

Научная статья

## Влияние вязкости на нелинейный резонанс вынужденных колебаний пузыря в вибрирующей жидкости

В.В. Коновалов, А.О. Иванцов

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Представлены результаты исследования динамики газового пузыря в колеблющейся вязкой жидкости. Основное внимание уделено случаю, когда частота внешних вибраций близка к половине собственной частоты квадрупольной моды свободных колебаний системы, что соответствует условию ранее обнаруженного в невязком приближении нелинейного резонанса. Для учета диссипации использована модель вязкого потенциального течения, позволившая получить аналитические выражения для основных характеристик процесса. Решение задачи разлагалось в асимптотический ряд по малому параметру – отношению амплитуды вибраций к радиусу пузыря. В первом порядке теории показано, что пузырь совершает колебания как целое, не деформируясь. Установлена зависимость амплитуды и фазового запаздывания этих колебаний от вязкости. Во втором порядке теории исследован нелинейный резонанс, связанный с возбуждением квадрупольной моды деформации. Показано, что вязкость не смещает резонансную частоту, которая остается равной половине собственной частоты квадрупольной моды, как и в идеальной жидкости, но существенно ограничивает амплитуду резонансных колебаний. Проведено численное моделирование трехмерных осесимметричных колебаний пузыря при внешних вибрациях резонансной частоты. Показано хорошее согласие численных и аналитических данных. Полученные результаты важны для понимания и управления процессами в различных приложениях, таких как акустическая флотация, химические реакторы и медицинская ультразвуковая диагностика.

*Ключевые слова:* вязкое потенциальное течение, нелинейный резонанс, моделирование колебаний пузыря в вязкой жидкости

*Получение:* 06.11.2025 / *Публикация онлайн:* 25.02.2026

УДК 532.5; 534.1; 621.591

### 1. Введение

Вибрации являются эффективным и широко применяемым механизмом, позволяющим контролировать поведение многофазных сред, что представляется чрезвычайно важным для множества технических приложений — от акустической кавитации и медицины до химических реакторов и энергетики. Также следует упомянуть процесс флотации, который активно используется на практике для обогащения руд в горнодобывающей отрасли, для очистки бытовых и промышленных сточных вод. Возможность интенсификации процесса флотации при помощи ультразвука экспериментально показана в работах по акустической флотации [1] и сулит значительные экономические выгоды, а также снижение экологической нагрузки на окружающую среду за счет повышения эффективности разделения фаз. Однако, как здесь, так и в других приложениях, важно понимать поведение систем с границей раздела при учете реальных эффектов, таких как вязкость и нелинейность.

Примером классической гидродинамической системы с границей раздела служит взвешенный в жидкости паровой либо газовый пузырь. В химической и пищевой промышленности, медицине и других, также представляет интерес ситуация, когда вместо легкого сжимаемого пузыря берется жидкая капля с плотностью, сравнимой с плотностью окружающей ее среды [2]. В земных условиях определяющую роль играют силы плавучести, но исследование их влияния остается за рамками данной работы.

В условиях микрогравитации или когда силы плавучести пренебрежимо малы, пузырь либо капля под действием капиллярных сил принимают равновесную сферическую форму, с возмущениями которой связан спектр собственных частот системы [3]. Влияние вязкости на коэффициент затухания и сдвиг собственной частоты подробно описан в [4] для различных соотношений плотностей внутренней и наружной сред. Известно, что между границами раздела типа жидкость–жидкость и жидкость–газ существует качественное различие. В первом случае усиление вязкой диссипации в пограничных слоях по обе стороны от границы раздела приводит к тому, что в оценку для коэффициента затухания входят квадратные корни из кинематических вязкостей обеих сред, в отличие от представленной в [3] линейной зависимости для свободной поверхности одной единственной жидкости. При этом вклад легкой газа остается корневым и может составлять заметную долю от линейного по вязкости вклада тяжелой жидкости, что важно для оценки точности метода «левитирующей» капли [5].

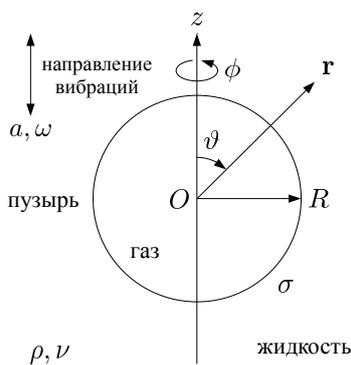
Влияние вибраций на погружение или всплытие газовых пузырей в равномерно колеблющейся несжимаемой жидкости теоретически и экспериментально изучено в [6]. В выведенной аналитической формуле для средней скорости газовых пузырей существенно влияют глубина погружения и параметры вибрации. В [7] показано, что пузыри погружаются вследствие быстрых изменений их объема, вызванных колебаниями давления в жидкости, что приводит к значительным изменениям средней присоединенной массы. Влияние вибраций на поведение пузыря вблизи твердой стенки исследовались в пределе высоких частот, когда вязкостью можно пренебрегать [8], а также при конечной вязкости жидкости [9, 10].

Высокочастотные вибрации проявляют себя не только как прямое силовое воздействие, но и в виде средней вибрационной силы, которая может существенным образом изменять форму межфазных поверхностей [11–13] либо влиять на движение включений, взвешенных в жидкости, например, за счет увеличения области их захвата пузырьками газа в процессе флотации [14]. Вибрационное воздействие, частота которого сравнима

с собственными частотами системы, служит причиной возникновения параметрического резонанса [15, 16]. Такая неустойчивость может приводить к интенсивным деформациям и даже разрушению границ раздела, что также крайне важно для управления процессом флотации. Порог возбуждения параметрической неустойчивости связан с коэффициентом затухания, величина которого, в том числе, зависит от наличия поверхностно-активных веществ [17, 18], играющих роль дополнительного параметра контроля. Современные исследования также уделяют значительное внимание нелинейным эффектам при конечных амплитудах колебаний, что отражено в работах по нелинейной динамике пузырей и капель [19, 20].

Целью настоящей работы является теоретическое и численное исследование динамики пузыря в колеблющейся вязкой жидкости при частоте вибраций, близкой к половине собственной частоты квадрупольной моды свободных колебаний системы. Этот частотный режим отвечает ранее описанному в невязком приближении нелинейному резонансу [8, 21]. В [22] для пузыря цилиндрической формы проведено сравнение теоретических предсказаний величины амплитуды вынужденной трансляционной моды с результатами экспериментов. Существование нелинейного резонанса натурно подтверждено в [22]. В настоящей работе основной фокус смещен на анализ влияния вязкости на этот — нелинейный — резонанс, его амплитуду и фазовые характеристики, а также на сжатие осредненной формы пузыря под действием вибраций. Это представляет собой естественное развитие предыдущих исследований и важный шаг на пути к более адекватному описанию поведения реальных систем. Для достижения этого используется как прямое численное моделирование, так и аналитический комбинированный подход, основанный на концепции вязкого потенциального течения [23]. Дополнительно применяется феноменологический подход — результаты в приближении вязкого потенциального течения сравниваются с точными решениями для вязкой жидкости, что дополнительно дает учет эффектов, связанных с коррекцией давления [24].

## 2. Постановка задачи



**Рис. 1.** Схема рассматриваемой области и система координат

Рассмотрим постановку задачи о резонансных колебаниях пузыря в вибрационном поле (см. Рис. 1), подобную той, что дана в [15, 16, 21]. Пусть в сосуде, заполненном жидкостью плотностью  $\rho$  с коэффициентом кинематической вязкости  $\nu$ , во взвешенном состоянии находится пузырь газа пренебрежимо малой плотности. В отсутствие силы тяжести и прочих внешних возмущений пузырь под действием сил поверхностного натяжения с коэффициентом  $\sigma$  принимает форму шара некоторого радиуса  $R$ . Предполагаем следующее: размеры сосуда много больше размеров пузыря; сосуд испытывает поступательные гармонические вибрации линейной поляризации с частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$ ; система отсчета связана с сосудом. При этом возникают силы инерции, которые неоднородны из-за разности плотностей газа и жидкости, что приводит к возникновению движения в средах. Система допускает собственные колебания, то есть при некотором соотношении между внешней частотой вибрации и собственными частотами возможно развитие резонансных явлений.

Представим некоторые ограничения на параметры вибрационного поля. Пусть частота вибрации  $\omega$  достаточно мала, так что соответствующая ей длина акустической волны велика по сравнению с размерами сосуда, а величина  $a\omega$ , определяющая скорости сред, мала по сравнению со скоростью звука в жидкости. При данных условиях жидкость является несжимаемой. Содержащий среды замкнутый сосуд имеет жесткие стенки, а значит, в силу сохранения общего объема сред и объема несжимаемой жидкости, объем газа в одиночном пузыре остается постоянным. Считаем, что толщина скин-слоя в жидкости мала по сравнению с радиусом пузыря, то есть вязкая диссипация за период колебаний невелика. Этого можно достичь, выбрав достаточно высокую частоту вибраций  $\omega \gg 2\nu/R^2$ . Предположим также, что амплитуда вибраций  $a$  мала по сравнению с размером пузыря.

Приближение вязкого потенциального течения [23] основано на том, что течение в объеме маловязкой жидкости практически потенциально и хорошо описывается потенциалом скорости, как и в случае идеальной жидкости. Вязкость учитываем лишь через нормальные напряжения на свободной поверхности, где завихренность также невелика. Это позволяет корректно моделировать эффекты слабой диссипации.

В соответствии с концепцией вязкого потенциального течения (Viscous Potential Flow, VPF) потенциал скорости  $\psi$  удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\psi = 0. \quad (1)$$

Решаем задачу в системе отсчета, связанной с сосудом. Жидкость вдали от пузыря, при  $r \rightarrow \infty$ , повторяет движение сосуда:

$$\nabla\psi \rightarrow 0, \quad (2)$$

где  $r$  — длина радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , проведенного из центра инерции системы.

На задаваемой уравнением  $G(\mathbf{r}, t) = 0$  поверхности пузыря, которая сама подлежит определению, выполняются условия:

– кинематическое

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \nabla\psi \cdot \nabla G = 0; \tag{3}$$

– баланса нормальных напряжений с учетом вклада сил инерции [16]

$$\rho \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{(\nabla\psi)^2}{2} + a\omega^2 z \cos(\omega t) \right\} + 2\rho\nu \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\nabla\psi \cdot \mathbf{n}) = \sigma \operatorname{div}\mathbf{n} + c(t). \tag{4}$$

Здесь  $t$  — время;  $z$  — координата вдоль направления оси вибраций;  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к границе раздела. Величина  $c(t)$  в правой части условия (4), возникающая как постоянная интегрирования, вообще говоря, есть функция времени, но не координат, и также должна находиться при решении задачи. В соответствии с приближением вязкого потенциального течения [23] в случае, когда коррекция давления не производится, вязкость жидкости входит лишь в граничное условие (4).

Перейдем в сформулированной задаче к безразмерным переменным, выбрав в качестве единицы длины равновесный радиус пузыря  $R$ , времени — величину, обратную частоте вибраций  $\omega^{-1}$ , потенциала скорости —  $\omega R^2$ . Уравнение (1) и граничные условия (2) и (3) в безразмерной форме сохраняют прежний вид, а условие (4) записывается как

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \left(\frac{\nabla\psi}{2}\right)^2 + 2\delta \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}(\nabla\psi \cdot \mathbf{n}) + \varepsilon z \cos t = \frac{1}{W} \operatorname{div}\mathbf{n} + c(t), \tag{5}$$

где  $W$  — число Вебера:

$$W = \frac{\rho\omega^2 R^3}{\sigma}, \tag{6}$$

$\delta$  — диссипативный параметр:

$$\delta = \frac{\nu}{R^2\omega}.$$

Последний в данной работе считается пусть небольшой, но конечной величиной.

В граничном условии (5) в член, описывающий силу инерции, которая и является причиной движения сред относительно друг друга, входит малая безразмерная амплитуда вибраций  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = a/R \ll 1, \tag{7}$$

а значит, форма пузыря почти не отличается от равновесной сферической формы и может быть представлена как

$$G = r - 1 - f(\vartheta, t) = 0,$$

где  $f \ll 1$  — отклонение от равновесной формы ( $r = 1$ ),  $r$  и  $\vartheta$  — сферические координаты. Зенитный угол  $\vartheta$  отсчитываем от оси вибраций  $z$ . В силу симметрии задачи, навязанной линейной поляризацией вибраций, рассмотрим далее лишь осесимметричные решения, поэтому все переменные считаем не зависящими от азимутального угла  $\phi$ .

### 3. Вынужденные колебания пузыря в первом порядке

Задачу решаем методом разложения переменных в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$  [25]:

$$f = f^{(1)} + f^{(2)} + \dots, \quad \psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \dots, \quad c = c^{(0)} + c^{(1)} + c^{(2)} + \dots,$$

где каждое последующее слагаемое имеет меньший порядок малости, что показывается значением верхнего индекса.

В нулевом приближении из граничного условия (5) следует, что

$$c^{(0)} = -2/W. \tag{8}$$

В первом порядке по  $\varepsilon$  получаем краевую задачу определения скорости жидкости и формы пузыря:

$$\Delta\psi^{(1)} = 0, \tag{9}$$

в которой при  $r \rightarrow \infty$

$$\psi^{(1)} = 0, \tag{10}$$

а на невозмущенной поверхности ( $r = 1$ )

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial t} + 2\delta \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} + \varepsilon \cos \vartheta \cos t = -\frac{1}{W} \left( 2f^{(1)} + \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vartheta} \right) + c^{(1)}. \quad (12)$$

Решение краевой задачи (9)–(12) имеет следующий вид:

$$f^{(1)} = -\varepsilon \frac{i}{i+12\delta} \cos \vartheta \exp(it) + \text{c.c.}, \quad (13)$$

$$\psi^{(1)} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{i+12\delta} \frac{\cos \vartheta}{r^2} \exp(it) + \text{c.c.}, \quad (14)$$

$$c^{(1)} = 0, \quad (15)$$

где  $i$  — мнимая единица. В отсутствие вязкой диссипации (при  $\delta = 0$ ) решение соответствует вынужденным колебаниям пузыря с амплитудой  $2\varepsilon$ , частотой и фазой колебаний сосуда без изменения сферичности пузыря [8, 15]. В случае ненулевой вязкости пузырь колеблется с амплитудой

$$C_1 = |f^{(1)}| = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1+144\delta^2}} \quad (16)$$

и запаздыванием по фазе

$$\chi = -\operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Im} f^{(1)}}{\operatorname{Re} f^{(1)}} \right) = \operatorname{arctg}(12\delta). \quad (17)$$

В формальном пределе сильной вязкой диссипации (при  $\delta \rightarrow \infty$ ) согласно (16)  $C = 0$ , пузырь «застывает» в колеблющейся жидкости. Запаздывание же по фазе сохраняется, так как  $\chi = \pi/2$ .

Полезно рассмотреть точное решение линейной вязкой задачи, чтобы сравнить его с результатами, полученными выше в рамках приближения вязкого потенциального течения без коррекции давления. Ограничимся в постановке, как и выше, случаем осевой симметрии.

Течение, вызванное малоамплитудными колебаниями системы, опишем линеаризованным уравнением Навье–Стокса для вязкой несжимаемой среды:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \delta \Delta \mathbf{u}, \quad (18)$$

а также уравнением непрерывности:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (19)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  и  $p$  — поля скорости и давления в жидкости.

Линеаризованные граничные условия, снесенные на невозмущенную границу раздела  $r = 1$ , имеют следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = u_r, \quad (20)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} = 0, \quad (21)$$

$$-p + 2\delta \frac{\partial u_r}{\partial r} + \varepsilon \cos \vartheta \cos t = -\frac{1}{W} \left( 2f + \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right). \quad (22)$$

Граничное условие (22) записано для вынужденных колебаний с заданной частотой, но, положив амплитуду  $\varepsilon = 0$ , можно рассмотреть собственные колебания системы.

Согласно [26] уравнение (19) допускает в сферической системе координат разделение возмущений переменных на азимутальные и меридиональные. Как известно [27], к деформации формы межфазной поверхности, а значит, и к колебаниям пузыря приводят лишь меридиональные возмущения системы:

$$u_r = \frac{l(l+1)}{r^2} U(r) P_l(\cos \vartheta) \exp(-i\Omega_l t) + \text{c.c.}, \quad (23)$$

$$u_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \frac{d}{d\vartheta} P_l(\cos \vartheta) \exp(-i\Omega_l t) + \text{c.c.} \quad (24)$$

Здесь  $\Omega_l$  — безразмерная частота сферической гармоники с нулевым азимутальным числом, описываемой полиномом Лежандра  $P_l(\cos \vartheta)$  с меридиональным числом  $l$ .

Следствием уравнений (18) и (19) является уравнение Лапласа для давления  $\Delta p = 0$ , решение которого представляется в следующем виде:

$$p = \Pi(r) P_l(\cos \vartheta) \exp(-i\Omega_l t) + \text{c.c.}, \quad (25)$$

где для  $\Pi(r)$  — некоторой функции радиальной координаты  $r$ , выполняется соотношение:

$$\frac{d^2\Pi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Pi}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \Pi(r) = 0. \tag{26}$$

После подстановки формул (23)–(25) в уравнение (18) приходим к выражению:

$$\frac{d^2U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U(r) + \frac{i\Omega_l}{\delta} U(r) = \frac{1}{\delta} \frac{r^2}{l(l+1)} \frac{d\Pi}{dr}. \tag{27}$$

Решения уравнений (26) и (27) при выполнении условия затухания на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) записываются как

$$\Pi = \frac{A}{r^{l+1}}, \tag{28}$$

$$U = \frac{i}{l} \frac{A}{\Omega_l} \frac{1}{r^l} + Br \frac{h_l^{(1)}(xr)}{h_l^{(1)}(x)}. \tag{29}$$

Здесь  $A$  и  $B$  — некоторые амплитуды;  $x = \sqrt{i\Omega_l/\delta}$ ;  $h_l^{(1)}$  — сферическая функция Ганкеля  $l$ -го порядка.

Заметим, что, согласно [27], выбор ограниченного решения (29) предполагает для действительной части собственной частоты условие  $\text{Re } \Omega_l \geq 0$ . Именно с указанным фактом связан выбор собственной частоты  $\Omega_l$  с отрицательным знаком в соотношениях (23)–(25), составляющих решение линейной вязкой задачи, а с учетом этого отклонение поверхности пузыря от равновесной формы ( $r = 1$ ) представляется как

$$f = FP_l(\cos\vartheta) \exp(-i\Omega_l t) + \text{c.c.}, \tag{30}$$

где  $F$  — также некоторая амплитуда.

Перепишем соотношения (20)–(22) с учетом выражений (23)–(25) и (30) в терминах функции  $U(r)$  и амплитуды  $F$ :

$$\frac{l(l+1)}{r^2} U(r) + i\Omega_l F = 0, \tag{31}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2U}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{dU}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^3} U(r) = 0, \tag{32}$$

$$\Pi(r) - 2\delta \frac{l(l+1)}{r^2} \left\{ \frac{dU}{dr} - \frac{2U(r)}{r} \right\} + \frac{(l-1)(l+2)}{W} F = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33}$$

После подстановки (28) и (29), взятых при  $r = 1$ , в соотношения (31)–(33) и некоторых преобразований приходим к системе линейных алгебраических уравнений для амплитуд  $A$ ,  $B$  и  $F$ :

$$(l+1) \frac{i}{\Omega_l} A + l(l+1)B + i\Omega_l F = 0, \tag{34}$$

$$2(l+2)\delta \frac{i}{\Omega_l} A - \{i\Omega_l + 2\delta Q(x) - 2(l-1)(l+2)\delta\} B = 0, \tag{35}$$

$$\left\{ 1 + 2(l+1)(l+2)\delta \frac{i}{\Omega_l} \right\} A - 2l(l+1)\delta Q(x)B + \frac{(l-1)(l+2)}{W} F = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{36}$$

Здесь

$$Q(x) = l - 1 - \frac{x h_{l+1}^{(1)}(x)}{h_l^{(1)}(x)}.$$

Для нахождения вынужденных колебаний пузыря при решении системы (34), (35) и (36) положим меридиональное число  $l = 1$ , а частоту  $\Omega_1 = 1$ . Разрешив уравнения относительно амплитуды  $F$ , которая входит в (30), для трансляционной моды смещения поверхности пузыря получаем:

$$f = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{i + 6\delta + 2\delta Q(\sqrt{i/\delta})}{i - 12\delta + 2\delta Q(\sqrt{i/\delta})} \cos\vartheta \exp(-it) + \text{c.c.} \tag{37}$$

Тогда амплитуда и запаздывание фазы колебаний могут быть определены по аналогии с выражениями (16) и (17) путем замены  $f^{(1)} \Rightarrow f$ . Интересно, что найденный из соотношения (37) сдвиг фазы в пределе сильной вязкости ( $\delta \rightarrow \infty$ ) оказывается равным  $\chi = \pi/2$ , что уже получено формально в рамках приближения вязкого

потенциального течения выше. Напомним также, что в невязком приближении ( $\delta \rightarrow 0$ ) газовый пузырь колеблется в одной фазе с окружающей жидкостью [8, 15], то есть  $\chi = 0$ .

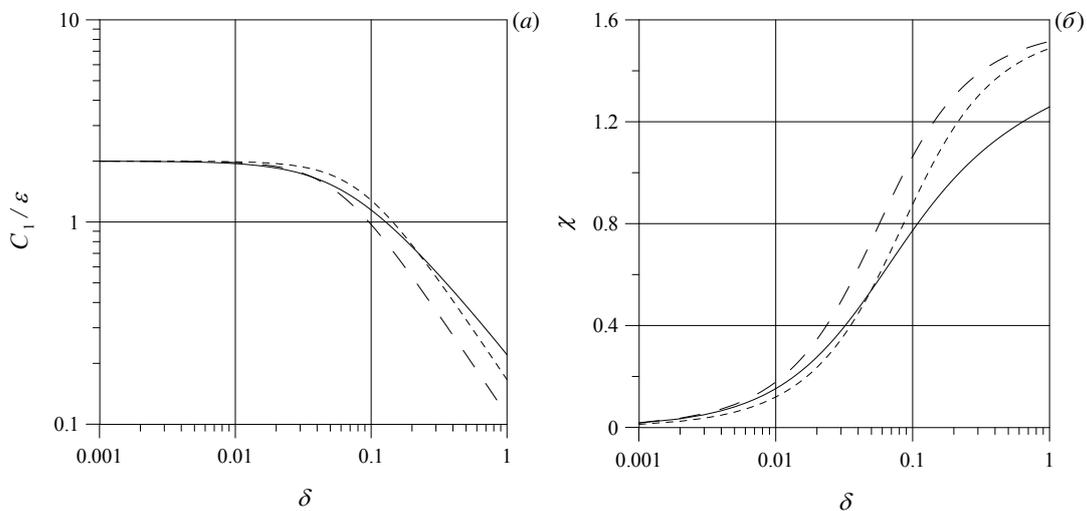
Далее воспользуемся следующим асимптотическим выражением:

$$Q(x) \approx ix + \dots, \quad (38)$$

которое выполняется при диссипативном параметре  $\delta \rightarrow 0$ . Разложив амплитуды вынужденных колебаний пузыря из (13) и (37) в ряды по малому параметру  $\delta$  и сравнив их, заключаем, что без коррекции давления приближение вязкого потенциального течения недооценивает вязкую диссипацию. Для устранения этого недостатка необходимо, по мнению авторов настоящего исследования, искусственно домножить диссипативный параметр  $\delta$  на  $3/2$ . Это следует учесть в выражениях (13), (14), (16) и (17) по правилу:

$$\delta \Rightarrow \delta_1 = (3/2)\delta. \quad (39)$$

На рисунке 2 для сравнения приведены результаты различных подходов к определению амплитуды и запаздывания фазы колебаний пузыря. Видно, что при  $\delta < 0.1$  для амплитуды и при  $\delta < 0.01$  для запаздывания фазы колебаний коррекция за счет домножения диссипативного параметра на  $3/2$  заметно улучшает точность приближения вязкого потенциального течения без коррекции давления.



**Рис. 2.** Зависимости амплитуды (а) и запаздывания фазы (б) колебаний пузыря от диссипативного параметра  $\delta$ : строгий подход согласно (37) – сплошная линия; приближение вязкого потенциального течения (см. (16) и (17)) без коррекции – пунктирная линия, с искусственной коррекцией – штриховая линия

Для квадрупольной моды с меридиональным числом  $l = 2$  из дисперсионного соотношения, следующего из равенства нулю детерминанта системы (34), (35) и (36), получается оценка ее собственной частоты с учетом слабой вязкой диссипации ( $\delta \rightarrow 0$ ):

$$\Omega_2 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{W}} - 20i\delta + \dots, \quad (40)$$

которая соотносится с результатом из работы [4].

#### 4. Нелинейный резонанс и сжатие капли во втором порядке

Далее удобно перейти в систему отсчета, движущуюся вместе с пузырем. В этой системе отсчета решение (13) и (14) с учетом замены (39) записывается как

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= 0, \\ \psi^{(1)} &= -\frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{i + 12\delta_1} \left( 2r + \frac{1}{r^2} \right) \cos\vartheta \exp(it) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (41)$$

Решения (8) и (15) в новой системе отсчета остаются прежними.

Во втором порядке по  $\varepsilon$  краевую задачу формулируем следующим образом:

$$\Delta\psi^{(2)} = 0, \quad (42)$$

в которой при  $r \rightarrow \infty$

$$\psi^{(2)} = 0, \quad (43)$$

– при  $r = 1$

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r}, \quad (44)$$

$$\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial t} + 2\delta \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{W} \left( 2f^{(2)} + \frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \vartheta} \right) = -\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \vartheta} \right)^2 \right\} + c^{(2)}(t). \quad (45)$$

Поиск ее решения осуществим в виде:

$$f^{(2)} = \{ F \exp(2it) + F^* \exp(-2it) \} P_2(\cos \vartheta) + \hat{f}^{(2)}(\vartheta), \quad (46)$$

$$\psi^{(2)} = \{ A \exp(2it) + A^* \exp(-2it) \} \frac{P_2(\cos \vartheta)}{r^3}. \quad (47)$$

Важно заметить, что при определении собственной частоты квадрупольной моды из выражений (42), (43), (44) и (45) следует приравнять нулю левую часть условия (45) и пользоваться правилом  $\partial/\partial t \equiv -i\Omega_2$ , где знак при частоте выбрать как при решении линейной вязкой проблемы выше. Тогда в полученном результате

$$\Omega_2 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{W}} - 12i\delta + \dots$$

эффект вязкости жидкости также оказывается недооцененным — меньшим, по сравнению со строгой оценкой (40). А значит, в (45) можно применять коррекцию вида:

$$\delta \Rightarrow \delta_2 = (5/3)\delta.$$

Воспользовавшись (41) и произведя некоторые выкладки, находим, что при  $r = 1$

$$-\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \vartheta} \right)^2 \right\} = -\frac{3}{4} \varepsilon^2 \{ 1 - P_2(\cos \vartheta) \} \left\{ \frac{\exp(2it)}{(i+12\delta_1)^2} + \frac{\exp(-2it)}{(-i+12\delta_1)^2} + \frac{2}{1+144\delta_1^2} \right\}. \quad (48)$$

Пусть

$$c^{(2)} = \frac{3}{4} \varepsilon^2 \left\{ \frac{\exp(2it)}{(i+12\delta_1)^2} + \frac{\exp(-2it)}{(-i+12\delta_1)^2} \right\} + \hat{c}^{(2)}, \quad (49)$$

где последнее слагаемое не зависит ни от времени, ни от координат.

Подставим (46)–(49) в (44) и (45). Выделив множители при  $P_2(\cos \vartheta)$  получаем соотношения:

$$2iF = -3A, \quad (50)$$

$$2(i+12\delta_2)A - \frac{4}{W}F = \frac{3}{4} \frac{\varepsilon^2}{(i+12\delta_1)^2}, \quad (51)$$

а также дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{1}{W} \left( 2\hat{f}^{(2)} + \frac{\partial^2 \hat{f}^{(2)}}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{\partial \hat{f}^{(2)}}{\partial \vartheta} \right) = -\frac{9}{4} \frac{\varepsilon^2}{1+144\delta_1^2} \sin^2 \vartheta + \hat{c}^{(2)}. \quad (52)$$

В постановке задачи принято, что газ в пузыре несжимаем, а следовательно, его объем не меняется. Поэтому добавку  $\hat{f}^{(2)}(\vartheta)$  будем искать в виде четной гармонической моды:

$$\hat{f}^{(2)}(\vartheta) = \Theta P_2(\cos \vartheta). \quad (53)$$

Путем подстановки (53) в (52) приходим к соотношениям:

$$-\frac{4}{W}\Theta = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon^2}{1+144\delta_1^2}, \quad (54)$$

$$\hat{c}^{(2)} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon^2}{1+144\delta_1^2}.$$

В итоге, разрешив выражения (50), (51) и (54), находим значения искоемых коэффициентов:

$$A = -\frac{3i}{8} \frac{\varepsilon^2}{(i+12\delta_1)^2} \frac{1}{1 - \frac{3}{W} - 12i\delta_2}, \quad (55)$$

$$F = \frac{9}{16} \frac{\varepsilon^2}{(i+12\delta_1)^2} \frac{1}{1 - \frac{3}{W} - 12i\delta_2}, \quad (56)$$

$$\Theta = -\frac{3}{8} \frac{W\varepsilon^2}{1+144\delta_1^2} = -\frac{3}{8} \frac{W\varepsilon^2}{1+324\delta^2}, \quad (57)$$

которые для невязкого случая ( $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0$ ) совпадают с представленными в [8].

Выражение (57) показывает, что во втором порядке решения осредненная форма пузыря не сферическая, поскольку имеет место деформация сжатия в направлении оси вибрации. И эта деформация уменьшается с усилением вязкой диссипации. Стоящая в числителе комбинация  $W\varepsilon^2$  при представлении в размерном виде (см. (7) и (6)) будет содержать квадрат амплитуды скорости вибраций  $a\omega$ . Этот вывод отвечает результату работы [11].

Собственные частоты незатухающих колебаний пузыря, согласно [3], описываются так:

$$\Omega_l^{(0)} = \sqrt{\frac{(l^2-1)(l+2)}{W}}.$$

Тогда в случае квадрупольной моды имеем:

$$\Omega_2^{(0)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{W}}. \quad (58)$$

Как видно из соотношений (55), (56) и (58), условие нелинейного резонанса можно записать в виде  $W = 3$  или

$$\Omega_2^{(0)} = 2,$$

куда не входит диссипативный параметр  $\delta$ . Таким образом, вязкость жидкости не приводит к сдвигу резонансной частоты, она лишь ограничивает амплитуду резонансных колебаний пузыря:

$$C_2 = 2|F| = \frac{9}{8} \frac{\varepsilon^2}{1+144\delta_1^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{3}{W}\right)^2 + 144\delta_2^2}}, \quad (59)$$

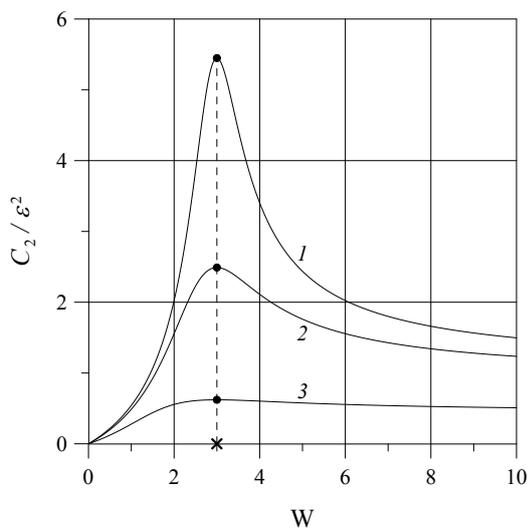
максимум которой равняется

$$C_{\max} = \frac{3}{32} \frac{1}{1+144\delta_1^2} \frac{\varepsilon^2}{\delta_2} = \frac{9}{160} \frac{1}{1+324\delta^2} \frac{\varepsilon^2}{\delta} \quad (60)$$

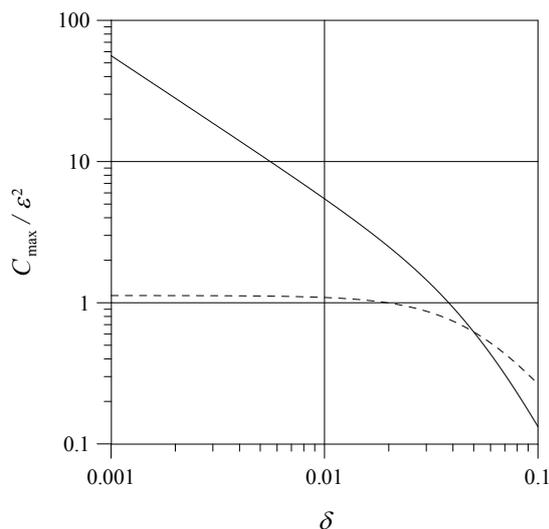
и уменьшается с ростом диссипативного параметра  $\delta$ .

По виду выражения (60) можно заключить: возмущения формы поверхности пузыря от сферического состояния остаются малыми, если выполняется условие:

$$\delta \gg \frac{9}{160} \varepsilon^2. \quad (61)$$



**Рис. 3.** Зависимость амплитуды квадрупольной моды колебаний пузыря от числа Вебера при разных значениях диссипативного параметра  $\delta$ : 0.01 (кривая 1), 0.02 (2), 0.05 (3)

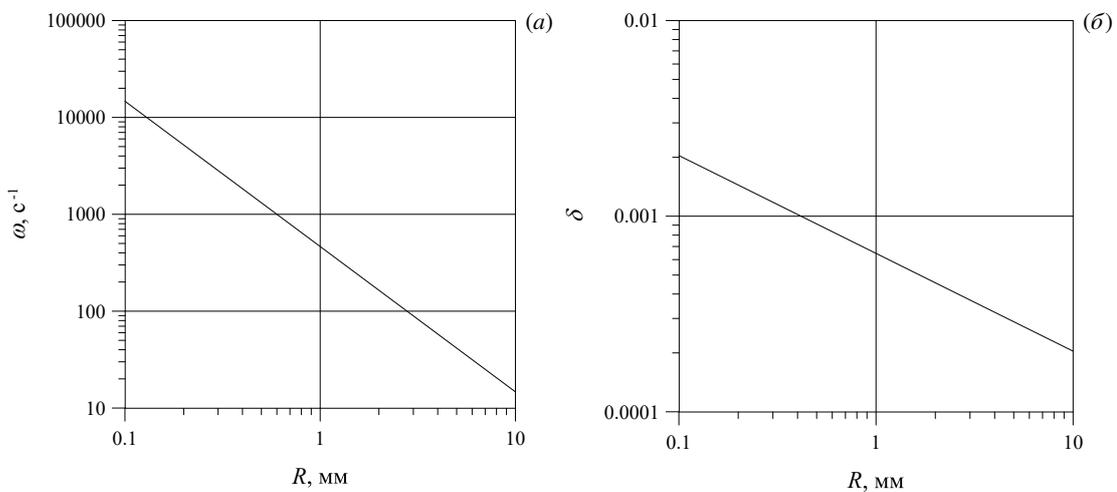


**Рис. 4.** Зависимость резонансной амплитуды квадрупольной моды колебаний пузыря от диссипативного параметра; штриховой линией показано сжатие осредненной формы пузыря согласно (57), взятое при числе Вебера  $W = 3$  и нормированное на величину  $\varepsilon^2$

Последнее в размерных единицах эквивалентно требованию  $a \ll 3\sqrt{2\nu/\omega}$ , то есть амплитуда вибраций должна быть много меньше, чем утроенная толщина скин-слоя.

График зависимости амплитуды от частоты (числа Вебера), согласно (59), представлен на рисунке 3. Точкам пересечения со штриховой линией, проведенной через  $W = 3$ , отвечают максимальные значения амплитуды квадрупольной моды при различных значениях диссипативного параметра. На рисунке 4 демонстрируется зависимость резонансного значения амплитуды от  $\delta$ . Ее можно сравнить с кривой, показанной на том же рисунке штриховой линией, которая рассчитана по формуле для сжатия осредненной формы пузыря (57). Видно, что характер обеих кривых далек от обратно пропорционального. Амплитуды сжатия и колебаний формы сравнимы по величине при  $\delta \approx 0.05$ .

Оценим колебания пузырька воздуха в воде при параметрах  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\sigma = 7.2 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}$  и  $\nu = 3 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ . Далее приведены резонансная частота (Рис. 5а) и соответствующее ей значение диссипативного параметра (Рис. 5б) как функции радиуса пузырька. Так, для пузырька миллиметрового размера, подобные которому наиболее часто используются в процессе флотации, главная частота нелинейного резонанса составляет примерно  $\omega \approx 1314.5 \text{ с}^{-1}$ , а вычисленный по ней диссипативный параметр —  $\delta \approx 9.1 \cdot 10^{-4}$ . Тогда условие (61) дает следующее значение безразмерной амплитуды вибраций  $\varepsilon \ll 0.13$  или размерную амплитуду скорости  $a\omega \ll 8.5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ . Только в этом случае поверхность пузырька слабо отклоняется от сферической формы.



**Рис. 5.** Зависимости резонансной частоты (а) и соответствующего ей значения диссипативного параметра (б) от радиуса пузырька воздуха в воде

## 5. Численное моделирование резонансных колебаний пузыря

### 5.1. Описание численного метода

Для численной верификации аналитических результатов проведено прямое численное моделирование динамики газового пузырька в колеблющейся вязкой жидкости с использованием пакета ANSYS Fluent, основанного на методе конечных объемов, для решения полной системы уравнений Навье–Стокса. Важно отметить, что при численной реализации рассмотренной выше задачи ось  $z$  располагается горизонтально.

Течение несжимаемой жидкости описывается уравнениями непрерывности и импульса. Для отслеживания границы раздела применяется метод объема жидкости (Volume of Fluid, VOF) [28], в котором эволюция межфазной поверхности представляется уравнением переноса объемной доли фазы  $\alpha$ . Сила поверхностного натяжения моделируется методом континуальной силы (Continuum Surface Force, CSF) [29]. Методы VOF и CSF уже опробованы в [30] при рассмотрении движения и разрушения поверхности пузырька в поле внешних вибраций.

Моделирование проводится в системе координат, связанной с твердыми стенками полости, что позволяет избежать необходимости включать в постановку задачи движущиеся границы. Вибрационное воздействие учитывается путем добавления в уравнение импульса источников члена — объемной силы инерции в неинерциальной системе отсчета, связанной с колеблющимся сосудом.

Расчеты выполнены в осесимметричной постановке в сферической полости радиуса  $R_{\text{cav}} = 5R$ , где  $R$  — равновесный радиус пузырька. Использование осевой симметрии возможно вследствие линейной поляризации вибраций и существенно снижает вычислительные затраты. На твердых стенках полости задаются условия непротекания и свободного скольжения, что является обоснованным, поскольку влияние пристенного пограничного слоя на динамику пузырька в центре полости пренебрежимо мало.

Для удержания пузырька в окрестности центра расчетной области добавляется слабое силовое поле:  $F = -\kappa z$ . Параметр  $\kappa$  подбирается так, чтобы обеспечить стабилизацию положения без существенного влияния на амплитуду и частоту колебаний пузырька. В проведенных расчетах  $\kappa$  составляет 5% амплитуды вибрационного ускорения.

Расчетная область покрывается треугольной сеткой с характерным размером ячеек  $\Delta h \approx R/100$ . В окрестности межфазной границы используется адаптивное измельчение сетки, минимальный размер ячеек составляет  $\Delta h_{\min} \approx R/400$ , что обеспечивает разрешение квадрупольной моды деформации. Проведено исследование сеточной сходимости на трех последовательных сетках, показавшее изменение амплитуды колебаний менее 2% при измельчении.

Для пространственной дискретизации конвективных членов используется схема 2-го порядка точности [31]. Уравнение переноса объемной доли решается на основе схемы Geo-Reconstruct [32], минимизирующей диффузию границы раздела. Интегрирование по времени выполняется полностью неявным методом второго порядка с переменным шагом, который определяется условием Куранта  $CFL < 0.5$  и требованием:  $\Delta t < T/200$ , где  $T$  — период вибраций. Используется алгоритм Coupled [33] для связанного решения уравнений импульса и непрерывности.

В начальный момент пузырь располагается в центре области и имеет сферическую форму. Распределение объемной доли инициализируется с помощью пользовательской функции (User Defined Function, UDF), реализующей гладкий переход в приграничной области для предотвращения численных осцилляций. Расчет проводится в течение не менее 20 периодов вибраций для выхода на установившийся режим колебаний.

В процессе расчета автоматически регистрируются координаты максимальных точек отклонения межфазной поверхности. Амплитуда квадрупольной моды рассчитывается по осредненной разности максимальных отклонений поверхности раздела в направлении, перпендикулярном оси вибраций. Реализация данных алгоритмов обработки выполняется с помощью UDF-функций.

### 5.2. Параметры моделирования

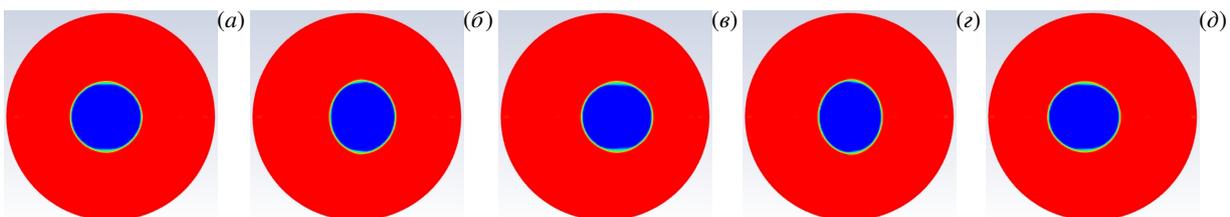
В постановке задачи плотность газа в пузыре полагается пренебрежимо малой по сравнению с плотностью окружающей жидкости. В численных же расчетах необходимо использовать конечное, хотя и малое, значение плотности газа для обеспечения численной устойчивости алгоритма. В настоящей работе плотность газа выбрана в 100 раз меньше плотности жидкости. Для сохранения вычислительной устойчивости динамическая вязкость газа принимается равной вязкости окружающей жидкости, что отличается от физической ситуации, но не вносит существенной погрешности в динамику системы газовой пузырь–жидкость, поскольку течение внутри пузыря играет второстепенную роль.

Предварительные расчеты собственных колебаний пузыря показали, что необходимость задания конечной вязкости газа приводит к сдвигу частоты квадрупольной моды на 10–20%, по сравнению с теоретическими предсказаниями. Такой сдвиг обуславливается влиянием как вязкости газа, так и конечного размера расчетной области. Для компенсации этого систематического отклонения, возникающего при моделировании резонансных колебаний пузыря, частота внешних вибраций подбирается в соответствии с предварительно рассчитываемой численно собственной частотой квадрупольной моды  $\omega_2$ . Согласно теории резонанс наступает при частоте вибраций, равной половине собственной частоты квадрупольной моды. Таким образом, численное определение  $\omega_2$  с последующим выбором частоты вибраций  $\omega = \omega_2/2$  позволяет исключить систематические погрешности, связанные с особенностями численной модели, и сосредоточиться на изучении влияния вязкости на амплитуду и характер резонансных колебаний.

### 5.3. Результаты моделирования

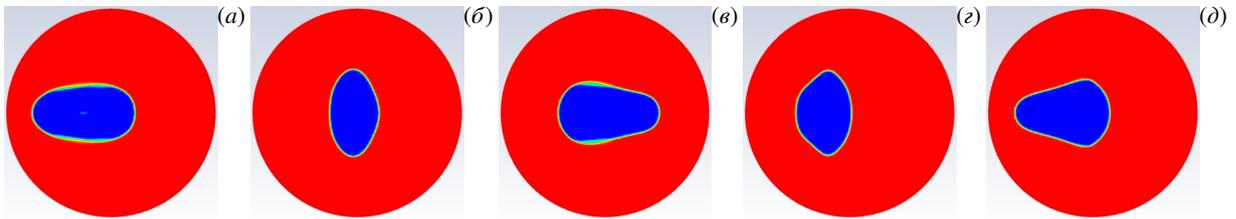
На рисунке 6 представлена эволюция формы пузыря в течение одного периода колебаний при умеренной интенсивности внешних вибраций ( $\varepsilon = 0.2$ ). Как видно, форма поверхности незначительно отклоняется от сферической, что согласуется с теоретическим прогнозом для малых амплитуд возбуждения. Характер деформации соответствует квадрупольной моде с переменным вытягиванием пузыря вдоль оси вибраций и перпендикулярно ей. Таким образом, численное моделирование подтверждает теоретическое предсказание о том, что вязкая диссипация эффективно ограничивает развитие резонансной моды, препятствуя накоплению энергии колебаний в системе. Важно отметить, что при данных параметрах ( $\varepsilon = 0.2$ ,  $\delta = 0.013$ ) отсутствуют признаки возбуждения высших мод деформации или нелинейных эффектов, характерных для больших амплитуд. Наблюдаемая динамика хорошо описывается теорией второго порядка по малому параметру  $\varepsilon$ .

При увеличении амплитуды вибраций до  $\varepsilon = 0.4$  наблюдается существенно иное поведение системы (см. Рис. 7).



**Рис. 6.** Форма пузыря в вязкой жидкости при умеренной интенсивности внешних вибраций ( $\varepsilon = 0.2$ ) резонансной частоты в разных фазах колебаний  $\varphi$ : 0 (а),  $\pi/2$  (б),  $\pi$  (в),  $3\pi/2$  (г),  $2\pi$  (д) при  $\delta = 0.013$ ; приведена центральная часть расчетной области

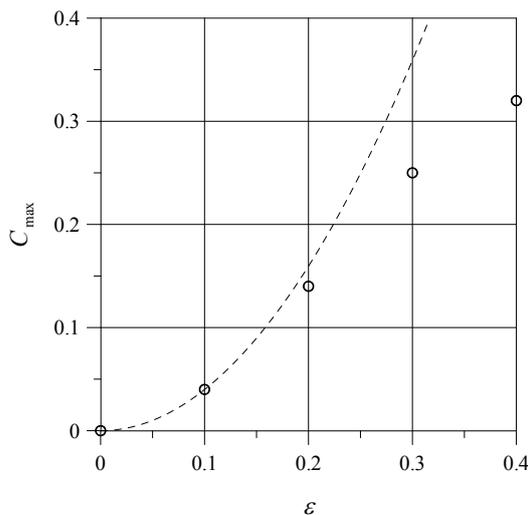
В этом режиме четко проявляется нелинейный резонанс — амплитуда вытягивания пузыря резко возрастает, поверхность испытывает значительные отклонения от сферической формы. Квадрупольная мода становится хорошо выраженной, причем максимальное вытягивание происходит попеременно вдоль оси вибраций и в перпендикулярном ей направлении.



**Рис. 7.** Форма пузыря в вязкой жидкости при большой интенсивности внешних вибраций ( $\varepsilon = 0.4$ ) резонансной частоты в разных фазах колебаний  $\varphi$ : 0 (а),  $\pi/2$  (б),  $\pi$  (в),  $3\pi/2$  (г),  $2\pi$  (д) при  $\delta = 0.013$

Следует отметить, что при высоких амплитудах возбуждения, помимо квадрупольной моды, могут возбуждаться и другие моды колебаний пузыря: динамика межфазной поверхности характеризуется наложением нескольких гармоник. В отдельные моменты времени форма пузыря отклоняется от чисто квадрупольной конфигурации, что свидетельствует о проявлении нелинейных эффектов более высокого порядка, не учтенных в теории второго порядка. Однако доминирующей остается квадрупольная мода, что подтверждает правомерность и применимость развиваемой аналитической теории при данных параметрах. Визуальный анализ формы пузыря показывает также проявление осредненного эффекта сжатия вдоль оси вибраций, предсказанного теорией (см. выражение (57)). Осредненная по времени форма пузыря слегка сплюснута в направлении колебаний, что является результатом действия осредненной вибрационной силы второго порядка.

#### 5.4. Количественное сравнение с теорией



**Рис. 8.** Зависимость амплитуды резонансных колебаний пузыря в вязкой жидкости от амплитуды вибраций при  $\delta = 0.013$ ; штриховой линией показана аналитическая квадратичная зависимость, а кружками — результаты численного расчета

учтенных в теории второго порядка по параметру  $\varepsilon$ . В частности, при больших деформациях становится существенным влияние кривизны поверхности на распределение нормальных напряжений, а также возможно возбуждение высших мод колебаний, приводящее к перераспределению энергии между модами и эффективному увеличению диссипации. Кроме того, с ростом амплитуды вибраций может усиливаться влияние стенок полости на динамику пузыря.

## 6. Заключение

Представлены результаты аналитического и численного исследования динамики газового пузыря в колеблющейся вязкой жидкости с акцентом на анализ нелинейного резонанса. Основная цель состояла в определении влияния вязкости на резонансные явления, возникающие при частоте вибраций, близкой к половине собственной частоты квадрупольной моды системы пузырь газа–жидкость. Применялся комбинированный подход, основанный на концепции вязкого потенциального течения. Получены сравнительно простые аналитические

Для количественного сравнения численных и аналитических результатов приведен рисунок 8, где показана зависимость амплитуды резонансных колебаний пузыря от амплитуды внешних вибраций при фиксированном диссипативном параметре  $\delta = 0.013$ . Аналитическая теория предсказывает квадратичную зависимость амплитуды колебаний от амплитуды вибраций, что отражается в выражении (60). Численные результаты демонстрируют хорошее согласование с теоретическими прогнозами в области малых амплитуд ( $\varepsilon \lesssim 0.2$ ). При этих значениях параметра  $\varepsilon$  выполняется условие слабой нелинейности (61), лежащее в основе асимптотического разложения. Наблюдаемое отклонение численных данных от квадратичной кривой незначительно и может быть объяснено конечностью величин плотности и вязкости газа в численной модели.

При увеличении амплитуды вибраций ( $\varepsilon > 0.2$ ) систематические отклонения численных результатов от аналитической кривой становятся более заметными. Численно полученные амплитуды колебаний оказываются несколько меньшими теоретических предсказаний. Это расхождение связано с проявлением нелинейных эффектов более высокого порядка, не

выражения для параметров течения, на которых основывался анализ. Ключевым элементом методики служит феноменологический подход для коррекции результатов путем сравнения с известными точными решениями для вязкой жидкости, что значительно повысило точность авторских расчетов без существенного усложнения модели.

В линейном приближении по амплитуде вибраций установлено, что пузырь совершает вынужденные колебания как целое, без изменения своей сферической формы. Анализ показал, что поверхностное натяжение не играет при этом роли. Выявлены зависимости амплитуды и фазового запаздывания колебаний от вязкости, с ростом которой амплитуда монотонно уменьшается, что свидетельствует о стремлении вязкости «заморозить» движение пузыря относительно жидкой среды. При этом фазовый сдвиг стремится к значению  $\pi/2$ .

Исследован нелинейный резонанс, связанный с возбуждением квадрупольной моды деформации пузыря. Получен важный результат, свидетельствующий, что вязкость жидкости не приводит к сдвигу резонансной частоты. Резонансная частота остается равной половине собственной частоты квадрупольной моды, как и в случае идеальной жидкости, однако вязкость оказывает сильное влияние на амплитуду резонансных колебаний и эффективно ограничивает ее рост.

Построены явные аналитические выражения для амплитудно-частотной характеристики квадрупольной моды. Установлено, что максимальная амплитуда резонансных колебаний уменьшается с ростом диссипативного параметра, что подтверждает демпфирующую роль вязкости. С увеличением вязкости максимум амплитуды на резонансной частоте становится менее выраженным, что указывает также на снижение эффективности резонансного воздействия. Помимо осциллирующей составляющей, обнаружено статическое сжатие вдоль направления оси вибраций осредненной во времени формы пузыря. Продемонстрировано, что эта деформация тем меньше, чем выше вязкость жидкости.

Выполненное численное моделирование подтверждает основные выводы аналитической теории о влиянии вязкости на нелинейный резонанс пузыря в вибрирующей жидкости. Вязкость действительно играет роль эффективного демпфера, ограничивающего амплитуду резонансных колебаний. Численные результаты также показывают квадратичную зависимость амплитуды колебаний от амплитуды вибраций, предсказываемую теорией второго порядка. Эта зависимость справедлива в широком диапазоне параметров и нарушается лишь при достаточно больших амплитудах, когда становятся существенными эффекты третьего и более высоких порядков.

Проведенные для пузырька воздуха в воде оценки демонстрируют практическую применимость полученных результатов. Установлено, что для пузырьков миллиметрового размера, характерных для процесса флотации, условие слабой деформации поверхности выполняется при амплитудах скорости вибраций, меньших 8.5 см/с. Это дает конкретный количественный ориентир для управления технологическим процессом.

Результаты работы получены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 121031700169-1).

## Литература

1. *Filippov L.O., Matinin A.S., Samiguin V.D., Filippova I.V.* Effect of ultrasound on flotation kinetics in the reactor-separator // *Journal of Physics: Conference Series*. 2013. Vol. 416. 012016. DOI: 10.1088/1742-6596/416/1/012016
2. *Shklyayev S., Ivantsov A.O., Díaz-Maldonado M., Córdova-Figueroa U.M.* Dynamics of a Janus drop in an external flow // *Physics of Fluids*. 2013. Vol. 25, no. 8. 082105. DOI: 10.1063/1.4817541
3. *Lamb H.* Hydrodynamics. 6th ed. Cambridge: Cambridge Mathematical Library, 1994. 768 p.
4. *Miller C.A., Scriven L.E.* The oscillations of a fluid droplet immersed in another fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 1968. Vol. 32, no. 3. P. 417–435. DOI: 10.1017/S0022112068000832
5. *Коновалов В.В.* Влияние вязкости окружающего воздуха на точность измерения свойств жидкости в левитирующей капле // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2022. Т. 15, № 3. С. 343–353. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.26
6. *Sorokin V.S., Blekhman I.I., Vasilkov V.B.* Motion of a gas bubble in fluid under vibration // *Nonlinear Dynamics*. 2012. Vol. 67, no. 1. P. 147–158. DOI: 10.1007/s11071-011-9966-9
7. *Li Z., Zhou Y., Xu L.* Sinking bubbles in a fluid under vertical vibration // *Physics of Fluids*. 2021. Vol. 33, no. 3. 037130. DOI: 10.1063/5.0040493
8. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А.* Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 216 с.
9. *Lyubimova T., Garicheva Y., Ivantsov A.* The behavior of a gas bubble in a square cavity filled with a viscous liquid undergoing vibrations // *Fluid Dynamics & Materials Processing*. 2024. Vol. 20, no. 11. P. 2417–2429. DOI: 10.32604/fdmp.2024.052391
10. *Lyubimova T.P., Garicheva Y.V., Ivantsov A.O.* Vibration effect on the localization of a gas bubble in a viscous liquid // *Physics of Fluids*. 2025. Vol. 37, no. 12. 122121. DOI: 10.1063/5.0293795
11. *Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Tcherepanov A.A., Roux B.H.* Vibration influence on fluid interfaces // *Comptes Rendus Mécanique*. 2004. Vol. 332, no. 5/6. P. 467–472. DOI: 10.1016/j.crme.2004.01.013
12. *Ivantsov A., Lyubimova T., Khilko G., Lyubimov D.* The shape of a compressible drop on a vibrating solid plate // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, no. 21. P. 4527. DOI: 10.3390/math11214527
13. *Ivantsov A., Lyubimova T.* Average deformation of sessile drop under high frequency vibrations // *Microgravity Science and Technology*. 2024. Vol. 36, no. 6. 58. DOI: 10.1007/s12217-024-10146-4

14. Lyubimov D.V., Klimenko L.S., Lyubimova T.P., Filippov L.O. The interaction of a rising bubble and a particle in oscillating fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 2016. Vol. 807. P. 205–220. DOI: 10.1017/jfm.2016.608
15. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. Resonance oscillations of a drop (bubble) in a vibrating fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 909. A18. DOI: 10.1017/jfm.2020.949
16. Konovalov V., Lyubimov D., Lyubimova T. Resonance oscillations of a drop or bubble in a viscous vibrating fluid // *Physics of Fluids*. 2021. Vol. 33. 094107. DOI: 10.1063/5.0061979
17. Lyubimov D.V., Konovalov V.V., Lyubimova T.P., Egry I. Small amplitude shape oscillations of a spherical liquid drop with surface viscosity // *Journal of Fluid Mechanics*. 2011. Vol. 677. P. 204–217. DOI: 10.1017/jfm.2011.76
18. Lyubimova T., Konovalov V., Borzenko E., Nepomnyashchy A. The influence of an insoluble surfactant on capillary oscillations of a bubble in a liquid // *Journal of Fluid Mechanics*. 2025. Vol. 1022. P. A45. DOI: 10.1017/jfm.2025.10793
19. Prosperetti A., Crum L.A., Commander K.W. Nonlinear bubble dynamics // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1988. Vol. 83, no. 2. P. 502–514. DOI: 10.1121/1.396145
20. Sojahrood A.J., Earl R., Haghi H., Li Q., Porter T.M., Kolios M.C., Karshafian R. Nonlinear dynamics of acoustic bubbles excited by their pressure-dependent subharmonic resonance frequency: influence of the pressure amplitude, frequency, encapsulation and multiple bubble interactions on oversaturation and enhancement of the subharmonic signal // *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 103, no. 1. P. 429–466. DOI: 10.1007/s11071-020-06163-8
21. Алабу́жьев А.А., Коновалов В.В., Любимов Д.В. Деформация и нелинейный резонанс капли в вибрационном поле // *Вибрационные эффекты в гидродинамике*. Т. 10. Пермь: Пермский университет, 1998. С. 7–16.
22. Kawaji M., Lyubimov D., Ichikawa N., Lyubimova T., Kariyasaki A., Tryggvason B. The effects of forced vibration on the motion of a large bubble under microgravity // *Microgravity Science and Technology*. 2021. Vol. 33, no. 5. 62. DOI: 10.1007/s12217-021-09908-1
23. Joseph D.D., Wang J. The dissipation approximation and viscous potential flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 2004. Vol. 505. P. 365–377. DOI: 10.1017/S0022112004008602
24. Wang J., Joseph D.D., Funada T. Pressure corrections for potential flow analysis of capillary instability of viscous fluids // *Journal of Fluid Mechanics*. 2005. Vol. 522. P. 383–394. DOI: 10.1017/s0022112004002009
25. Най́фе А.Х. Теория возмущений. М.: Мир, 1976. 535 с.
26. Chandrasekhar S. The oscillations of a viscous liquid globe // *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1959. Vol. s3–9, no. 1. P. 141–149. DOI: 10.1112/plms/s3-9.1.141
27. Prosperetti A. Normal mode analysis for the oscillations of a viscous liquid drop in an immiscible liquid // *Journal de Mécanique*. 1980. Vol. 19. P. 149–182.
28. Hirt C.W., Nichols B.D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *Journal of Computational Physics*. 1981. Vol. 39, no. 1. P. 201–225. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5
29. Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension // *Journal of Computational Physics*. 1992. Vol. 100, no. 2. P. 335–354. DOI: 10.1016/0021-9991(92)90240-Y
30. Daryaei A., Hanafizadeh P., Akhavan-Behabadi M.A. Three-dimensional numerical investigation of a single bubble behavior against non-linear forced vibration in a microgravity environment // *International Journal of Multiphase Flow*. 2018. Vol. 109. P. 84–97. DOI: 10.1016/j.ijmulf.2018.06.024
31. Leonard B.P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1979. Vol. 19, no. 1. P. 59–98. DOI: 10.1016/0045-7825(79)90034-3
32. Rider W.J., Kothe D.B. Reconstructing volume tracking // *Journal of computational physics*. 1998. Vol. 141, no. 2. P. 112–152. DOI: 10.1006/jcph.1998.5906
33. ANSYS User’s Guide / ANSYS. Release 22.1. 2022

### Сведения об авторах:

Коновалов Владимир Владиславович (корр.), кфмн, нс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: konovalov@icmm.ru; ORCID: 0000-0001-6733-234X

Иванцов Андрей Олегович, кфмн, нс, ИМСС УрО РАН; e-mail: aivantsov@icmm.ru; ORCID: 0000-0002-5703-3247

Research article

## Influence of viscosity on nonlinear resonance of forced oscillations of a bubble in a vibrating liquid

V.V. Konovalov, A.O. Ivantsov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The paper presents the results of the study on dynamics of a gas bubble in an oscillating viscous fluid. The focus is on the case when the frequency of external vibrations is close to half the natural frequency of the quadrupole mode of free oscillations, which corresponds to the condition of the nonlinear resonance previously discovered in the inviscid approximation. A viscous potential flow model was used to take into account dissipation. In the framework of this model, the analytical expressions of the main process characteristics were obtained. The solution was expressed as an asymptotic series in a small parameter — the ratio of vibration amplitude to the bubble radius. The first-order theory shows that the bubble oscillates as a whole without deformation. The dependence of the amplitude and the phase shift of these oscillations on viscosity was established. The second-order theory investigates the nonlinear resonance associated with the excitation of the quadrupole deformation mode. It is shown that viscosity does not shift the resonant frequency, which remains half the natural frequency of the quadrupole mode, as in an ideal fluid, but significantly limits the amplitude of resonant oscillations. The results of numerical modeling of 3D axisymmetric bubble oscillations at the resonant frequency show good agreement with the analytical data. These findings are important for understanding and controlling processes in such applications as acoustic flotation, chemical reactors, and medical ultrasound diagnostics.

*Keywords:* viscous potential flow, nonlinear resonance, modeling of bubble oscillations in viscous liquid

*Received:* 06.11.2025 / *Published online:* 25.02.2026

### Acknowledgements

The results of research were obtained with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (topic № 121031700169-1).

### References

1. *Filippov L.O., Matinin A.S., Samiguin V.D., Filippova I.V.* Effect of ultrasound on flotation kinetics in the reactor-separator. *Journal of Physics: Conference Series*. 2013. Vol. 416. 012016. DOI: 10.1088/1742-6596/416/1/012016
2. *Shklyayev S., Ivantsov A.O., Díaz-Maldonado M., Córdova-Figueroa U.M.* Dynamics of a Janus drop in an external flow. *Physics of Fluids*. 2013. Vol. 25, no. 8. 082105. DOI: 10.1063/1.4817541
3. *Lamb H.* *Hydrodynamics*. 6th ed. Cambridge Mathematical Library, 1994. 768 p.
4. *Miller C.A., Scriven L.E.* The oscillations of a fluid droplet immersed in another fluid. *Journal of Fluid Mechanics*. 1968. Vol. 32, no. 3. P. 417–435. DOI: 10.1017/S0022112068000832
5. *Konovalov V.V.* Influence of ambient air viscosity on the accuracy of measurements of liquid properties in a levitating drop. *Computational Continuum Mechanics*. 2022. Vol. 15, no. 3. P. 343–353. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.26
6. *Sorokin V.S., Blekhman I.I., Vasilkov V.B.* Motion of a gas bubble in fluid under vibration. *Nonlinear Dynamics*. 2012. Vol. 67, no. 1. P. 147–158. DOI: 10.1007/s11071-011-9966-9
7. *Li Z., Zhou Y., Xu L.* Sinking bubbles in a fluid under vertical vibration. *Physics of Fluids*. 2021. Vol. 33, no. 3. 037130. DOI: 10.1063/5.0040493
8. *Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A.* *Dinamika poverkhnostey razdela v vibratsionnykh polyakh*. Moscow: FIZMATLIT, 2003. 216 p.
9. *Lyubimova T., Garicheva Y., Ivantsov A.* The behavior of a gas bubble in a square cavity filled with a viscous liquid undergoing vibrations. *Fluid Dynamics & Materials Processing*. 2024. Vol. 20, no. 11. P. 2417–2429. DOI: 10.32604/fdmp.2024.052391
10. *Lyubimova T.P., Garicheva Y.V., Ivantsov A.O.* Vibration effect on the localization of a gas bubble in a viscous liquid. *Physics of Fluids*. 2025. Vol. 37, no. 12. 122121. DOI: 10.1063/5.0293795
11. *Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Tcherepanov A.A., Roux B.H.* Vibration influence on fluid interfaces. *Comptes Rendus Mécanique*. 2004. Vol. 332, no. 5/6. P. 467–472. DOI: 10.1016/j.crme.2004.01.013
12. *Ivantsov A., Lyubimova T., Khilko G., Lyubimov D.* The shape of a compressible drop on a vibrating solid plate. *Mathematics*. 2023. Vol. 11, no. 21. P. 4527. DOI: 10.3390/math11214527
13. *Ivantsov A., Lyubimova T.* Average deformation of sessile drop under high frequency vibrations. *Microgravity Science and Technology*. 2024. Vol. 36, no. 6. 58. DOI: 10.1007/s12217-024-10146-4
14. *Lyubimov D.V., Klimenko L.S., Lyubimova T.P., Filippov L.O.* The interaction of a rising bubble and a particle in oscillating fluid. *Journal of Fluid Mechanics*. 2016. Vol. 807. P. 205–220. DOI: 10.1017/jfm.2016.608
15. *Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A.* Resonance oscillations of a drop (bubble) in a vibrating fluid. *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 909. A18. DOI: 10.1017/jfm.2020.949

16. *Konovalov V., Lyubimov D., Lyubimova T.* Resonance oscillations of a drop or bubble in a viscous vibrating fluid. *Physics of Fluids*. 2021. Vol. 33. 094107. DOI: 10.1063/5.0061979
17. *Lyubimov D.V., Konovalov V.V., Lyubimova T.P., Egry I.* Small amplitude shape oscillations of a spherical liquid drop with surface viscosity. *Journal of Fluid Mechanics*. 2011. Vol. 677. P. 204–217. DOI: 10.1017/jfm.2011.76
18. *Lyubimova T., Konovalov V., Borzenko E., Nepomnyashchy A.* The influence of an insoluble surfactant on capillary oscillations of a bubble in a liquid. *Journal of Fluid Mechanics*. 2025. Vol. 1022. P. A45. DOI: 10.1017/jfm.2025.10793
19. *Prosperetti A., Crum L.A., Commander K.W.* Nonlinear bubble dynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1988. Vol. 83, no. 2. P. 502–514. DOI: 10.1121/1.396145
20. *Sojahrood A.J., Earl R., Haghi H., Li Q., Porter T.M., Kolios M.C., Karshafian R.* Nonlinear dynamics of acoustic bubbles excited by their pressure-dependent subharmonic resonance frequency: influence of the pressure amplitude, frequency, encapsulation and multiple bubble interactions on oversaturation and enhancement of the subharmonic signal. *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 103, no. 1. P. 429–466. DOI: 10.1007/s11071-020-06163-8
21. *Alabuzhev A.A., Konovalov V.V., Lyubimov D.V.* Deformatsiya i nelineyny rezonans kapli v vibratsionnom pole. *Vibratsionnyye efekty v gidrodinamike*. Vol. 10. Perm: Perm university, 1998. P. 7–16.
22. *Kawaji M., Lyubimov D., Ichikawa N., Lyubimova T., Kariyasaki A., Tryggvason B.* The effects of forced vibration on the motion of a large bubble under microgravity. *Microgravity Science and Technology*. 2021. Vol. 33, no. 5. 62. DOI: 10.1007/s12217-021-09908-1
23. *Joseph D.D., Wang J.* The dissipation approximation and viscous potential flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 2004. Vol. 505. P. 365–377. DOI: 10.1017/S0022112004008602
24. *Wang J., Joseph D.D., Funada T.* Pressure corrections for potential flow analysis of capillary instability of viscous fluids. *Journal of Fluid Mechanics*. 2005. Vol. 522. P. 383–394. DOI: 10.1017/s0022112004002009
25. *Nayfeh A.H.* *Perturbation Methods*. Wiley, 1973. 448 p.
26. *Chandrasekhar S.* The oscillations of a viscous liquid globe. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1959. Vol. s3–9, no. 1. P. 141–149. DOI: 10.1112/plms/s3-9.1.141
27. *Prosperetti A.* Normal mode analysis for the oscillations of a viscous liquid drop in an immiscible liquid. *Journal de Mécanique*. 1980. Vol. 19. P. 149–182.
28. *Hirt C.W., Nichols B.D.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*. 1981. Vol. 39, no. 1. P. 201–225. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5
29. *Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C.* A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*. 1992. Vol. 100, no. 2. P. 335–354. DOI: 10.1016/0021-9991(92)90240-Y
30. *Daryaei A., Hanafizadeh P., Akhavan-Behabadi M.A.* Three-dimensional numerical investigation of a single bubble behavior against non-linear forced vibration in a microgravity environment. *International Journal of Multiphase Flow*. 2018. Vol. 109. P. 84–97. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.06.024
31. *Leonard B.P.* A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1979. Vol. 19, no. 1. P. 59–98. DOI: 10.1016/0045-7825(79)90034-3
32. *Rider W.J., Kothe D.B.* Reconstructing volume tracking. *Journal of computational physics*. 1998. Vol. 141, no. 2. P. 112–152. DOI: 10.1006/jcph.1998.5906
33. *ANSYS User's Guide / ANSYS*. Release 22.1. 2022