

Научная статья

Магнитное поле в окрестности однородного магнетика, заполняющего осесимметричную односвязную или многосвязную область

О.С. Крыласова, М.А. Косков, А.С. Иванов

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

При проектировании инерционных магнитожидкостных датчиков необходимо вычислять пространственное распределение напряженности магнитного поля и градиента его модуля, характеризующих магнитную систему их чувствительных элементов. Чувствительный элемент включает комбинированный источник постоянного магнитного поля, состоящий из набора аксиально-намагниченных цилиндрических, дисковых или кольцевых магнитов с конечным аспектным отношением их основных параметров, а также немагнитных вставок. Сборка магнитов и немагнитных элементов покрыта магнитной жидкостью, выполняющей роль смазки и удерживаемой полем, создаваемым сборкой. Цель исследования – получение выражения, математически представляющего магнитное поле в окрестности одиночных постоянных магнитов, либо их комбинаций. Магнитостатическая задача решена в два этапа методом Ампера на основе абстрактных магнитных полюсов. На первом этапе рассмотрен северный полюс полубесконечного намагниченного цилиндра, в окрестности которого найдено выражение для скалярного магнитного потенциала. На втором этапе путем применения принципа суперпозиции получено выражение для поля вблизи дискового и кольцевого магнитов в цилиндрической системе координат. Построенные выражения содержат бесконечные ряды, что затрудняет их использование на практике. Количество слагаемых ряда, достаточное для описания поля с наперед заданной точностью, установлено путем сравнения данных аналитического и численного расчетов. Соответствующая двумерная осесимметричная магнитостатическая задача решена численно в пакете Finite Element Method Magnetics. Для дискового и кольцевого магнитов вычислен модуль напряженности магнитного поля в точках окружающего пространства. Показано, что первых шести членов ряда достаточно, чтобы аналитическое и численное решения совпали в пределах 2%, – допустимого отклонения, равного типичной приборной погрешности современного тесламетра. При дальнейшем увеличении числа членов ряда погрешность уменьшается, но возрастает сложность вычислений. К тому же проверить экспериментально факт роста точности невозможно. В случае осесимметричных комбинированных источников поля построенные выражения упрощают вычисление магнитного поля. Построенное авторами выражение распределения магнитного поля позволяет оптимизировать проектирование магнитожидкостных датчиков и их изготовление.

Ключевые слова: постоянный магнит, метод конечных элементов, магнитная сборка, магнитная жидкость

Получение: 07.10.2025 / *Публикация онлайн:* 10.12.2025

УДК 537.612.3; 537.613

1. Введение

В современной технике широко применяются постоянные магниты. Они присутствуют в электромоторах и генераторах, громкоговорителях и микрофонах, разнообразных датчиках и накопителях информации с магнитной записью [1]. Основной характеристикой постоянного магнита в окружающем пространстве является его поле. Аналитическое описание поля на большом расстоянии от магнита (на порядок большем его характерного размера) возможно в рамках дипольного приближения, однако на практике постоянные магниты на таких расстояниях не используются. При этом выражение для поля в окрестности постоянного магнита, как будет показано далее, имеет сложный вид и нуждается в упрощении, а также в рекомендациях по приближенным (инженерным) вычислениям.

Рассматриваемая здесь магнитостатическая задача исследовалась ранее в ряде работ. Опишем кратко их основные результаты и выводы. Принципиально поле уединенного магнетика представляется двумя способами [2]: заменой магнита эквивалентным током, протекающим по его поверхности, или введением абстрактных магнитных полюсов [3]. В работе [4] для напряженности поля вблизи однородно намагниченного тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда или аксиально-намагниченного круглого цилиндра, получены аналитические выражения, предполагающие численное интегрирование. В [5] предложен метод щели, применимый для вычисления поля в тонком слое магнитной жидкости, находящемся вблизи постоянного магнита. Выражения для напряженности из этих и других работ неудобны для применения на практике, поскольку они требуют интегрирования громоздких и специальных функций.

Аналитический вид напряженности магнитного поля вблизи уединенного постоянного магнита позволяет перейти к рассмотрению полей конструкций более сложной формы, к примеру, магнитныхборок, составленных из чередующихся постоянных магнитов и немагнитных вставок. Подобные системы играют роль инертной массы в различных магнитожидкостных устройствах: магнитожидкостных опорах, сенсорах (инклинометрах, акселерометрах, сейсмодатчиках и другом), а также в подшипниках с низким коэффициентом трения [6, 7]. Во всех вышеперечисленных устройствах магнитное поле удерживает магнитную жидкость, выполняющую роль смазки между подвижными деталями, например, в датчике [8] или подшипнике высокооборотного вала ткацкого станка [9]. Чередование постоянных магнитов и немагнитных элементов одновременно увеличивает несущую способность опоры и уменьшает массу готового изделия. Для безотказной работы таких устройств смазывающий слой магнитной жидкости должен быть сплошным [10]. Попадание пузырьков воздуха в жидкость приводит к некорректной работе содержащего ее устройства. Таким образом, на этапе проектирования требуется контроль формы поверхности магнитной жидкости, покрывающей магнитную сборку. Постоянные магниты обладают большой остаточной намагниченностью и коэрцитивной силой, что дает возможность решать задачу

в безындукционном приближении (пренебрегать малым возмущением магнитного поля, вызываемого магнитной жидкостью). Свободная поверхность жидкости, как известно [11], совпадает при этом с изолинией напряженности магнитного поля, создаваемого источником. Теоретический безындукционный подход хорошо подходит для конструкций с постоянными магнитами, например, для газовых дозаторов и микрофлюидных чипов [12, 13], принцип работы которых основан на формировании в объеме магнитной жидкости газовых полостей, форма которых определяется замкнутой изоповерхностью поля \mathbf{H} .

Цель настоящей работы — получение аналитического выражения, описывающего магнитное поле в окрестности аксиально-намагниченных цилиндрических и дисковых магнитов, пригодного также для полей иных, более сложных осесимметричных магнитных систем. Рассматриваемая проблема актуальна также для полей, магнетиков, однородно намагниченных внешним полем. Так, цилиндрический контейнер с испытуемым ферромагнитным порошком внутри вибрационного магнитометра и магнитная жидкость, заполняющая коаксиальный зазор, индуцируют вокруг себя поле, для изображения которого подходит то же самое выражение, что и для поля постоянного магнита.

2. Аналитическое описание напряженности

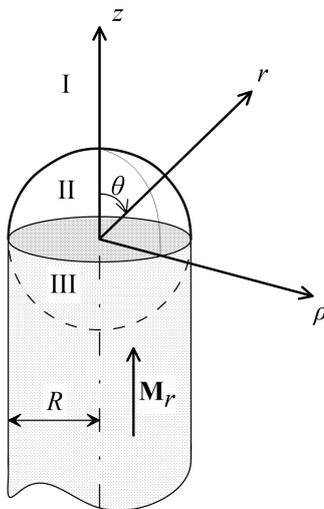


Рис. 1. Северный полюс полубесконечного аксиально-намагниченного цилиндрического магнита в двух системах координат (цилиндрической и сферической)

Напряженность \mathbf{H} и индукция \mathbf{B} поля постоянного магнита описываются уравнениями Максвелла [2]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ∇ — оператор градиента; $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}_r)$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, \mathbf{M}_r — остаточная намагниченность материала магнита.

Рассмотрим полубесконечный цилиндрический магнит (Рис. 1), намагниченность которого однородна и направлена параллельно его оси. Всюду, кроме верхнего торца (северного полюса) магнита, выполняется условие: $\nabla \cdot \mathbf{M}_r = 0$. Уравнения (1) сводятся к уравнению Лапласа для скалярного векторного потенциала [2]:

$$\nabla^2 V = 0, \quad (2)$$

а напряженность находится дифференцированием: $\mathbf{H} = -\nabla V$.

Здесь и далее будем использовать две системы координат с общим началом в центре торца магнита (Рис. 1): сферическую $\{Or\theta\varphi\}$, где r — радиальное расстояние, θ — полярный (зенитный) угол, φ — азимутальный угол, и цилиндрическую $\{O\rho\varphi z\}$, где ρ — полярный радиус, z — высота. Общее решение (2) в сферических координатах [2] записывается в виде:

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) r^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos\theta) \frac{1}{r^{n+1}}, \quad (3)$$

где $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, A_n и B_n — постоянные, подлежащие определению из граничных условий.

На поверхности торца магнита выполняется условие: $\nabla \cdot \mathbf{M}_r = -M_r \delta(z)$, где $\delta(z)$ — дельта-функция. Уравнения (1) эквивалентны здесь уравнениям электростатики однородно заряженного диска [2]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{H} = M_r \delta(z), \\ \nabla \times \mathbf{H} = 0. \end{cases}$$

Разница лишь в том, что роль поверхностной плотности заряда играет скачок вертикальной компоненты вектора намагниченности, а вместо напряженности электростатического поля отысканию подлежит напряженность магнитного поля.

Найдем скалярный потенциал на вертикальной оси z . Согласно принципу суперпозиции он является суммой потенциалов, создаваемых малыми элементами $M_r ds = M_r \rho d\rho d\varphi$ поверхности, прилегающей к полюсу (Рис. 2):

$$V(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{M_r \rho d\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}},$$

где R — радиус магнита. Выполнив интегрирование, получим следующее выражение:

$$V(z) = \frac{M_r}{2} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - \sqrt{z^2} \right). \quad (4)$$

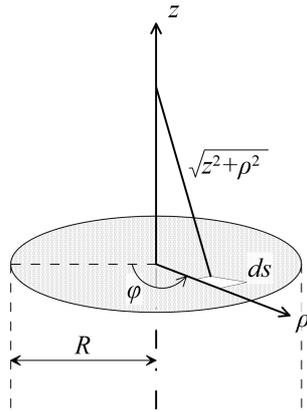


Рис. 2. Представление полюса магнита в виде однородно заряженного диска с поверхностной плотностью заряда M_r

Функция (4) является четной, то есть сохраняет свое значение, когда знак ее аргумента z меняется на противоположный. Как следствие, напряженность поля вне магнита, при $z > 0$, направлена вверх. При $z < 0$ размагничивающее поле \mathbf{H} материала самого цилиндра ориентировано противоположно.

Используем (4) как граничное условие и найдем неизвестные постоянные в решении (3). Для этого вообразим вокруг полюса сферу радиусом R . В области I, находящейся вне сферы (Рис. 1), при $z > R$ представим функцию (4) в виде разложения в абсолютно сходящийся ряд по степеням z :

$$V_I(z) = \frac{M_r}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (1-2n)(n!)^2} \frac{R^{2n}}{z^{2n-1}}. \tag{5}$$

Решение (3) в области I при $\theta = 0$ совпадает с (5). Приняв это во внимание, перепишем (3) в виде:

$$V(r,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(1) r^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} P_{2n-1}(1) \frac{1}{r^{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-2} P_{2n-2}(1) \frac{1}{r^{2n-1}}.$$

Поскольку в сфере координата r тождественна z , найдем входящие в выражение выше постоянные:

$$A_n = 0, \quad B_{2n-1} = 0, \quad B_{2n-2} = \frac{M_r}{2} \frac{(-1)^n (2n)! R^{2n}}{4^n (1-2n)(n!)^2}. \tag{6}$$

Дополнительное рассмотрение области I при $z < -R$ не требуется, так как в решении (3) не равны нулю только слагаемые, содержащие многочлены Лежандра четных степеней.

Действуя аналогично, рассмотрим области II и III внутри сферы. Разложение (3) по степеням z представляется в виде:

$$V_{II,III}(z) = \frac{M_r}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (1-2n)(n!)^2} \frac{z^{2n}}{R^{2n-1}} - \frac{M_r |z|}{2}. \tag{7}$$

Общее решение (3)

$$V(r,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} P_{2n}(1) r^{2n} + A_1 P_1(1) r + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+3} P_{2n+3}(1) r^{2n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(1) \frac{1}{r^{n+1}}$$

совпадает с (7) ($z \equiv r$ при $\theta = 0$). Тогда постоянные в решении для области II ($z \geq 0$) запишутся следующим образом:

$$A_{2n} = \frac{M_r}{2} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (1-2n)(n!) R^{2n-1}}, \quad A_1 = -\frac{M_r}{2}, \quad A_{2n+3} = 0, \quad B_n = 0. \tag{8}$$

В области III ($z < 0$) знак у коэффициента A_1 меняется на противоположный. Таким образом, скалярный потенциал магнитного поля в пространстве вокруг северного полюса полубесконечного цилиндрического магнита есть решение (3) с постоянными коэффициентами (6) и (8). Наконец, отметим, что для перехода из сферической в цилиндрическую систему координат (см. Рис. 1 и 2) достаточно в (3) заменить r на $\sqrt{\rho^2 + z^2}$ и $\cos\theta$ на $z/\sqrt{\rho^2 + z^2}$.

Потенциал V , как и напряженность \mathbf{H} , подчиняется принципу суперпозиции, что позволяет представить постоянный магнит любой формы, выпускаемой промышленностью (цилиндр, диск, кольцо), совокупностью полубесконечных цилиндров. Магниты сферической или эллипсоидальной формы описываются известными точными аналитическими выражениями, применять к ним полюсный метод не требуется. Как пример, на рисунке 3а показан цилиндрический магнит высотой h , составленный из двух намагниченных в противоположных направлениях полубесконечных цилиндров, наложенных друг на друга со сдвигом. Скалярный потенциал такого магнита в цилиндрических координатах записывается как

$$V(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-2} P_{2n-2} \left(\frac{z+h/2}{l_+} \right) \frac{1}{l_+^{2n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-2} P_{2n-2} \left(\frac{z-h/2}{l_-} \right) \frac{1}{l_-^{2n-1}}, \tag{9}$$

где $B_n = \frac{M_r}{2} \frac{(-1)^n (2n)! R^{2n}}{4^n (1-2n)(n!)^2}$, $l_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \pm h/2)^2}$. Выражение для кольцевого магнита (Рис. 3б) отличается лишь коэффициентом $B_{2n-2} = \frac{M_r}{2} \frac{(-1)^n (2n)! (R^2 - R_1^2)}{4^n (1-2n)(n!)^2}$, где R_1 — внутренний радиус магнита.

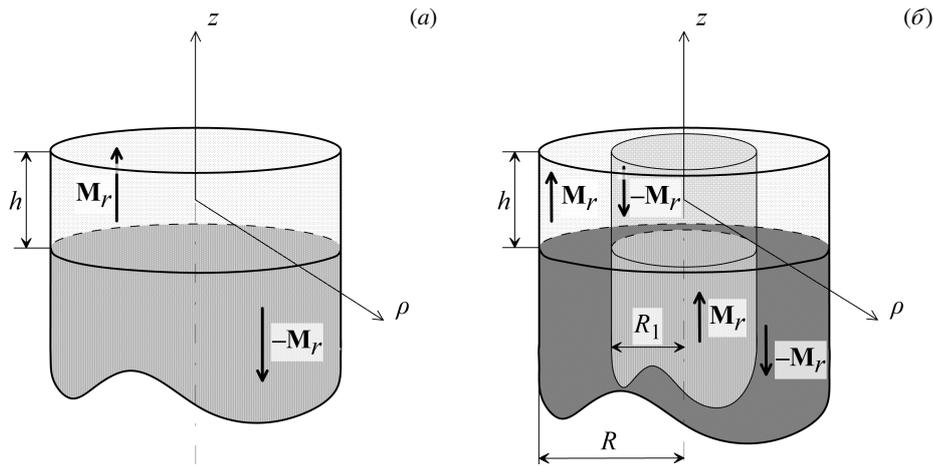


Рис. 3. Представление цилиндрического (а) и кольцевого (б) магнитов в виде комбинации двух и четырех полубесконечных намагниченных цилиндров соответственно

3. Численное моделирование и обсуждение результатов

Использование выражения (9) в расчетах подразумевает замену бесконечного ряда рядом с конечным числом слагаемых N . На практике расчет корректен, если вычисленные характеристики магнитного поля в пределах погрешности совпадают с результатами измерений магнитометрическими приборами. К примеру, приборная погрешность миллитесламетра Ш1-15У-3 составляет 2%. Рассмотрение дополнительных слагаемых, вклад которых меньше приборной погрешности, избыточен.

Поиск оптимального количества слагаемых производился сравнением аналитического расчета с результатами численного моделирования. Численная модель вместо экспериментальных данных избавляет от необходимости учитывать возникшие в процессе изготовления реального магнита допуски его размеров и погрешность, с которой известна его остаточная намагниченность. Для вычислений использовалось программное обеспечение Finite Element Method Magnetics (FEMM), которое предназначено для решения двумерных магнитостатических или электростатических задач методом конечных элементов. Магнитостатические задачи должны иметь формулировку в виде векторного потенциала \mathbf{A} , подчиняющегося уравнению:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0 \mu(B)} \nabla \times \mathbf{A} \right) = 0,$$

где μ — магнитная проницаемость вещества, которую в пакете FEMM можно описать либо константой, либо табулированной функцией модуля индукции \mathbf{B} (1), представляющей нелинейную кривую намагничивания реального магнетика.

Для решения задачи в FEMM и последующего анализа данных вычислений строилась треугольная сетка, размер которой задавался свой как для магнита, так и для воздушного пространства (Рис. 4). С одной стороны эта область ограничена вертикальной линией (линия 1), являющейся осью симметрии задачи, с другой — внешней полукруглой границей (линия 2). На оси симметрии имеет место граничное условие 2-го рода:

$$d\mathbf{A}/dn = 0,$$

\mathbf{n} — вектор нормали к границе. На внешней границе, имеющей радиус R_{out} , выполняется условие, соответствующее дипольному приближению (open boundary condition) [14]:

$$d\mathbf{A}/dn + c_0 \mathbf{A} = 0,$$

где $c_0 = \mu_0 R_{\text{out}}^{-1}$.

Моделировались поля дискового и кольцевого магнитов из материала «неодим–железо–бор»; параметры магнитов: $\mathbf{M}_r = 939.014$, $R = 15$ мм, $h = 5$ мм для диска и $R_1 = 10.5$ мм, $h = 2$ мм для кольца. В программе FEMM магнитный векторный потенциал \mathbf{A} может вычисляться с наперед заданной точностью, в то

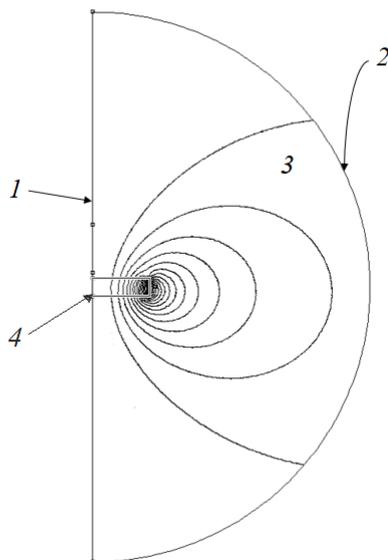


Рис. 4. Схема расчетной области в FEMM: 1 – ось симметрии, 2 – внешняя граница, 3 – воздух, 4 – магнит марки N35; сплошными линиями показаны силовые линии напряженности \mathbf{H} , построенные по результатам вычислений

время как точность решения для \mathbf{H} и \mathbf{M} на порядок ниже, так как последние получаются путем дифференцирования исходного векторного поля по пространственным координатам. Магнитный потенциал в каждом треугольном элементе представляется в виде линейной кусочно-непрерывной функции, поэтому \mathbf{H} и \mathbf{M} являются кусочно-постоянными функциями. Вычислительная ошибка для \mathbf{H} особенно велика в тех конечных элементах, где решение в расчетной области меняется скачком, то есть вблизи поверхности раздела сред с различной магнитной проницаемостью μ .

Ошибка вычислений увеличивается, если по поверхности раздела сред течет ток проводимости, то есть когда тангенциальная компонента напряженности магнитного поля H_τ терпит разрыв. Именно этот случай характерен для рассматриваемой в данной статье задачи, поскольку в FEMM постоянные магниты моделируются на основе поверхностных токов проводимости. Наибольшая же погрешность вычисления поля наблюдается в угловых точках поверхности раздела сред (на кромках магнита) с поверхностным током, где точное решение не определено вследствие их сингулярности. Чтобы полностью устранить особенность этих точек, принято решение закруглить углы магнита, как показано на рисунке 5. К тому же этот прием позволил значительно повысить точность вычислений магнитной пондеромоторной силы, действующей на тела, погруженные в магнитную жидкость, магнитная проницаемость μ которой не постоянна, а варьируется в пределах от 10^{-2} до 10^1 в зависимости от H .

Пондеромоторную силу можно найти, если максвелловский тензор напряжений численно проинтегрировать по поверхности тела [15], но в силу того, что вблизи поверхности раздела сред магнитная проницаемость различна (функция напряженности терпит разрыв) интегрирование по поверхности раздела сред сопряжено с большой вычислительной погрешностью. Стандартным решением проблемы является интегрирование по вспомогательной — окружающей тело — поверхности (eggshell). Такая замена возможна благодаря свойствам максвелловского тензора и при условии, что магнитная проницаемость среды, в объем которой заключено тело, постоянна [15].

Из-за присутствия в системе магнитной жидкости условие постоянства μ заведомо невыполнимо, поэтому интеграл по поверхности магнита находится как предел последовательности интегралов, вычисленных по вспомогательным поверхностям (eggshell), вложенным друг в друга и располагающимся одновременно близко и к друг другу, и к поверхности магнита [16]. Без скругления острых углов (кромки) постоянного магнита вычислить пондеромоторную силу с желаемой точностью не удастся из-за неравномерной сходимости ряда.

В процессе моделирования вычислялась полная магнитная энергия системы — W . На рисунке 6 она представлена как зависимость от числа элементов расчетной сетки. Присутствующие скачки энергии, возможно, связаны с тем, что рабочая сетка, построенная в FEMM, треугольная (Рис. 5). Элементы сетки на скругленной кромке магнита одновременно принадлежат как магниту, так и в воздуху, то есть кромка аппроксимируется ломаной линией, что ухудшает сходимость.

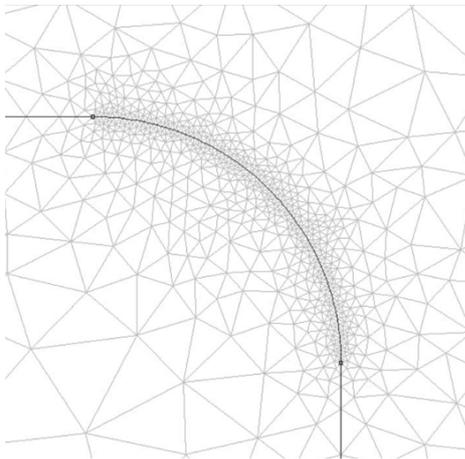


Рис. 5. Расчетная сетка, построенная в пакете FEMM, вблизи скругленных кромок магнита

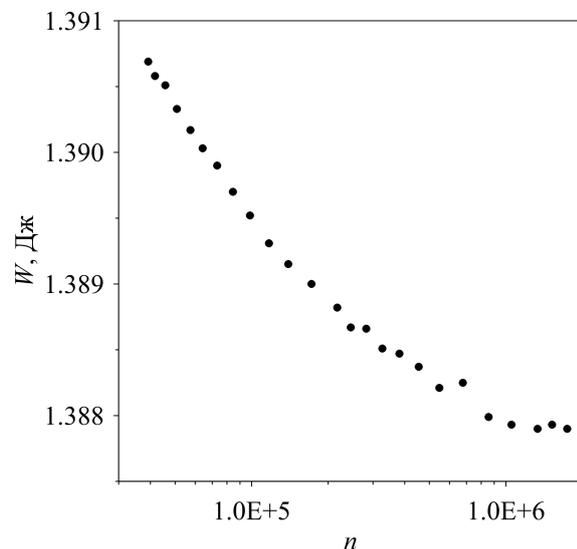


Рис. 6. Магнитная энергия в зависимости от числа элементов сетки

После нахождения магнитной энергии определялся модуль напряженности магнитного поля в точках на координатных осях ρ и z , а также в произвольной точке вблизи магнита. Результаты аналитических и численных расчетов показаны на рисунке 7. Несложно заметить, что их хорошее согласование достигается при удержании первых 6-ти слагаемых ряда (9). Величина допущенной при расчете по этой аналитической формуле ошибки Δ и значения модуля H напряженности поля приведены в таблице. Звездочкой отмечена произвольная точка в окрестности магнита.

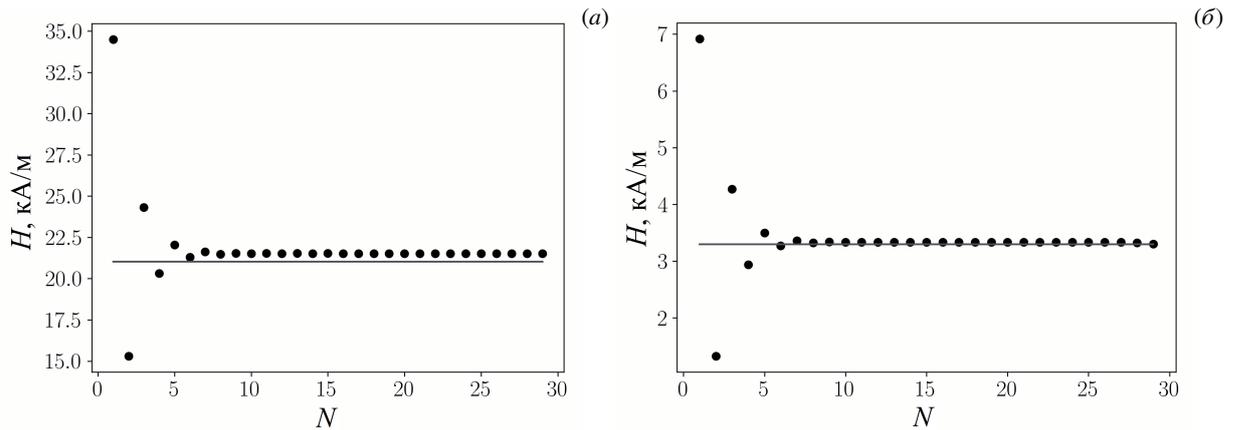


Рис. 7. Модуль напряженности магнитного поля в точке с координатами, [мм] (0, 25) в зависимости от количества учетных слагаемых ряда (9): дисковый магнит (а), кольцевой магнит (б); точки – расчет по формуле (9), прямая линия – численное моделирование

Таблица. Результаты расчета

Форма магнита	Координаты (ρ, z), мм	H , кА/м	Δ , %	N
Диск	(25, 25)*	9.0274	2.01	4
Диск	(0, 25)	21.0301	1.28	6
Диск	(25, 0)	26.3254	0.31	4
Кольцо	(25, 25)*	1.8169	1.95	3
Кольцо	(0, 25)	3.2966	0.84	6
Кольцо	(25, 0)	6.8232	1.10	4

4. Заключение

Магнитное поле вблизи постоянных магнитов исследовано аналитически с целью получения выражений для поля вокруг аксиально-намагниченных цилиндрических, дисковых, кольцевых магнитов и составленных из них комбинированных источников магнитного поля. Использовался метод абстрактных магнитных полюсов. Для полубесконечного намагниченного цилиндра построено выражение для вычисления скалярного магнитного потенциала, которое согласно принципу суперпозиции обобщено на дисковый и кольцевой магниты. Полученные формулы представляют собой бесконечные ряды, поэтому для оценки достаточного минимального числа их членов аналитический расчет верифицировался численным моделированием в пакете FEMM. Моделирование включало решение осесимметричной магнитостатической задачи и расчет модуля напряженности в точках за пределами магнитов.

Подходы демонстрируют хорошее совпадение результатов, при этом погрешность аналитического расчета по построенной авторами формуле не превышает приборных погрешностей измерения современных тесламетров. Предложенная методика и полученные выражения применимы для теоретического анализа осесимметричных систем, применяемых в магнитоожидкостных устройствах, например, инерционных регистрирующих приборах и механизмах дефектоскопов, обеспечивающих акустический контакт ультразвукового датчика с исследуемой деталью. Известное распределение магнитного поля позволяет оптимизировать проектирование устройств, их изготовление и дальнейшую эксплуатацию. Полученное аналитическое выражение может служить основой для решения задач поведения мениска магнитной жидкости в окрестности постоянного магнита и определения расходной характеристики акустического датчика ультразвукового дефектоскопа.

Работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы № АААА-А20-120020690030-5.

Литература

1. Skomski R., Manchanda P., Kumar P.K., Balamurugan B., Kashyap A., Sellmyer D.J. Predicting the Future of Permanent-Magnet Materials // IEEE Transactions on Magnetics. 2013. Vol. 49. P. 3215–3220. DOI: 10.1109/TMAG.2013.2248139
2. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Издательство иностранной литературы, 1954. 604 с.
3. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 356 с.
4. Пшеничников А.Ф. Магнитное поле в окрестности уединенного магнита // Магнитная гидродинамика. 1993. Т. 29, № 1. С. 37–40.

5. Пшеничников А.Ф., Буркова Е.Н. О силах, действующих на постоянный магнит, помещенный в прямоугольную полость с магнитной жидкостью // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 1. С. 5–14. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.1.1
6. Lagutkina D.Y., Saikin M.S. The research and development of inclination angle magnetic fluid detector with a movable sensing element based on permanent magnets // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2017. Vol. 431. P. 149–151. DOI: 10.1016/j.jmmm.2016.11.040
7. Косков М.А., Иванов А.С. Магнитная система одноосного инерционного магнитоидкостного акселерометра // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. 2022. № 6. С. 26–36. DOI: 10.17588/2072-2672.2022.6.027-037
8. Qian L., Li D. Use of Magnetic Fluid in Accelerometers // Journal of Sensors. 2014. Vol. 2014. 375623. DOI: 10.1155/2014/375623
9. Bailey R.L. Lesser known applications of ferrofluids // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 1983. Vol. 39. P. 178–182. DOI: 10.1016/0304-8853(83)90428-6
10. Ivanov A.S., Koskov M.A., Somov S.A. Viscous Friction of a Ferrofluid in the Coaxial Gap between Cylindrical Walls Being in Uniform Rectilinear Relative Motion // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2024. Vol. 88. P. 1158–1165. DOI: 10.1134/S1062873824707256
11. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 240 с.
12. Полушин В.М., Ряполов П.А., Рябцев К.С., Кобелев Н.С., Шабанова И.А., Юшин В.В., Постников Е.Б. Упругость воздушной полости в магнитной жидкости на участке изменяющегося по знаку магнитного поля кольцевого // Известия вузов. Физика. 2018. Т. 61, № 7. С. 147–157.
13. Ряполов П.А., Соколов Е.А., Калюжная Д.А. Влияние конфигурации магнитного поля на отрыв газовых пузырьков в магнитной жидкости // Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2023. Т. 87, № 3. С. 348–352. DOI: 10.31857/S0367676522700612
14. Meeker D. Improvised Open Boundary Conditions for Magnetic Finite Elements // IEEE Transactions on Magnetics. 2013. Vol. 49. P. 5243–5247. DOI: 10.1109/TMAG.2013.2260348
15. Coulomb J. A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness // IEEE Transactions on Magnetics. 1983. Vol. 19. P. 2514–2519. DOI: 10.1109/TMAG.1983.1062812
16. Иванов А.С. Энергетический подход к вычислению магнитных сил, действующих на твёрдые тела в ферроидкости // Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13, № 3. С. 311–319. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.3.25

Сведения об авторах:

Крыласова Ольга Сергеевна (корр.), асп., инж., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: krylasova.o@icmm.ru; ORCID: 0009-0006-2997-4345

Косков Михаил Андреевич, бс, мнс, ИМСС УрО РАН; e-mail: koskov.m@icmm.ru; ORCID: 0000-0001-8140-7774

Иванов Алексей Сергеевич, дфмн, доц., зав. лаб., ИМСС УрО РАН; e-mail: lesnichiy@icmm.ru; ORCID: 0000-0003-1743-3526

Research article

A magnetic field in the vicinity of a homogeneous magnet filling an axisymmetric, simply connected or multiply connected region

O.S. Krylasova, M.A. Koskov, A.S. Ivanov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

Designing inertial magnetorheological sensors requires calculating the spatial distribution of the magnetic field strength and its gradient, which characterize the magnetic system of their sensing elements. A sensing element includes a combined source of a constant magnetic field, consisting of a set of axially magnetized cylindrical, disc, or ring magnets with a finite aspect ratio of their main parameters and non-magnetic inserts. The assembly of magnets and non-magnetic elements is covered with a magnetic fluid that acts as a lubricant and is held in place by the field created by the assembly. The aim of the study is to obtain an expression that mathematically represents the magnetic field in the vicinity of an individual permanent magnet or a system of these magnets. The magnetostatic problem was solved in two stages using Ampere's method based on abstract magnetic poles. In the first stage, the north pole of a semi-infinite magnetized cylinder was considered. In the vicinity of this magnet an expression for the scalar magnetic potential was found. In the second stage, by applying the principle of superposition, an expression for the field near disc and ring magnets in a cylindrical coordinate system was obtained. The constructed expressions contain infinite series, which makes them difficult to use in practice. The number of terms in a series sufficient to describe the field with a predetermined accuracy was determined by comparing the data of analytical and numerical calculations. The corresponding two-dimensional axisymmetric magnetostatic problem was solved numerically using the Finite Element Method Magnetics package. For disc and ring magnets, the magnetic field strength magnitude at points in the surrounding space was calculated. It is shown that the first six terms in a series are sufficient for analytical and numerical solutions to coincide within 2%, which is an acceptable deviation equal to the typical instrument error of a modern teslameter. As the number of terms in a series increases, the error decreases, but the complexity of calculations increases. Moreover, it is impossible to

verify the increase in accuracy experimentally. In the case of axisymmetric combined field sources, the derived expressions simplify the calculation of the magnetic field. The expression for the magnetic field distribution proposed by the authors can be used for the optimization of the design and manufacture of magnetofluid sensors.

Keywords: permanent magnet, finite elements method, magnetic assembly, magnetic fluid

Received: 07.10.2025 / *Published online:* 10.12.2025

References

1. Skomski R., Manchanda P., Kumar P.K., Balamurugan B., Kashyap A., Sellmyer D.J. Predicting the Future of Permanent-Magnet Materials. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2013. Vol. 49. P. 3215–3220. DOI: 10.1109/TMAG.2013.2248139
2. Smythe W.R. *Static and dynamic electricity*. New York: McGraw-Hill Book Company Inc., 1950. 637 p.
3. Rosensweig R.E. *Ferrohydrodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 344 p.
4. Pshenichnikov A.F. Magnetic field in the vicinity of a single magnet. *Magneto hydrodynamics*. 1993. Vol. 29, no. 1. P. 33–36.
5. Pshenichnikov A.F., Burkova E.N. Forces acting on a permanent magnet placed in a rectangular cavity with a magnetic fluid. *Computational Continuum Mechanics*. 2014. Vol. 7, no. 1. P. 5–14. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.1.1
6. Lagutkina D.Y., Saikin M.S. The research and development of inclination angle magnetic fluid detector with a movable sensing element based on permanent magnets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2017. Vol. 431. P. 149–151. DOI: 10.1016/j.jmmm.2016.11.040
7. Koskov M.A., Ivanov A.S. Magnetic system of uniaxial inertial ferrofluid accelerometer. *Vestnik of Ivanovo State Power Engineering University*. 2022. No. 6. P. 26–36. DOI: 10.17588/2072-2672.2022.6.027-037
8. Qian L., Li D. Use of Magnetic Fluid in Accelerometers. *Journal of Sensors*. 2014. Vol. 2014. 375623. DOI: 10.1155/2014/375623
9. Bailey R.L. Lesser known applications of ferrofluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 1983. Vol. 39. P. 178–182. DOI: 10.1016/0304-8853(83)90428-6
10. Ivanov A.S., Koskov M.A., Somov S.A. Viscous Friction of a Ferrofluid in the Coaxial Gap between Cylindrical Walls Being in Uniform Rectilinear Relative Motion. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2024. Vol. 88. P. 1158–1165. DOI: 10.1134/S1062873824707256
11. Berkovskiy B.M., Medvedev V.F., Krakov M.S. *Magnitnyye zhidkosti*. Moscow: Khimiya, 1989. 240 c.
12. Polunin V.M., Ryapolov P.A., Ryabtsev K.S., Kobelev N.S., Shabanova I.A., Yushin V.V., Postnikov E.B. Elasticity of an Air Cavity in a Magnetic Fluid on an Annular Magnet Segment with Changing Magnetic Field Sign. *Russian Physics Journal*. 2018. Vol. 61. P. 1347–1357. DOI: 10.1007/s11182-018-1540-1
13. Ryapolov P.A., Sokolov E.A., Kalyuzhnaya D.A. Effect of the Magnetic Field's Configuration on the Detachment of Gas Bubbles in a Magnetic Fluid. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. 2023. Vol. 87. P. 300–303. DOI: 10.3103/S106287382270112X
14. Meeker D. Improvised Open Boundary Conditions for Magnetic Finite Elements. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2013. Vol. 49. P. 5243–5247. DOI: 10.1109/TMAG.2013.2260348
15. Coulomb J. A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness. *IEEE Transactions on Magnetics*. 1983. Vol. 19. P. 2514–2519. DOI: 10.1109/TMAG.1983.1062812
16. Ivanov A.S. An Energy Approach to the Calculation of Forces Acting on Solid Bodies in Ferrofluids. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021. Vol. 62. P. 1190–1198. DOI: 10.1134/S0021894421070105