

Научная статья

Численное моделирование собственных колебаний частично заполненной жидкостью усечённой конической оболочки в поле силы тяжести

С.А. Бочкарёв, А.Н. Сенин

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Представлены результаты исследований круговых усечённых конических оболочек, частично заполненных идеальной жидкостью, на свободной поверхности которой принимаются во внимание гравитационные эффекты. Математическая постановка задачи динамики упругого тела выполнена на основе вариационного принципа возможных перемещений и соотношений классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява. Поведение сжимаемой жидкости описывается уравнениями потенциальной теории, которые вместе с граничными условиями преобразуются к слабой форме с помощью метода Бубнова–Галёркина. Гидродинамическое давление, действующее со стороны жидкости на внутреннюю поверхность оболочки, вычисляется по линеаризованному уравнению Бернулли. Решение задачи осуществляется в осесимметричной постановке с использованием полуаналитического варианта метода конечных элементов. Для вычисления собственных частот применяется метод QR-преобразования. Идентификация связанных мод колебаний в полном частотном спектре реализуется посредством процедуры итерационной динамической конденсации, основанной на методе Мюллера. Достоверность результатов, получаемых в рамках разработанной численной модели, подтверждена путём сравнения с известными данными на примерах упругой и жёсткой оболочки. Проанализировано влияние угла конусности на низшие частоты плескательных и связанных мод колебаний для оболочек с различными граничными условиями (жёсткой заделкой и свободным опиранием на обоих концах, консольным закреплением), разными линейными размерами и уровнем заполнения жидкостью. Продемонстрировано, что характер изменения низших частот колебаний обуславливается величиной угла при вершине и определяется его геометрическими параметрами для связанных мод и не зависит от них в случае плескательных мод.

Ключевые слова: усечённая коническая оболочка, классическая теория оболочек, идеальная сжимаемая жидкость, МКЭ, свободная поверхность, плескание, собственные колебания, динамическая конденсация

Получение: 16.10.2025 / *Публикация онлайн:* 10.12.2025

УДК 539.3

1. Введение

При частичном заполнении резервуаров жидкостью её свободная поверхность совершает движение. Это явление, обусловленное воздействием гравитационного поля, известно как плескание [1]. В результате внешних возмущений (сейсмических, вибрационных, возникающих в процессе движения или полёта) колебания свободной поверхности приводят к росту гидродинамической нагрузки, которая может деформировать стенки резервуаров вплоть до потери ими устойчивости или разрушения. Во избежание катастрофических последствий частоты колебаний упругой конструкции и плескания жидкости должны быть достаточно далеки друг от друга в частотном спектре. Чтобы ответить на вопрос, как соблюсти это условие, требуется глубокое изучение процесса колебаний системы «оболочка–жидкость».

Теоретические и экспериментальные исследования тонкостенных тел вращения, частично заполненных жидкостью, как наиболее интенсивно используемых в различных областях техники (в качестве топливных баков ракет-носителей, элементов водопроводных башен, резервуаров для хранения жидкостей различного назначения) имеют длительную историю [2–4]. В большей степени изучены вертикально и реже горизонтально ориентированные цилиндрические оболочки [5–40]. В этих работах разными методами в линейной постановке анализируются, как правило, связанные собственные и вынужденные колебания оболочек, в том числе подкреплённых и изготовленных из различных материалов. Объединяет публикации наличие гравитационного граничного условия на свободной поверхности жидкости, описываемой уравнениями потенциальной теории или линеаризованными уравнениями Эйлера. Только в некоторых из работ уделяется внимание плескательным частотам и отвечающим им формам колебаний, но в основном, это касается консольно закреплённых конструкций. В частности, в работе [8] показано, что частота плескания значительно увеличивается только до определённого значения отношения высоты жидкости к радиусу оболочки. В статье [10] представлены зависимости, из которых следует, что частоты плескания возрастают с повышением окружной гармоники. В публикации [12] продемонстрировано, что уровень заполнения оболочки жидкостью оказывает незначительное влияние на частоты плескания. В [20] выявлено, что для фиксированной окружной гармоники имеет место значительное взаимодействие между низшими плескательными и связанными модами, когда частоты колебаний сближаются. Авторы работы [21] показывают, что плескательные колебания жидкости в контейнере могут быть снижены посредством размещения в нём жёстких или упругих перегородок. В статье [22] установлено, что плескательные частоты являются похожими для оболочек с различными комбинациями граничных условий и уровнем подкрепления, если они имеют одинаковые геометрические размеры. Значительное влияние угла армирования на высоту всплеска жидкости в композитной оболочке в случае гармонического и сейсмического воздействий обнаружено в [34]. Двумерные или трёхмерные формы колебаний свободной поверхности получены в работах [7, 11, 16, 20, 25, 35, 38].

В значительно меньшей степени в открытом доступе представлены публикации с исследованием частично заполненных деформируемых конических оболочек [40, 41]. Анализ собственных колебаний свободной

поверхности жидкости в жёстких усечённых конических оболочках прямой и перевёрнутой форм осуществлён в работах [42–46]. Детальный обзор публикаций в этой области приведён в [47]. В недавних статьях [48, 49] предложенная постановка позволяет учитывать влияние гравитационных сил, но не подразумевает возможность определения плескательных частот. Насколько известно авторам, только в работе [41] приводятся зависимости плескательных и связанных частот от угла конусности. Заключается, что рост плескательных частот с уменьшением угла при вершине не зависит от геометрических параметров оболочки, а в случае связанных частот имеет место кардинальное различие в поведении коротких и более длинных оболочек. Поскольку эти результаты получены для конкретной комбинации граничных условий, уровня жидкости и номера окружной гармоники, требуется их проверка при других конфигурациях задачи и, в случае подтверждения, обобщение. Именно в этом заключается цель исследования, обсуждаемого в настоящей статье.

Итак, собственные колебания оболочки, частично заполненной жидкостью, на свободной поверхности которой задаётся гравитационное граничное условие, характеризуются появлением плескательных частот, величина которых, как правило, существенно уступает связанным частотам колебаний системы «упругая конструкция–жидкость». При определённой комбинации геометрических и физико-механических параметров, а также условий нагружения плескательные моды становятся сопоставимыми со связанными модами [16]. Это снижает эффективность решения задачи, если её целью является получение и анализ только связанных мод [50]. Для решения этой проблемы в работе [51] был предложен итерационный алгоритм, построенный на основе метода динамической конденсации, который позволяет учитывать эффекты плескания свободной поверхности, но исключать (редуцировать) из общего спектра частот не интересующие моды колебаний. В данной работе процедура редукции будет применяться для идентификации низшей связанной моды колебаний в полном частотном спектре, заранее вычисленном в результате решения стандартной проблемы собственных значений. По мнению авторов, этот затратный в вычислительном плане подход является, тем не менее, более производительным, чем построение и анализ собственных форм колебаний для заранее неизвестной части частотного спектра.

2. Постановка задачи

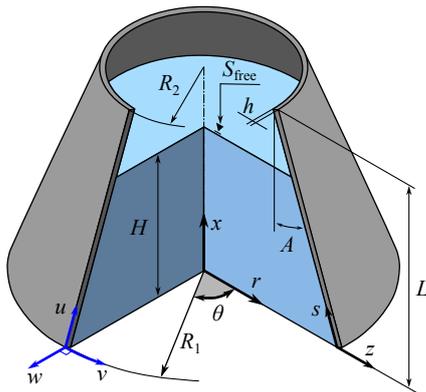


Рис. 1. Усечённая коническая оболочка, частично заполненная жидкостью

Рассматривается прямая вертикально ориентированная усечённая коническая оболочка вращения (Рис. 1) длиной L , радиусами R_1 и R_2 , углом при вершине A и толщиной h , частично (на высоту H) заполненная идеальной сжимаемой жидкостью объёмом V_f . На свободной поверхности жидкости S_{free} принимаются во внимание эффекты плескания, обусловленные воздействием гравитационного поля. Под конической оболочкой прямой формы понимается оболочка, у которой радиус нижнего конца превышает радиус верхнего. Ставится задача исследования влияния значения угла конусности A на низшие плескательные и связанные частоты колебаний при различных параметрах: отношении L/R_1 , уровне жидкости H , комбинация граничных условий, задаваемых на концах упругого тела. При фиксированной высоте оболочки максимально допустимый угол определяется формулой $\text{tg}A < R_2/L$ и, следовательно, при изменении угла A с постоянным шагом для каждого типоразмера будет свой диапазон варьирования угла, сужающийся с ростом отношения L/R_1 . Предпочтительнее в качестве варьируемой величины использовать параметр $\xi = R_2/R_1$. В таком случае угол конусности A становится переменным, а безразмерное отношение радиусов ξ позволяет сопоставлять оболочки разной геометрии: от почти полного конуса ($\xi \approx 0$) до цилиндра ($\xi = 1$).

3. Основные соотношения

Идеальная сжимаемая жидкость, заполняющая объём V_f , в рамках потенциальной теории описывается волновым уравнением, которое в случае малых возмущений формулируется в виде [52]:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где ϕ — потенциал скорости, (r, θ, x) — цилиндрические координаты, c_f — скорость звука в жидкости. Потенциал скорости ϕ должен удовлетворять следующим условиям:

– на смоченной поверхности Σ

$$\Sigma = S_f \cap S_s: \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}; \tag{2}$$

– на жёсткой поверхности

$$x = 0: \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Здесь S_f и S_s — поверхности, ограничивающие объёмы: жидкости — V_f , и оболочки — V_s ; \mathbf{u} — вектор перемещений оболочки; \mathbf{n} — вектор единичной внешней нормали к смоченной поверхности. Давление жидкости p_f на смоченной поверхности Σ вычисляется по линеаризованной формуле Бернулли:

$$p_f = -\rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (4)$$

где ρ_f — плотность жидкости.

Предполагается, что свободная поверхность жидкости S_{free} фактически находится на некоторой высоте η относительно своего среднего значения:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial n}.$$

Используя обобщённый вариант уравнения Бернулли

$$p_f + \rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho_f g \eta = 0,$$

из условия на свободной поверхности $p_f = 0$ получим:

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (5)$$

где g — ускорение свободного падения. Дифференцируя обе части (5) по времени и подставляя результат в (4), окончательно придём к уравнению плескания свободной поверхности:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (6)$$

С помощью метода Бубнова–Галёркина волновое уравнение (1) с учётом граничных условий (2), (3) и (6) преобразуем к слабой форме [53]:

$$\int_{V_f} \nabla F_n \cdot \nabla \hat{\phi} dV + \int_{V_f} F_n \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} dV - \int_{\Sigma} F_n \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{\text{free}}} F_n \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} dS = 0 \quad (n = \overline{1, m_f}), \quad (7)$$

где $\hat{\phi}$ и $\hat{\mathbf{u}}$ — пробные решения для потенциала скорости и вектора перемещений оболочки, F_n и m_f — базисные функции и их количество.

Компоненты E_{ij} вектора деформаций классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява, запишем в виде [54]:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, & E_{22} &= \varepsilon_{22} + z\kappa_{22}, & E_{12} &= \varepsilon_{12} + 2z\kappa_{12}, \\ \varepsilon_{11} &= u' + r_1 w, & \varepsilon_{22} &= v^* + \psi u + r_2 w, & \varepsilon_{12} &= v' + u^* - \psi v, & \kappa_{11} &= \theta_1', \\ \kappa_{22} &= \theta_2^* + \psi \theta_1, & \kappa_{12} &= \theta_1^* - \psi \theta_2 + r_2 v', & \theta_1 &= -w' + r_1 u, & \theta_2 &= -w^* + r_2 v, \\ (\dots)' &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial(\dots)}{\partial s}, & (\dots)^* &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial(\dots)}{\partial \theta}, & \psi &= \frac{1}{A_2} A_2'. \end{aligned}$$

Здесь (s, θ, z) — криволинейные координаты; A_1, A_2 — коэффициенты Ламе; r_1, r_2 — кривизны; u, v, w — меридиональная, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений оболочки $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$; θ_1, θ_2 — углы поворота недеформируемой нормали.

Физические соотношения, устанавливающие связь между \mathbf{T} — вектором усилий и моментов, и $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}\}^T$ — вектором деформаций, представим в матричном виде:

$$\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, S, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (8)$$

Коэффициенты, входящие в матрицу жёсткостей \mathbf{D} , определяются по формулам:

$$\begin{aligned} (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ \bar{Q}_{11} = \bar{Q}_{22} &= \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad \bar{Q}_{12} = \nu \bar{Q}_{11}, \quad \bar{Q}_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}, \end{aligned}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала оболочки.

Математическую постановку задачи динамики конической оболочки выполним с использованием вариационного принципа возможных перемещений, который с учётом работы сил инерции и соотношений (4) и (8) принимает вид:

$$\int_{S_s} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dS + \int_{V_s} \rho_s \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dV - \int_{\Sigma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} dS = 0, \quad (9)$$

где ρ_s — плотность материала оболочки, $\mathbf{P} = \{0, 0, p_f\}^T$ — вектор поверхностной нагрузки.

4. Численная реализация

Численная реализация задачи выполнена с помощью полуаналитического варианта метода конечных элементов (МКЭ) [55], основанного на представлении решения в виде ряда Фурье по окружной координате θ :

$$(u, w, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} (u_j, w_j, \phi_j) \cos j\theta, \quad v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \sin j\theta, \quad (10)$$

где j — номер окружной гармоники. Выразив в (10) искомые переменные через их узловые значения, получили известные матричные соотношения:

$$\mathbf{d} = \mathbf{N} \mathbf{d}^e, \quad \mathbf{f} = \mathbf{F} \mathbf{f}^e, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}^e, \quad (11)$$

где \mathbf{N} , \mathbf{F} — матрицы функций формы, \mathbf{d}^e , \mathbf{f}^e — векторы узловых значений для перемещений $\hat{\mathbf{u}}$ и потенциала скорости $\hat{\phi}$, \mathbf{B} — матрица связи деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ с узловыми значениями.

Дискретизация оболочки осуществлена высокоточным конечным элементом (КЭ) в виде усечённого конуса с аппроксимацией меридиональной и окружной компонент вектора перемещений кубическим полиномом, а нормальной компоненты — полиномом седьмой степени [56]. Для жидкости использован треугольный КЭ с линейной аппроксимацией потенциала скорости.

Стандартные процедуры МКЭ позволили получить из соотношений (7) и (9) с учётом (11) следующую связанную систему уравнений, описывающую взаимодействие оболочки с жидкостью:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = 0, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_f + \mathbf{M}_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{C}_{fs} \\ \rho_f \mathbf{C}_{fs}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix}.$$

Здесь \mathbf{d} , \mathbf{f} — векторы обобщённых перемещений и потенциала скорости; точками сверху обозначены производные по времени. Типовые матрицы (масс \mathbf{M} , демпфирования \mathbf{C} и жёсткости \mathbf{K}) для отдельных КЭ сформированы следующим образом:

$$\mathbf{K}_f = \sum_{m_f V_f} \int \nabla \mathbf{F}^T \nabla \mathbf{F} dV, \quad \mathbf{M}_f = \sum_{m_f V_f} \int \frac{1}{c_f^2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dV, \quad \mathbf{M}_g = \sum_{m_g S_{free}} \int \frac{1}{g} \mathbf{F}^T \mathbf{F} dS,$$

$$\mathbf{C}_{fs} = \sum_{m_\Sigma \Sigma} \int \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{N}} dS, \quad \mathbf{K}_s = \sum_{m_s S_s} \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS, \quad \mathbf{M}_s = \sum_{m_s V_s} \int \rho_s \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV.$$

При этом $\bar{\mathbf{N}}$ — функции формы нормальной составляющей вектора перемещений оболочки; m_s , m_Σ и m_g — количество КЭ, на которые разбиты оболочка, а также смоченная и свободная поверхности соответственно.

Уравнение (12) переписали в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} = 0, \quad (13)$$

где $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$, \mathbf{I} — единичная матрица. Решение системы (13) искали в экспоненциальной форме:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} \exp(i\omega t), \quad i = \sqrt{-1}, \quad (14)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$ — некоторые функции координат, ω — собственная частота колебаний, i — мнимая единица.

С учётом представления (14) систему уравнений (13) свели к стандартной проблеме собственных значений:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} = i\omega \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

Собственные частоты ω системы (15), вычисление которых осуществлено методом QR-преобразования [57], включают как плескательные, так и связанные моды колебаний. Различие между ними не всегда очевидно. Для идентификации низшей связанной моды в полном частотном спектре использована модификация метода итерационной динамической конденсации, предложенная в работе [51]. Для этого в уравнении (12) с учётом (14) выделили исключаемые (редуцируемые) узловые неизвестные \mathbf{x}_s , относящиеся к потенциалу скорости жидкости ϕ на свободной поверхности:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{mm} & \mathbf{C}_{ms} \\ \mathbf{C}_{sm} & \mathbf{C}_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

После выражения одних переменных через другие из (16) получена следующая система уравнений относительно остальных узловых неизвестных \mathbf{x}_m [51]:

$$-\omega^2 \bar{\mathbf{M}}\mathbf{x}_m + i\omega \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}_m + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{x}_m = 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= \mathbf{M}_{mm} + \mathbf{M}_{ms}\mathbf{R}, & \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}_{mm} + \mathbf{C}_{ms}\mathbf{R}, & \bar{\mathbf{K}} &= \mathbf{K}_{mm} + \mathbf{K}_{ms}\mathbf{R}, \\ \mathbf{R} &= -(\omega^2 \mathbf{M}_{ss} + i\omega \mathbf{C}_{ss} + \mathbf{K}_{ss})^{-1} (\omega^2 \mathbf{M}_{sm} + i\omega \mathbf{C}_{sm} + \mathbf{K}_{sm}). \end{aligned}$$

Матрица преобразования \mathbf{R} является частотно зависимой, поэтому для решения редуцированной системы (17) необходима итерационная процедура. Такая процедура детально описана в [51]. Поскольку на её каждом шаге отыскивается только одно значение частоты, то эффективность вычислений в большей мере определяется выбором подходящего метода решения частичной проблемы собственных значений. В работе [51] используется метод Арнольди, интегрированный в среду MATLAB. При этом квадратичная проблема собственных значений (17) сводится к обобщённой для несимметричных матриц удвоенной размерности. Реализация этого метода в коммерческой библиотеке программ численного и статистического анализа (International Mathematical and Statistical Library — IMSL) для языка Intel FORTRAN не оптимизирована и не поддерживается многопоточными вычислениями. Кроме этого, согласно [58], в методе Арнольди эффективное нахождение наименьших по модулю собственных значений возможно только в случае применения обратного сдвига, что требует дополнительных матричных операций, приводящих к росту погрешности вычислений.

Исходя из сказанного, в настоящей работе процедура итерационной динамической конденсации строилась на основе метода Мюллера [59], который не требует каких-либо избыточных операций с матрицами в (17). Невысокая сходимость метода компенсировалась в данном случае тем, что начальные приближения задавались в окрестности текущего приближения динамической конденсации.

5. Верификация численного алгоритма

В связи с отсутствием подходящих для сравнения данных для конических оболочек со свободной поверхностью жидкости верификация численного алгоритма осуществлялась на вертикальной свободно опёртой цилиндрической оболочке, частично заполненной жидкостью, при параметрах оболочки $L = 30$ м, $R = 25$ м, $h = 0.03$ м, $H = 21.6$ м, $E = 2.06 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, $\rho_s = 7850$ кг/м³, и жидкости: $\rho_f = 1000$ кг/м³, $c_f = 1500$ м/с. Для указанной конфигурации задачи аналитическое (методом Релея–Ритца) и численное (МКЭ) решения выполнены в работах [16, 51]. В таблице 1 приведены собственные частоты колебаний ω , вычисленные для полной и редуцированной постановок. Здесь m — число полуволн в меридиональном направлении.

Таблица 1 демонстрирует хорошее соответствие результатов, рассчитанных с помощью описанного алгоритма, известным из литературы данным. Процедура итерационной динамической конденсации позволила полностью

Таблица 1. Собственные частоты колебаний ω (рад/с) свободно опёртой цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью ($j = 4$)

Число полуволн в меридиональном направлении m	Плескательные частоты			Связанные частоты				
	Источник данных			Источник данных				
	[16]	[51]	расчёт авторов, полная система	[16]	[51], полная система	[51], редуцир. система	расчёт авторов, полная система	расчёт авторов редуцир. система
1	1.4425	1.4431	1.4428	13.658	14.061	14.061	14.059	14.059
2	1.9081	1.9111	1.9118	34.441	34.614	34.614	34.612	34.612
3	2.2305	2.2382	2.2413	49.692	49.532	49.532	49.553	49.553
4	2.5027	2.5176	2.5245	61.877	61.641	61.641	61.716	61.716
5	2.7444	2.7695	2.7819	71.804	71.793	71.793	71.943	71.943

исключить плескательные моды колебаний: результаты двух расчетов совпадают, но в полной системе плескательные частоты ниже связанных, а в редуцированной — они отсутствуют.

Для плескательных частот колебаний верификация проведена на решении для недеформируемой конической оболочки путём сопоставления с данными из [43, 44]. В первой из работ применён численно-аналитический подход, основанный на вариационной схеме Ритца–Треффгца, а во второй использован метод граничных элементов. В вычислениях больший радиус оставался неизменным ($R_1 = 1$ м), а высота столба жидкости определялась как $H = (R_1 - R_2) \operatorname{ctg} A$, где $A = 30$ град. В рамках описанного выше алгоритма колебания жидкости в жёсткой оболочке получены при задании $C = 0$ в выражении (12). В таблице 2 приведены значения безразмерных плескательных частот колебаний $\sigma = \omega^2 R_1 / g$, найденные разными методами. По данным из таблицы 2 видно, что КЭ решение хорошо согласуется с данными из других работ. Исключением является вариант с максимальной высотой столба жидкости ($R_2 = 0.2$ м), где различие в результатах самое существенное. Аналогичное поведение с ростом угла конусности выявлено в [60] при решении конечно-элементным и численно-аналитическим методами, но в случае связанных частот.

Таблица 2. Плескательные частоты колебаний жидкости σ в жёсткой конической оболочке

Источник данных	Параметры конической оболочки, [м]				
	$R_2 = 0.2$	$R_2 = 0.4$	$R_2 = 0.6$	$R_2 = 0.8$	$R_2 = 0.9$
$j = 1, m = 1$					
[43]	11.332	5.629	3.515	1.661	0.726
[44]	11.303	5.626	3.481	1.651	0.732
Расчёт авторов	11.448	5.639	3.517	1.662	0.728
$j = 2, m = 1$					
[43]	17.760	8.967	5.941	3.724	1.923
[44]	17.939	8.965	5.941	3.726	-
Расчёт авторов	18.403	9.001	5.946	3.726	1.927

6. Результаты расчётов

В реализованных численно примерах рассмотрены частично заполненные жидкостью конические оболочки прямой формы ($E = 2 \times 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$, $\rho_s = 7830$ кг/м³, $h = 0.0254$ м), каждый из концов которых или жёстко закреплён (C) $u = v = w = 0$, $\partial w / \partial s = 0$, или свободно опёрт (S) $v = w = 0$, или не закреплён (F). В представлении полученных результатов использован безразмерный параметр частоты $\Omega = \omega L (\rho_s / E)^{0.5} \times 10^{-1}$, у которого нижний индекс «с» соответствует связанной частоте, а индекс «s» — плескательной.

На рисунке 2 показаны зависимости низших частот колебаний Ω от отношения радиусов ξ пустых оболочек, имеющих различные граничные условия. Графики построены для трёх типоразмеров $\zeta = L / R_1$, которым отвечают значения радиуса основания конуса $R_1 = 18, 12, 6$ м. Размеры выбраны произвольным образом и для наглядности ранжированы на графиках по возрастанию ζ через безразмерный параметр. В размерных величинах наибольшее значение частоты соответствует короткой оболочке ($\zeta = 0.67$), как самой жёсткой. При повышении значения угла конусности (уменьшении параметра ξ) рост площади боковой поверхности этой оболочки превышает 42% в сравнении с цилиндрической оболочкой радиуса R_1 , что привело к снижению частотного спектра. Следует отметить, что для данного значения ζ зависимость частоты от угла конусности для разных комбинаций граничных условий близка к полученной при условии сохранения среднего радиуса $(R_1 + R_2) / 2$ постоянным и равным радиусу эквивалентной цилиндрической оболочки. В частности, при консольном закреплении CF (нижний конец жёстко

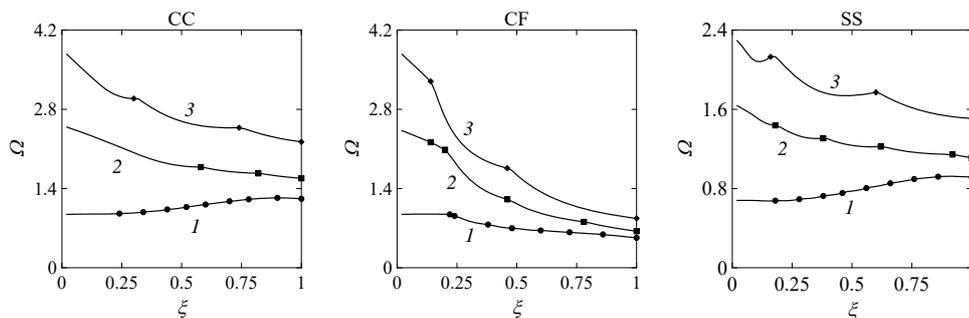


Рис. 2. Зависимости безразмерных низших частот колебаний Ω пустой конической оболочки от отношения радиусов ξ для различных значений параметра ζ : 0.67 (кривая 1); 2.0 (2); 5.0 (3), при комбинациях граничных условий C, F, S на концах оболочки

закреплён, верхний является свободным), наоборот, имеет место, как и в работах [48, 49], рост низшей частоты, что отражает особенность прямой формы конической оболочки, в отличие от её перевёрнутого аналога (см. в [60]). При двух других типоразмерах рост площади боковой поверхности находится, соответственно, в пределах 6% и 2%, а увеличение частоты обеспечивается благодаря повышению изгибной и крутильной жёсткостей.

Изменение жёсткости конструкции, обусловленное геометрией, физико-механическими свойствами материала, внешним воздействием, оказывает влияние не только на спектр собственных частот колебаний, но и на окружную моду, соответствующую низшей частоте. Немонотонный характер кривых, представленных на рисунке 2, хорошо отражает эту особенность. Здесь маркерами отмечены те значения углов при вершине, при которых происходит смена формы колебаний. Волновое число для низшей частоты возрастает с увеличением ограничений на концах конструкции и уменьшается с ростом угла конусности и отношения ζ . В частности, при жёсткой заделке концов (CC) и $\zeta = 0.67$ номер окружной моды последовательно снижается с $j = 16$ до $j = 8$, при SS — с 14 до 6. При консольном закреплении (CF) снижение j с 11 до 5 сменяется скачкообразным повышением до 8 при высоких углах конусности A .

На рисунке 3 показаны зависимости низших плескательных (Ω_s) и связанных (Ω_c) частот колебаний от отношения радиусов ξ оболочек, имеющих различные граничные условия. Графики построены для четырёх

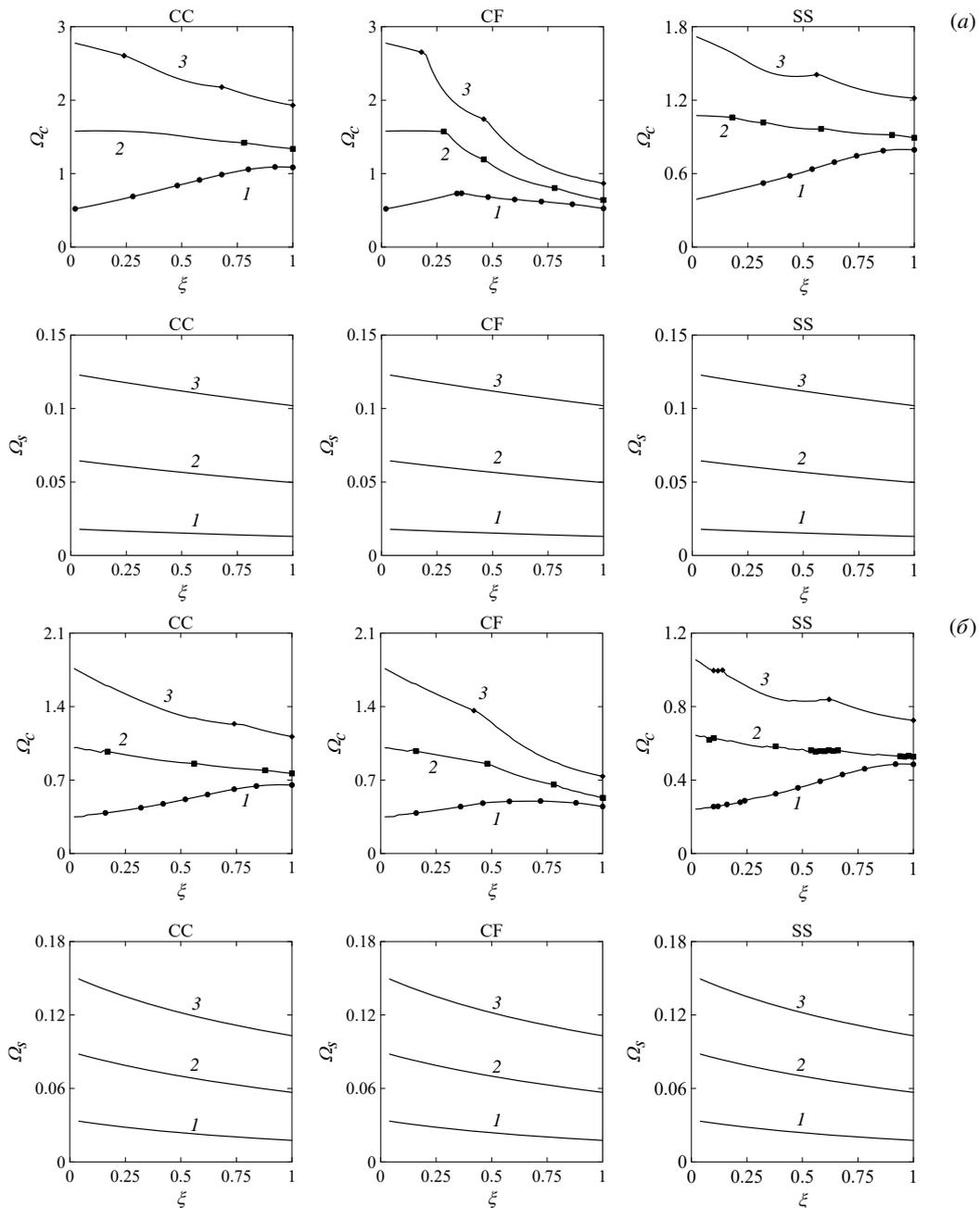


Рис. 3. Зависимости безразмерных низших связанных Ω_c и плескательных Ω_s частот колебаний конической оболочки от отношения радиусов ξ для различных значений параметра ζ : 0.67 (кривая 1); 2.0 (2); 5.0 (3), при комбинациях граничных условий C, F, S на концах оболочки; уровень заполнения оболочки ψ : 0.25 (а), 0.5 (б), 0.75 (в), 0.99 (г)

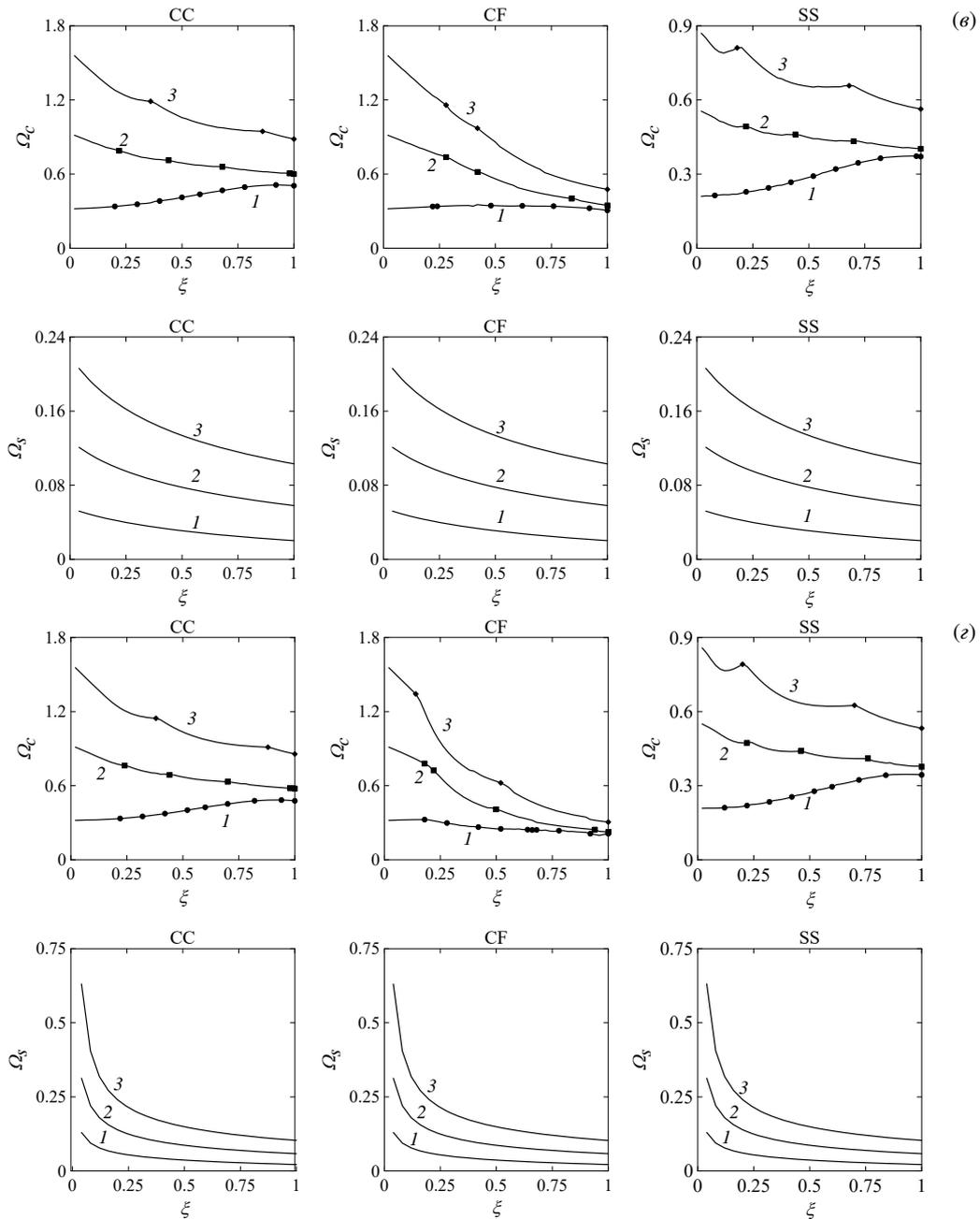


Рис. 3. Продолжение

уровней заполнения $\psi = H/L = 0.25, 0.50, 0.75, 0.99$ при одних и тех же значениях ζ . Жидкость, находящаяся внутри оболочки, благодаря присоединённой массе, приводит к снижению связанных частот колебаний Ω_c , но не оказывает качественного влияния на их зависимости от угла при вершине конуса. Последовательности окружных гармоник, отвечающих низшей частоте, также меняются незначительно. При этом углы конусности, при которых осуществляются переходы от одной формы колебаний к другой, различаются.

Сопоставляя графики на рисунке 3 с кривыми для пустых оболочек (Рис. 2), можно сделать следующий вывод: характер изменения связанных частот колебаний от угла конусности в значительной мере зависит как от геометрических параметров оболочки, так и от заданных для неё граничных условий, а вклад жидкой среды является только количественным. Тем не менее, для некоторых конфигураций имеет место исключение, связанное, возможно, с вычислительными аспектами. Так, если при малых уровнях жидкости плескательная и связанная части спектра практически не пересекаются, то с повышением уровня низшая связанная частота становится сопоставимой с одной из плескательных. О таком эффекте сообщается в работе [20]. Процедура редукции даёт погрешность, которая не позволяет однозначно идентифицировать нужную частоту. Вычисления с более мелким шагом приводят к осцилляции нижней частоты, сопровождающейся частым изменением волнового числа. Указанные сложности возникли при анализе свободно опертой оболочки с уровнем заполнения $\psi = 0.5$ и $\zeta = 2$ (Рис. 3б).

Из зависимостей для частот Ω_s , показанных на рисунке 3, видно, что результаты для всех комбинаций граничных условий и любого уровня заполнения являются идентичными, что говорит об отсутствии влияния упругости оболочки на эту часть спектра. Аналогичный вывод сделан в статье [22]. Для всех рассмотренных конфигураций задачи низшей плескательной частоте всегда соответствует первая окружная гармоника ($j = 1$, балочная мода колебаний), что согласуется с результатами работы [10]. Повышение плескательной частоты тем значительнее, чем выше уровень жидкости даже в случае цилиндрической оболочки, что не совпадает с данными из [12]. Также плескательная частота растёт с повышением угла конусности, что в проведённом исследовании соответствует уменьшению свободной поверхности жидкости. Особенно этот рост существенен при уровне заполнения $\psi = 0.99$. Данные результаты качественно согласуются с графиками, приведёнными в [8]. Численными расчётами также выявлено, что для некоторых конфигураций первая связанная частота для текущей гармоники становится низшей во всём спектре, но, тем не менее, более высокой, чем плескательная при $j = 1$.

7. Заключение

Представлены результаты численного исследования усечённой упругой конической оболочки прямой формы, частично заполненной идеальной сжимаемой жидкостью, описываемой уравнениями потенциальной теории. На свободной поверхности жидкости принимаются во внимание эффекты волнообразования, обусловленные гравитационными силами. С целью повышения вычислительной эффективности идентификация связанных мод колебаний в полном частотном спектре осуществляется с применением итерационной динамической конденсации.

Проанализировано поведение плескательных и связанных мод колебаний при различных параметрах задачи: уровнях жидкости в оболочке, углах конусности, линейных размерах оболочек, граничных условиях на их концах. Установлено, что характер зависимостей связанных частот колебаний от угла конусности в большей степени определяется геометрией самой оболочки и заданными для неё кинематическими граничными условиями. Низшая плескательная частота, всегда соответствующая балочной моде колебаний, не зависит от упругих свойств оболочки и повышается как с ростом высоты столба жидкости, так и с уменьшением площади свободной поверхности. Максимальные значения низшей плескательной частоты достигаются при предельных углах конусности и уровне заполнения, близком к полному. Выявлено, что возможны такие комбинации геометрических размеров и уровня жидкости, при которых связанная частота колебаний является низшей во всём спектре, что подчёркивает необходимость принятия во внимание гравитационных эффектов на свободной поверхности при анализе колебательных характеристик системы «оболочка–жидкость».

Работа выполнена в рамках государственного задания (регистрационный номер темы 124020700047-3) и Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020–2025 гг. (реализация метода итерационной динамической конденсации).

Литература

1. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 970 p.
2. Paidoussis M.P. Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow. Vol. 1, 2nd edition. London: Elsevier Academic Press, 2014. 942 p.
3. Eswaran M., Saha U.K. Sloshing of liquids in partially filled tanks - A review of experimental investigations // Ocean Systems Engineering. 2011. Vol. 1, no. 2. P. 131–155. DOI: 10.12989/ose.2011.1.2.131
4. Zingoni A. Liquid-containment shells of revolution: A review of recent studies on strength, stability and dynamics // Thin-Walled Structures. 2015. Vol. 87. P. 102–114. DOI: 10.1016/j.tws.2014.10.016
5. Григolloк Э.И., Шклярчук Ф.Н. Уравнения возмущенного движения тела с тонкостенной упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью // Прикладная математика и механика. 1970. Т. 34, № 3. С. 401–411.
6. Кулешов В.Б., Швейко Ю.Ю. Неосесимметричные колебания цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. 1971. № 3. С. 126–136.
7. Kondo H. Axisymmetric Free Vibration Analysis of a Circular Cylindrical Tank // Bulletin of JSME. 1981. Vol. 24, no. 187. P. 215–221. DOI: 10.1299/jsme1958.24.215
8. Balendra T., Ang K.K., Paramasivam P., Lee S.L. Free vibration analysis of cylindrical liquid storage tanks // International Journal of Mechanical Sciences. 1982. Vol. 24, no. 1. P. 47–59. DOI: 10.1016/0020-7403(82)90020-0
9. Chiba M., Yamaki N., Tani J. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid—Part I: Theoretical analysis // Thin-Walled Structures. 1984. Vol. 2, no. 3. P. 265–284. DOI: 10.1016/0263-8231(84)90022-3
10. Chiba M., Yamaki N., Tani J. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid—Part II: Numerical results // Thin-Walled Structures. 1984. Vol. 2, no. 4. P. 307–324. DOI: 10.1016/0263-8231(84)90002-8
11. Gupta R.K., Hutchinson G.L. Free vibration analysis of liquid storage tanks // Journal of Sound and Vibration. 1988. Vol. 122, no. 3. P. 491–506. DOI: 10.1016/S0022-460X(88)80097-X
12. Gonçalves P.B., Ramos N.R.S.S. Free vibration analysis of cylindrical tanks partially filled with liquid // Journal of Sound and Vibration. 1996. Vol. 195, no. 3. P. 429–444. DOI: 10.1006/jsvi.1996.0436

13. Babu S.S., Bhattacharyya S.K. Finite element analysis of fluid-structure interaction effect on liquid retaining structures due to sloshing // Computers & Structures. 1996. Vol. 59, no. 6. P. 1165–1171. DOI: 10.1016/0045-7949(95)00271-5
14. Lakis A.A., Neagu S. Free surface effects on the dynamics of cylindrical shells partially filled with liquid // Journal of Sound and Vibration. 1997. Vol. 207, no. 2. P. 175–205. DOI: 10.1006/jsvi.1997.1074
15. Sigrist J.-F. Modal analysis of fluid-structure interaction problems with pressure-based fluid finite elements for industrial applications // The International Journal of Multiphysics. 2007. Vol. 1, no. 1. P. 123–149. DOI: 10.1260/175095407780130553
16. Amabili M., Païdoussis M.P., Lakis A.A. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom // Journal of Sound and Vibration. 1998. Vol. 213, no. 2. P. 259–299. DOI: 10.1006/jsvi.1997.1481
17. Jeong K.-H., Lee S.-C. Hydroelastic vibration of a liquid-filled circular cylindrical shell // Computers & Structures. 1998. Vol. 66, no. 2/3. P. 173–185. DOI: 10.1016/S0045-7949(97)00086-2
18. Okazaki K., Tani J., Sugano M. Free Vibrations of a Laminated Composite Circular Cylindrical Shell Partially Filled with Liquid. // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series C. 1999. Vol. 65, no. 640. P. 4597–4604. DOI: 10.1299/kikaic.65.4597
19. Pal N.C., Bhattacharyya S.K., Sinha P.K. Coupled Slosh Dynamics of Liquid-Filled, Composite Cylindrical Tanks // Journal of Engineering Mechanics. 1999. Vol. 125, no. 4. P. 491–495. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(1999)125:4(491)
20. Amabili M. Eigenvalue problems for vibrating structures coupled with quiescent fluids with free surface // Journal of Sound and Vibration. 2000. Vol. 231, no. 1. P. 79–97. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2678
21. Biswal K.C., Bhattacharyya S.K., Sinha P.K. Dynamic response analysis of a liquid-filled cylindrical tank with annular baffle // Journal of Sound and Vibration. 2004. Vol. 274, no. 1/2. P. 13–37. DOI: 10.1016/S0022-460X(03)00568-6
22. Kim Y.-W., Lee Y.-S., Ko S.-H. Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners // Journal of Sound and Vibration. 2004. Vol. 276, no. 3–5. P. 869–897. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.08.008
23. Lakis A.A., Bursuc G., Toorani M.H. Sloshing effect on the dynamic behavior of horizontal cylindrical shells // Nuclear Engineering and Design. 2009. Vol. 239, no. 7. P. 1193–1206. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2009.03.015
24. Biswal K.C., Bhattacharyya S.K. Dynamic response of structure coupled with liquid sloshing in a laminated composite cylindrical tank with baffle // Finite Elements in Analysis and Design. 2010. Vol. 46, no. 11. P. 966–981. DOI: 10.1016/j.fine1.2010.07.001
25. Askari E., Daneshmand F., Amabili M. Coupled vibrations of a partially fluid-filled cylindrical container with an internal body including the effect of free surface waves // Journal of Fluids and Structures. 2011. Vol. 27, no. 7. P. 1049–1067. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2011.04.010
26. Гутько В.И., Огородник У.Е., Науменко В.В., Стрельникова Е.А. Оболочки вращения, частично заполненные жидкостью, при сейсмических и импульсных нагрузках // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций. 2012. № 19. С. 65–72.
27. Degtyarev K., Glushich P., Gnitko V., Strelnikova E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells // International Journal of Modern Physics and Applications. 2015. Vol. 1, no. 4. P. 159–168. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209
28. Kashani B.K., Sani A.A. Free vibration analysis of horizontal cylindrical shells including sloshing effect utilizing polar finite elements // European Journal of Mechanics - A/Solids. 2016. Vol. 58. P. 187–201. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.02.002
29. Degtarirov K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. BEM in free vibration analysis of elastic shells coupled with liquid sloshing // Vol. 61. 2015. P. 35–46. DOI: 10.2495/BEM380031
30. Ohayon R., Schotté J.-S. Modal Analysis of Liquid–Structure Interaction // Advances in Computational Fluid–Structure Interaction and Flow Simulation / ed. by B. Y., T. K. Springer International Publishing, 2016. P. 423–438. DOI: 10.1007/978-3-319-40827-9_33
31. Trotsenko V.A., Trotsenko Yu.V. Nonaxisymmetric Vibrations of a Shell of Revolution Partially Filled with Liquid // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 220. P. 341–358. DOI: 10.1007/s10958-016-3188-0
32. Trotsenko Yu.V. Vibrations of Elastic Shells of Revolution Partially Filled with Ideal Liquid // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 229. P. 470–486. DOI: 10.1007/s10958-018-3690-7
33. Khayat M., Baghlani A., Dehghan S.M. A semi-analytical boundary method in investigation of dynamic parameters of functionally graded storage tank // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2020. Vol. 42. 332. DOI: 10.1007/s40430-020-02407-1
34. Tiwari P., Maiti D.K., Maity D. 3-D sloshing of liquid filled laminated composite cylindrical tank under external excitation // Ocean Engineering. 2021. Vol. 239. 109788. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2021.109788
35. Han Y., Zhu X., Guo W., Li T., Zhang S. Coupled vibration analysis of partially liquid-filled cylindrical shell considering free surface sloshing // Thin-Walled Structures. 2022. Vol. 179. 109555. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109555
36. Utsumi M. Vibration analysis of cylindrical liquid storage tanks that considers excitation phase difference // Mechanical Engineering Journal. 2023. Vol. 10, no. 1. 22-00236. DOI: 10.1299/mej.22-00236
37. Liu J., Zhang W.-Q., Ye W.-B., Gan L., Qin L., Zang Q.-S., Wang H.-B. Forced vibration of liquid-filled composite laminated shell container considering fluid–structure interaction by the scaled boundary finite element method // Physics of Fluids. 2024. Vol. 36, no. 8. 087148. DOI: 10.1063/5.0221695

38. *Tiwari P., Maiti D.K., Maity D.* 3D sloshing frequency analysis of partially filled cylindrical laminated composite containers // International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics. 2024. Vol. 16. P. 117–132. DOI: 10.1007/s12572-023-00341-8
39. *Khorshidi K., Savvafi S., Zobeid S.* Investigation of Free Vibration in Fluid-Loaded Cylindrical Shells with a Three-Layer Sandwich Wall and an Auxetic Central Layer // Mechanics of Advanced Composite Structures. 2025. Vol. 12, no. 1. P. 53–72. DOI: 10.22075/MACS.2024.33975.1672
40. *Choudhary N., Degtyarev K., Kriutchenko D., Gnitko V., Strelnikova E.* Shell-like structures interacting with liquids and their applications // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2025. Vol. 105, no. 9. e70227. DOI: 10.1002/zamm.70227
41. *Saljughi F.* Analyzing frequency of conical (Δ shaped) tanks // Journal of Solid Mechanics. 2016. Vol. 8, no. 4. P. 773–780.
42. *Bauer H.F.* Liquid oscillations in conical containerforms // Acta Mechanica. 1982. Vol. 43. P. 185–200. DOI: 10.1007/BF01176282
43. *Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A.* Natural sloshing frequencies in rigid truncated conical tanks // Engineering Computations. 2008. Vol. 25, no. 6. P. 518–540. DOI: 10.1108/02644400810891535
44. *Глушич П.А., Гнитко В.И., Науменко В.В., Стрельникова Е.А.* Собственные колебания жидкости в жёстких оболочках вращения // Вестник Херсонского национального технического университета. 2015. № 3. С. 103–107.
45. *Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E.* BEM and FEM Analysis of the Fluid-Structure Interaction in Tanks With Baffles // International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. 2017. Vol. 5, no. 3. P. 317–328. DOI: 10.2495/CMEM-V5-N3-317-328
46. *Choudhary N., Rana S., Degtyarev K., Kriutchenko D., Strelnikova E.* Numerical study on sloshing in coaxial shells // Vibroengineering Procedia. 2024. Vol. 55. P. 86–90. DOI: 10.21595/vp.2024.24091
47. *Lukovsky I.A., Timokha A.N.* Multimodal Method in Sloshing // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 220. P. 239–253. DOI: 10.1007/s10958-016-3181-7
48. *Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V.* Parametric analysis of free vibration of a straight layered truncated conical shell containing a quiescent fluid // Thin-Walled Structures. 2025. Vol. 214. 113373. DOI: 10.1016/j.tws.2025.113373
49. *Бочкарёв С.А.* Анализ собственных колебаний усечённых конических оболочек переменной толщины, заполненных жидкостью // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35, № 3. С. 452–468. DOI: 10.35634/vm250308
50. *Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Senin A.N.* Natural vibrations and stability of loaded cylindrical shells partially filled with fluid, taking into account gravitational effects // Thin-Walled Structures. 2021. Vol. 164. 107867. DOI: 10.1016/j.tws.2021.107867
51. *Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Сенин А.Н.* Численное моделирование собственных колебаний частично заполненных жидкостью коаксиальных оболочек с учётом эффектов на свободной поверхности // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2022. № 1. С. 23–35. DOI: 10.15593/pern.mech/2022.1.03
52. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. 320 с.
53. *Бочкарев С.А., Матвеев В.П.* Численное исследование влияния граничных условий на динамику поведения цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2008. № 3. С. 189–199.
54. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
55. *Зенкевич О.С.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.
56. *Shivakumar K.N., Krishna Murty A.V.* A high precision ring element for vibrations of laminated shells // Journal of Sound and Vibration. 1978. Vol. 58, no. 3. P. 311–318. DOI: 10.1016/S0022-460X(78)80040-6
57. *Голуб Д., Ван Л.Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
58. *Lehoucq R.B., Sorensen D.C., Yang C.* ARPACK Users' Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods. Philadelphia: Society for Industrial, Applied Mathematics, 1998. 137 p. DOI: 10.1137/1.9780898719628
59. *Матвеев В.П., Севодин М.А., Севодина Н.В.* Приложения метода Мюллера и принципа аргумента к задачам на собственные значения в механике деформируемого твёрдого тела // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 3. С. 331–336. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.32
60. *Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V.* Analysis of natural vibration of truncated conical shells partially filled with fluid // International Journal of Mechanical System Dynamics. 2024. Vol. 4, no. 2. P. 142–152. DOI: 10.1002/msd2.12105

Сведения об авторах:

Бочкарёв Сергей Аркадьевич, кфмн, снс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: bochkarev@icmm.ru; ORCID: 0000-0002-9722-1269

Сенин Александр Николаевич (корр.), б/с, мнс, ИМСС УрО РАН; e-mail: senin.a@icmm.ru; ORCID: 0000-0002-7537-0001

Research article

Numerical simulation of natural vibration of a partially fluid-filled truncated conical shell in a gravity field

S.A. Bochkarev, A.N. Senin

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

In this article, the behavior of circular truncated conical shells partially filled with an ideal fluid is studied taking into account the gravitational effects on its free surface. The mathematical formulation of the problem of the elastic body dynamics is developed using the variational principle of virtual displacements and the relations of the classical theory of shells, which are based on the Kirchhoff–Love hypotheses. The behavior of the compressible fluid is described by the equations of a potential theory, which together with the boundary conditions are converted to a weak form using the Bubnov–Galerkin method. The hydrodynamic pressure exerted by the fluid on the inner surface of the shell is calculated using the linearized Bernoulli equation. The problem is solved in the framework of axisymmetric formulation based on a semi-analytical version of the finite element method. The natural frequencies are calculated using the QR transform. The identification of coupled vibration modes in the full frequency spectrum is accomplished through an iterative dynamic condensation procedure based on the Muller method. The reliability of the results obtained within the framework of the developed numerical model is confirmed by comparison with known data using examples of elastic and rigid shells. The influence of the cone angle on the lower frequencies of sloshing and coupled vibration modes is analyzed for shells with different boundary conditions (rigidly clamped, simply supported and cantilevered shells), different linear dimensions and levels of filling of the shell with fluid. It has been demonstrated that the character of the change in lower frequencies is determined by the magnitude of the angle at the apex and is determined by its geometric parameters for coupled modes and is independent of them in the case of sloshing modes.

Keywords: truncated conical shell, classical shell theory, ideal compressible fluid, FEM, free surface, sloshing, natural vibration, dynamic condensation

Received: 16.10.2025 / **Published online:** 10.12.2025

References

1. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. Cambridge University Press, 2005. 970 p.
2. Païdoussis M.P. Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow. Vol. 1, 2nd edition. Elsevier Academic Press, 2014. 942 p.
3. Eswaran M., Saha U.K. Sloshing of liquids in partially filled tanks - A review of experimental investigations. Ocean Systems Engineering. 2011. Vol. 1, no. 2. P. 131–155. DOI: 10.12989/ose.2011.1.2.131
4. Zingoni A. Liquid-containment shells of revolution: A review of recent studies on strength, stability and dynamics. Thin-Walled Structures. 2015. Vol. 87. P. 102–114. DOI: 10.1016/j.tws.2014.10.016
5. Grigoliuk E.I., Shkliarchuk F.N. Equations of perturbed motion of a body with a thin-walled elastic shell partially filled with a liquid. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1970. Vol. 34, no. 3. P. 379–389. DOI: 10.1016/0021-8928(70)90084-5
6. Kuleshov V.B., Shveyko Yu.Yu. Neosesimmetrichnyye kolebaniya tsilindricheskikh obolochek, chastichno zapolnennykh zhidkost'yu. Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela. 1971. No. 3. P. 126–136.
7. Kondo H. Axisymmetric Free Vibration Analysis of a Circular Cylindrical Tank. Bulletin of JSME. 1981. Vol. 24, no. 187. P. 215–221. DOI: 10.1299/jsmel1958.24.215
8. Balendra T., Ang K.K., Paramasivam P., Lee S.L. Free vibration analysis of cylindrical liquid storage tanks. International Journal of Mechanical Sciences. 1982. Vol. 24, no. 1. P. 47–59. DOI: 10.1016/0020-7403(82)90020-0
9. Chiba M., Yamaki N., Tani J. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid—Part I: Theoretical analysis. Thin-Walled Structures. 1984. Vol. 2, no. 3. P. 265–284. DOI: 10.1016/0263-8231(84)90022-3
10. Chiba M., Yamaki N., Tani J. Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid—Part II: Numerical results. Thin-Walled Structures. 1984. Vol. 2, no. 4. P. 307–324. DOI: 10.1016/0263-8231(84)90002-8
11. Gupta R.K., Hutchinson G.L. Free vibration analysis of liquid storage tanks. Journal of Sound and Vibration. 1988. Vol. 122, no. 3. P. 491–506. DOI: 10.1016/S0022-460X(88)80097-X
12. Gonçalves P.B., Ramos N.R.S.S. Free vibration analysis of cylindrical tanks partially filled with liquid. Journal of Sound and Vibration. 1996. Vol. 195, no. 3. P. 429–444. DOI: 10.1006/jsvi.1996.0436
13. Babu S.S., Bhattacharyya S.K. Finite element analysis of fluid-structure interaction effect on liquid retaining structures due to sloshing. Computers & Structures. 1996. Vol. 59, no. 6. P. 1165–1171. DOI: 10.1016/0045-7949(95)00271-5
14. Lakis A.A., Neagu S. Free surface effects on the dynamics of cylindrical shells partially filled with liquid. Journal of Sound and Vibration. 1997. Vol. 207, no. 2. P. 175–205. DOI: 10.1006/jsvi.1997.1074
15. Sigrist J.-F. Modal analysis of fluid-structure interaction problems with pressure-based fluid finite elements for industrial applications. The International Journal of Multiphysics. 2007. Vol. 1, no. 1. P. 123–149. DOI: 10.1260/175095407780130553
16. Amabili M., Païdoussis M.P., Lakis A.A. Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom. Journal of Sound and Vibration. 1998. Vol. 213, no. 2. P. 259–299. DOI: 10.1006/jsvi.1997.1481

17. Jeong K.-H., Lee S.-C. Hydroelastic vibration of a liquid-filled circular cylindrical shell. *Computers & Structures*. 1998. Vol. 66, no. 2/3. P. 173–185. DOI: 10.1016/S0045-7949(97)00086-2
18. Okazaki K., Tani J., Sugano M. Free Vibrations of a Laminated Composite Circular Cylindrical Shell Partially Filled with Liquid. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series C*. 1999. Vol. 65, no. 640. P. 4597–4604. DOI: 10.1299/kikaic.65.4597
19. Pal N.C., Bhattacharyya S.K., Sinha P.K. Coupled Slosh Dynamics of Liquid-Filled, Composite Cylindrical Tanks. *Journal of Engineering Mechanics*. 1999. Vol. 125, no. 4. P. 491–495. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(1999)125:4(491)
20. Amabili M. Eigenvalue problems for vibrating structures coupled with quiescent fluids with free surface. *Journal of Sound and Vibration*. 2000. Vol. 231, no. 1. P. 79–97. DOI: 10.1006/jsvi.1999.2678
21. Biswal K.C., Bhattacharyya S.K., Sinha P.K. Dynamic response analysis of a liquid-filled cylindrical tank with annular baffle. *Journal of Sound and Vibration*. 2004. Vol. 274, no. 1/2. P. 13–37. DOI: 10.1016/S0022-460X(03)00568-6
22. Kim Y.-W., Lee Y.-S., Ko S.-H. Coupled vibration of partially fluid-filled cylindrical shells with ring stiffeners. *Journal of Sound and Vibration*. 2004. Vol. 276, no. 3–5. P. 869–897. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.08.008
23. Lakis A.A., Bursuc G., Toorani M.H. Sloshing effect on the dynamic behavior of horizontal cylindrical shells. *Nuclear Engineering and Design*. 2009. Vol. 239, no. 7. P. 1193–1206. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2009.03.015
24. Biswal K.C., Bhattacharyya S.K. Dynamic response of structure coupled with liquid sloshing in a laminated composite cylindrical tank with baffle. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2010. Vol. 46, no. 11. P. 966–981. DOI: 10.1016/j.finel.2010.07.001
25. Askari E., Daneshmand F., Amabili M. Coupled vibrations of a partially fluid-filled cylindrical container with an internal body including the effect of free surface waves. *Journal of Fluids and Structures*. 2011. Vol. 27, no. 7. P. 1049–1067. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2011.04.010
26. Gnitko V.I., Ogorodnyk U.E., Naumenko V.V., Strelnikova E.A. Partially filled shells of revolution under impulse and seismic loading. *Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures*. 2012. No. 19. P. 65–72.
27. Degtyarev K., Glushich P., Gnitko V., Strelnikova E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. *International Journal of Modern Physics and Applications*. 2015. Vol. 1, no. 4. P. 159–168. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209
28. Kashani B.K., Sani A.A. Free vibration analysis of horizontal cylindrical shells including sloshing effect utilizing polar finite elements. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2016. Vol. 58. P. 187–201. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2016.02.002
29. Degtiariov K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. BEM in free vibration analysis of elastic shells coupled with liquid sloshing. Vol. 61. 2015. P. 35–46. DOI: 10.2495/BEM380031
30. Ohayon R., Schotté J.-S. *Modal Analysis of Liquid–Structure Interaction. Advances in Computational Fluid–Structure Interaction and Flow Simulation* / ed. by B. Y., T. K. Springer International Publishing, 2016. P. 423–438. DOI: 10.1007/978-3-319-40827-9_33
31. Trotsenko V.A., Trotsenko Yu.V. Nonaxisymmetric Vibrations of a Shell of Revolution Partially Filled with Liquid. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 220. P. 341–358. DOI: 10.1007/s10958-016-3188-0
32. Trotsenko Yu.V. Vibrations of Elastic Shells of Revolution Partially Filled with Ideal Liquid. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. Vol. 229. P. 470–486. DOI: 10.1007/s10958-018-3690-7
33. Khayat M., Baghlani A., Dehghan S.M. A semi-analytical boundary method in investigation of dynamic parameters of functionally graded storage tank. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2020. Vol. 42. 332. DOI: 10.1007/s40430-020-02407-1
34. Tiwari P., Maiti D.K., Maity D. 3-D sloshing of liquid filled laminated composite cylindrical tank under external excitation. *Ocean Engineering*. 2021. Vol. 239. 109788. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2021.109788
35. Han Y., Zhu X., Guo W., Li T., Zhang S. Coupled vibration analysis of partially liquid-filled cylindrical shell considering free surface sloshing. *Thin-Walled Structures*. 2022. Vol. 179. 109555. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109555
36. Utsumi M. Vibration analysis of cylindrical liquid storage tanks that considers excitation phase difference. *Mechanical Engineering Journal*. 2023. Vol. 10, no. 1. 22-00236. DOI: 10.1299/mej.22-00236
37. Liu J., Zhang W.-Q., Ye W.-B., Gan L., Qin L., Zang Q.-S., Wang H.-B. Forced vibration of liquid-filled composite laminated shell container considering fluid–structure interaction by the scaled boundary finite element method. *Physics of Fluids*. 2024. Vol. 36, no. 8. 087148. DOI: 10.1063/5.0221695
38. Tiwari P., Maiti D.K., Maity D. 3D sloshing frequency analysis of partially filled cylindrical laminated composite containers. *International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics*. 2024. Vol. 16. P. 117–132. DOI: 10.1007/s12572-023-00341-8
39. Khorshidi K., Savvafi S., Zobeid S. Investigation of Free Vibration in Fluid-Loaded Cylindrical Shells with a Three-Layer Sandwich Wall and an Auxetic Central Layer. *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 2025. Vol. 12, no. 1. P. 53–72. DOI: 10.22075/MACS.2024.33975.1672
40. Choudhary N., Degtyarev K., Kriutchenko D., Gnitko V., Strelnikova E. Shell-like structures interacting with liquids and their applications. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2025. Vol. 105, no. 9. e70227. DOI: 10.1002/zamm.70227
41. Saljughfi F. Analyzing frequency of conical (Δ shaped) tanks. *Journal of Solid Mechanics*. 2016. Vol. 8, no. 4. P. 773–780.

42. *Bauer H.F.* Liquid oscillations in conical containerforms. *Acta Mechanica*. 1982. Vol. 43. P. 185–200. DOI: 10.1007/BF01176282
43. *Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A.* Natural sloshing frequencies in rigid truncated conical tanks. *Engineering Computations*. 2008. Vol. 25, no. 6. P. 518–540. DOI: 10.1108/02644400810891535
44. *Glushych P., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E.* Liquid own vibrations in rigid shells of revolution. *Bulletin of the Kherson National Technical University*. 2015. No. 3. P. 103–107.
45. *Gnitko V., Degtyariv K., Naumenko V., Strelnikova E.* BEM and FEM Analysis of the Fluid-Structure Interaction in Tanks With Baffles. *International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2017. Vol. 5, no. 3. P. 317–328. DOI: 10.2495/CMEM-V5-N3-317-328
46. *Choudhary N., Rana S., Degtyarev K., Kriutchenko D., Strelnikova E.* Numerical study on sloshing in coaxial shells. *Vibroengineering Procedia*. 2024. Vol. 55. P. 86–90. DOI: 10.21595/vp.2024.24091
47. *Lukovsky I.A., Timokha A.N.* Multimodal Method in Sloshing. *Journal of Mathematical Sciences*. 2017. Vol. 220. P. 239–253. DOI: 10.1007/s10958-016-3181-7
48. *Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V.* Parametric analysis of free vibration of a straight layered truncated conical shell containing a quiescent fluid. *Thin-Walled Structures*. 2025. Vol. 214. 113373. DOI: 10.1016/j.tws.2025.113373
49. *Bochkarev S.A.* Analysis of natural vibrations of truncated conical shells of variable thickness filled with fluid. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*. 2025. Vol. 35, no. 3. P. 452–468. DOI: 10.35634/vm250308
50. *Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Senin A.N.* Natural vibrations and stability of loaded cylindrical shells partially filled with fluid, taking into account gravitational effects. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 164. 107867. DOI: 10.1016/j.tws.2021.107867
51. *Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Senin A.N.* Numerical modeling of natural vibrations of coaxial shells partially filled with fluid, taking into account the effects on the free surface. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2022. No. 1. P. 23–35. DOI: 10.15593/pnrm.mech/2022.1.03
52. *Vol'mir A.S.* Obolichki v potoke zhidkosti i gaza. *Zadachi gidrouprugosti*. Moscow: Nauka, 1979. 320 p.
53. *Bochkarev S.A., Matveenko V.P.* Numerical study of the influence of boundary conditions on the dynamic behavior of a cylindrical shell conveying a fluid. *Mechanics of Solids*. 2008. Vol. 43, no. 3. P. 477–486. DOI: 10.3103/S0025654408030187
54. *Biderman V.L.* *Mekhanika tonkostennykh konstruktsiy. Statika*. Moscow: Mashinostroyeniye, 1977. 488 p.
55. *Zienkiewicz O.C.* *The Finite Element Method in Engineering Science*. London: McGraw Hill, 1971. 521 p.
56. *Shivakumar K.N., Krishna Murty A.V.* A high precision ring element for vibrations of laminated shells. *Journal of Sound and Vibration*. 1978. Vol. 58, no. 3. P. 311–318. DOI: 10.1016/S0022-460X(78)80040-6
57. *Golub G.H., Van L.C.F.* *Matrix Computations*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1996. 694 p.
58. *Lehoucq R.B., Sorensen D.C., Yang C.* *ARPACK Users' Guide: Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods*. Society for Industrial, Applied Mathematics, 1998. 137 p. DOI: 10.1137/1.9780898719628
59. *Matveenko V.P., Sevodin M.A., Sevodina N.V.* Applications of Muller's method and the argument principle to eigenvalue problems in solid mechanics. *Computational Continuum Mechanics*. 2014. Vol. 7, no. 3. P. 331–336. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.3.32
60. *Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V.* Analysis of natural vibration of truncated conical shells partially filled with fluid. *International Journal of Mechanical System Dynamics*. 2024. Vol. 4, no. 2. P. 142–152. DOI: 10.1002/msd.12105