

Научная статья

Метод мультигармонического баланса в задачах приспособляемости элементов конструкций

Р.В. Федоренко, А.В. Лукин

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Теория приспособляемости получила свое начало в 60-х годах XX века. В механике деформируемых тел на ее основе оценивается прочность элементов конструкций (газотурбинных установок, компонентов высокотемпературных реакторов и другого), работающих в условиях действия интенсивных циклических термосиловых нагрузок. Данная работа посвящена исследованию возможных режимов упругопластического деформирования сосуда под давлением при циклически изменяющемся градиенте температуры в предположении упруго-идеально пластической модели поведения материала, из которого сосуд изготовлен. Учет упрочнения материала не позволяет решать задачу аналитически, поэтому необходимо прибегать к численным методам. Значительное влияние на результат оказывает количество расчетных циклов: их большое число может вызывать сложности при моделировании в силу ограниченности пользовательских ресурсов (временных, расчетных). В связи с этим растущее распространение в практике находит специально разработанный для реализации этого класса задач численный метод поиска установившегося циклического состояния (Direct Cyclic Method – DCM). Этот метод, в сущности, представляет собой приложение метода мультигармонического баланса (Multi-Harmonic Balance Method – МНВМ) к задачам квазистатического циклического нагружения вязкоупругопластических тел. В статье изучается эффективность DCM по сравнению с методом прямого нелинейного анализа истории нагружения в задаче оценки приспособляемости сосуда при действии циклических термосиловых нагрузок. Эффективность DCM рассчитана для различных параметров конечно-элементного разбиения и числа циклов нагружения. Показано, что при отсутствии у задачи стабильного периодического решения применимость DCM ограничена.

Ключевые слова: рэтчетинг, циклическое нагружение, приработка, сосуд под давлением, термоциклические нагрузки, пластические деформации, численное моделирование, ABAQUS

Получение: 02.07.2025 / *Публикация онлайн:* 10.12.2025

УДК 004.942, 539.3, 621.039

1. Введение

Прочность элементов конструкций можно оценить по продолжительности их работы в условиях циклических нагрузок. Отдельно экспертной категорией является накопление неупругих деформаций при термосиловом циклическом нагружении [1, 2]. Исторически задача определения циклической прочности берет свое начало из теории приспособляемости [3–7], которая активно начала развиваться в СССР и за рубежом в середине XX века. Необходимость в такой теории возникла при исследовании конструкций, нагруженных как осевой, так и изгибающей/крутильной нагрузками, что может иметь место, например, в результате одновременного действия циклических механических и тепловых нагрузок в сосудах, элементах газотурбинных двигателей и другом. Как выяснилось, при некоторой комбинации параметров нагружения происходит неограниченный рост неупругой деформации без увеличения амплитудной составляющей нагрузки. В рамках теории приспособляемости при определенных допущениях, вводимых в расчетную модель, устанавливаются границы характерных зон отклика конструкции на двухкомпонентное циклическое нагружение.

В оригинальных работах [3, 6] рассматривается сосуд под давлением с циклически изменяющимся по толщине стенки градиентом температуры. С учетом принятых упрощений задача приобретает возможность аналитического решения, которое заключается в нахождении соотношений, описывающих границы характерной приспособляемости конструкции. На момент разработки теории приспособляемости методы вычислительной механики сплошных сред не были развиты в достаточной степени и не позволяли исследовать роль таких факторов, как нелинейность кривой упрочнения, тип упрочнения, трехмерность напряженно-деформированного состояния и других. Учет влияния некоторых из них на результирующий отклик системы стал выполнимым в результате эволюции численных методов. Так, в работах [8, 9] изучается связь возникающих деформаций с характером нагрузки: рассматривается синфазное тепловое и силовое нагружение [8] и тепловая и механическая нагрузки со сдвигом по фазе (с предельным случаем в виде действия нагрузок в противофазе) [9]. В [10] приводится результат работы компактного численного алгоритма, позволяющего получать диаграммы приспособляемости для произвольных параметров системы. Его верификация проводится на основе данных из работ [6] и [8, 9]. Влияние различных механизмов упрочнения материала на движение границ характерных зон приспособляемости является объектом изучения в работах [11, 12], где реализована упрощенная численная процедура и анализируются различные законы описания пластического поведения при кинематическом упрочнении (см. [11]) и при изотропном кинематическом и смешанном упрочнении (см. [12]) на итоговую диаграмму приспособляемости в зависимости от количества циклов нагружения.

В работе [13] вводятся различные значения предела текучести в фазах нагрузки и разгрузки, что позволяет в первом приближении учесть воздействие на приспособляемость ползучести, а в [14] принимаются во внимание добавки перекрестных составляющих мембранных и изгибных напряжений (мембранные напряжения вызывает тепловая нагрузка, а изгибные — механическая). Помимо влияния на приспособляемость параметров материала,

в работах [15, 16] оценивается роль различной формы вырезов в пластине, в работе [17] получены результаты исследования приспособляемости колена трубопровода с локальным утонением стенки.

Решение задач приспособляемости с помощью численных методов традиционно сводится к классическому прямому итерационному методу решения систем линейных уравнений [18], в котором последовательно рассматривается каждый шаг нагружения. В задачах большой размерности этот метод является достаточно трудоемким по временным и ресурсным затратам. С целью повышения эффективности выполнения расчетов для задач приспособляемости в начале XXI века разработан метод поиска установившегося циклического состояния (Direct Cyclic Method, DCM) [19], который реализован в программном комплексе конечно-элементного анализа ABAQUS [20]. В сущности, DCM представляет собой приложение метода мультигармонического баланса (Multi-Harmonic Balance Method, МНВМ) к задачам квазистатического циклического нагружения вязко-упругопластических тел [21–26]. Главная особенность МНВМ состоит в применении метода «большого временного шага» — Large Time Increment Method (LaTin) [27–30] к решению задач, обладающих периодическим решением, с поиском решения в виде разложения в ряды Фурье [20]. LaTin — итерационный вычислительный метод, основанный на разделении задач на глобальную (медленную) и локальную (быструю) подзадачи: проводится итерация решения глобальной подзадачи в упругом и квазистатическом приближении, которая затем уточняется путем решения локальной подзадачи, осуществляемого с учетом возникающих нелинейностей (в материале, вследствие контактного взаимодействия и прочих). Решение задачи методом мультигармонического баланса заключается не в последовательном моделировании циклов нагружения, а в итерационном поиске установившегося периодического отклика физической системы на периодическое воздействие.

В настоящей работе выполняется решение задачи приспособляемости сосуда под давлением в условиях термоциклического нагружения двумя методами: методом прямого численного моделирования и DCM с целью анализа точности и вычислительной эффективности последнего.

2. Постановка задачи

Объектом исследования является сосуд под давлением, подвергаемый термоциклическому нагружению [3, 6]. Приспособляемость рассматриваемой конструкции рассчитывается в программном конечно-элементном комплексе ABAQUS [20]. Задача может быть решена в различных постановках: осесимметричной [10, 12], эквивалентной плоской [11, 14] и других. На рисунке 1 показаны две схемы, соответствующие постановке задачи: осесимметричная (1а) и плоская (1б). При этом d — толщина стенки сосуда, r — радиус сосуда, P — внутреннее давление, T_h — величина температуры, определяющая градиент по толщине стенки, M , $\tau_{1,2}$ — вспомогательные параметры, описание которых приведено далее.

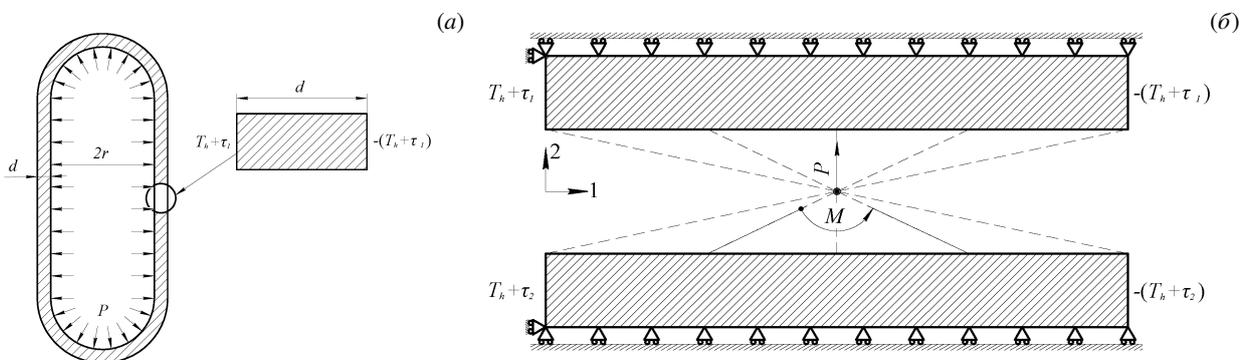


Рис. 1. Сосуд со сферической крышкой в разрезе по вертикальной оси симметрии и регулярная часть его стенки в увеличенном масштабе (см. выноску) (а); схема эквивалентной плоской постановки (б)

Плоская постановка впервые представлена в [14] и является развитием более простой одномерной [11]. Особенность плоской постановки заключается в появлении дополнительных, по сравнению с одномерным случаем, составляющих напряженного состояния. Задача формулируется следующим образом: рассматриваются два идентичных плоских объекта (далее — верхняя и нижняя грани), расположенных со смещением в направлении оси 2, имитирующих фрагменты регулярной части стенки сосуда (Рис. 1б). Имеют место граничные условия: — на внешних горизонтальных поверхностях граней запрещены перемещения по оси 2, а в одной из вершин обеих граней действует запрет на перемещения и по оси 1; — внутренние поверхности граней жестко связаны, но в общем случае не допускаются перемещения только по оси 2, перемещения по оси 1 и повороты вокруг нормали к внутренним поверхностям граней разрешаются (условие реализуется путем записи уравнений связи внутренних поверхностей граней со вспомогательной центральной точкой, в которой известны усилия в направлении оси 2 и вспомогательный крутящий момент вокруг нормали к внутренним поверхностям граней. По длине граней перепад температуры меняется от $T_h + \tau_{1,2}$ до $-(T_h + \tau_{1,2})$.

В классической задаче расчета приспособляемости [6] принимается идеально пластическая модель материала. В напряженное состояние объекта вносят вклад только мембранное усилие от внутреннего давления (механическая

нагрузка) и изгибное усилие, вызываемое градиентом температуры (тепловая нагрузка). В плоской постановке к ним добавляются:

- изгибное усилие от механической нагрузки (момент M и отсутствие запрета на поворот во вспомогательной точке);
- мембранное усилие от тепловой нагрузки (добавки $\tau_{1/2}$ к температурному полю);

Поскольку в данной работе исследование проводится на базе классической постановки, дополнительные параметры во внимание не принимаются и полагается, что $\tau_{1,2} = 0$, $M = 0$ и $\varphi_z = 0$ в каждой из вспомогательных точек. Таким образом, постановка задачи полностью идентична постановке в [3, 6, 11].

3. Методика решения задачи

Решение задачи приспособляемости сосуда под давлением при действии термоциклических нагрузок проводится в программном комплексе ABAQUS с использованием двух подходов: прямого нелинейного статического расчета всей циклограммы нагружения и на основе DCM.

В рамках прямого подхода циклы нагружения рассматриваются последовательно, что позволяет отследить эволюцию напряженного состояния сосуда в течение их исполнения. Очевидно, что время счета зависит от числа циклов и увеличивается с их ростом. При большом количестве циклов ($> 10^6$) решение задачи может стать невозможным в силу большой размерности дискретной модели и значительной накопленной ошибки вычислений.

Подход на основе DCM обладает главным преимуществом по сравнению с прямым расчетом: он позволяет находить стабилизированный отклик конструкции на периодическое воздействие, если таковое имеется, без учета его последовательного нагружения. Подробное описание метода представлено в [19, 20]. Решение задачи, осуществляемое методом конечных элементов, заключается в поиске вектора перемещений \mathbf{u} , приводящего к минимуму погрешности в решении. Невязка описывается как функционал принципа виртуальной работы: $\forall t \in [0, T], \forall u_t^*(x)$ в момент времени t :

$$r(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t^*) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{u}_t^*(x) d\Omega - \int_{\partial F} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_t^*(x) dS \rightarrow \min. \quad (1)$$

В (1) приняты обозначения: \mathbf{u} — вектор перемещений; $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций; \mathbf{f} — вектор объемных сил; \mathbf{F} — вектор поверхностных сил; $r(\mathbf{u})$ — невязка решения. Согласно соответствующему разделу Руководства для пользователя [20], невязка в ABAQUS имеет значение $r(\mathbf{u}) = 0.005$, что является достаточным для получения решения задачи. Эта же величина применяется в исследованиях и авторами данной статьи.

Одним из условий использования DCM является наличие в рассматриваемой задаче только периодических нагрузок на временном отрезке (периоде) $[0, T]$, то есть таких нагрузок, которые имеют одно и то же значение как при $t = 0$, так и при $t = T$. В силу данного требования функцию $r(\mathbf{u})$ предлагается задавать в виде ряда Фурье по некоторому числу гармоник. Тогда для каждого момента времени t_j справедливо соотношение:

$$r_j = r(\mathbf{u}(t_j)) = \frac{R_0}{2} + \sum_{m=1}^{N-1} R_m^c \cos\left(2\pi m \frac{t_j}{T}\right) + R_m^s \sin\left(2\pi m \frac{t_j}{T}\right). \quad (2)$$

В выражении (2) m — порядковый номер гармоники, N — общее число взятых в рассмотрение гармоник, R_0 , R_m^c , R_m^s — коэффициенты разложения:

$$R_m^c = \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{N-1} r_j \cos\left(2\pi m \frac{t_j}{T}\right) = 0, \quad R_m^s = \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{N-1} r_j \sin\left(2\pi m \frac{t_j}{T}\right) = 0. \quad (3)$$

Следующий этап заключается в отыскании коэффициентов разложения (3). Для компактности записи вводится символ $R_m^{(c,s)}$, объединяющий два коэффициента (R_m^c и R_m^s), над которыми проводятся идентичные операции. Вектор перемещений предлагается по аналогии искать в виде разложения в ряд Фурье:

$$\mathbf{u}(t_j) = \frac{\mathbf{U}_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \mathbf{U}_n^c \cos\left(2\pi n \frac{t_j}{T}\right) + \mathbf{U}_n^s \sin\left(2\pi n \frac{t_j}{T}\right). \quad (4)$$

Согласно методу LaTin [27, 28], текущая итерация поиска решения вида (4) состоит из глобального и локального этапов:

- на глобальном этапе определяется величина $\mathbf{U}_n^{(c,s)}$ — коррекция решения в перемещениях относительно решения с предыдущей итерации, затем проверяется выполнение соотношений для коэффициентов разложения и коррекции решения. За счет представления решения в виде ряда реализуется процедура не для полного вектора перемещений, а для коэффициентов его разложения:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{U}_n^{(c,s)}\right)^{i+1} &= \left(\mathbf{U}_n^{(c,s)}\right)^i + \left(\Delta \mathbf{U}_n^{(c,s)}\right)^{i+1}, \\ \left(\Delta \mathbf{U}_n^{(c,s)}\right)^{i+1} &= - \left(\frac{\partial R_m^{(c,s)}}{\partial \mathbf{U}_n^{(c,s)}}\right)^{-1} \left(R_m^{(c,s)}\right)^i; \end{aligned} \quad (5)$$

– на локальном этапе в (5) отыскиваются величины $(R_m^{(c,s)})^{i+1}$ с целью уточнения глобального решения с учетом нелинейностей в системе.

Коэффициенты разложения невязки можно записать в виде (на примере R_m^c):

$$R_m^c = \frac{2}{T} \sum_{j=0}^{N-1} r \left(\frac{U_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} U_n^c \cos \left(2\pi n \frac{t_j}{T} \right) + U_n^s \sin \left(2\pi n \frac{t_j}{T} \right) \right) \cos \left(2\pi m \frac{t_j}{T} \right). \quad (6)$$

Дифференцирование выражения (6) по U_n^c приводит к соотношению:

$$\frac{\partial R_m^c}{\partial U_n^c} = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_j) \left(\cos \left(2\pi(n+m) \frac{t_j}{T} \right) + \cos \left(2\pi(n-m) \frac{t_j}{T} \right) \right) = K_{n+m}^c + K_{n-m}^c. \quad (7)$$

Величины $\partial R_m^{(c,s)} / \partial U_n^{(c,s)}$ (7) являются якобианами решения задачи для невязок (6). Если ввести обозначение $k_j = \frac{\partial r}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_j)$ — касательную матрицу жесткости системы в момент времени t_j , то для нее $K_n^{(c,s)}$ — это коэффициенты разложения в ряд Фурье. Соотношение (7), записанное в матричной форме, имеет вид:

$$\left[\frac{\partial R_m^{(c,s)}}{\partial U_n^{(c,s)}} \right] = \begin{bmatrix} K_0^c & \dots & K_n^c & & K_n^s & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ K_m^c & \dots & (K_{n+m}^c + K_{n-m}^c) & & (K_{n+m}^s - K_{n-m}^s) & \dots \\ K_m^s & \dots & (K_{n+m}^s + K_{n-m}^s) & & (K_{n-m}^c - K_{n+m}^c) & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Размерность матрицы (8) в N раз превышает число степеней свободы системы. В подходе на основе DCM понижается размерность этой матрицы за счет предположения неизменности во времени касательной матрицы k_j , сохранения ее начального значения. Тогда якобиан разрешаемой системы можно представить как матрицу:

$$\left[\frac{\partial R_m^{(c,s)}}{\partial U_n^{(c,s)}} \right] = \begin{bmatrix} K & & & 0 \\ & K & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K \end{bmatrix}.$$

Поиск обратного значения на глобальном этапе решения значительно проще поиска обратного значения полной матрицы. При небольшом числе членов ряда Фурье (на практике используется не более 30) значительно снижается число разрешаемых уравнений для поиска решения задачи.

4. Решение задачи прямым итерационным методом и DCM

Анализ эффективности подхода на основе DCM проводится путем решения задачи приспособляемости сосуда в упрощенной постановке. Эквивалентная ей схема расчетной области представлена на рисунке 1б). На рисунке 2 приведено изображение расчетной схемы, которая соответствует данной постановке в программном комплексе ABAQUS, в котором реализован DCM [20].

Для верификации DCM приводятся полные диаграммы приспособляемости. Данные для них получены прямым методом и DCM (Рис. 3). Диаграммы построены в осях напряжений, нормированных на предел текучести материала σ_y : по оси абсцисс отложены механические (мембранные) напряжения σ_p , по оси ординат — тепловые

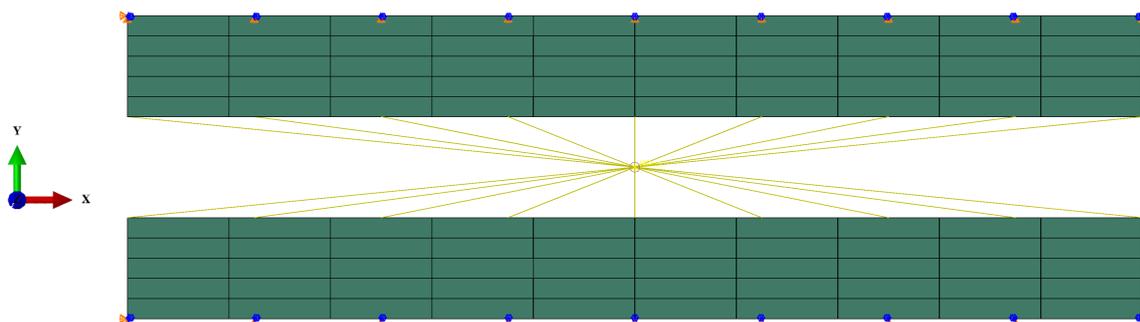


Рис. 2. Расчетная схема задачи в программной комплексе конечно-элементного анализа ABAQUS

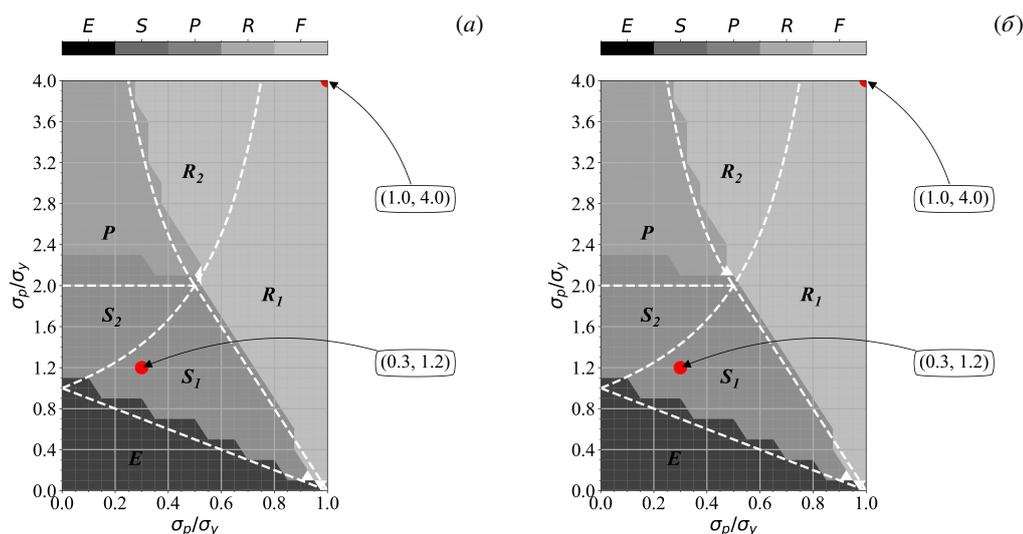


Рис. 3. Диаграммы приспособляемости, рассчитанные прямым методом (а) и DCM (б)

(изгибные) напряжения σ_t . Сплошными линиями на диаграммах изображены аналитические зависимости, отражающие границы раздела характерных зон приспособляемости сосуда [6]. Судя по рисунку, характерные зоны приспособляемости почти идентичны и полностью находятся в пределах аналитических границ.

Зоны позволяют судить о состоянии конструкции [10]:

- зона E соответствует полностью упругому состоянию;
- в зонах S_1 и S_2 уже на первом цикле теплового нагружения в материале возникает пластическая деформация ε_{pl} , и ее значение остается неизменным в течение всей жизни конструкции; пластическая деформация стенки сосуда имеет место только на одной стороне (в зоне S_1 на внутренней, в зоне S_2 на внешней); для названия этого состояния в отечественной литературе используется различная терминология: приспособляемость, упругая приспособляемость, приработка; в зарубежных источниках встречаются термины: elastic, strict shakedown);
- для зоны P характерно циклическое изменение пластической деформации в пределах некоторого среднего значения; приращение пластической деформации от цикла к циклу отсутствует; это состояние называется как знакопеременная пластичность, знакопеременное неупругое деформирование (plastic cycling, global shakedown);
- в зонах R_1 и R_2 от цикла к циклу существует ненулевое приращение пластической деформации, при этом в зоне R_1 деформация растет на внутренней поверхности сосуда, а в зоне R_2 — на его наружной поверхности (используемая терминология: рэтчетинг — неограниченный рост пластических деформаций под действием циклических нагрузок; непрекращающееся знакопеременное течение; прогрессирующая деформация; в зарубежной литературе все это называется ratcheting);
- зона F заложена в программу для отображения областей, в которых по различным причинам решение задачи не сходится.

Важно отметить, что все зоны, кроме R_1 и R_2 , являются устойчивыми, то есть в них неограниченный рост пластических деформаций не наблюдается (Рис. 4). Устойчивость решения, в смысле конечной величины накопленной пластической деформации, крайне важна при применении подхода на основе DCM, поскольку в данном методе отклик физической системы на периодические нагрузки ищется в виде периодической функции, которая должна существовать. Неустойчивое решение задачи оценивается только качественно, то есть величины перемещений, деформаций и напряжений, полученных для комбинации нагрузок в зонах R_1 и R_2 , не соответствуют таковым, установленным прямым методом.

На рисунке 4а хорошо видна особенность подхода на основе DCM: задача не решается на каждом цикле нагружения, результатом является стабилизированный цикл (см. пунктирные линии). Для устойчивых режимов (приработки/shakedown и знакопеременного течения/plastic cyclic) вне зависимости от количества циклов DCM дает хорошую качественную оценку распределения накопленных пластических деформаций ε_{pl} в конструкции. Как отмечено ранее, верифицируемый метод не предназначен для количественной оценки накопления пластических деформаций, в расчете максимальная погрешность для точки по толщине с номером 3 (см. Рис. 4б) в зоне рэтчетинга составляет 36%.

Одним из ключевых преимуществ использования DCM является скорость вычислений по сравнению с прямым итерационным методом. Для анализа данного утверждения проводится исследование с вариацией двух параметров: размерности конечно-элементного разбиения и количества итераций поиска решения. Число итераций в прямом методе расчета соответствует количеству циклов нагружения, а в DCM — количеству итераций поиска стабильного отклика. Отклик определяется в двух точках на диаграммах (см. Рис. 3): в точке (0.3, 1.2) в зоне приработки/shakedown и в точке (1.0, 4.0) в зоне рэтчетинга/ratcheting. Выбор точек обусловлен наличием стабильного решения в первой точке и его отсутствием во второй. При существовании у задачи стабильного

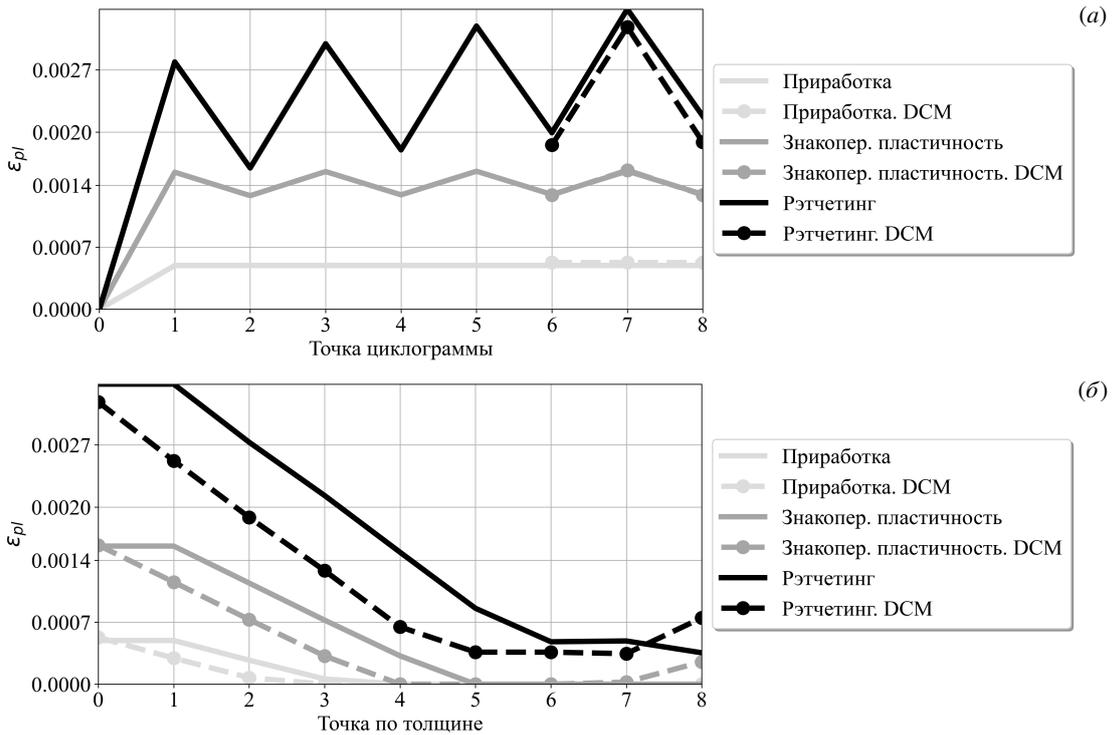


Рис. 4. Изменение пластической деформации: во времени (а), на последнем цикле (б)

решения расчет DCM завершается при достаточной малости коэффициентов в разложении невязки и коррекцией вектора перемещений ряда Фурье. Поэтому возможно более раннее завершение процесса вычислений, чем при предполагаемом числе итераций. При отсутствии стабильного решения расчет DCM гарантировано проводится до тех пор, пока число итераций не станет заданным, поскольку условия малости невязок и коррекций в этом случае не выполняются.

На рисунках 5 и 6 представлены трехмерные диаграммы длительности расчетов в двух выбранных точках на диаграммах при варьировании размерности разбиения (числа конечных элементов по толщине стенки сосуда) и количества итераций. Оба вида вычислений осуществлены при одинаковых расчетных мощностях: на процессоре AMD Ryzen Threadripper 3970X (32 ядра, 64 потока с тактовой частотой 3.70 GHz) и ОЗУ 128 Гб.

Из диаграмм при одном и том же числе итераций расчета на основе DCM видно:

- в точке (0.3, 1.2), в которой присутствует стабильный отклик системы, при малых размерностях конечно-элементного разбиения прирост эффективности расчета по времени значителен: минимум — в 2.5 раза, максимум — в 19 раз. При больших размерностях проявляются некоторые проблемы со сходимостью решения. В результате время расчета увеличивается, но минимальный прирост скорости вычислений остается практически трехкратным;
- в точке (1.0, 4.0), в которой стабильный отклик системы отсутствует, прирост эффективности метода тоже наблюдается, хотя и не так нагляден: от 2 до 3.5 раз.

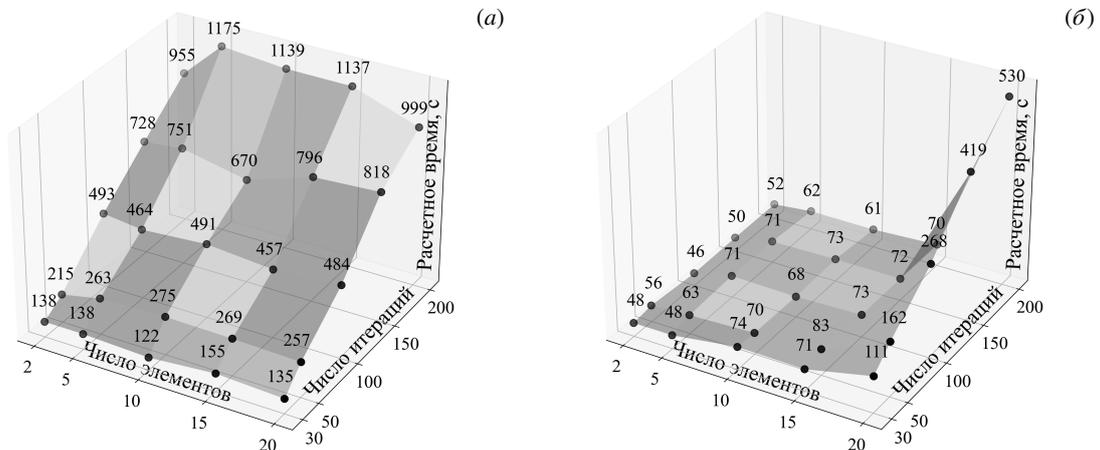


Рис. 5. Длительность расчета в точке (0.3, 1.2) при варьировании параметров: прямой метод расчета (а), DCM (б)

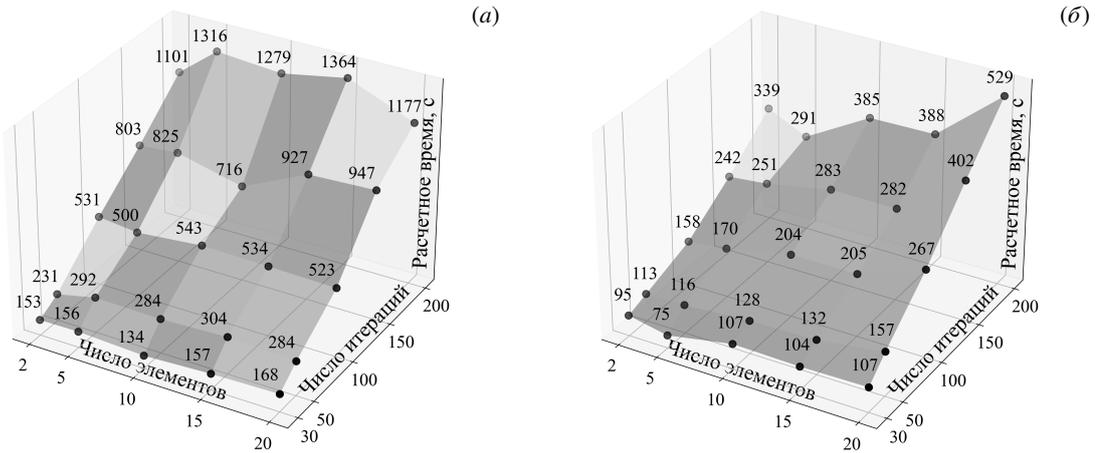


Рис. 6. Длительность расчета в точке (1.0, 4.0) при варьировании параметров: прямой метод расчета (а), DCM (б)

5. Решение задачи с учетом упрочнения материала

Следует напомнить, что в классической постановке задачи приспособляемости материал рассматривается как идеально пластический. Далее аналитически и численно показано, что при таком материале количество циклов нагружения не влияет на итоговую приспособляемость: достаточно совершить 2–3 расчетных цикла, чтобы определить тип приспособляемости для заданных нагрузок.

Отечественные и зарубежные нормы проектирования оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок [1, 2] регламентируют обоснование их прочности. С этой целью проводятся расчеты одностороннего накопления неупругих деформаций (рэтчетинга/ratcheting) в ответственных элементах конструкций. Суть нормативной оценки заключается в показе, что под действием нагрузок (рэтчетинг отсутствует). Согласно этой расчетной методике, на первом этапе принимается, что материал идеально пластический, и анализируется приспособляемость конструкции под действием мембранных и изгибных нагрузок при допуске ее эксплуатации либо в упругой зоне, либо в зоне приработки/shakedown (в зарубежных нормах [2] — и в зоне знакопеременной пластичности/plastic cyclic). В случае невыполнения нормативных критериев осуществляется прямой расчет с учетом сложной реологии материала (кинематического упрочнения и эффектов ползучести). В работе [12] показаны диаграммы приспособляемости при использовании материала с упрочнением в зависимости от числа циклов нагружения.

Для решения задачи с кинематическим упрочнением прибегают к модели Ишлинского–Новожилова–Шабоша [31–33] с введением поверхности текучести Мизеса:

$$\sqrt{(3/2)(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}) : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X})} - \sigma_{y,0} = 0, \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^M \dot{\mathbf{X}}_i, \quad \dot{\mathbf{X}}_i = (2/3)C_i \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pl} - \gamma_i \mathbf{X}_i \dot{p}.$$

В уравнениях (9) приняты обозначения: $\boldsymbol{\sigma}'$ — девиатор тензора напряжений; $\sigma_{y,0}$ — начальный предел текучести материала; \mathbf{X} — переменная, описывающая эффекты кинематического упрочнения; C_i — модуль упрочнения; γ_i — параметр восстановления; $\boldsymbol{\epsilon}_{pl}$ — тензор пластической деформации, $p = \sqrt{(2/3)\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pl} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pl}}$ — накопленная пластическая деформация.

Для решения задачи принимаются параметры, аналогичные используемым в работе [12] для материала с кинематическим упрочнением. Многоповерхностная модель кинематического упрочнения ограничивается тремя слагаемыми ($M = 3$), параметры каждого из них приведены в таблице.

Таблица. Параметры кинематического упрочнения

$\sigma_{y,0}$, МПа	C_1 , МПа	γ_1	C_2 , МПа	γ_2	C_3 , МПа	γ_3
116	114783	2000	29935	262	1049	2

Подход на основе DCM позволяет проводить решение задачи приспособляемости конструкции, материал которой обладает сложной реологией. На рисунке 7 приведены диаграммы приспособляемости для задачи в постановке, представленной в предыдущих разделах, но с учетом кинематического упрочнения; расчетное количество циклов принято равным 25. Выбор в расчете этого количества циклов связан с тем, что для заданных параметров упрочнения материала диаграмма приобретает окончательный стабильный вид и дальнейший расчет не имеет смысла с точки зрения качественного описания зон характерной приспособляемости конструкции.

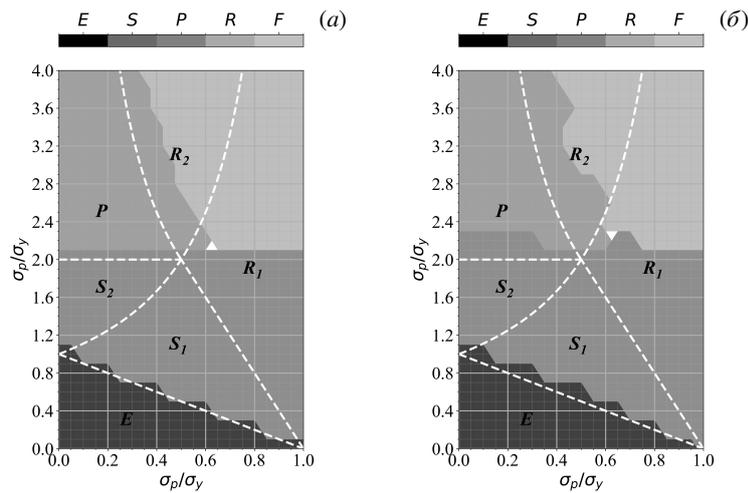


Рис. 7. Диаграммы приспособляемости с учетом кинематического упрочнения: прямой метод расчета (а), метод DCM (б)

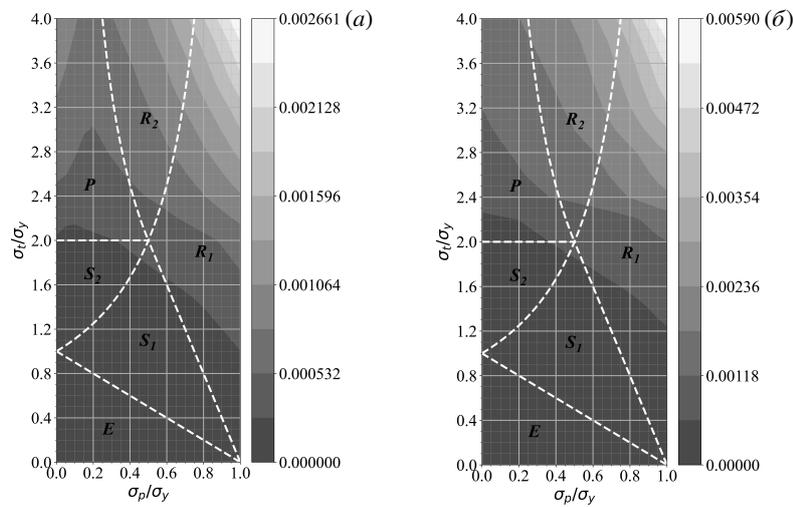


Рис. 8. Накопленная пластическая деформация с учетом кинематического упрочнения при анализе 25 циклов нагружения: прямой метод расчета (а), DCM (б)

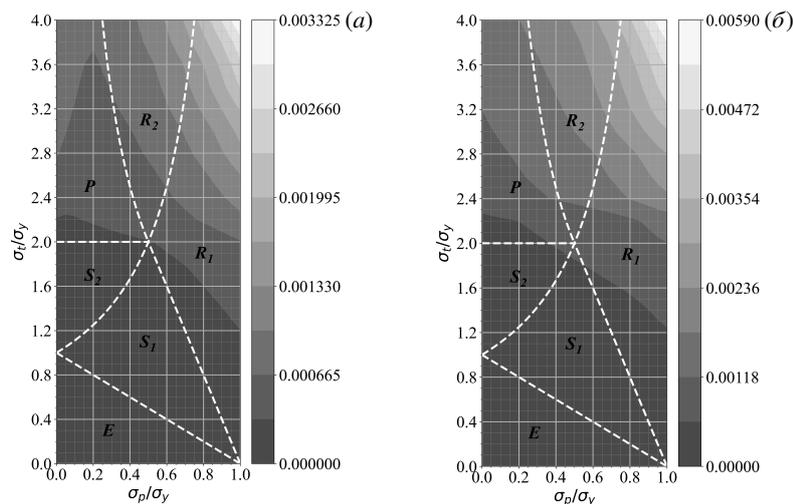


Рис. 9. Накопленная пластическая деформация с учетом кинематического упрочнения при анализе 75 циклов нагружения: прямой метод расчета (а), DCM (б)

На диаграмме наблюдается качественное совпадение результатов. Для построения полной диаграммы с использованием двух подходов потрачено следующее время: при прямом методе расчета 24418 с (6 час 47 мин), при подходе на основе DCM 11002 с (3 час 3 мин). Для данной задачи производительность расчета при помощи DCM выше (более, чем в 2 раза) без значительной потери точности описания границ зон приспособляемости.

Несмотря на достаточно точное вычисление местоположения границ раздела характерных зон

приспособляемости, количественная оценка величин неупругих деформаций имеет значительное отличие при ее определении двумя методами для 25 циклов нагружения (Рис. 8) и 75 циклов нагружения (Рис. 9).

Видно, что подход на основе DCM выдает значения пластической деформации, в среднем в два раза превышающие данные вычислений прямым методом для 25 циклов нагружения. При этом на результаты расчета прямым методом значительное влияние оказывает число расчетных циклов за счет действия упрочнения в системе. По мере увеличения числа циклов нагружения, отличие в результатах двух методов снижается, при этом данная тенденция ярче выражается в зоне стабильного отклика конструкции. Решения задачи при большем числе циклов нагружения могут дать еще более близкое совпадение, однако для реализации потребуются значительные вычислительные ресурсы и вырастут временные затраты. Таким образом, при наличии достаточных мощностей можно сопоставлять количественные решения DCM с прямым методом при нарастающем числе циклов нагружения.

6. Заключение

В работе представлен результаты анализа применения подхода на основе DCM к задаче приспособляемости сосуда под давлением при действии термоциклических нагрузок. На примере решения задачи в упрощенной постановке проведено сравнение результатов, полученных на основе DCM и прямым методом расчета.

Показано, что подход на основе DCM, реализованный в программном комплексе конечно-элементного анализа ABAQUS, точно описывает границы характерных зон приспособляемости. С помощью данного метода возможно определять количественные значения возникающих неупругих деформаций в системе при ее стабильном отклике на внешнее воздействие, однако при выполнении малого числа расчетных циклов наблюдается значительное отличие результатов подхода на основе DCM в сравнении с прямым методом расчета (~ в 2 раза). Подход на основе DCM рекомендуется использовать для количественной оценки при большом числе расчетных циклов, когда вычислительные и временные ресурсы не позволяют проводить расчеты прямым методом.

Применение подхода на основе DCM оправдано, когда требуется качественно оценить характер приспособляемости (например, подтвердить отсутствие рэтчетинга/ratcheting в конструкции). В результате установлено, что DCM значительно снижает расчетное время для задач больших размерностей (с большим числом как точек интегрирования, так и расчетных итераций), по сравнению с прямым методом расчета — более чем в 2 раза.

Литература

1. ГОСТ Р 59115.10-2021. Обоснование прочности оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. Уточненный поверочный расчет на стадии проектирования. М.: Российский институт стандартизации, 2021. 57 с.
2. ASME BPVC.III.5-2015. Section III. Rules for construction of nuclear facility components. Division 5. High Temperature Reactors. ASME, 2015. 500 p.
3. Гохфельд Д.А. Несущая способность конструкций в условиях теплосмен. М.: Машиностроение, 1970. 260 с.
4. Гохфельд Д.А., Чернявский О.Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагружениях. М.: Машиностроение, 1979. 263 с.
5. Чернявский О.Ф., Чернявский А.О. Предельные состояния и коэффициенты запаса при повторных нагружениях // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 3. С. 125–135. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.12
6. Bree J. Elastic-plastic behaviour of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast-nuclear-reactor fuel elements // Journal of Strain Analysis. 1967. Vol. 2, no. 3. P. 226–238. DOI: 10.1243/03093247V023226
7. J. O.W., Porowski J. Upper bounds for accumulated strains due to creep ratcheting // Journal of Pressure Vessel Technology. 1974. Vol. 96, no. 3. P. 150–154.
8. Bradford R.A.W. The Bree problem with primary load cycling in-phase with the secondary load // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2012. No. 99. P. 44–50. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2012.07.014
9. Bradford R.A.W. The Bree problem with primary load cycling out-of-phase with the secondary load // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2017. No. 154. P. 83–94. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2017.06.004
10. Морозов Н.Ф., Федоренко Р.В., Лукин А.В. Численный метод анализа приспособляемости упруго-пластических тел при переменных нагрузках // Композиты и наноструктуры. 2024. Т. 16, № 1. С. 62–78. DOI: 10.36236/1999-7590-2024-16-1-62-78
11. Pei X., Dong P., Mei J. The effects of kinematic hardening on thermal ratcheting and Bree diagram boundaries // Thin-Walled Structures. 2021. No. 159. 107235. DOI: 10.1016/j.tws.2020.107235
12. Федоренко Р.В., Лукин А.В., Муртазин И.Р. О влиянии механизма упрочнения на приспособляемость сосуда под давлением в условиях термоциклического нагружения // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2025. № 1. С. 117–128. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.09
13. Bradford R.A.W., Ure J., Chen H.F. The Bree problem with different yield stresses on-load and off-load and application to creep ratcheting // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2014. No. 113. P. 32–39. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2013.11.004
14. Bao H., Shen J., Liu Y., Chen H. Shakedown analysis and assessment method of four-stress parameters Bree-type problems // International Journal of Mechanical Sciences. 2022. No. 229. 107518. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107518

15. Туркова В.А. Инкрементальный анализ двухосного нагружения пластины с круговым отверстием: приспособляемость, знакопеременная пластичность и рэтчетинг // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 3. С. 106–124.
16. Туркова В.А., Степанова Л.В. Различные режимы циклического нагружения неупругой пластины: конечно-элементный анализ двухосного нагружения упругопластической пластины с эллиптическим вырезом // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 3. С. 207–221. DOI: 10.15593/pern.mech/2016.3.14
17. Shi H., Chen G., Wang Y., Chen X. Ratcheting behavior of pressurized elbow pipe with local wall thinning // Int J. of Pressure Vessels and Piping. 2013. No. 102/103. P. 14–23. DOI: 10.12989/s.cs.2016.20.4.931
18. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.
19. Maitournam M.H., Pommier B., Thomas J.-J. Determination of the asymptotic response of a structure under cyclic thermomechanical loading // Comptes Rendus. Mécanique. 2002. Vol. 330. P. 703–708. DOI: 10.1016/S1631-0721(02)01516-4
20. Abaqus Theory Guide (2016). URL: <http://130.149.89.49:2080/v2016/books/stm/default.htm?startat=ch01s01ath01.html> (дата обращения: 20.7.2025)
21. Krack M., Gross J. Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems. 2019. 167 p. DOI: 10.1007/978-3-030-14023-6
22. Blahoš J., Vizzaccaro A., Salles L., El Haddad F. Parallel Harmonic Balance Method for Analysis of Nonlinear Dynamical Systems // Proceedings of the ASME Turbo Expo. 2020. P. 13. DOI: 10.1115/GT2020-15392
23. Martins T.S., Trainotti F., Zwölfer A., Zwölfer Z., Afonso F. A Python Implementation of a Robust Multi-Harmonic Balance With Numerical Continuation and Automatic Differentiation for Structural Dynamics // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2023. Vol. 18, no. 7. P. 12. DOI: 10.1115/1.4062424
24. Vizzaccaro A., Shen Y., Salles L., Blahoš J., Touzé C. Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2020. Vol. 384. P. 36. DOI: 10.48550/arXiv.2009.12145
25. Raze G., Volvert M., Kerschen G. Tracking amplitude extrema of nonlinear frequency responses using the harmonic balance method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2024. Vol. 125, no. 2. P. 28. DOI: 10.1002/nme.7376
26. Li Y.L., Huang J.L., Zhu W.D. A generalized incremental harmonic balance method by combining a data-driven framework for initial value selection of strongly nonlinear dynamic systems // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2025. Vol. 169, no. 3/4. 104951. DOI: 10.1016/j.ijnonlme.2024.104951
27. Ladeveze P. Mécanique non linéaires des structures. Paris: Hermès, 1996. 280 p.
28. Bharali R. LATIN method for nonlinear dynamic problems. 2016. DOI: 10.13140/RG.2.2.28768.00005
29. Akel S., Nguyen Q.S. Determination of the limit response in cyclic plasticity // Computational Plasticity: Models, Software and Applications: Proceedings of the Second International Conference / ed. by O. D.R., H. E., O. E. 1989. P. 639–650.
30. Spiliopoulos K.V., Kapogiannis I.A. RSDM: A Powerful Direct Method to Predict the Asymptotic Cyclic Behavior of Elastoplastic Structures // Chinese Journal of Mechanical Engineering. 2021. Vol. 34, no. 140. P. 1–18. DOI: 10.1186/s10033-021-00658-0
31. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Украинский математический журнал. 1954. Т. 6, № 3. С. 314–324.
32. Кадашев Ю.И., Новожилков В.В. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера // Доклады Академии наук СССР. 1957. Т. 117, № 4. С. 586–588.
33. Chaboche J.L. Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity // International Journal of Plasticity. 1986. Vol. 2, no. 2. P. 149–188. URL: 10.1016/0749-6419(86)90010-0

Сведения об авторах:

Федоренко Роман Валерьевич (корр.), б/с, инж.-исслед., Передовая инженерная школа «Цифровой инжиниринг», Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (ПИИШ ЦИ, СПбПУ), 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29Б; e-mail: fedorenko_rv@spbstu.ru; ORCID: 0000-0002-2115-1751

Лукин Алексей Вячеславович, кфмн, доц., Высшая школа механики и процессов управления, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (ВШ МПУ, СПбПУ), 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29Б; e-mail: lukin_av@spbstu.ru; ORCID: 0000-0003-2016-8612

Research article

Multi-harmonic balance method in structural element ratcheting problems

R.V. Fedorenko, A.V. Lukin

Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation

The ratcheting theory originated in the 1960s. In mechanics of deformable bodies, it is used to assess the strength of structural elements (gas turbines, high-temperature reactors, etc.) operating under intense cyclic thermal stresses. This study aims to investigate possible modes of elastic-plastic deformation in pressure vessels under cyclically varying temperature conditions, assuming an elastic-ideal plastic material behavior model. Due to material hardening, analytical methods are not sufficient to solve this problem, and numerical methods must be used. The number of calculation cycles significantly affects a process's result: a large number of these cycles can create modeling difficulties due to limited time and computational resources. Therefore, the Direct Cyclic Method (DCM) has become increasingly popular in engineering practice for solving this type of problems. This method is an application of the multi-harmonic balance technique to the problems of quasistatic cyclic loading of viscoelastic-plastic materials. The validity of the DCM method is evaluated by comparing it with the method of direct nonlinear analysis of loading history when assessing the adaptability of vessels under cyclic thermal stresses. The computational efficiency of the DCM was investigated for varying finite element mesh sizes and loading cycles. It is shown that the limitations of the DCM become apparent in cases where a stable periodic solution does not exist.

Keywords: ratcheting, cyclic loads, shakedown, pressure vessel, thermal cyclic loads, plastic strain, numerical simulation, ABAQUS

Received: 02.07.2025 / **Published online:** 10.12.2025

References

1. GOST R 59115.10-2021. Obosnovaniye prochnosti oborudovaniya i truboprovodov atomnykh energeticheskikh ustanovok. Utochnenny poverochnyy raschet na stadii proyektirovaniya [Substantiation of the strength of equipment and pipelines of nuclear power plants. An updated verification calculation at the design stage]. Moscow: Russian Institute of Standardization, 2021. 57 p.
2. ASME BPVC.III.5-2015. Section III. Rules for construction of nuclear facility components. Division 5. High Temperature Reactors. ASME, 2015. 500 p.
3. Gokhfel'd D.A. Nesushchaya sposobnost' konstruksiy v usloviyakh teplosmen. Moscow: Mashinostroyeniye, 1970. 260 p.
4. Gokhfel'd D.A., Chernyavskiy O.F. Nesushchaya sposobnost' konstruksiy pri povtornykh nagruzheniyakh. Moscow: Mashinostroyeniye, 1979. 263 p.
5. Chernyavsky O.F., Chernyavsky A.O. Limit states and safety factors under repeated loading. PNRPU Mechanics Bulletin. 2020. No. 3. P. 125–135. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.3.12
6. Bree J. Elastic-plastic behaviour of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast-nuclear-reactor fuel elements. Journal of Strain Analysis. 1967. Vol. 2, no. 3. P. 226–238. DOI: 10.1243/03093247V023226
7. J. O.W., Porowski J. Upper bounds for accumulated strains due to creep ratcheting. Journal of Pressure Vessel Technology. 1974. Vol. 96, no. 3. P. 150–154.
8. Bradford R.A.W. The Bree problem with primary load cycling in-phase with the secondary load. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2012. No. 99. P. 44–50. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2012.07.014
9. Bradford R.A.W. The Bree problem with primary load cycling out-of-phase with the secondary load. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2017. No. 154. P. 83–94. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2017.06.004
10. Morozov N.F., Fedorenko R.V., Lukin A.V. Computational method for ratcheting analysis of the elastoplastic bodies under cyclic loads. Composites and Nanostructures. 2024. Vol. 16, no. 1. P. 62–78. DOI: 10.36236/1999-7590-2024-16-1-62-78
11. Pei X., Dong P., Mei J. The effects of kinematic hardening on thermal ratcheting and Bree diagram boundaries. Thin-Walled Structures. 2021. No. 159. 107235. DOI: 10.1016/j.tws.2020.107235
12. Fedorenko R.V., Lukin A.V., Murtazin I.R. The hardening type influence of pressure vessel ratcheting in case of thermal cyclic loads. PNRPU Mechanics Bulletin. 2025. No. 1. P. 117–128. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.09
13. Bradford R.A.W., Ure J., Chen H.F. The Bree problem with different yield stresses on-load and off-load and application to creep ratcheting. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2014. No. 113. P. 32–39. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2013.11.004
14. Bao H., Shen J., Liu Y., Chen H. Shakedown analysis and assessment method of four-stress parameters Bree-type problems. International Journal of Mechanical Sciences. 2022. No. 229. 107518. DOI: 10.1016/j.ijmecs.2022.107518
15. Turkova V.A. Incremental analysis of twoaxial loading of the plate with central circular hole: Shakedown (accomodation), alternating plasticity, ratcheting. Vestnik of Samara State University. 2015. No. 3. P. 106–124.
16. Turkova V., Stepanova L. Finite element analysis of biaxial cyclic tensile loading of elasto-plastic plate with central elliptical hole. PNRPU Mechanics Bulletin. 2016. No. 3. P. 207–221. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.14
17. Shi H., Chen G., Wang Y., Chen X. Ratcheting behavior of pressurized elbow pipe with local wall thinning. Int J. of Pressure Vessels and Piping. 2013. No. 102/103. P. 14–23. DOI: 10.12989/s.cs.2016.20.4.931

18. *Zienkiewicz O.C.* The finite element method in engineering science. London: McGraw-Hill, 1971. 521 p.
19. *Maitournam M.H., Pommier B., Thomas J.-J.* Determination of the asymptotic response of a structure under cyclic thermomechanical loading. *Comptes Rendus. Mécanique*. 2002. Vol. 330. P. 703–708. DOI: 10.1016/S1631-0721(02)01516-4
20. *Abaqus Theory Guide (2016)*. URL: <http://130.149.89.49:2080/v2016/books/stm/default.htm?startat=ch01s01ath01.html> (accessed: 20.7.2025)
21. *Krack M., Gross J.* Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems. 2019. 167 p. DOI: 10.1007/978-3-030-14023-6
22. *Blahoš J., Vizzaccaro A., Salles L., El Haddad F.* Parallel Harmonic Balance Method for Analysis of Nonlinear Dynamical Systems. *Proceedings of the ASME Turbo Expo*. 2020. P. 13. DOI: 10.1115/GT2020-15392
23. *Martins T.S., Trainotti F., Zwölfer A., Zwölfer Z., Afonso F.* A Python Implementation of a Robust Multi-Harmonic Balance With Numerical Continuation and Automatic Differentiation for Structural Dynamics. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2023. Vol. 18, no. 7. P. 12. DOI: 10.1115/1.4062424
24. *Vizzaccaro A., Shen Y., Salles L., Blahoš J., Touzé C.* Direct computation of nonlinear mapping via normal form for reduced-order models of finite element nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020. Vol. 384. P. 36. DOI: 10.48550/arXiv.2009.12145
25. *Raze G., Volvert M., Kerschen G.* Tracking amplitude extrema of nonlinear frequency responses using the harmonic balance method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2024. Vol. 125, no. 2. P. 28. DOI: 10.1002/nme.7376
26. *Li Y.L., Huang J.L., Zhu W.D.* A generalized incremental harmonic balance method by combining a data-driven framework for initial value selection of strongly nonlinear dynamic systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2025. Vol. 169, no. 3/4. 104951. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104951
27. *Ladeveze P.* Mécanique non linéaires des structures. Hermès, 1996. 280 p.
28. *Bharali R.* LATIN method for nonlinear dynamic problems. 2016. DOI: 10.13140/RG.2.2.28768.00005
29. *Akel S., Nguyen Q.S.* Determination of the limit response in cyclic plasticity. *Computational Plasticity: Models, Software and Applications: Proceedings of the Second International Conference* / ed. by O. D.R., H. E., O. E. 1989. P. 639–650.
30. *Spiliopoulos K.V., Kapogiannis I.A.* RSDM: A Powerful Direct Method to Predict the Asymptotic Cyclic Behavior of Elastoplastic Structures. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 34, no. 140. P. 1–18. DOI: 10.1186/s10033-021-00658-0
31. *Ishlinskiy A.Y.U.* Obshchaya teoriya plastichnosti s lineynym uprochneniyem. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal*. 1954. Vol. 6, no. 3. P. 314–324.
32. *Kadashevich Y.I., Novozhilov V.V.* The theory of plasticity with the Bauschinger effect taken into account. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1957. Vol. 117, no. 4. P. 586–588.
33. *Chaboche J.L.* Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. *International Journal of Plasticity*. 1986. Vol. 2, no. 2. P. 149–188. URL: 10.1016/0749-6419(86)90010-0