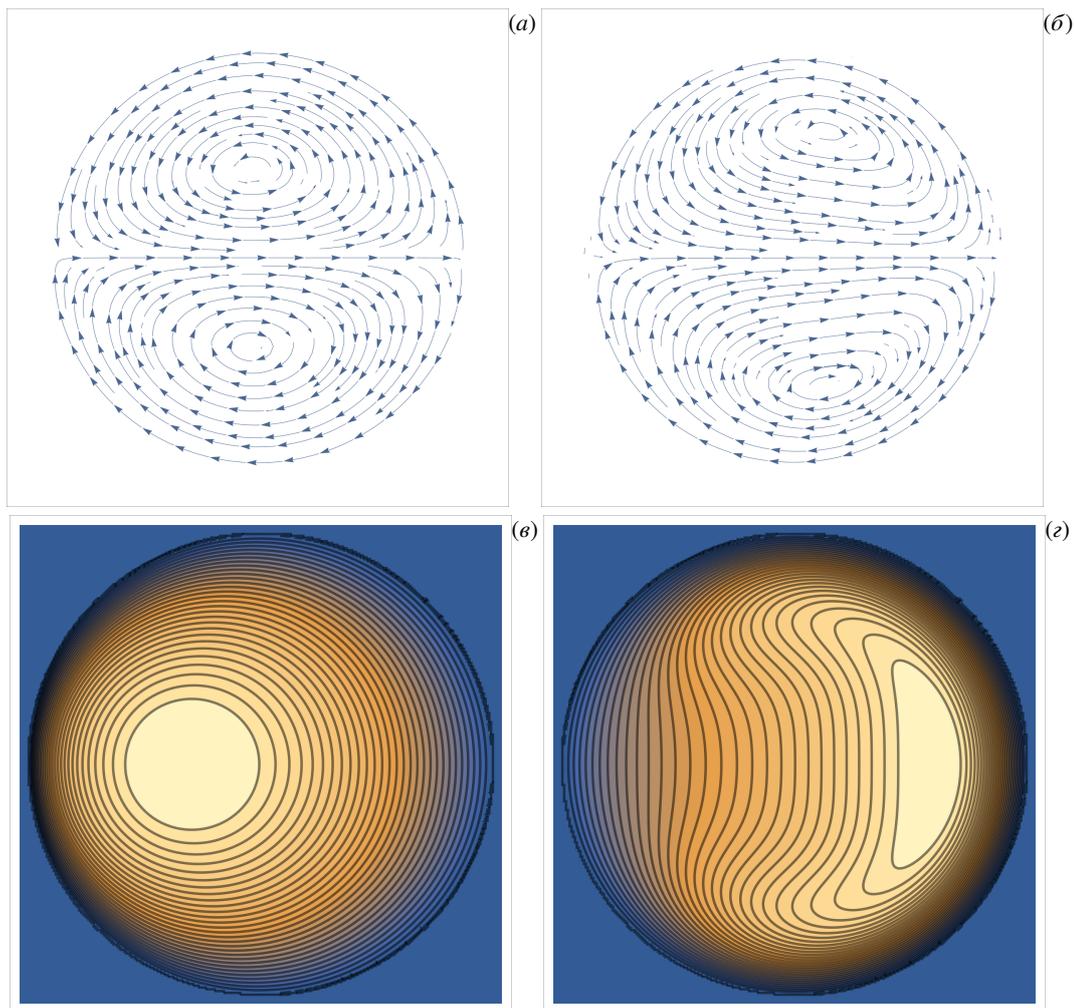


Рис. 3. Изолинии функции тока (a, b) и скорости течения v_z (v, z) при параметрах: $\text{Re} = 1, \kappa = 0.95, F = F^{(p)}$ (a, v); $\text{Re} = 230, \kappa = 0.6, F = F^{(i)}$ (b, z)

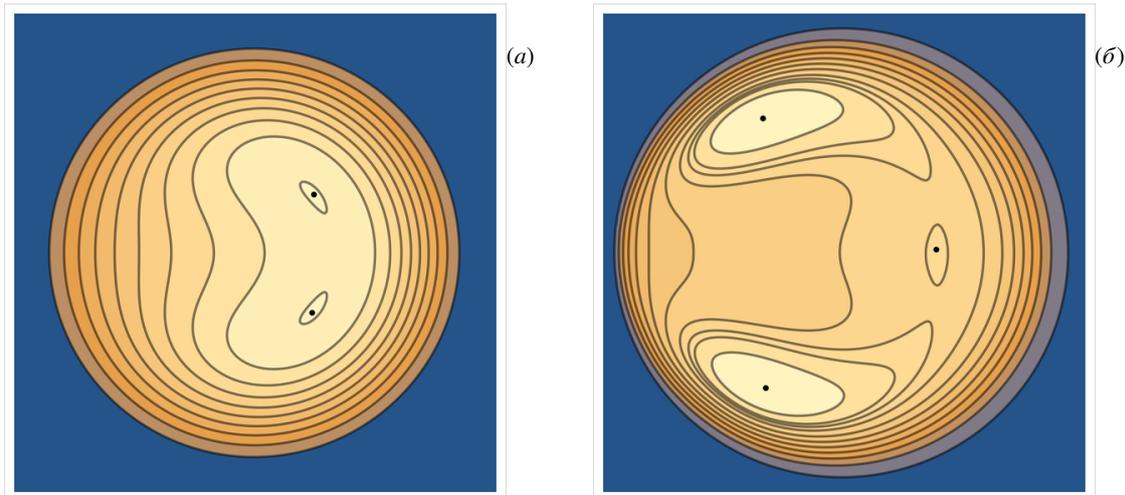


Рис. 4. Изолинии скорости течения для градиентной силы при параметрах: $Re = 70$, $\kappa = 0.5$ (а); $Re = 270$, $\kappa = 0.9$ (б)

трёхмерном моделировании, третью координату ζ полагаем линейной (то есть умножаем на R_o), а сетку вдоль неё — равномерной. Но большинство расчётов проводим по двумерному варианту уравнений (3), в которых принята независимость от ζ . Интегрирование по времени выполняем по явной схеме Рунге–Кутты–Фельберга с коэффициентами Кэша–Карпа 5-го порядка точности с адаптивным шагом по времени, как в работе [12]. Пространственные производные аппроксимируем центральными разностями 6-го порядка точности.

Поточная или продольная компонента скорости v_ζ (она же — тороидальная компонента) характеризует основное течение вдоль канала, а компоненты v_r и v_z — вторичное течение в его поперечном сечении. Динном показано [3], что при ненулевой кривизне канала вторичное течение всегда ненулевое. Хотя расчёты выполняем по компонентам скорости, с помощью дополнительной процедуры интегрирования вычисляем функцию тока вторичного течения: $\partial\psi/\partial r = v_z$, $\partial\psi/\partial z = v_r$. Она предоставляет более удобный способ визуализации вторичного течения. На рисунках 3, 4 приведены изолинии указанных величин для двух режимов течения, построенные по результатам численных расчётов автора данной работы.

Все расчёты проводим, задавая в качестве начального приближения течение Пуазейля, до полного установления всех компонент скорости. При $Re = 1$ характерное время установления составляет пару безразмерных единиц времени или примерно десять процессоро-часов, а при $Re = 300$ — порядка 100 безразмерных единиц или 1200 процессоро-часов.

Получены стационарные решения для чисел Рейнольдса до 300 (до 630 — в случае градиентной силы при $\kappa = 0.3$) и кривизн в диапазоне 0–0.975. Для тестирования точности метода осуществлены расчёты на сетке до 512^2 ячеек. Относительная разность величин всех компонент скорости по сравнению с расчётными на сетке 256^2 составила менее 0.3%, а по сравнению с расчётами на сетке 128^2 — менее 2%. В итоге для моделирования выбрана сетка из 256×256 ячеек. Проверка сходимости максимальной величины поточной скорости к её предельному значению на последовательности сеток с числом ячеек от 10^2 до 200^2 показала третий порядок аппроксимации.

Проведено сравнение установившихся течений с одинаковыми параметрами ($Re = 100$, $\kappa = 0.25$) в трёх- (на сетке $128^2 \times 5$ потребовалось 200 процессоро-часов) и двухмерном (на сетке 256^2 затрачено 25 процессоро-часов) случаях. Расхождение не превысило 1.8%.

3. Результаты

В первую очередь вычисленные характеристики течения сопоставлялись с полученными на основе аналитической аппроксимации в виде ряда по степеням κ [12]. Для сравнения на рисунке 5 показаны результаты расчётов разными методами при $\kappa = 0.5$. Изображены зависимости от числа Рейнольдса трёх основных характеристик течения — максимального значения поточной скорости течения, координат этого максимума и амплитуды функции тока. Результаты расчётов DNS представлены точками, а линиями — те же величины, полученные из рядов по степеням κ , в которых отброшены слагаемые выше 5-го порядка малости (для демонстрации диапазон графиков для аналитики выбран немного больше области сходимости). При $Re > 20$ начинается расхождение, до этого отличие не превышает 3%. В противоположность аналитическому приближению сходимость DNS обуславливается только Re и почти не зависит от κ . Поэтому характеристики течения в торах с максимальной кривизной, недоступные для аналитического определения, можно найти численно.

В работе при анализе течения уделяется внимание нескольким количественным характеристикам. Во-первых, анализируется деформация основной компоненты скорости течения — v_ζ . Подробно изучается r -координата δ_m максимума продольной скорости в поперечном сечении канала, которая показывает степень смещения профиля основной скорости от симметричного положения, соответствующего течению Пуазейля. Когда $\delta_m > 0$, тогда профиль «выталкивается» центробежной силой от внешней оси тора по направлению оси r — естественное

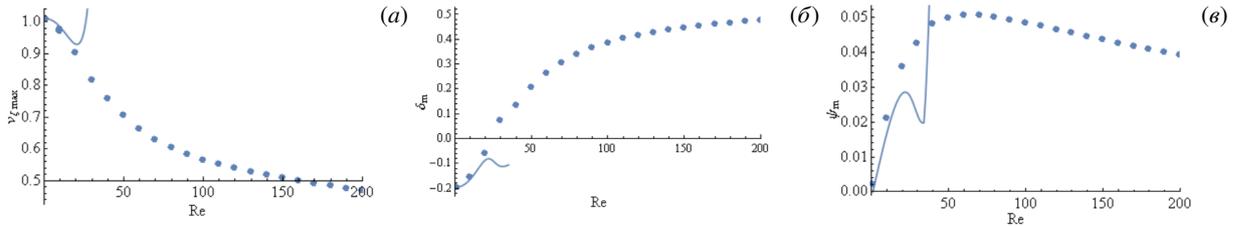


Рис. 5. Зависимости от числа Рейнольдса максимальной скорости (а), координаты максимума скорости (б), амплитуды функции тока (в) для градиентной силы при $\kappa = 0.5$, полученные численно (точки) и аналитически (сплошные линии)

поведение достаточно интенсивного течения в торе с ненулевой кривизной. На рисунках 5б и 6а видно, что при малых числах Рейнольдса (до ~ 40) проявляется противоположный эффект: максимум v_z смещается в направлении внешней оси вплоть до $r \approx R_o - 0.38R_i$. Естественно, что при этом смещение происходит в ту сторону, где больше величина внешней силы \mathbf{F} (Рис. 3). Так, при действии градиентной силы $f^{(p)}$ максимум смещается к внешней оси — влево на рисунке 3в, при силе инерции $f^{(i)}$ максимум сдвигается вправо (Рис. 3г). Под действием однородной силы, когда число Рейнольдса приближается к нулю, смещение также стремится к нулю. С ростом числа Рейнольдса при всех профилях сил и кривизнах максимум v_z смещается вправо, при этом величины сдвига составляют $0.6R_i$ и больше (в случае силы инерции при больших Re и κ). Соответственно зависимость $\delta_m(\kappa)$ при различных числах Рейнольдса ведет себя по-разному — см. рисунок 6. Интересно отметить, что в случае градиентной силы максимум скорости течения достигает крайнего правого положения при $\kappa \approx 0.25$, а затем снова сдвигается влево, например, на рисунке 6б, в.

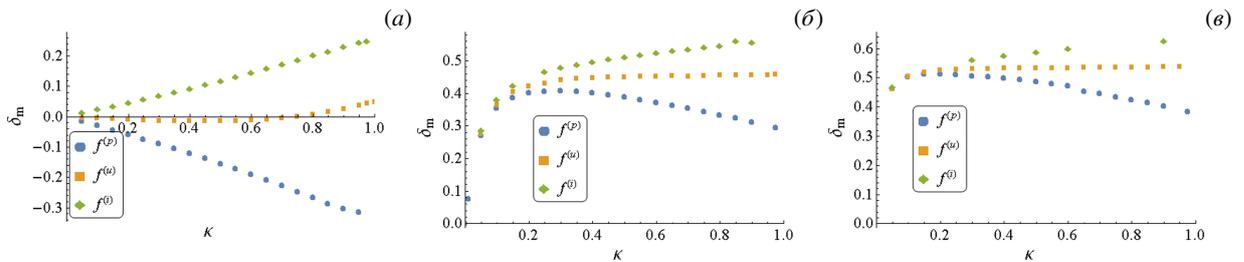


Рис. 6. Координаты максимума поточной скорости как функция кривизны при различных профилях силы (см. легенду) и разных значениях числа Рейнольдса Re : 10 (а), 100 (б), 200 (в)

Во-вторых, рассматривается величина продольной (тороидальной, вдоль канала) скорости течения. По сути, она показывает, какие потери гидравлического напора происходят за счёт кривизны канала. Её максимальное значение ведёт себя на удивление единообразно. Следует напомнить, что амплитуда сил в расчётах выбрана такой, чтобы сила в центре сечения совпадала по величине с силой, дающей единичный максимум в случае нулевой кривизны. Из этого следует, что с ростом как числа Рейнольдса, так и кривизны, максимум поточной скорости несколько снижается (например, при $Re = 190$, $\kappa = 0.9$ на 20%), а его величина практически не зависит от профиля силы. Характерное значение максимума при $Re = 300$ и $\kappa = 0.9$ составляет 0.36 для однородной силы, 0.37 для градиентной и 0.44 для силы инерции, что влечёт за собой уменьшение Re_{eff} почти в 3 раза относительно принятого в данной работе Re . Характерная кривая v_{zmax} , приведённая на рисунке 5б, есть не что иное, как зависимость коэффициента сопротивления (обычно обозначаемого λ), умноженного на $Re/64$, от числа Рейнольдса. Таким образом, кривизна канала создаёт сопротивление течению до трёх раз большее, чем в прямолинейной трубе. Зависимость v_{zmax} от кривизны более пологая и почти линейная, поэтому не приводится.

В-третьих, анализируется интенсивность поперечного поля скорости. Будучи вторичным по своей природе, течение в поперечном сечении канала имеет компоненты скорости, которые могут достигать величины, равной 0.38 от основной компоненты. Приведённое значение характеризует течение под действием градиентной силы, при других силовых профилях отношение максимума поперечной компоненты к тороидальной меньше: при однородной силе — меньше 0.31, при силе инерции — меньше 0.25.

Ещё одной характеристикой интенсивности вторичного течения служит максимальное значение функции тока в поперечном сечении ψ_m . В области малых Re и κ оно ведёт себя ожидаемо монотонно, возрастая от нуля (Рис. 7). Эта зависимость хорошо описывается линейной функцией числа Дина: $k \cdot De$, где $k = 700 \pm 100$. С увеличением кривизны при градиентной силе ψ_m растёт несколько быстрее, чем при других силовых профилях, и опережает их на 20–30%. Интерес представляет существование максимума функции тока в области $Re \approx 65$ для всех профилей сил — абсолютная интенсивность вторичного течения с ростом интенсивности основного течения не растёт монотонно, а, достигнув некоторого значения, вместо ожидаемого выхода на плато, начинает снижаться. Возможно, это связано с уменьшением величины поточной скорости в применённом масштабе обезразмеривания, который выбран исходя из скорости в прямом цилиндре.

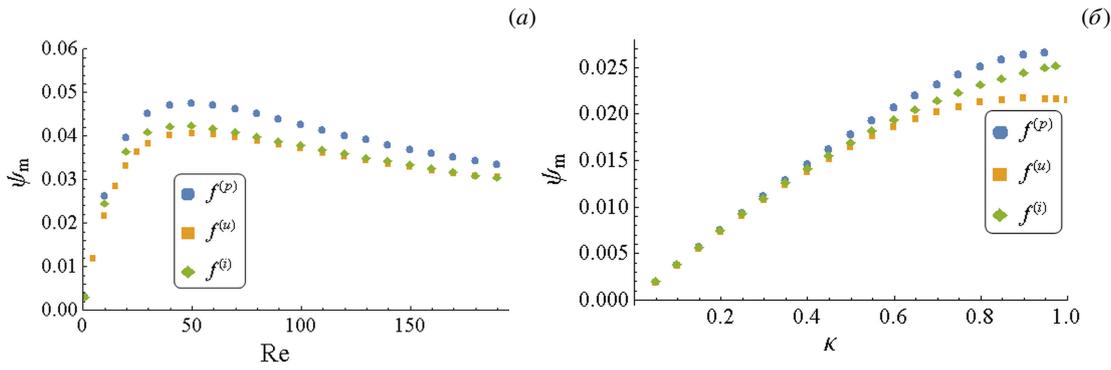


Рис. 7. Максимум функции тока в зависимости от числа Рейнольдса при фиксированном $\kappa = 0.95$ (а) и от кривизны при фиксированном $Re = 10$ (б); в легенде символами показаны результаты, отвечающие разным профилям силы

На рисунке 8 в виде изолиний приведены зависимости от числа Рейнольдса Re и кривизны κ основных интегральных характеристик течения: координаты δ_m максимума поточной скорости v_ζ (1-я строка), самой величины $v_{\zeta\max}$ (2-я строка), а также максимума функции тока ψ_m (3-я строка).

При больших кривизнах образуются специфические паттерны как основного течения, где образуются несколько максимумов, так и вторичного. Обнаружено раздвоение максимума скорости (Рис. 4а), которое характерно только при действии градиентной силы. Оно появляется при Re^* минимум 70 и κ^* , слабо зависящем от числа Рейнольдса, и начинается с $\kappa^* \approx 0.5$ при $Re = 70$, а при большем числе Рейнольдса ($Re = 130$) — с $\kappa^* \approx 0.3$. Если увеличивать кривизну канала и фиксированной постоянной скорости течения, это явление происходит следующим образом: точка, в которой поточная скорость максимальна, уже сдвинутая от центра сечения (положения максимума в цилиндрическом течении) в положительном направлении оси r , разделяется на две точки. Расстояние между ними увеличивается от 0 примерно до половины радиуса R_i , после чего точки начинают перемещаться к внешней оси тора при почти постоянном расстоянии между ними. Поскольку обе точки симметричны относительно центральной плоскости сечения тора ($r-\zeta$), значения поточной скорости в них одинаковы. При экстремальных кривизнах ($\kappa^{**} > 0.9$) и достаточно больших числах Рейнольдса ($Re^{**} > 260$) появляется третий локальный максимум скорости (Рис. 4б) опять на центральной плоскости симметрии. Однако значение скорости в нём не достигает величины глобального максимума. Картины линий тока вторичного течения в случае одного максимума поточной скорости качественно не отличаются от картин при двух или более максимумах, однако немного деформируются (аналогично проявлению действия силы инерции на рисунке 3б).

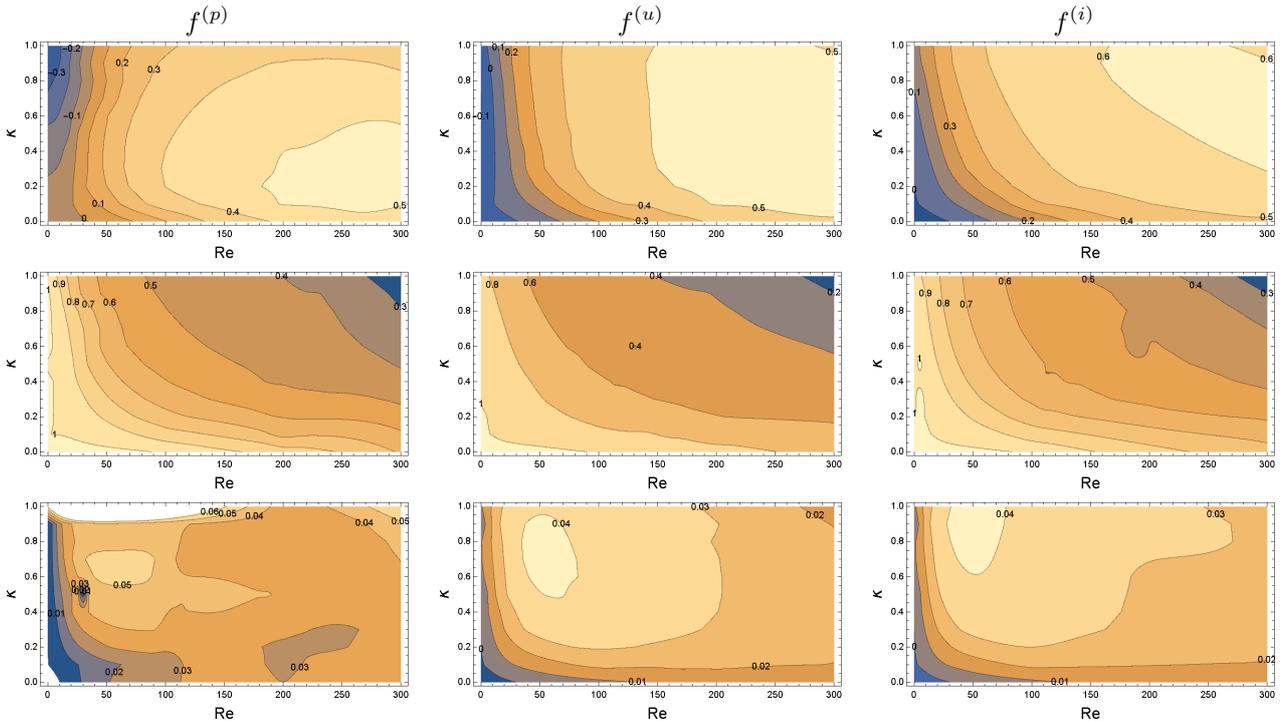


Рис. 8. Изолинии основных характеристик течения (строки) в зависимости от числа Рейнольдса и кривизны при разных профилях силы (столбцы): 1-я строка – сдвиг максимума скорости δ_m , 2-я строка – величина максимума скорости $\max v_\zeta$, 3-я строка – максимум функции тока вторичного течения

Выводы о зависимостях разных характеристик при анализе полной системы уравнений движения удобнее делать, исходя в общем случае из обоих параметров задачи — числа Рейнольдса Re , задающего интенсивность потока по каналу, и кривизны канала κ , характеристики его геометрии. Почти с самого начала истории изучения течения в криволинейном круговом канале делались попытки объединить эти величины в один параметр: $De = Re\sqrt{\kappa}$. Это действительно оправдано и может быть показано теоретически, если брать за основу усечённые уравнения движения, как это сделано в [6] или [28]. Однако отброшенные слагаемые малы только в пределе малой кривизны, поэтому в обсуждаемой здесь задаче следует отдельно проверять, появляется ли зависимость от параметров, не описываемая одним числом Дина. С этой целью выполненные расчёты были размещены на плоскости в координатах $(De-\chi)$, где χ выбирается из списка характеристик течения: $(\delta_m, v_{r\max}, v_{z\max}, \psi_m)$. Решения, каждое из которых получено для определённой пары параметров (Re, κ) , обозначаются точками и сгруппированы по характеристикам течения и профилям силы на рисунке 9. В случае достаточности для описания течения одного De ожидается, что все точки для каждой из характеристик лягут на одну кривую. В действительности это имеет место только у координаты максимума скорости при действии силы с профилем силы инерции. Также удовлетворительно (с разбросом в 10–20%) точки образуют одну кривую у максимума

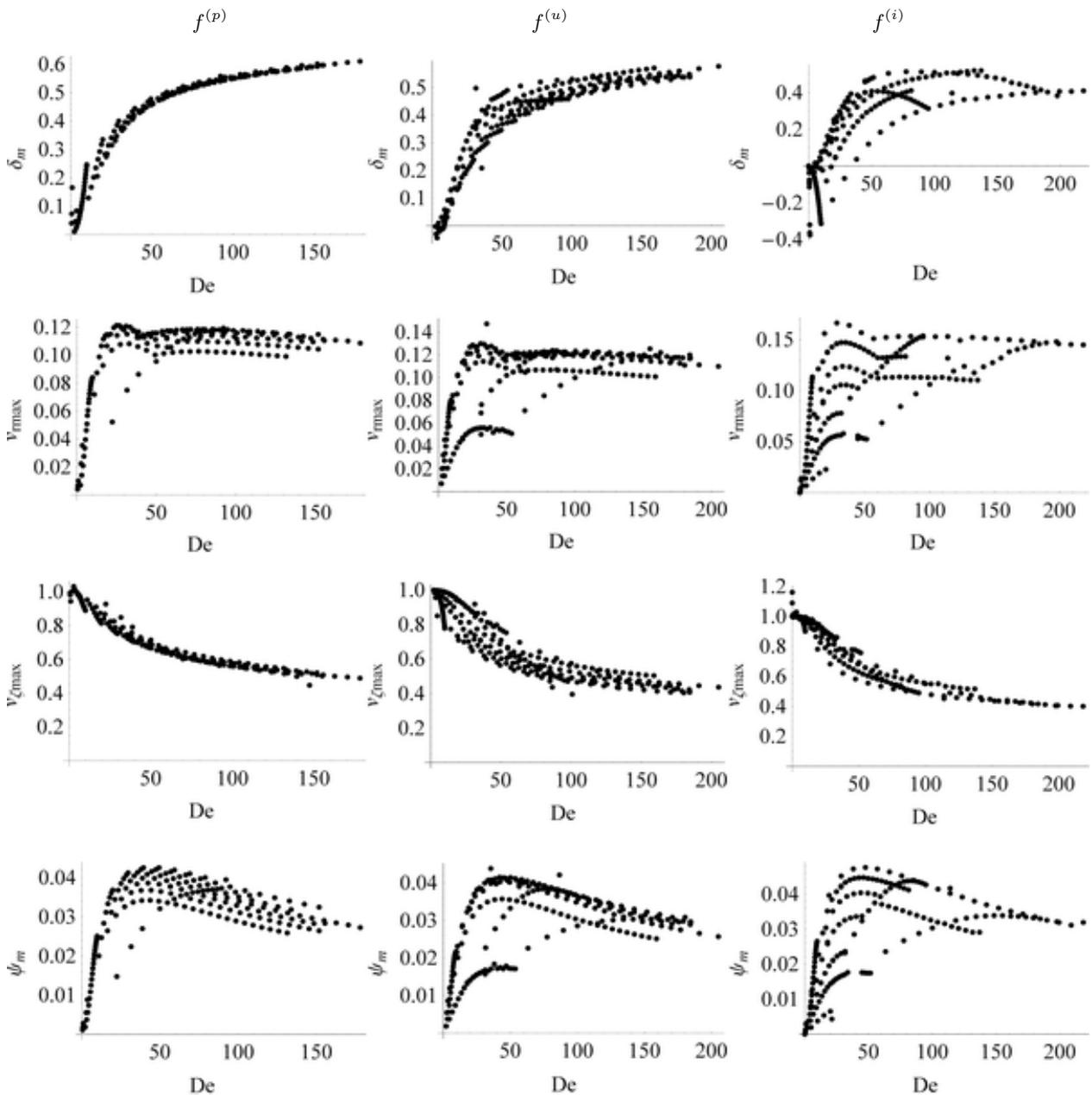


Рис. 9. Основные характеристики течения (строки) как функции числа Дина при разных профилях силы (столбцы) F^* : 1-я строка – сдвиг максимума скорости δ_m , 2-я строка – величина максимума скорости $v_{r\max}$, 3-я строка – величина максимума скорости $v_{z\max}$, 4-я строка – максимум функции тока вторичного течения ψ_m ; каждая точка соответствует расчёту при определённом сочетании числа Рейнольдса и кривизны

скорости при любом профиле силы, причём погрешность возрастает в случае градиентного профиля силы. Все остальные характеристики и профили сил демонстрируют значительный разброс точек-решений (в разы, и даже на порядок) от любой потенциальной кривой, что доказывает несостоятельность числа Дина как единственного параметра для описания течений в области больших кривизн канала.

4. Заключение

Исследовалось стационарное ламинарное течение несжимаемой вязкой жидкости в тороидальном канале круглого поперечного сечения, создаваемое различными распределёнными силами F^* . Рассмотрены течения при числах Рейнольдса от 0 до 350 и в полном диапазоне кривизн от 0 до 1.

Проанализированы три естественные причины течения, приводящие к разным распределениям F^* в сечении тороидального канала. Показано, что в области малых чисел Рейнольдса (вплоть до 40) сила оказывает критическое воздействие на характеристики течения. В частности, числовое значение положения максимума поточной скорости пропорционально кривизне, но коэффициент пропорциональности свой для каждого профиля силы и для каждого числа Рейнольдса.

Выявлено, что смещение максимума скорости течения от центра поперечного сечения канала зависит от числа Рейнольдса, кривизны канала, а также от профиля распределённой силы. Оказалось, что при малых числах Рейнольдса максимум скорости может смещаться к внешней оси тора, в то время как при больших значениях Re — только в направлении от внешней оси. Такое поведение не описывается полностью одним числом Дина. Положение максимума поточной скорости сказывается на распределении напряжений на поверхности канала (чем ближе максимум к стенке, тем больше градиенты скорости у этой её части), что в совокупности со вторичным течением может влиять на вихреобразование, диссипацию и теплоперенос внутри течения, а также на износ стенок канала.

Показано, что при определённой комбинации числа Рейнольдса и кривизны канала скорость потока имеет локальный максимум не в одной, а в двух или даже трёх точках. Появление второго максимума возможно лишь при действии силы с градиентным профилем. Разделение максимума начинается при $Re^* \geq 70$ и значениях κ^* кривизны не менее ≈ 0.3 (κ^* тем меньше, чем больше число Рейнольдса). Дополнительный локальный максимум возникает лишь при крайне высоких значениях кривизны ($\kappa^{**} > 0.9$) и чисел Рейнольдса ($Re^{**} > 260$). При этом картина линий тока в сечении остаётся неизменной и не зависит от числа максимумов.

Найдено, что интенсивность вторичного течения ψ_m имеет максимум при умеренных числах Рейнольдса (от 50 до 100), а кривизна κ_m , обеспечивающая этот максимум, зависит от профиля силы (при силе инерции $\kappa_m \approx 1$, при однородной и градиентной силах $\kappa_m \approx 0.7$).

В заключение можно сказать, что достаточность числа Дина как единственного параметра, способного описать течение, была проверена при трёх профилях сил. Установлено, что при действии силы инерции число Дина вполне однозначно определяет положение максимума скорости в исследованной области параметров, однако перестаёт влиять на интенсивность вторичного течения, начиная с $Re \approx 50$. При однородном профиле силы применение числа Дина в области умеренных значений кривизны имеет смысл только для δ_m до того же $Re \approx 50$, но одного числа Дина недостаточно для предсказания максимума компонент скоростей при всех рассмотренных в работе числах Рейнольдса и кривизнах. Использование же числа Дина для описания течения, вызываемого градиентом давления, вообще нецелесообразно. Таким образом, доказано, что в толстом торе главную роль играет выбор способа генерации течения — будь то вид внешней массовой силы или механическое возбуждение течения.

Обнаружены новые режимы течения и проанализировано поведение основных характеристик течения в исследуемой области параметров. Полученные результаты могут послужить при проектировании и оптимизации систем, использующих криволинейные каналы в разных технологических приложениях.

Автор выражает глубокую благодарность своим коллегам профессору П.Г. Фрику за профессиональную поддержку и профессору Р.А. Степанову за увлечение научным методом и заразительный энтузиазм в области численного моделирования.

Работа выполнена в рамках государственной задачи 122030200191-9. Вычисления выполнены на суперкомпьютере «Уран» в ИММ УрО РАН и на суперкомпьютере «Тритон» в ИМСС УрО РАН.

Литература

1. Разуванов Н.Г., Полянская О.Н., Лучинкин Н.А. Численное и экспериментальное моделирование конвективного теплообмена при течении жидкого металла в кольцевой трубе // Вычислительная механика сплошных сред. 2025. Т. 18, № 1. С. 45–56. DOI: 10.7242/1999-6691/2025.18.1.4
2. Ahmed R., Ali N., Al-Khaled K., Khan S.U., Tlili I. Finite difference simulations for non-isothermal hydromagnetic peristaltic flow of a bio-fluid in a curved channel: Applications to physiological systems // Computer Methods and Programs in Biomedicine. 2020. Vol. 195. 105672. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2020.105672>
3. Dean W.R. Note on the motion of fluid in a curved pipe // Philos. Mag. 1927. Vol. 7. P. 208. DOI: 10.1080/14786440708564324
4. Shalybkov D., Ruediger G. Stability of density-stratified viscous Taylor-Couette flows // Astronomy & Astrophysics. 2005. Vol. 438. P. 411–417. DOI: 10.1051/0004-6361:20042492
5. Dennis S.C.R., Ng M. Dual solutions for steady laminar flow through a curved tube // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1982. Vol. XXXV, no. 3. P. 305–324.

6. *Dean W.R.* Fluid flow in a curved channel // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1928. Vol. 121. P. 402–420. DOI: 10.1098/RSPA.1928.0205
7. *White C.M.* Streamline Flow through Curved Pipes // Royal Society of London Proceedings Series A. 1929. Vol. 123. P. 645–663. DOI: 10.1098/RSPA.1929.0089
8. *McConalogue D.J., Srivastava R.S.* Motion of a Fluid in a Curved Tube // Royal Society of London Proceedings Series A. 1968. Vol. 307. P. 37–53. DOI: 10.1098/rspa.1968.0173
9. *Collins W.M., Dennis S.C.R.* The steady motion of a viscous fluid in a curved tube // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1975. Vol. 2, no. 28. P. 133–156. DOI: 10.1093/qjmath/28.2.133
10. *Dennis S.C.R.* Calculation of the steady flow through a curved tube using a new finite-difference method // Journal of Fluid Mechanics. 1980. Vol. 99. P. 449–467. DOI: 10.1017/S0022112080000705
11. *Zhang J., Li N., Zhang B.* Flow in a rotating curved circular pipe // Physical Review E. 2003. Vol. 67, no. 5. 056303. DOI: 10.1103/PhysRevE.67.056303
12. *Chupin A., Stepanov R.* Full perturbation solution for the flow in a rotating torus // Physical Review E. 2008. Vol. 77, no. 5. 057301. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.057301
13. *Dennis S.C.R., Riley N.* On the Fully Developed Flow in a Curved Pipe at Large Dean Number // Royal Society of London Proceedings Series A. 1991. Vol. 434. P. 473–478. DOI: 10.1098/rspa.1991.0107
14. *Smith F.T.* Steady Motion Within a Curved Pipe // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1976. Vol. 347, no. 1650. P. 345–370. DOI: 10.1098/rspa.1976.0005
15. *Ito H.* Laminar flow in curved pipes // Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. 1969. Vol. 49. P. 653–663. DOI: 10.1002/zamm.19690491104
16. *Ito H., Motai T.* Secondary flow in a rotating curved pipe // The Reports of the Institute of High Speed Mechanics, Tôhoku University. 1974. Vol. 29. P. 33–57.
17. *Patankar S.V., Pratap V.S., Spalding D.B.* Prediction of Laminar Flow and Heat Transfer in Helically Coiled Pipes // Journal of Fluid Mechanics. 1974. Vol. 62. P. 539–551. DOI: 10.1017/S0022112074000796
18. *Aider A.A., Skali S., Brancher J.P., Maurice G.* Flow regimes in a Taylor-Dean system with a superimposed Poiseuille flow // 13th International Couette Taylor Workshop "Nonlinear Dynamics in Fluids". Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona, Spain, 2003
19. *Gontsov N.G., Marinova O.A., Tananaev A.V.* Turbulent flow around a bend in a circular pipe // Power Technology and Engineering. 1985. Vol. 18, no. 12. P. 596–602. DOI: 10.1007/BF01440641
20. *Kühnen J., Holzner M., Hof B., Kuhlmann H.C.* Experimental investigation of transitional flow in a toroidal pipe // Journal of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 738. P. 463–491. DOI: 10.1017/jfm.2013.603
21. *Noskov V., Stepanov R., Denisov S., Frick P., G. V., Plihon N., Pinton J.-F.* Dynamics of a turbulent spin-down flow inside a torus // Physics of Fluids. 2009. Vol. 21, no. 4. 045108. DOI: 10.1063/1.3123529
22. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and transition in shear flows. Springer, 2001. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.016307
23. *Selmi M., Nandakumar K.* Bifurcation study of flow through rotating curved ducts // Physics of Fluids. 1999. Vol. 11. P. 2030–2043. DOI: 10.1063/1.870066
24. *Piazza I.D., Ciofalo M.* Transition to turbulence in toroidal pipes // Journal of Fluid Mechanics. 2011. Vol. 687. P. 72–117. DOI: 10.1017/jfm.2011.321
25. *Clarke R.J., Denier J.P.* The decay of suddenly blocked flow in a curved pipe // Journal of Engineering Mathematics. 2008. Vol. 63, no. 2–4. P. 241–257. DOI: 10.1007/s10665-007-9210-2
26. *Soh W.Y., Berger S.A.* Fully developed flow in a curved pipe of arbitrary curvature ratio // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1987. Vol. 7, no. 7. P. 733–755. DOI: 10.1002/fld.1650070705
27. *Austin L.R., Seader J.D.* Fully developed viscous flow in coiled circular Pipes // AIChE. 1973. Vol. 16, no. 6. P. 1010–1015. DOI: 10.1002/aic.690190113
28. *Zhang J., Zhang B.* Theoretical and Numerical Investigation of Flow Transition in Rotating Curved Annular Pipes // Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2002. Vol. 16. P. 99–114. DOI: 10.1007/s00162-002-0075-8
29. *Chen Y., Chen H., Zhang J., Zhang B.* Viscoelastic flow in rotating curved pipes // Physics of Fluids. 2006. Vol. 18. 083103. DOI: 10.1063/1.2336454
30. *Ito H.* Flow in Curved Pipes // JSME international journal : bulletin of the JSME. 1987. Vol. 30, no. 262. P. 543–552. DOI: 10.1299/j sme1987.30.543
31. *Ishigaki H.* Laminar flow in rotating curved pipes // Journal of Fluid Mechanics. 1996. Vol. 329. P. 373–388. DOI: 10.1017/S0022112096008956
32. *Canton J., Schlatter P., Örlü R.* Modal instability of the flow in a toroidal pipe // Journal of Fluid Mechanics. 2016. Vol. 792. P. 894–909. DOI: 10.1017/jfm.2016.104
33. *Eustice J.* Flow of Water in Curved Pipes // Royal Society of London Proceedings Series A. 1910. Vol. 84. P. 107–118. DOI: 10.1098/rspa.1910.0061
34. *Chorin A.J.* A numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems // Journal of Computational Physics. 1967. Vol. 2, no. 1. P. 12–26. DOI: 10.1016/0021-9991(67)90037-X
35. *Тарунин Е.И.* Двухполевой метод решения задач гидродинамики вязкой жидкости. Пермь: ПГУ, 1985. 87 с.
36. *Patankar S.V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Taylor & Francis., 1980. 197 p.

37. Frick P., Noskov V., Denisov S., Khripchenko S., Sokoloff D., Stepanov R., Sukhanovsky A. Non-stationary screw flow in a toroidal channel: way to a laboratory dynamo experiment // Magnetohydrodynamics. 2002. Vol. 38, no. 1/2. P. 136–155. DOI: 10.22364/mhd.38.1-2.12

Сведения об авторах:

Чупин Антон Викторович, кфмн, мнс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: chupin@icmm.ru; ORCID: 0000-0001-8957-6126

Research article

Fluid flow in a thick torus driven by distributed forces

A.V. Chupin

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

In this article, a laminar, steady-state flow of incompressible fluid in a curvilinear channel with a circular cross-section is studied numerically. The influence of the bulk force on the stationary flow is analyzed through the consideration of its three main natural causes: a pressure gradient in the channel, a uniform action of external forces, and an analog of the force generated by the uniform deceleration of a rotating channel (inertia force). The key parameter used to describe flows in a toroidal channel is the Dean number, which takes into account the influence of the channel curvature and flow intensity. Direct numerical simulations at all possible channel curvatures and Reynolds numbers up to 300 showed that to describe all features of flow in thick toroidal channels, it is insufficient to use the Dean number alone. It has been found that the position of the longitudinal velocity maximum depends on the Reynolds number and curvature, and the type of force. At low values of the Reynolds number, that is, less than 40, the maximum may shift towards the outer axis of the torus, whereas at high values, it shifts only away from it. The simulation revealed the splitting of the velocity maximum, as well as the occurrence of a third local maximum; these effects arise only under a gradient force and at relatively high curvatures. It has been shown that the Dean number is insufficient to fully describe the flow at high curvatures. For the inertial force, the Dean number unambiguously determines the position of the velocity maximum but fails to describe the intensity of the secondary flow at the Reynolds numbers of 50 and higher. At a constant force, the Dean number is applicable only up to certain values of the Reynolds number, while for a pressure gradient, the use of the Dean number is absolutely meaningless. It has been established that the intensity of the secondary flow reaches a maximum at the Reynolds numbers from 50 to 100 (with nondimensionalization performed in this study). In this case the curvature responsible for the occurrence of this maximum depends on the type of force. The obtained results are important for designing systems involving curved channels (e.g., heat exchangers, chemical reactors).

Keywords: curved pipe flow, curved boundary, Navier–Stokes equations, nonlinear dynamics, Dean number, DNS (direct numerical simulation), artificial compressibility

Received: 25.11.2025 / *Published online:* 25.02.2026

Acknowledgements

The work was implemented within the framework of the State program 122030200191-9. Calculations were performed on the supercomputer “Uran” at the Institute of Mechanics and Mathematics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences and on the supercomputer “Triton” at the Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences.

References

1. Razuvanov N.G., Polyanskaya O.N., Luchinkin N.A. Numerical and experimental simulation of convective heat transfer in a liquid metal flow in an annular pipe. *Computational Continuum Mechanics*. 2025. Vol. 18, no. 1. P. 45–56. DOI: 10.7242/1999-6691/2025.18.1.4
2. Ahmed R., Ali N., Al-Khaled K., Khan S.U., Tlili I. Finite difference simulations for non-isothermal hydromagnetic peristaltic flow of a bio-fluid in a curved channel: Applications to physiological systems. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2020. Vol. 195. 105672. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2020.105672>
3. Dean W.R. Note on the motion of fluid in a curved pipe. *Philos. Mag.* 1927. Vol. 7. P. 208. DOI: 10.1080/14786440708564324
4. Shalybkov D., Ruediger G. Stability of density-stratified viscous Taylor-Couette flows. *Astronomy & Astrophysics*. 2005. Vol. 438. P. 411–417. DOI: 10.1051/0004-6361:20042492
5. Dennis S.C.R., Ng M. Dual solutions for steady laminar flow through a curved tube. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1982. Vol. XXXV, no. 3. P. 305–324.
6. Dean W.R. Fluid flow in a curved channel. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*. 1928. Vol. 121. P. 402–420. DOI: 10.1098/RSPA.1928.0205
7. White C.M. Streamline Flow through Curved Pipes. *Royal Society of London Proceedings Series A*. 1929. Vol. 123. P. 645–663. DOI: 10.1098/RSPA.1929.0089

8. *McConalogue D.J., Srivastava R.S.* Motion of a Fluid in a Curved Tube. Royal Society of London Proceedings Series A. 1968. Vol. 307. P. 37–53. DOI: 10.1098/rspa.1968.0173
9. *Collins W.M., Dennis S.C.R.* The steady motion of a viscous fluid in a curved tube. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1975. Vol. 2, no. 28. P. 133–156. DOI: 10.1093/qjmam/28.2.133
10. *Dennis S.C.R.* Calculation of the steady flow through a curved tube using a new finite-difference method. Journal of Fluid Mechanics. 1980. Vol. 99. P. 449–467. DOI: 10.1017/S0022112080000705
11. *Zhang J., Li N., Zhang B.* Flow in a rotating curved circular pipe. Physical Review E. 2003. Vol. 67, no. 5. 056303. DOI: 10.1103/PhysRevE.67.056303
12. *Chupin A., Stepanov R.* Full perturbation solution for the flow in a rotating torus. Physical Review E. 2008. Vol. 77, no. 5. 057301. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.057301
13. *Dennis S.C.R., Riley N.* On the Fully Developed Flow in a Curved Pipe at Large Dean Number. Royal Society of London Proceedings Series A. 1991. Vol. 434. P. 473–478. DOI: 10.1098/rspa.1991.0107
14. *Smith F.T.* Steady Motion Within a Curved Pipe. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1976. Vol. 347, no. 1650. P. 345–370. DOI: 10.1098/rspa.1976.0005
15. *Ito H.* Laminar flow in curved pipes. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. 1969. Vol. 49. P. 653–663. DOI: 10.1002/zamm.19690491104
16. *Ito H., Motai T.* Secondary flow in a rotating curved pipe. The Reports of the Institute of High Speed Mechanics, Tôhoku University. 1974. Vol. 29. P. 33–57.
17. *Patankar S.V., Pratap V.S., Spalding D.B.* Prediction of Laminar Flow and Heat Transfer in Helically Coiled Pipes. Journal of Fluid Mechanics. 1974. Vol. 62. P. 539–551. DOI: 10.1017/S0022112074000796
18. *Aider A.A., Skali S., Brancher J.P., Maurice G.* Flow regimes in a Taylor-Dean system with a superimposed Poiseuille flow. 13th International Couette Taylor Workshop "Nonlinear Dynamics in Fluids". Universitat Politècnica de Catalunya. 2003
19. *Gontsov N.G., Marinova O.A., Tananaev A.V.* Turbulent flow around a bend in a circular pipe. Power Technology and Engineering. 1985. Vol. 18, no. 12. P. 596–602. DOI: 10.1007/BF01440641
20. *Kühnen J., Holzner M., Hof B., Kuhlmann H.C.* Experimental investigation of transitional flow in a toroidal pipe. Journal of Fluid Mechanics. 2014. Vol. 738. P. 463–491. DOI: 10.1017/jfm.2013.603
21. *Noskov V., Stepanov R., Denisov S., Frick P., G. V., Plihon N., Pinton J.-F.* Dynamics of a turbulent spin-down flow inside a torus. Physics of Fluids. 2009. Vol. 21, no. 4. 045108. DOI: 10.1063/1.3123529
22. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and transition in shear flows. Springer, 2001. DOI: 10.1103/PhysRevE.66.016307
23. *Selmi M., Nandakumar K.* Bifurcation study of flow through rotating curved ducts. Physics of Fluids. 1999. Vol. 11. P. 2030–2043. DOI: 10.1063/1.870066
24. *Piazza I.D., Ciofalo M.* Transition to turbulence in toroidal pipes. Journal of Fluid Mechanics. 2011. Vol. 687. P. 72–117. DOI: 10.1017/jfm.2011.321
25. *Clarke R.J., Denier J.P.* The decay of suddenly blocked flow in a curved pipe. Journal of Engineering Mathematics. 2008. Vol. 63, no. 2–4. P. 241–257. DOI: 10.1007/s10665-007-9210-2
26. *Soh W.Y., Berger S.A.* Fully developed flow in a curved pipe of arbitrary curvature ratio. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1987. Vol. 7, no. 7. P. 733–755. DOI: 10.1002/flid.1650070705
27. *Austin L.R., Seader J.D.* Fully developed viscous flow in coiled circular Pipes. AIChE. 1973. Vol. 16, no. 6. P. 1010–1015. DOI: 10.1002/aic.690190113
28. *Zhang J., Zhang B.* Theoretical and Numerical Investigation of Flow Transition in Rotating Curved Annular Pipes. Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 2002. Vol. 16. P. 99–114. DOI: 10.1007/s00162-002-0075-8
29. *Chen Y., Chen H., Zhang J., Zhang B.* Viscoelastic flow in rotating curved pipes. Physics of Fluids. 2006. Vol. 18. 083103. DOI: 10.1063/1.2336454
30. *Ito H.* Flow in Curved Pipes. JSME international journal : bulletin of the JSME. 1987. Vol. 30, no. 262. P. 543–552. DOI: 10.1299/j sme1987.30.543
31. *Ishigaki H.* Laminar flow in rotating curved pipes. Journal of Fluid Mechanics. 1996. Vol. 329. P. 373–388. DOI: 10.1017/S0022112096008956
32. *Canton J., Schlatter P., Örlü R.* Modal instability of the flow in a toroidal pipe. Journal of Fluid Mechanics. 2016. Vol. 792. P. 894–909. DOI: 10.1017/jfm.2016.104
33. *Eustice J.* Flow of Water in Curved Pipes. Royal Society of London Proceedings Series A. 1910. Vol. 84. P. 107–118. DOI: 10.1098/rspa.1910.0061
34. *Chorin A.J.* A numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. Journal of Computational Physics. 1967. Vol. 2, no. 1. P. 12–26. DOI: 10.1016/0021-9991(67)90037-X
35. *Tarunin E.L.* Dvukhpolevoy metod resheniya zadach gidrodinamiki vyazkoy zhidkosti. Perm: Perm State University, 1985. 87 p.
36. *Patankar S.V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Taylor & Francis., 1980. 197 p.
37. *Frick P., Noskov V., Denisov S., Khripchenko S., Sokoloff D., Stepanov R., Sukhanovsky A.* Non-stationary screw flow in a toroidal channel: way to a laboratory dynamo experiment. Magnetohydrodynamics. 2002. Vol. 38, no. 1/2. P. 136–155. DOI: 10.22364/mhd.38.1-2.12