

Научная статья

## Численное моделирование усталостного разрушения легких сплавов, полученных по аддитивной технологии

И.С. Никитин<sup>1</sup>, В.И. Голубев<sup>1,2</sup>, А.Д. Никитин<sup>1</sup>, Б.А. Стратула<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация

Представлен новый подход для оптимизации технологических параметров процесса селективного лазерного плавления. В качестве параметра оптимизации выступает усталостная долговечность образца, полученного методом селективного лазерного плавления. Для реализации подхода разработан двухэтапный алгоритм. На первом этапе решается трехмерная нестационарная нелинейная задача теплопроводности для многофазной системы. В результате моделирования определяются геометрические параметры однослойных и многослойных систем перекрывающихся технологических треков – следов сплавления порошкового материала при помощи лазерного луча. Проводится исследование влияния параметров лазерного плавления (мощности, скорости, шага лазерного луча) на топологические особенности формируемой микроструктуры. Выявлены характерные типы и геометрические параметры квазирегулярных дефектов материала, полученного методом селективного лазерного плавления, в виде областей «непроплавов» и множественных «переплавов». На втором этапе изучается влияние одиночных и множественных дефектов на усталостную прочность напечатанных образцов при высокочастотном нагружении с использованием ранее предложенной авторами мультирежимной модели усталостного разрушения. Показано, что внутренняя неоднородность микроструктуры материалов, изготовленных путем лазерной наплавки, может приводить к более раннему подповерхностному зарождению усталостных трещин и существенно снижать усталостную прочность и долговечность. Этот эффект проявляется сильнее при множественных дефектах. Обсуждаемые модели и алгоритмы позволяют рассчитать усталостную прочность и долговечность материала в зависимости от выбранных технологических параметров как в случае корсетных образцов для усталостных испытаний, создаваемых селективным лазерным плавлением, так и для изделий. Выполнено математическое моделирование и проведено сравнение усталостной долговечности корсетных образцов с экспериментальными данными. Подтверждено качественное и количественное соответствие результатов.

*Ключевые слова:* усталостная прочность, селективное лазерное плавление, математическое моделирование, прогностическая модель, модель циклической повреждаемости

*Получение:* 17.04.2025 / *Публикация онлайн:* 30.07.2025

УДК 539.3

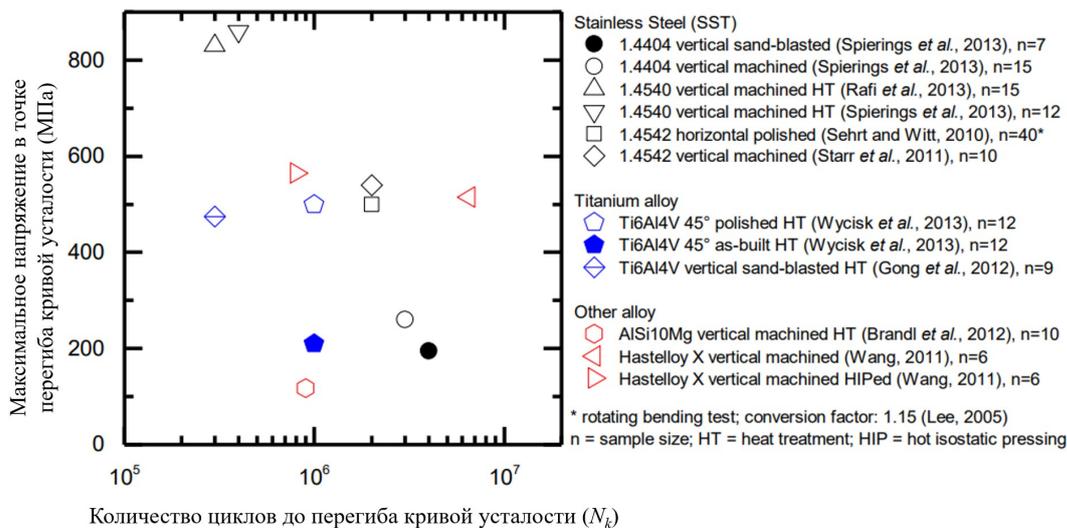
### 1. Введение

Среди методов аддитивного производства в последние годы активно развивается технология селективного лазерного плавления (СЛП) для создания как новых материалов, так и промышленных изделий из них. Технология СЛП является перспективной благодаря ряду преимуществ по сравнению с традиционными методами. Главным преимуществом СЛП технологии является возможность использования моделей изделий, непосредственно импортированных из систем автоматизированного проектирования (Computer Aided Design) — CAD-систем. В этом случае геометрический образ детали из CAD-системы включается в исполнительный алгоритм СЛП-установки. Таким образом, технология оказывается более экономичной, так как зачастую не требует последующих процедур сборки, подгонки, а также технологической подготовки изготовления спроектированных изделий. Кроме того, стоимость оборудования для лазерного плавления ниже, чем у традиционных линий производства с массивными штампами для подготовки болванок и окончательной формовки изделий. Стоит также отметить, что по СЛП-технологии создаются изделия такой сложной пространственной формы, которую не может повторить ни одна существующая технология обработки металлов давлением. Эта особенность СЛП-производства открывает возможность изготовления облегченных конструкций, но обладающих не меньшими расчетными показателями прочности. Как отмечают в компании SAFRAN (Франция) — крупном мировом производителе авиационного оборудования, использование методов СЛП позволило разработать новую геометрию шасси реактивного самолета вида бизнес-джет и уменьшить вес изделия на 15 %. Таким образом, СЛП обладает рядом неоспоримых достоинств, которые делают этот метод перспективным для внедрения в высокотехнологичные отрасли промышленности.

Однако встает важный вопрос обеспечения надлежащей прочности и надежности конструкций, выполненных СЛП. В ряде работ отмечается (см. [1–5]), что механические свойства СЛП-материалов при квазистатическом растяжении оказываются не ниже, а иногда и превосходят свойства материалов, полученных традиционными методами. В [1] показано, что предел прочности образца из нержавеющей стали 17-4PH, изготовленного методом СЛП, оказался выше, чем у кованых образцов, но предел текучести оказался ниже: 485 МПа против 657 МПа у кованого. Аналогичная тенденция отмечается и в работе [2] для алюминиевого сплава AlSi10Mg. Продemonстрировано, что при некоторых параметрах сканирования удается добиться предела прочности 598 МПа при заявленных характеристиках для данного сплава в 450 МПа. Авторы пишут, что на предел прочности в значительной степени влияют скорость движения лазерного луча, мощность, дистанция между ближайшими треками и, кроме этого, на механические характеристики влияют также параметры исходного материала (средний диаметр частиц порошка). Выявлено, что при увеличении диаметра частиц порошка прочность создаваемого материала снижается. Исходя из анализа литературных источников можно заключить, что в настоящее время

существуют надежные методы проектирования параметров СЛП-процессов, позволяющие обеспечить высокую прочность на разрыв при квазистатическом нагружении.

Тем не менее динамические испытания СЛП-сплавов свидетельствуют, что величина усталостной прочности таких материалов оказывается достаточно низкой и плохо прогнозируемой. На рисунке 1 представлены сводные результаты из [6] усталостных испытаний различных СЛП-материалов, таких как нержавеющие стали, сплавы титановые, алюминиевые и другие. Снижение циклической прочности СЛП-материалов часто ассоциируется с качеством поверхности. При послойном построении боковые поверхности образцов и изделий имеют высокую шероховатость, что способствует раннему зарождению усталостных трещин. Этот вопрос является крайне актуальным для изделий сложной геометрической формы с внутренними полостями, которые впоследствии невозможно механически обработать. Как показано на рисунке 1, усталостная прочность титанового сплава Ti-6Al-4V без механической обработки составляет  $\sim 200$  МПа, в то время как для данного класса титановых сплавов предел усталости может достигать 500–600 МПа. Механическая полировка титановых СЛП-образцов позволяет повысить предел циклической прочности почти до 500 МПа. Проведено  $10^7$  циклов исследований, что соответствует объему испытаний на многоцикловую усталость (МНЦУ).



**Рис. 1.** Результаты усталостных испытаний различных СЛП-материалов (сталей, титановых, алюминиевых и других сплавов) [6]

Согласно общепринятым представлениям [7–9], в области МНЦУ усталостные трещины зарождаются на поверхности образца от локальных зон, в которых формируются интрузии и экструзии. Механизм их образования ассоциируется с формированием полос постоянного скольжения (Persistent Slip Bands) — PSB. При поверхностных дефектах в виде значительной шероховатости процесс зарождения трещин с поверхности облегчается. Даже обработка поверхности не позволяет достичь пределов циклической прочности, превосходящих результаты для образцов, изготовленных традиционными методами обработки давлением (экструдированием, штамповкой и другими). Анализ же сведений о нержавеющей стали показывает, что разброс пределов выносливости на базе испытаний из  $10^7$  циклов нагружения крайне велик. Худший предел прочности ( $\sim 200$  МПа) имеют образцы после дробеструйной обработки поверхности, а наилучший ( $\sim 850$  МПа) — отполированные. Кроме того, разброс экспериментальных данных для материалов, полученных одинаковым образом и с идентичной финальной обработкой поверхности, составляет почти 300 МПа (от 500 до 850 МПа). Таким образом, отметим, что циклические свойства СЛП-материалов оказываются ниже, а порой значительно ниже, чем у материалов, созданных традиционными методами обработки давлением. Подводя итог сказанному выше, можно сделать вывод, что надежных методов проектирования заданной величины усталостной прочности для СЛП-материалов в настоящее время не существует и вопрос по-прежнему актуален.

В настоящей работе представлен подход, позволяющий обеспечить надлежащую усталостную прочность и долговечность образца (элемента конструкции) заданной геометрии, получаемого по технологии СЛП. В случае необходимости предлагаемый подход допускает проведение технологической или топологической оптимизации изделия под возможные режимы печати. Работа состоит из двух частей: моделирования процесса СЛП при различных параметрах плавления (мощности лазерного луча, скорости сканирования, степени перекрытия последовательно совершаемых треков). Результатом такого моделирования является топология отвержденных треков с характерными особенностями и дефектами. Во второй части проводится численное моделирование усталостной прочности и долговечности образцов с заданным распределением дефектов плавления, полученных на первом этапе моделирования. Таким образом, подход связывает параметры СЛП-процесса с расчетной долговечностью материала.

## 2. Моделирование процесса селективного лазерного плавления (СЛП)

Рассматривается задача плавления порошкового слоя материала, расположенного на подложке, под воздействием подвижного источника лазерного излучения (Рис. 2). Задача формулируется в декартовой системе координат с началом в точке инициирования процесса. Ось  $x$  совпадает с направлением движения лазера. Область моделирования представляет собой параллелепипед размерами:  $0 \leq x \leq a$ ,  $-b/2 \leq y \leq b/2$ ,  $0 \leq z \leq (-h+d)$ , где  $h = 30$  мкм — толщина слоя порошка,  $d = 400$  мкм — толщина подложки.

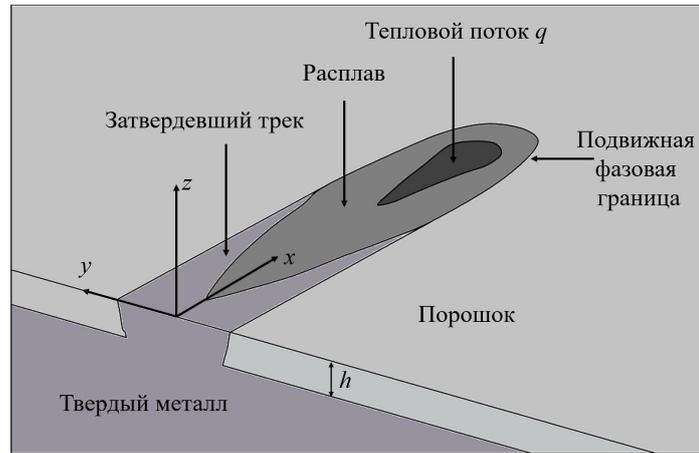


Рис. 2. Схема отверждения трека при движении лазерного луча по порошковому слою с образованием ванны расплава

Математическая постановка нелинейной задачи теплопроводности, описывающая процесс СЛП в параллелепипеде, в энтальпийной формулировке включает [10–12]: уравнение изменения во времени  $t$  энтальпии  $E$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(E) \frac{\partial T(E)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(E) \frac{\partial T(E)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(E) \frac{\partial T(E)}{\partial z} \right) \quad (1)$$

и граничные условия на гранях расчетной области:

– на верхней грани ( $z=0$ )

$$k(E) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\beta(T_{z=0} - T_{ext}) + q(x-vt, y) / (\pi R^2), \quad q(x-vt, y) = q_0 H(R-r), \quad (2)$$

– на остальных гранях

$$\begin{aligned} (x=0, x=a): \quad k(E) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0, a} &= -\beta(T_{x=0, a} - T_{ext}), \\ (y=-b/2, y=b/2): \quad k(E) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=-b/2, b/2} &= -\beta(T_{y=-b/2, b/2} - T_{ext}), \\ (z=-(h+d)): \quad k(E) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-(h+d)} &= -\beta(T_{z=-(h+d)} - T_{ext}), \end{aligned} \quad (3)$$

и начальные условия

$$E(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = E(T_0) = \rho_0(x, y, z) c_0(x, y, z) T_0.$$

В выражениях (1)–(3) приняты обозначения:  $T(E)$  и  $k(E)$  — температура и теплопроводность как функции энтальпии;  $T_{ext}$  — температура внешней среды;  $\beta$  — коэффициент теплопередачи «металл–внешняя среда»;  $R$  — радиус пятна лазерного луча;  $q_0$  — полная мощность лазерного луча;  $H(x)$  — функция Хевисайда;  $\rho_0(z)$ ,  $c_0(z)$ ,  $k_0(z)$  — начальные характеристики плотности, теплоемкости и теплопроводности порошковой и твердой фаз, определяемые вертикальной координатой точки, к которой они относятся (например,  $\rho_0(z) \Big|_{z < -h} = \rho_S$ ,  $\rho_0(z) \Big|_{z > -h} = \rho_P$ ); индексами  $P$  и  $S$  помечены значения параметров порошковой и твердой фаз.

Наглядная схема процесса формирования единичного отвержденного трека при движении лазерного луча по порошковому слою с образованием ванны расплава представлена на рисунке 2.

Зависимости температуры и теплопроводности от энтальпии, учитывающие возможные фазовые переходы, имеют вид:

$$T(E) = \begin{cases} \frac{E}{\rho_0(z)c_0(z)}, E < E_{m-}, \\ T_m, E_{m-} \leq E < E_{m+}, \\ T_m + \frac{(E - E_{m+})}{\rho_L c_L}, E_{m+} \leq E < E_{V-}, \\ T_V, E_{V-} \leq E < E_{V+}, \\ T_V + \frac{(E - E_{V+})}{\rho_V c_V}, E_{V+} \leq E, \end{cases} \quad (4)$$

$$k(E) = \begin{cases} k_0(z), E < E_{m-}, \\ k_0(z) + [k_L - k_0(z)] \frac{(E - E_{m-})}{(E_{m+} - E_{m-})}, E_{m-} \leq E < E_{m+}, \\ k_L, E_{m+} \leq E < E_{V-}, \\ k_L + [k_V - k_L] \frac{(E - E_{V-})}{(E_{V+} - E_{V-})}, E_{V-} \leq E < E_{V+}, \\ k_V, E_{V+} \leq E. \end{cases} \quad (5)$$

где  $E_{m-} = \rho_0(z)c_0(z)T_m$ ,  $E_{m+} = E_{m-} + \rho_0(z)\lambda$ ,  $E_{V-} = \rho_L c_L(T_V - T_m) + E_{m+}$ ,  $E_{V+} = E_{V-} + \rho_V \Lambda$ ,  $\rho_L$ ,  $c_L$  и  $k_L$  — плотность, коэффициенты теплоемкости и теплопроводности жидкой фазы,  $T_m$  — температура плавления,  $\lambda$  — удельная теплота плавления,  $\rho_V$ ,  $c_V$ ,  $k_V$  — плотность, коэффициенты теплоемкости и теплопроводности газообразной фазы,  $T_V$  — температура парообразования,  $\Lambda$  — удельная теплота парообразования.

Энтальпийная формулировка задачи СЛП использована для того, чтобы избежать явного выделения неизвестных межфазных границ при численном решении нелинейной многофазной задачи теплопроводности [11–14].

В нелинейные зависимости  $T(E)$  и  $k(E)$ , в дополнение к стандартным ветвям фазового перехода «твердое тело–жидкость», введены ветви фазового перехода «жидкость–пар» при достижении и превышении температуры парообразования. Такие режимы также возникают в процессе СЛП под воздействием достаточно мощного лазерного теплового потока.

### 3. Численное моделирование процесса селективного лазерного плавления

#### 3.1. Неявная схема расщепления по направлениям для решения многофазной нелинейной задачи теплопроводности

Аппроксимация энтальпийного уравнения (1) с заданными граничными (2) и начальными (3) условиями производится с использованием неявной разностной схемы расщепления по координатным направлениям в рамках метода конечных объемов [15, 16]. Аппроксимация во внутренних точках основывается на интегрировании по времени уравнения (1) на слое  $n+1$  по объему каждой элементарной ячейки с определением неизвестных сеточных функций  $E_{ijk}^{n+1}$ ,  $T_{ijk}^{n+1}$  в ее центральной точке:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial E}{\partial t} dv &= \iint_S (Q_x n_x + Q_y n_y + Q_z n_z) ds, \\ Q_x &= k(E) \frac{\partial T(E)}{\partial x}, \quad Q_y = k(E) \frac{\partial T(E)}{\partial y}, \quad Q_z = k(E) \frac{\partial T(E)}{\partial z}, \\ \frac{E_{ijk}^{n+1} - E_{ijk}^n}{\Delta t} \Delta v_{ijk} &= \sum_l (Q_x n_x + Q_y n_y + Q_z n_z)_{ijk}^l \Delta s_{ijk}^l, \end{aligned}$$

где  $l$  — нумерация граней ячейки,  $x_{ijk}$ ,  $y_{ijk}$ ,  $z_{ijk}$  — координаты центров ячеек, на которые разбивается область решения,  $i = 1, \dots, IM$ ,  $j = 1, \dots, JM$ ,  $k = 1, \dots, KM$ , где  $IM$ ,  $JM$ ,  $KM$  — число узлов вдоль соответствующих направлений.

«Предиктор» — шаг аппроксимационной поправки по оси  $x$  с коэффициентами теплопроводности и теплоемкости энтальпийного уравнения, взятыми с предыдущего ( $n$ -го) слоя, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}_{ijk}^{n+1/3} - E_{ijk}^n}{\Delta t} \Delta v_{ijk} &= (\tilde{Q}_x n_x)_{ijk}^{n+1/3} \Delta s_{ijk}, \\ (\tilde{Q}_x n_x)_{ijk}^{n+1/3} &= (\tilde{Q}_x^+)_{ijk}^{n+1/3} - (\tilde{Q}_x^-)_{ijk}^{n+1/3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\tilde{Q}_x^+)^{n+1/3} &= k_{i+1/2,jk}^n \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i+1/2,jk}^n \frac{(\tilde{E}_{i+1,jk}^{n+1/3} - \tilde{E}_{ijk}^{n+1/3})}{(x_{i+1,jk} - x_{ijk})}, \\
 (\tilde{Q}_x^-)^{n+1/3} &= k_{i-1/2,jk}^n \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i-1/2,jk}^n \frac{(\tilde{E}_{ijk}^{n+1/3} - \tilde{E}_{i-1,jk}^{n+1/3})}{(x_{ijk} - x_{i-1,jk})}, \\
 k_{i+1/2,jk}^n &= \frac{k(E_{i+1,jk}^n) + k(E_{ijk}^n)}{2}, k_{i-1/2,jk}^n = \frac{k(E_{i-1,jk}^n) + k(E_{ijk}^n)}{2}, \\
 \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i+1/2,jk}^n &= \left( \frac{\partial T}{\partial E} (E_{i+1,jk}^n) + \frac{\partial T}{\partial E} (E_{ijk}^n) \right) / 2, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i-1/2,jk}^n = \left( \frac{\partial T}{\partial E} (E_{i-1,jk}^n) + \frac{\partial T}{\partial E} (E_{ijk}^n) \right) / 2.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Получающаяся система уравнений относительно неизвестных  $\tilde{E}_{ijk}^{n+1/3}$  имеет трехдиагональную матрицу и решается методом трехточечной прогонки [16].

Аналогичные формулы применяются для неявного шага «предиктор» по  $y$  (и по  $z$ ) относительно неизвестных  $\tilde{E}_{ijk}^{n+2/3}$  (и  $\tilde{E}_{ijk}^{n+1}$ ) с использованием потоков  $(\tilde{Q}_y n_y)_{ijk}^{n+2/3}$  (и  $(\tilde{Q}_z n_z)_{ijk}^{n+1}$ ):

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{E}_{ijk}^{n+2/3} - \tilde{E}_{ijk}^{n+1/3}}{\Delta t} \Delta v_{ijk} &= (\tilde{Q}_y n_y)_{ijk}^{n+2/3} \Delta s_{ijk}, \quad (\tilde{Q}_y n_y)_{ijk}^{n+2/3} = (\tilde{Q}_y^+)_{ijk}^{n+2/3} - (\tilde{Q}_y^-)_{ijk}^{n+2/3}, \\
 (\tilde{Q}_y^+)_{ijk}^{n+2/3} &= k_{i,j+1/2,k}^n \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i,j+1/2,k}^n \frac{(\tilde{E}_{i,j+1,k}^{n+2/3} - \tilde{E}_{ijk}^{n+2/3})}{(y_{i,j+1,k} - y_{ijk})}, \\
 (\tilde{Q}_y^-)_{ijk}^{n+2/3} &= k_{i,j-1/2,k}^n \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i,j-1/2,k}^n \frac{(\tilde{E}_{ijk}^{n+2/3} - \tilde{E}_{i,j-1,k}^{n+2/3})}{(y_{ijk} - y_{i,j-1,k})}, \\
 \frac{\tilde{E}_{ijk}^{n+1} - \tilde{E}_{ijk}^{n+2/3}}{\Delta t} \Delta v_{ijk} &= (\tilde{Q}_z n_z)_{ijk}^{n+1} \Delta s_{ijk}, \quad (\tilde{Q}_z n_z)_{ijk}^{n+1} = (\tilde{Q}_z^+)_{ijk}^{n+1} - (\tilde{Q}_z^-)_{ijk}^{n+1}, \\
 (\tilde{Q}_z^+)_{ijk}^{n+1} &= k_{i,j,k+1/2}^n \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i,j,k+1/2}^n \frac{(\tilde{E}_{i,j,k+1}^{n+1} - \tilde{E}_{ijk}^{n+1})}{(z_{i,j,k+1} - z_{ijk})}, \\
 (\tilde{Q}_z^-)_{ijk}^{n+1} &= k_{i,j,k-1/2}^n \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i,j,k-1/2}^n \frac{(\tilde{E}_{ijk}^{n+1} - \tilde{E}_{i,j,k-1}^{n+1})}{(z_{ijk} - z_{i,j,k-1})}.
 \end{aligned}$$

Шаг аппроксимации «корректор» по направлению  $x$  совершается с пересчитанными значениями коэффициента теплопроводности и теплоемкости энтальпийного уравнения и выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{E_{ijk}^{n+1/3} - E_{ijk}^n}{\Delta t} \Delta v_{ijk} &= (Q_x n_x)_{ijk}^{n+1/3} \Delta s_{ijk}, \quad (Q_x n_x)_{ijk}^{n+1/3} = (Q_x^+)_{ijk}^{n+1/3} - (Q_x^-)_{ijk}^{n+1/3}, \\
 (Q_x^+)_{ijk}^{n+1/3} &= \tilde{k}_{i+1/2,jk}^{n+1} \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i+1/2,jk}^{n+1} \frac{(E_{i+1,jk}^{n+1/3} - E_{ijk}^{n+1/3})}{(x_{i+1,jk} - x_{ijk})}, \\
 (Q_x^-)_{ijk}^{n+1/3} &= \tilde{k}_{i-1/2,jk}^{n+1} \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i-1/2,jk}^{n+1} \frac{(E_{ijk}^{n+1/3} - E_{i-1,jk}^{n+1/3})}{(x_{ijk} - x_{i-1,jk})}, \\
 \tilde{k}_{i+1/2,jk}^{n+1} &= (k(\tilde{E}_{i+1,jk}^{n+1}) + k(\tilde{E}_{ijk}^{n+1})) / 2, \quad \tilde{k}_{i-1/2,jk}^{n+1} = (k(\tilde{E}_{i-1,jk}^{n+1}) + k(\tilde{E}_{ijk}^{n+1})) / 2, \\
 \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i+1/2,jk}^{n+1} &= \left( \frac{\partial T}{\partial E} (\tilde{E}_{i+1,jk}^{n+1}) + \frac{\partial T}{\partial E} (\tilde{E}_{ijk}^{n+1}) \right) / 2, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i-1/2,jk}^{n+1} = \left( \frac{\partial T}{\partial E} (\tilde{E}_{i-1,jk}^{n+1}) + \frac{\partial T}{\partial E} (\tilde{E}_{ijk}^{n+1}) \right) / 2.
 \end{aligned}$$

На этом шаге для решения системы уравнений относительно неизвестных значений  $E_{ijk}^{n+1/3}$  также применяется трехточечная прогонка.

Формулы «корректора» по направлению  $y$  относительно  $E_{ijk}^{n+2/3}$  с потоками  $(Q_y n_y)_{ijk}^{n+2/3}$  и по направлению  $z$  относительно  $E_{ijk}^{n+1}$  с потоками  $(Q_z n_z)_{ijk}^{n+1}$  выглядят аналогично:

$$\frac{E_{ijk}^{n+2/3} - E_{ijk}^{n+1/3}}{\Delta t} \Delta v_{ijk} = (Q_y n_y)_{ijk}^{n+2/3} \Delta s_{ijk}, \quad (Q_y n_y)_{ijk}^{n+2/3} = (Q_y^+)_{ijk}^{n+2/3} - (Q_y^-)_{ijk}^{n+2/3},$$

$$\begin{aligned}
(Q_y^+)_{ijk}^{n+2/3} &= \tilde{k}_{i,j+1/2,k}^{n+1} \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i,j+1/2,k}^{n+1} \frac{(E_{i,j+1,k}^{n+2/3} - \tilde{E}_{ijk}^{n+2/3})}{(y_{i,j+1,k} - y_{ijk})}, \\
(Q_y^-)_{ijk}^{n+2/3} &= \tilde{k}_{i,j-1/2,k}^{n+1} \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i,j-1/2,k}^{n+1} \frac{(E_{ijk}^{n+2/3} - E_{i,j-1,k}^{n+2/3})}{(y_{ijk} - y_{i,j-1,k})}, \\
\frac{E_{ijk}^{n+1} - E_{ijk}^{n+2/3}}{\Delta t} \Delta v_{ijk} &= (Q_z n_z)_{ijk}^{n+1} \Delta s_{ijk}, \quad (Q_z n_z)_{ijk}^{n+1} = (Q_z^+)_{ijk}^{n+1} - (Q_z^-)_{ijk}^{n+1}, \\
(Q_z^+)_{ijk}^{n+1} &= \tilde{k}_{i,j,k+1/2}^{n+1} \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i,j,k+1/2}^{n+1} \frac{(E_{i,j,k+1}^{n+1} - E_{ijk}^{n+1})}{(z_{i,j,k+1} - z_{ijk})}, \\
(Q_z^-)_{ijk}^{n+1} &= \tilde{k}_{i,j,k-1/2}^{n+1} \left( \frac{\partial T}{\partial E} \right)_{i,j,k-1/2}^{n+1} \frac{(E_{ijk}^{n+1} - E_{i,j,k-1}^{n+1})}{(z_{ijk} - z_{i,j,k-1})}.
\end{aligned}$$

Отметим, что аппроксимация энтальпии в граничных ячейках осуществляется по общей схеме (6). Так, для верхней грани  $z = 0$  по форме она будет совпадать с (6), если учесть, что в ячейках, прилежащих к верхней грани ( $k = KM$ ), но величина потока будет отвечать его граничным значениям:

$$Q_z^+ = -\beta(T_{ijk}^b - T_{ext}) + q(x - vt, y).$$

Поскольку принятая схема расчета является абсолютно устойчивой [15, 16], то шаг по времени можно выбирать исходя из общих оценок времени  $\tau$ , характерного для данного нестационарного процесса. Скажем, что  $\tau_i = \Delta h/v$ , где  $\Delta h$  — минимальный размер ячейки в окрестности лазерного пятна. Таким образом, выбранный временной шаг значительно превышает величину, по условию устойчивости необходимую для явной аппроксимации трехмерного нестационарного параболического уравнения:  $\tau_e = \min_{ijk}(\Delta h^2) / \max_{ijk}(k/(\rho c)) / 8$ .

### 3.2. Расчет единичного трека и сравнение с экспериментом

Были проведены расчеты единичного затвердевшего трека и геометрических характеристик ванны расплава в порошковом слое на подложке из титанового сплава Ti-6Al-4V для подвижного лазерного луча с мощностью  $q_0 = 100$  Вт, скоростью движения  $v = 800$  мм/с, радиусом пятна  $R = 100$  мкм. Вычисления выполнены на сетке со сгущением в окрестности ванны расплава и минимальным пространственным шагом 2.5 мкм. Физические свойства трех состояний сплава (твердого, порошкообразного и расплава), использованных при этом, содержит таблица.

На рисунке 3 представлены результаты расчета формы ванны расплава и единичного затвердевшего трека. Цифрами показаны фазовые состояния материала (порошок 1, затвердевший материал 2, ванна расплава в жидком состоянии 3, область воздействия лазерного излучения 4). Хорошо видно, что при данных параметрах процесса происходит желаемое сплавление трека с подложкой, но зона сцепления мала (составляет примерно 20% от общей глубины трека).

Из серии расчетов получены данные о ширине и глубине сечений сформировавшихся треков и построены их зависимости от параметров СЛП-процесса: скорости сканирования в диапазоне 500–1200 мм/с и мощности излучения из диапазона 50–200 Вт (Рис. 4). Для их сравнения с результатами экспериментов из [17], последние на рисунке 4 показаны значками. При определении приведенных значений в выражениях для  $T(E)$  (4) и  $k(E)$  (5) учтен фазовый переход «жидкость–пар» при температуре парообразования  $T_v$ . Также приняты во внимание дополнительные энергозатраты на удельную теплоту парообразования  $\Lambda$ . В зонах превышения температуры  $T_v$ , которые возникают при высоких значениях мощности лазерного луча, применялись коэффициенты теплопроводности и теплоемкости  $k_v = 1200$  Вт/(м·К),  $c_v = 1150$  Дж/(кг·К) при значениях  $\Lambda = 4$  МДж. При их других величинах расхождение численных и экспериментальных результатов существенно выше.

Аналогичные результаты были достигнуты в работе [18] с помощью явной схемы. На сетке с минимальным размером шага по координате 10 мкм расчет по неявной схеме с расщеплением по координатным направлениям на сетке из  $140 \times 100 \times 40$  ячеек проводился с временным шагом  $\tau_i = 10^{-5}$  с, который примерно в 100 раз превышает шаг, принятый в вычислениях по явной схеме и выбранный из условия устойчивости. При таком размере ячейки на пятно лазерного луча радиусом  $R = 40$  мкм приходится  $8 \times 8 = 64$  ячейки. Реальное время счета по неявной схеме одного варианта, отвечающего прохождению единичного трека, оказалось в 9 раз меньше, чем по явной. Это объясняется отсутствием затрат на реализацию трех подшагов предиктора и трех подшагов корректора при шестикратной диагональной прогонке на каждом подшаге. Очевидно, что дробление сетки в 2 раза увеличит эту разницу в 4 раза вследствие квадратичной зависимости явного шага по времени от размера ячейки.

Таблица. Характеристики Ti-6Al-4V и AlSi10Mg

Характеристика			Величина	
Название	Обозначение	Размерность	Ti-6Al-4V	AlSi10Mg
Плотность твердой фазы	$\rho_S$	кг/м <sup>3</sup>	4400	2670
Насыпная плотность порошка	$\rho_P$	кг/м <sup>3</sup>	3750	2100
Плотность жидкой фазы	$\rho_L$	кг/м <sup>3</sup>	3900	2460
Температура плавления	$T_m$	К	1920	870
Температура испарения	$T_V$	К	3530	2600
Удельная теплота плавления	$\lambda$	кДж/кг	286	440
Удельная теплота парообразования	$L$	МДж/кг	4.0	8.0
Теплопроводность твердой фазы, $T = 300\text{K}$	$k_S$	Вт/(м·К)	3.9	148.3
Теплопроводность твердой фазы	$k_S$ при $T = T_m$	Вт/(м·К)	28.1	136.5
Теплопроводность жидкой фазы	$k_L$ при $T = T_m$	Вт/(м·К)	28.6	77.4
Теплопроводность жидкой фазы	$k_L$ при $T = T_V$	Вт/(м·К)	57.7	118.0
Теплопроводность газа	$k_V$ при $T = T_V$	Вт/(м·К)	60.0	120.0
Теплопроводность порошка	$k_P$	–	0.95	0.90
Теплоемкость твердой фазы	$C_S$	Дж/(кг·К)	760	990
Теплоемкость порошка	$C_P$	Дж/(кг·К)	760	990
Теплоемкость жидкой фазы	$C_L$	Дж/(кг·К)	1150	1470
Коэффициент теплопередачи металл–воздух	$\beta$	Вт/(м·К)	10–100	10–100

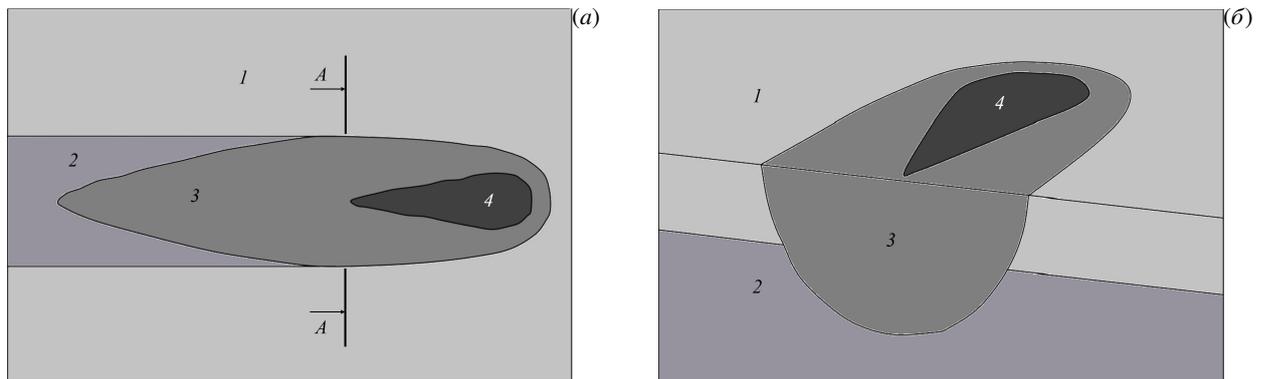


Рис. 3. Одиночный СЛП-трек титанового сплава при  $q_0 = 100$  Вт,  $v = 800$  мм/с, вид сверху (а), вид в сечении А–А сплавленного с подложкой трека (б)

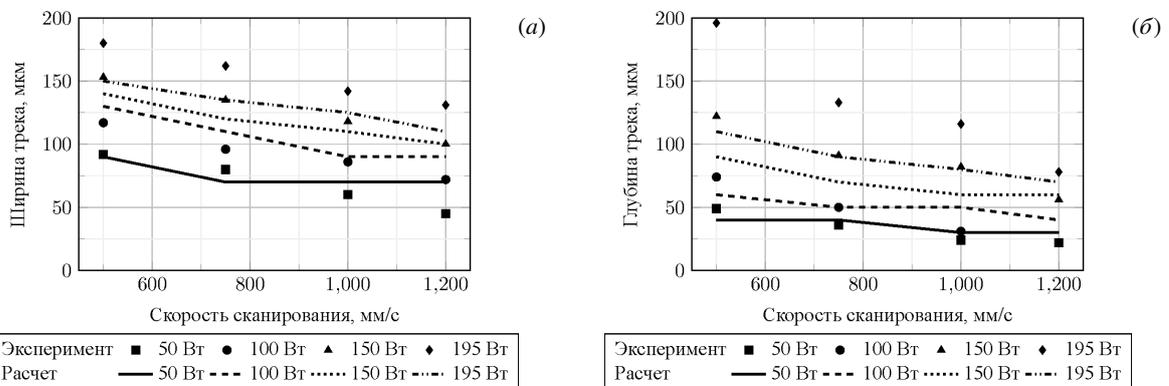
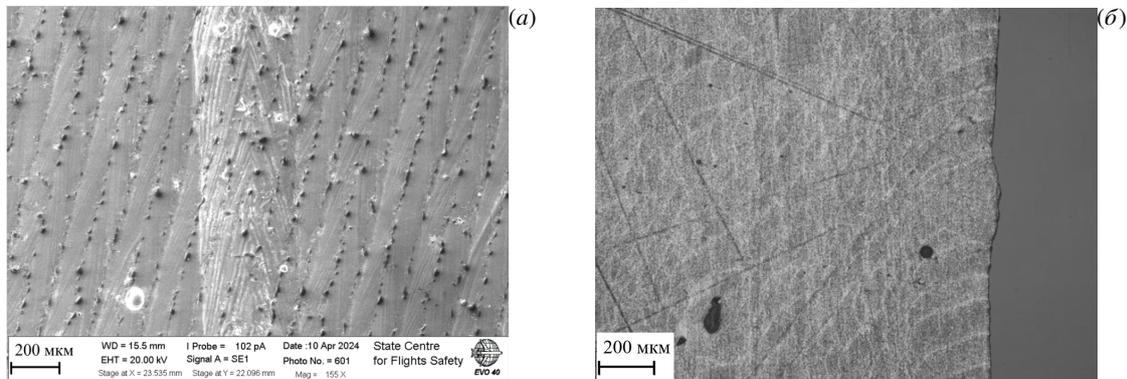


Рис. 4. Расчетные ширина (а) и глубина (б) трека с учетом испарения с поверхности ванны расплава и экспериментальные данные из [17] для сравнения

### 3.3. Моделирование линейной и многослойной систем треков

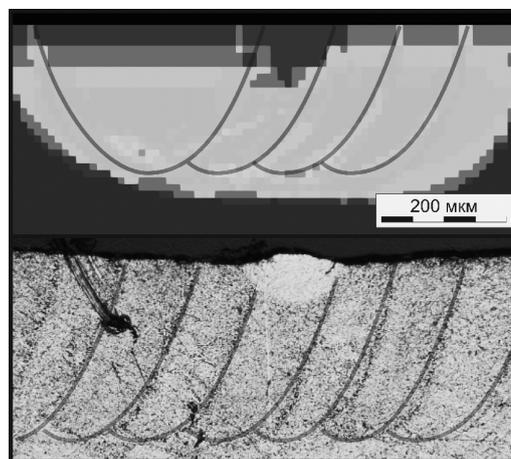
#### 3.3.1. Алюминиевый сплав, напечатанный по технологии СЛП, в расчете и эксперименте

Микроскопическая структура напечатанного материала видна на снимках поверхности выделенного трека (Рис. 5а) и сечения системы перекрывающихся треков (Рис. 5б), полученных с помощью электронного и оптического микроскопов при различных сочетаниях мощности лазерного луча и скорости сканирования.



**Рис. 5.** Наблюдаемая в электронный микроскоп структура напечатанного алюминиевого сплава при  $q_0 = 370$  Вт,  $v = 650$  мм/с, вид сверху (а); вид в оптическом микроскопе сечения приповерхностного слоя трека, напечатанного при  $q_0 = 370$  Вт,  $v = 450$  мм/с (б)

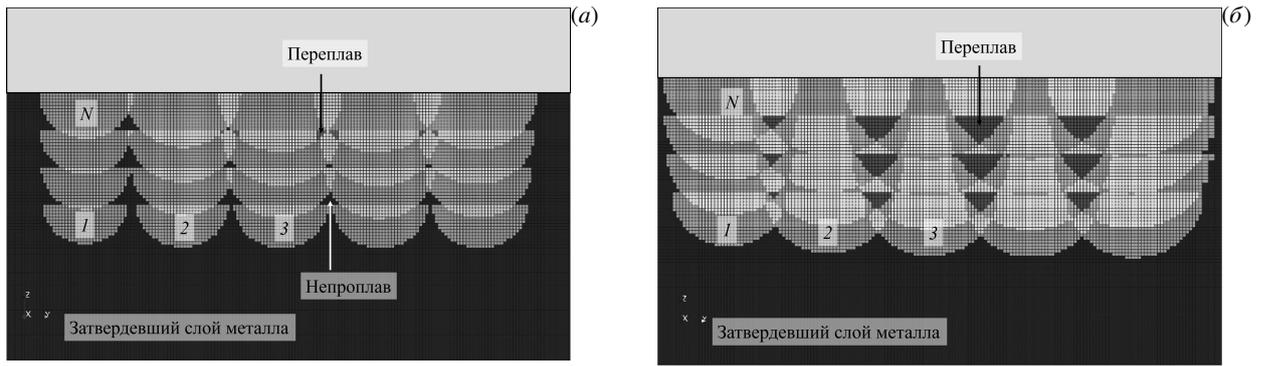
Результаты вычислений и эксперимента для многократного и многослойного прохождения лазерного луча, дающие представление о структуре формирующейся системы дефектов при перекрывающихся треках, показаны на рисунке 6. Проведены прямое численное моделирование процесса создания подложки в алюминиевом порошке и натурное селективное лазерное плавление со следующими параметрами процесса: диаметр пятна 80 мкм, мощность лазерного луча  $q_0 = 370$  Вт, скорость сканирования 1500 мм/с, шаг луча 105 мкм. Из рисунка видно, что взаимное соответствие геометрической структуры перекрывающихся треков достаточно хорошее.



**Рис. 6.** Геометрическая структура перекрывающихся треков: расчет (вверху), эксперимент, изображение в оптическом микроскопе (внизу)

#### 3.3.2. Результаты моделирования дефектной структуры

Характерная структура материала, полученного методом СЛП при других параметрах процесса, представлена на рисунке 7. Рассмотрены случаи большей скорости движения лазерного пятна при постоянной мощности  $q_0 = 50$  Вт: 1000 мм/с (Рис. 7а) и 500 мм/с (Рис. 7б). На рисунке 7а видно, что материал строится послойно из лазерных треков при перемещении луча слева направо, при этом остаются зоны с порошком, не вовлеченные в процесс плавления. С ростом интегральной температуры разогрева рассматриваемого объема материала зоны проплавления увеличиваются. Тем не менее даже при третьем–четвертом проходах наблюдаются треугольники «непроплавов». Таким образом, высокая скорость сканирования может приводить к формированию дефектов типа пор с нерасплавленным порошком.



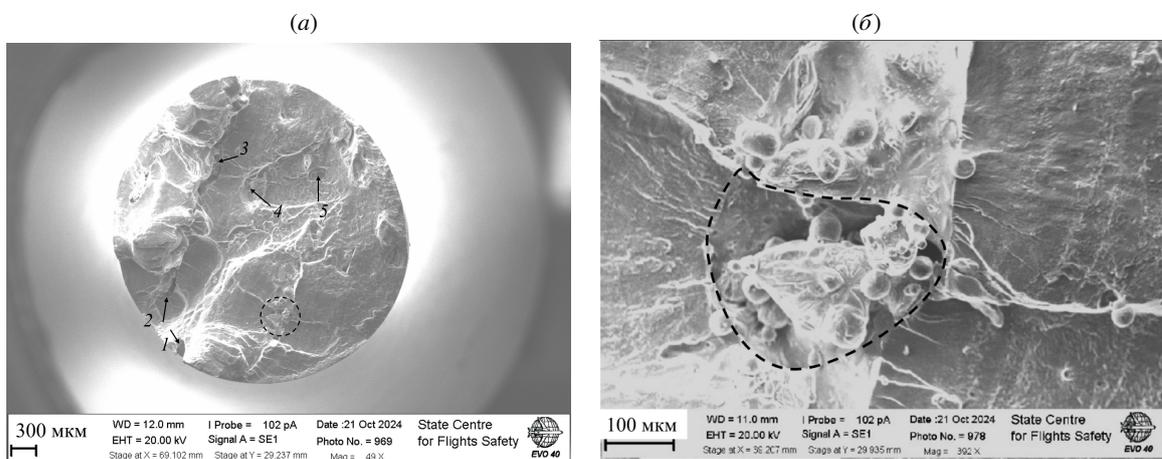
**Рис. 7.** Результаты моделирования структуры двухфазного  $\alpha + \beta$  титанового сплава при различных параметрах воздействия лазерного луча:  $q_0 = 50$  Вт,  $v = 1000$  мм/с, непроплавы (а);  $-q_0 = 50$  Вт,  $v = 500$  мм/с, множественные переплавы (б) (непроплавы отсутствуют); цифры обозначают порядковый номер трека

При уменьшении скорости движения лазерного пятна проплавление материала становится более качественным, с отсутствием областей непроплава (Рис. 7б). Однако появляются зоны многократного переплавления материала, то есть в некоторой доле отвердевшего металла совершается фазовый переход в жидкое состояние при формировании соседнего (как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости) трека. Происходящая в локальных областях рекристаллизация материала приводит к изменению как границ зерен, так и локального фазового состава многокомпонентного сплава. Таким образом, процесс рекристаллизации оказывает влияние на локальные механические характеристики материала, содержащего множественные зоны переплава.

В ходе процесса лазерного плавления формируется слоистая квазиоднородная система дефектов в виде локальных областей «непроплавов» и «переплавов», отличающихся разными механическими характеристиками. Размеры дефектов определяются параметрами лазерного плавления и связаны с геометрическими размерами треков. Характерный дефект составляет до 30–40% от линейного размера трека и для рассматриваемых параметров плавления равняется 30–40 мкм.

Результаты математического моделирования слоистой системы дефектов затем использовались для оценки усталостной долговечности корсетных образцов [19, 20], полученных по технологии СЛП. Моделирование проводилось с применением мультирежимной модели усталостного разрушения [21, 22] с целью сопоставления с данными экспериментальных исследований СЛП-образцов на многоцикловую усталость.

Для описания областей «непроплавов» и «переплавов» при моделировании усталостной долговечности анализировалась микроструктура материалов и характерные поверхности усталостного разрушения СЛП-материалов. Выявлено, что в области зарождения усталостных трещин наблюдаются каверны, содержащие оплавленные следы порошка материала (Рис. 8). Таким образом, дефект в виде «непроплава» представляет собой микрообъем, линейный размер которого порядка  $\sim 100$  мкм и в котором часть материала замещена порой, а оплавленные частицы слабо сплавлены с окружающим сплошным материалом. В этом случае для микрообъема можно ввести понятие «эффективного» модуля упругости. Эффективный модуль должен быть меньше исходного вследствие предельных переходов: так, при отсутствии в нем частиц порошка или связи частиц с «берегами» соседнего материала эффективный модуль здесь равен нулю, и микрообъем описывается как пора. Если же



**Рис. 8.** Поверхность усталостного излома СЛП-материала с областями непроплава 1–5 (а) и вид характерной каверны в увеличенном масштабе (выделена штриховой линией на обоих рисунках) (б), содержащей оплавленные частицы исходного порошка

оплавленных частиц много и их большое количество оплавлено, то есть частицы связаны с «берегами» соседних слоев, эффективный модуль микрообъема стремится к упругому модулю однородного материала. Таким образом, зоны «непроплавов» моделируются микрообъемами со сниженными значениями модуля упругости.

В локальных областях «переплавов» материала протекают процессы рекристаллизации при более равновесном температурном поле, чем при затвердевании ванны расплава. В таких условиях, как правило, наблюдается рост линейных размеров зерен без выделенного направления отвода тепла. При этом формируется более крупная глобулярная микроструктура с фазовым составом, отличным от исходного (для многофазных сплавов). Кроме того, может иметь место сегрегация легирующих элементов, стабилизирующих то одну, то другую фазу. На рисунке 9а представлена такая структура на примере двухфазного титанового сплава.

Измерение микротвердости материала, содержащего подобные микрообъемы глобулярной структуры (Рис. 9б), показывает отклонение микротвердости на 10–15%. Микротвердость определяется величиной деформации приповерхностного слоя материала при внедрении индентора с заданным усилием. Таким образом, для получения одинаковой деформации материала (размера пятна индентора в пределах данного микрообъема и в окружающем материале) потребуется большее усилие. Следовательно, эффективный модуль упругости будет отвечать материалу с более высокой микротвердостью. В рамках предложенного подхода моделирование областей множественного переплава осуществляется заданием эффективных модулей упругости выше среднего значения.

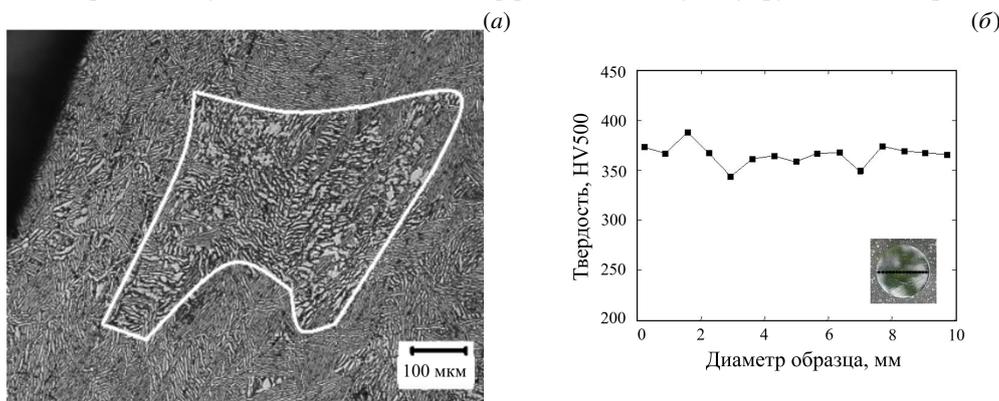


Рис. 9. Поверхность усталостного излома СЛП-сплава с характерной каверной, содержащей оплавленные частицы исходного порошка, (а) и результаты измерения твердости по диаметру корсетного образца (б)

#### 4. Модель циклической повреждаемости образцов при высокочастотном нагружении

##### 4.1. Формулировка мультирежимной двухкритериальной модели

Известно, что большинство элементов конструкций при эксплуатации подвергается циклическому нагружению. Усталостное разрушение ассоциируется с накоплением в материале дефектов на разных масштабных уровнях, которое обобщается с понятием повреждаемости [23]. Характер и кинетика повреждаемости зависят от внешних условий нагружения, в первую очередь — от амплитуды. В настоящее время выделяют три области с различным характером усталостного поведения материалов, а именно область малоциклового усталости (1-я — МЦУ) с амплитудами нагружения, лежащими выше предела пропорциональности и достигающими предела текучести, а порой и превосходящими его. При таких параметрах нагружения наблюдается пластическое деформирование всего объема материала и множественное зарождение усталостных трещин на поверхности образца, а соответствующая долговечность сохраняется в диапазоне  $10^3$ – $10^5$  циклов. При снижении уровня внешних нагрузок до близких к пределу пропорциональности в материале появляются локальные зоны пластической деформации. Эта область называется областью многоциклового усталости (2-я — МНЦУ). Как правило, зоны накопления пластической деформации располагаются при этом в окрестности поверхностных дефектов (концентраторов) или в неблагоприятно ориентированных зернах. На поверхности образца формируются экструзии и интрузии, известные как «полосы постоянного скольжения», от которых зарождается поверхностная усталостная трещина. С отвечающей области МНЦУ долговечностью образец выдерживает  $10^5$ – $10^8$  циклов нагружения. При дальнейшем снижении амплитуды внешних нагрузок ниже предела пропорциональности макроскопическое поведение материала описывается упругим законом. Данную область принято называть сверхмногоциклового усталостью (3-я — СВМУ). Видимые невооруженным глазом следы пластической деформации на поверхности материала не наблюдаются. При таких условиях нагружения доминирующую роль в накоплении микропластической деформации играют внутренние дефекты, в окрестности которых может формироваться трехмерное напряженно-деформированное состояние (НДС). Такими дефектами являются неметаллические включения, поры, границы макрон, трипольные точки (границы трех крупных зерен), неблагоприятно ориентированные зерна и другие. При испытаниях в объеме материала накапливается микропластическая деформация и приводит к зарождению трещины под поверхностью образца. Смена масштаба повреждаемости приводит к значительному увеличению числа необходимых для формирования макроскопические трещин циклов нагружения. Характерной

долговечности в области СВМУ отвечает порядка  $10^8-10^{10}$  циклов. Экспериментальные исследования области СВМУ показывают, что разрушение материала достигается при амплитудах напряжений существенно ниже классического «предела усталости» [24]. Указанные выше особенности кинетики накопления пластической деформации под действием циклических нагрузок учтены в используемой в настоящей работе мультирежимной двухкритериальной модели усталостного разрушения [21, 22]. Отметим, что модели циклической повреждаемости для иных режимов и условий усталостного разрушения используются в работах [25–27].

Сформулируем связанную задачу высокочастотного нагружения образца, при котором могут развиваться процессы циклической повреждаемости, описываемые функцией повреждаемости  $\psi$  [22]. При этом уравнения движения и закона Гука для стационарных колебаний неоднородного образца  $\mathbf{w}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \omega^2 \mathbf{u} &= 0, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda(\psi)(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I})\mathbf{I} + 2\mu(\psi)\boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T)/2. \end{aligned} \tag{7}$$

Систему уравнений (7) в каждой точке границы дополним либо кинематическими граничными условиями (8):

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha |_{\mathbf{x} \in \partial V_{u_\alpha}} &= u_\alpha^*(\mathbf{x},t), \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} |_{\mathbf{x} \in \partial V_{u_n}} &= u_n^*(\mathbf{x},t), \end{aligned} \tag{8}$$

либо динамическими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\tau}_\alpha |_{\mathbf{x} \in \partial V_{\tau_\alpha} = \partial V / \partial V_{u_\alpha}} &= p_\alpha^*(\mathbf{x},t), \\ \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} |_{\mathbf{x} \in \partial V_n = \partial V / \partial V_{u_n}} &= -p_n^*(\mathbf{x},t), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\varphi}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) — орты нормального и касательных векторов к границе. Заданные на границе функции отмечены звездочками. Модули упругости Ламе уменьшаются в зависимости от накопленной распределенной повреждаемости. Изменение функции повреждаемости  $\psi$  с ростом числа циклов нагружения  $N$  описывается кинетическим уравнением, предложенным в [21, 22]:

$$d\psi/dN = B(\sigma, \Delta\sigma)\psi^\gamma / (1 - \psi^{1-\gamma}), \tag{9}$$

где  $B(\sigma, \Delta\sigma)$  — коэффициент, зависящий от НДС в цикле нагружения и параметров материала,  $\Delta\sigma$  — размах циклической нагрузки,  $\gamma$  — параметр, определяющий скорость накопления повреждений. Выражения для коэффициентов из (9) имеют вид [22]:

$$B = \begin{cases} B_L |_{(\sigma_u + \Delta\sigma_u) < \sigma_{eq} < \sigma_B} = \frac{[(\sigma_{eq} - \sigma_u) / (\sigma_B - \sigma_u)]^{1/\beta_L}}{2(1-\gamma)10^3}, \\ B_V |_{\tilde{\sigma}_u < \sigma_{eq} \leq (\sigma_u + \Delta\sigma_u)} = \frac{[(\sigma_{eq} - \tilde{\sigma}_u) / (\sigma_u - \tilde{\sigma}_u)]^{1/\beta_V}}{2(1-\gamma)10^8}, \end{cases}$$

где  $\Delta\sigma_u = 10^{-5\beta_L}(\sigma_B - \sigma_u)$  — ширина области бифуркации [21]. Выражения, стоящие в угловых скобках, указывают на соответствующую ветвь усталостной кривой и выражаются как  $\langle f \rangle = fH(f)$ , где  $H(f)$  — функция Хевисайда. Величина  $\gamma$  лежит в диапазоне  $0 < \gamma < 1$ .

Разрушение по механизму отрыва связано с растягивающими напряжениями и отражается в критерии Smith–Watson–Topper (SWT) [21]:

$$\sigma_{eq} = \sigma^n = \sqrt{\langle \sigma_{1\max} \rangle \Delta\sigma_1 / 2}.$$

Здесь  $\langle \sigma_{1\max} \rangle$  — величина максимального главного растягивающего напряжения:  $\langle \sigma_{1\max} \rangle = \sigma_1 H(\sigma_{1\max})$ , где  $H$  — функция Хевисайда,  $\Delta\sigma_1 / 2$  — амплитуда главного циклического напряжения.

Для оценки развития микротрещин сдвигового типа используется критерий Carpinteri–Spagnoli–Vantadori (CSV) [22], учитывающий особенности их формирования:

$$\sigma_{eq} = \sigma^\tau = \sqrt{(\langle \Delta\sigma_n \rangle / 2)^2 + 3(\Delta\tau_n / 2)^2}.$$

Здесь  $\Delta\tau_n / 2$  — амплитуда максимального касательного напряжения, действующего на некоторой площадке с нормалью  $\mathbf{n}$ ,  $\langle \Delta\sigma_n \rangle / 2$  — амплитуда циклического напряжения, действующего на этой же площадке в фазе растяжения:  $\langle \Delta\sigma_n \rangle = \sigma_{n\max} H(\sigma_{n\max}) - \sigma_{n\min} H(\sigma_{n\min})$ .

Развитие повреждаемости в материальном микрообъеме приводит к уменьшению модулей упругости. В предложенном варианте модели полагается, что это происходит по кусочно-линейному закону следующего вида:

$$\lambda, \mu(\psi) = \begin{cases} \lambda_0, \mu_0(1 - \kappa\psi) |_{\psi < \psi_*}, \\ 0 |_{\psi_* \leq \psi \leq 1}, \end{cases} \tag{10}$$

где  $\psi_* < 1$  — критическое значение повреждаемости, при котором наступает состояние полного разрушения.

С ростом повреждаемости механические характеристики материала, влияющие на НДС в следующих циклах, деградируют (10). Возникающие при этом узкие протяженные зоны полного разрушения рассматриваются как «квазитрещины» различного типа: нормального отрыва или сдвига; скорость их развития определяет длительность процесса циклического нагружения до макроразрушения образца или элемента конструкции.

Модель усталостного разрушения дополнена уравнениями, которые при численном расчете расширенной системы обеспечат сходимость процесса вычислений критических нагрузок и числа циклов до разрушения при измельчении сетки. Локальная модель повреждаемости регуляризируется в нелокальный вариант посредством дополнительного осреднения [22, 28]. Для этого вводится нормированный оператор делокализации, который применяется либо к самой функции повреждаемости  $\psi$ , либо к некоторой связанной с ней функции  $f = f(\psi)$ . Этот оператор может иметь различные представления, в частности, такую форму [29]:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{x}) &= \int_{r \leq 1} f(\mathbf{y}) \bar{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \bar{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \int_{r \leq 1} L_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{z}, \\ L_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \langle 1 - r^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle^2, \quad r^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 / r_0^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $r_0$  — линейный параметр структуры материала, который здесь принят равным размеру зерна. Делокализация (11) сводится к процедуре осреднения внутри «колокола» с диаметром основания  $2r_0$  и эффективной шириной, определяемой степенным параметром  $m$ . Корректировка модулей упругости (10) в этом варианте модели происходит уже по осредненной повреждаемости  $\tilde{\psi}$ , то есть  $\lambda = \lambda(\tilde{\psi})$ ,  $\mu = \mu(\tilde{\psi})$ . При численной реализации этой процедуры существенную роль играет расстояние между узлами ячеек сетки  $\Delta h$ . Если  $\Delta h > r_0$ , то значение повреждаемости не меняется. Если же  $\Delta h < r_0$ , то происходит осреднение повреждаемости по узлам, попадающим в «колокол». Такой прием приводит к стабилизации ширины квазитрещины на масштабном уровне порядка  $r_0$  и обеспечивает сходимость процесса нахождения долговечности даже при значительном измельчении сетки.

#### 4.2. Численный метод решения системы уравнений связанной задачи

Метод расчета зон повреждаемости состоит в определении упругого НДС образца в циклах нагружения, численном решении нелинейного уравнения (9) для повреждаемости  $\psi$  и вычислении модулей упругости среды в зависимости от  $\psi$  по формуле (10).

Разностная аппроксимация уравнения (9) выполняется путем интегрирования по координатам на интервале времени между двумя циклами:  $N^n$  и  $N^{n+1}$  [21]. Тогда для функции повреждаемости в каждом пространственном узле сетки с заданным шагом по координатам в циклах нагружения можно получить аналитическое решение вида:

$$\psi_k^{n+1} = \left( 1 - \sqrt{\left( 1 - (\psi_k^n)^{1-\gamma} \right)^2 - 2(1-\gamma) B_k^n \Delta N^n} \right)^{1/(1-\gamma)},$$

где  $\psi_k^{n+1}$  — значение функции повреждаемости в пространственном узле  $k$  на временном слое  $n + 1$ ,  $\Delta N^n = N^{n+1} - N^n$ .

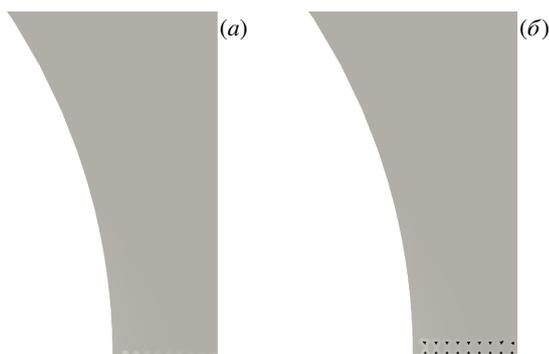
Связь между упругими характеристиками и функцией повреждаемости принята в виде (10), но с учетом описанного выше расширения модели (11) вычисляется как функция нелокальной повреждаемости  $\tilde{\psi}(\mathbf{x})$ :

$$E_k^{n+1} = E_0 \left( 1 - \kappa \tilde{\psi}_k^{n+1} \right) \left[ H \left( \psi_* - \tilde{\psi}_k^{n+1} \right) + 0.001 \right], \quad (12)$$

где  $E_k^{n+1}$  — значение модуля упругости Юнга на новом шаге по времени,  $E_0$  — модуль Юнга неповрежденного материала,  $\kappa$  — коэффициент деградации модуля упругости, определяемый в ходе вычислительных экспериментов. В состоянии полного разрушения модуль Юнга принимается равным 0.001 от своего начального значения (12), что позволяет решать сильно неоднородные упругие задачи на фиксированной сетке для каждого шага по циклам нагружения.

#### 4.3. Примеры численных расчетов зарождения и развития повреждений для различных систем дефектов в СЛП-образцах

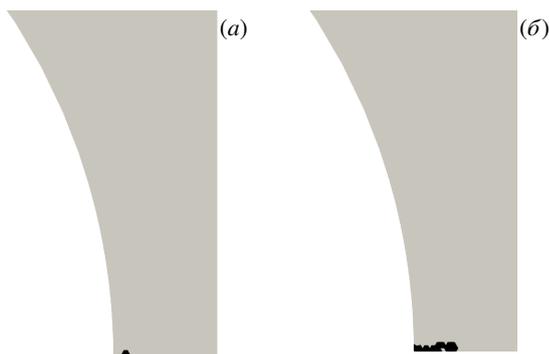
С использованием предложенной модели циклической повреждаемости и численного алгоритма на ее основе рассчитаны высокочастотные нагружения образцов с частотой нагружения 20 кГц и амплитудой 25 мкм. На рисунке 10а представлена геометрия одной четверти (левой верхней) образца с вертикальной и горизонтальной осями симметрии и системой дефектов на горизонтальной оси (см. точки), которые проявляют себя как концентраторы напряжений. В данном случае дефектами являются «непроплавленные» микрообъемы с характерным размером 30 мкм и расстоянием между ними 100 мкм. Они имеют модуль упругости  $E$ , составляющий



**Рис. 10.** Дефекты в образце как системы концентраторы напряжений: линейная (а), двухслойная (б)

одну треть модуля упругости  $E_0$  основного материала образца:  $E/E_0 = 0.33$ . На рисунке 10б представлена двухслойная система таких дефектов.

На рисунке 11 темным цветом изображены зоны полного разрушения — квазитрещины нормального отрыва, в момент зарождения при числе циклов  $N = 1.31 \cdot 10^9$  (Рис. 11а) и в момент, когда квазитрещина продвинулась почти на половину расстояния до вертикальной оси образца при  $N = 1.33 \cdot 10^9$  (Рис. 11б). Эти зоны по расположению и количеству испытаний на усталость для линейной и двухслойной систем дефектов почти идентичны. Число циклов  $N = 1.33 \cdot 10^9$  можно считать соответствующим макроразрушению образца. Системы дефектов, больше, чем двухслойные, не рассматривались, так как удаленные от горизонтальной оси образца концентраторы практически не влияют на процесс развития повреждений, поскольку расположены в расширенной части образца с меньшим уровнем амплитуд напряжений.



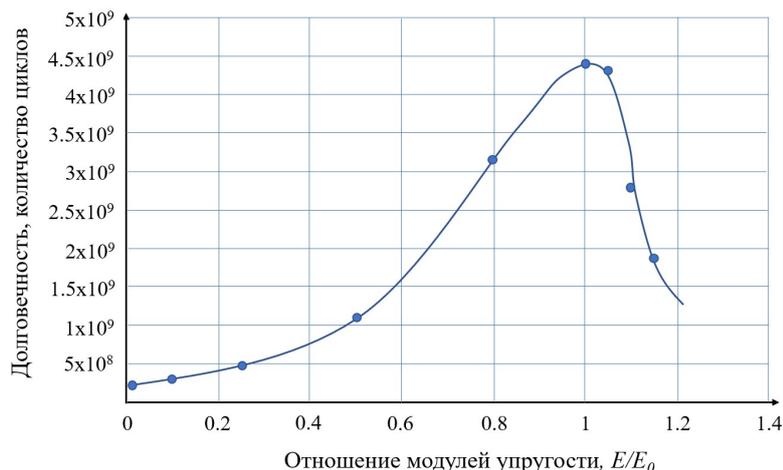
**Рис. 11.** Зарождение,  $N = 1.31 \cdot 10^9$  (а) и развитие,  $N = 1.33 \cdot 10^9$  (б) квазитрещины при двухслойной системе дефектов

Таким образом, описанная вычислительная процедура дает возможность по параметрам микроструктуры СЛП-материала (системе дефектов, их размерам и коэффициентам  $E/E_0$ , отражающим степень непроплава–переплава) определять долговечность образцов, напечатанных методом СЛП. Напомним, что, параметры микроструктуры могут быть рассчитаны в соответствии с характеристиками мощности и скорости лазерного луча, а значит, предложенный комплексный алгоритм позволяет оценить усталостную прочность и долговечность материала с учетом процесса СЛП.

#### 4.4. Оценка количества циклов до разрушения СЛП-образцов при различных системах дефектов

По данным серий вычислительных экспериментов на высокочастотную циклическую усталость корсетных образцов при заданной частоте и амплитуде нагружения построена зависимость числа циклов до разрушения от отношения  $E/E_0$  для систем дефектов типа «непроплав» и «переплав». График функции представлен на рисунке 12. Значения соответствуют:  $E/E_0 = 1$  — однородному материалу без дефектов;  $E/E_0 < 1$  — дефектам в виде непроплавленных зон (как на Рис. 8б) с разной степенью «непроплава»;  $E/E_0 > 1$  — дефектам в виде переплавленных зон (как на Рис. 7б). При этом реальные значения  $E/E_0$  не превышают 1.20. Поэтому можно заключить, что долговечность до разрушения материала с системами непроплавленных дефектов может уменьшаться на порядок и более (сравним значения  $4.36 \cdot 10^9$  при  $E/E_0 = 1$  и  $2.11 \cdot 10^8$  при  $E/E_0 = 0.01$ ). Это снижение близко к наблюдаемому при усталостных высокочастотных испытаниях алюминиевых сплавов в работах [19, 20]. При появлении системы переплавленных дефектов долговечность материала до разрушения в худшем случае уменьшается в 2–2.5 раза ( $4.36 \cdot 10^9$  при  $E/E_0 = 1$ ,  $2.78 \cdot 10^9$  при  $E/E_0 = 1.10$  и  $1.87 \cdot 10^9$  при  $E/E_0 = 1.15$ ).

Итак, диапазон изменения мощности, скорости лазерного луча и иных параметров процесса СЛП (радиуса лазерного луча, толщины слоя порошка, размера перекрытия соседних треков), соответствующий этому,



**Рис. 12.** График усталостной долговечности корсетного образца в зависимости от отношения эффективного модуля упругости дефекта  $E$  к модулю изотропного материала  $E_0$

относительно благоприятному способу получения материала, находится из решения нелинейной задачи теплопроводности в энтальпийной формулировке с учетом фазовых превращений исходного порошкового слоя.

## 5. Заключение

Представлен новый подход к оптимизации технологических параметров селективного лазерного плавления по критерию заданной усталостной прочности. Рассмотренные модели и алгоритмы расчета позволяют определить усталостную прочность и долговечность образцов или изделий, полученных методом СЛП, при выбранных технологических параметрах. Последовательно решены задачи нестационарной нелинейной теплопроводности для трехфазной системы и циклической повреждаемости образца, напечатанного по СЛП-технологии. Из численного решения задачи теплопроводности установлены геометрические размеры ванны расплава и затвердевшего трека в порошковом слое на подложке под действием подвижного лазерного луча при однослойном и многословном плавлении. В зависимости от значений технологических параметров (мощности, скорости и шага лазерного луча) зафиксированы характерные дефекты СЛП-материала в виде «непроплавов» и «переплавов», их пространственное расположение и геометрические параметры.

Для исследования влияния одиночных и множественных СЛП-дефектов на усталостную прочность напечатанных образцов при высокочастотном нагружении использована предложенная ранее мультирежимная двухкритериальная модель усталостного разрушения. Посредством численного моделирования сделаны оценки длительности зарождения и роста зон поврежденности, а также определены пространственные положения формируемых квазитрещин в образце. Полученные результаты имеют хорошее качественное и количественное совпадение с экспериментальными данными при обсуждаемых в статье режимах нагружения. Показано, что свойственная технологии СЛП внутренняя неоднородность материалов может приводить к подповерхностному зарождению усталостных трещин и существенному снижению долговечности изделия.

Предложенные модели и алгоритмы расчета позволяют рассчитывать усталостную прочность и долговечность образцов, напечатанных методом СЛП, для различных систем дефектов микроструктуры, соответствующих заданным характеристикам подвижного лазерного луча, а также определить диапазон параметров процесса СЛП, при котором будет достигаться наилучший уровень усталостной прочности.

Исследование выполнено в рамках проекта РНФ № 23-19-00640.

## Литература

1. Ponnusamy P., Sharma B., Masood S.H., Rahman Rashid R.A., Rashid R., Palanisamy S., Ruan D. A study of tensile behavior of SLM processed 17-4 PH stainless steel // *Materials Today: Proceedings*. 2021. Vol. 45, no. 6. P. 4531–4534. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.12.1104
2. Toprak İ.B., Dogdu N. Optimization of tensile strength of AlSi10Mg material in the powder bed fusion process using the Taguchi method // *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14. 31172. DOI: 10.1038/s41598-024-82541-1
3. Simonelli M., Tse Y.Y., Tuck C. Effect of the build orientation on the mechanical properties and fracture modes of SLM Ti-6Al-4V // *Materials Science and Engineering: A*. 2014. Vol. 616. P. 1–11. DOI: 10.1016/j.msea.2014.07.086
4. Liu S., Shin Y.C. Additive manufacturing of Ti6Al4V alloy: A review // *Materials and Design*. 2019. Vol. 164. 107552. DOI: 10.1016/j.matdes.2018.107552

5. *DebRoy T., Wei H.L., Zuback J.S., Mukherjee T., Elmer J.W., Milewski J.O., Beese A.M., Wilson-Heid A., De A., Zhang W.* Additive manufacturing of metallic components – Process, structure and properties // *Progress in Materials Science*. 2018. Vol. 92. P. 112–224. DOI: 10.1016/j.pmatsci.2017.10.001
6. *Stoffregen H.A., Butterweck K., Abele E.* Fatigue Analysis in Selective Laser Melting: Review and Investigation of Thin-Walled Actuator Housings // *Solid Freeform Fabrication Symposium*. 2014. P. 635–650. DOI: 10.26153/tsw/15713
7. *Bathias C., Paris P.C.* Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. New-York: CRC Press, 2004. 328 p. DOI: 10.1201/9780203020609
8. *Mughrabi H.* Damage Mechanisms and Fatigue Lives: From the Low to the Very High Cycle Regime // *Procedia Engineering*. 2013. Vol. 55. P. 636–644. DOI: 10.1016/j.proeng.2013.03.307
9. *Шаняевский А.А.* Масштабные уровни процессов усталости металлов // *Физическая мезомеханика*. 2014. Т. 17, № 6. С. 87–98.
10. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2009. 782 с.
11. *Гордеев Г.А., Кривилев М.Д., Анкудинов В.Е.* Компьютерное моделирование селективного лазерного плавления высокодисперсных металлических порошков // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2017. Т. 10, № 3. С. 293–312. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.23
12. *Князева А.Г.* Моделирование физических и химических явлений в процессах обработки поверхностей материалов высокэнергетическими источниками // *Математическое моделирование систем и процессов*. 2009. № 17. С. 66–84.
13. *Агаповичев А.В., Сотов А.В., Смелов В.Г.* Математическое моделирование процесса селективного лазерного сплавления порошка титанового сплава ВТ6 // *Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение*. 2020. Т. 19, № 2. С. 53–62. DOI: 10.18287/2541-7533-2020-19-2-53-62
14. *Mirzade F.K., Niziev V.G., Panchenko V.Y., Khomenko M.D., Grishaev R.V., Pityana S., Rooyen C. van.* Kinetic approach in numerical modeling of melting and crystallization at laser cladding with powder injection // *Physica B: Condensed Matter*. 2013. Vol. 423. P. 69–76. DOI: 10.1016/j.physb.2013.04.053
15. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
16. *Петров И.Б.* Вычислительная математика для физиков. М.: Физматлит, 2021. 376 с.
17. *Dilip J.J.S., Zhang S., Teng C., Zeng K., Robinson C., Pal D., Stucker B.* Influence of processing parameters on the evolution of melt pool, porosity, and microstructures in Ti-6Al-4V alloy parts fabricated by selective laser melting // *Progress in Additive Manufacturing*. 2017. Vol. 2, no. 3. P. 157–167. DOI: 10.1007/s40964-017-0030-2
18. *Никитин И.С., Голубев В.И., Никитин А.Д., Стратула Б.А.* Численное моделирование процесса селективного лазерного плавления порошков из титановых и алюминиевых сплавов // *Математическое моделирование*. 2025. Т. 37, № 1. С. 61–80. DOI: 10.20948/mm-2025-01-04
19. *Babaytsev A., Nikitin A., Ripetskiy A.* VHCF of the 3D-Printed Aluminum Alloy AlSi10Mg // *Inventions*. 2023. Vol. 8. 33. DOI: 10.3390/inventions8010033
20. *Никитин А.Д., Стратула Б.А.* Моделирование циклической повреждаемости и усталостной прочности при высокочастотном нагружении 3Д-напечатанных образцов из алюминиевого сплава // *Математическое моделирование и численные методы*. 2024. № 1. С. 18–37. DOI: 10.18698/2309-3684-2024-1-1837
21. *Никитин И.С., Бураго Н.Г., Никитин А.Д.* Повреждаемость и усталостное разрушение элементов конструкций в различных режимах циклического нагружения // *Прикладная математика и механика*. 2022. Т. 86, № 2. С. 276–290. DOI: 10.31857/S0032823522020084
22. *Бураго Н.Г., Никитин И.С., Никитин А.Д., Стратула Б.А.* Численное моделирование усталостного разрушения на основе нелокальной теории циклической повреждаемости // *Математическое моделирование*. 2024. Т. 36, № 3. С. 3–19. DOI: 10.20948/mm-2024-03-01
23. *Nikitin A., Burago N., Nikitin I., Stratula B.* Algorithms for calculation damage processes // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2019. Vol. 13. P. 212–224. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.22
24. *Bathias C., Drouillac L., Le François P.* How and why the fatigue S–N curve does not approach a horizontal asymptote // *International Journal of Fatigue*. 2001. Vol. 23, no. 1. P. 143–151. DOI: 10.1016/S0142-1123(01)00123-2
25. *Shlyannikov V.N.* Creep–fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zone models // *Engineering Fracture Mechanics*. 2019. Vol. 214. P. 449–463. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2019.04.017
26. *Petukhov D.S., Keller I.E.* Evolutionary Model of Fatigue Fracture Under Irregular Loading // *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57, no. 2. P. 263–270. DOI: 10.3103/S0025654422020194
27. *Plekhov O., Naimark O.* The study of a defect evolution in iron under fatigue loading in gigacyclic fatigue regime // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2016. Vol. 10, no. 35. P. 414–423. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.35.47
28. *Никитин И.С., Бураго Н.Г., Никитин А.Д.* Повреждаемость и усталостное разрушение элементов конструкций в различных режимах циклического нагружения // *Прикладная математика и механика*. 2022. Т. 86, № 2. С. 276–290. DOI: 10.31857/S0032823522020084
29. *Bažant Z.P., Jirásek M.* Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress // *Journal of Engineering Mechanics*. 2002. Vol. 128. P. 1119–1149. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)

**Сведения об авторах:**

*Никитин Илья Степанович*, дфмн, дир., Институт автоматизации проектирования РАН (ИАП РАН), 123056, г. Москва, ул. 2-я Брестская, д. 19/18; e-mail: [i\\_nikitin@list.ru](mailto:i_nikitin@list.ru); ORCID: 0000-0003-3499-6910

*Голубев Василий Иванович*, дфмн, проф., Московский физико-технический институт (МФТИ), 141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9; e-mail: [golubev.vi@mipt.ru](mailto:golubev.vi@mipt.ru); ORCID: 0000-0003-3113-7299

*Никитин Александр Дмитриевич (корр.)*, кфмн, внс, ИАП РАН; e-mail: [nikitin\\_alex@bk.ru](mailto:nikitin_alex@bk.ru); ORCID: 0000-0002-2916-758X

*Стратула Борис Андреевич*, кфмн, нс, ИАП РАН; e-mail: [stratula@matway.net](mailto:stratula@matway.net); ORCID: 0000-0001-8916-5263

*Research article***Numerical modeling of fatigue fracture in the light alloys produced by additive technology**

*I.S. Nikitin<sup>1</sup>, V.I. Golubev<sup>1,2</sup>, A.D. Nikitin<sup>1</sup>, B.A. Stratula<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> *Institute for computer aided design RAS, Moscow, Russian Federation*

<sup>2</sup> *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation*

A new approach to optimization of process parameters of selective laser melting is proposed in this paper. The required fatigue life of the final SLM product is used as an optimization parameter. A two-stage algorithm is proposed to implement this approach. At the first stage, a three-dimensional non-stationary nonlinear problem of heat conduction for a multiphase system is solved. As a result of modeling, geometric parameters of single-layer and multilayer systems of overlapping tracks are determined. The influence of laser melting process parameters (power, speed, laser beam pitch) on the topological features of the formed microstructure is studied. Characteristic types and geometric parameters of quasi-regular defects of the material produced by selective laser melting in the form of "unmelted" and multiple "overmelted" areas are obtained. At the second stage, the influence of single and multiple defects on the fatigue strength of printed samples under high-frequency loading is studied using the previously proposed multi-mode fatigue failure model. It is shown that internal heterogeneity of the microstructure of materials printed by selective laser melting can lead to earlier subsurface initiation of fatigue cracks and significantly reduce the fatigue strength and durability of the product. This effect is more pronounced for systems of multiple defects. The proposed models and calculation algorithms allow calculating the fatigue strength and durability of samples or products obtained by selective laser melting, depending on the selected process parameters. Mathematical modeling and comparison of the fatigue life of corset samples obtained by selective laser melting with experimental data are carried out. Qualitative and quantitative correspondence between the modeling and experimental results is noted.

*Keywords:* fatigue strength, selective laser melting, mathematical modeling, prediction model, cyclic damage accumulation model

*Received:* 17.04.2025 / *Published online:* 30.07.2025

**References**

1. Ponnusamy P., Sharma B., Masood S.H., Rahman Rashid R.A., Rashid R., Palanisamy S., Ruan D. A study of tensile behavior of SLM processed 17-4 PH stainless steel. *Materials Today: Proceedings*. 2021. Vol. 45, no. 6. P. 4531–4534. DOI: 10.1016/j.matpr.2020.12.1104
2. Toprak İ.B., Dogdu N. Optimization of tensile strength of AlSi10Mg material in the powder bed fusion process using the Taguchi method. *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14. 31172. DOI: 10.1038/s41598-024-82541-1
3. Simonelli M., Tse Y.Y., Tuck C. Effect of the build orientation on the mechanical properties and fracture modes of SLM Ti-6Al-4V. *Materials Science and Engineering: A*. 2014. Vol. 616. P. 1–11. DOI: 10.1016/j.msea.2014.07.086
4. Liu S., Shin Y.C. Additive manufacturing of Ti6Al4V alloy: A review. *Materials and Design*. 2019. Vol. 164. 107552. DOI: 10.1016/j.matdes.2018.107552
5. DebRoy T., Wei H.L., Zuback J.S., Mukherjee T., Elmer J.W., Milewski J.O., Beese A.M., Wilson-Heid A., De A., Zhang W. Additive manufacturing of metallic components – Process, structure and properties. *Progress in Materials Science*. 2018. Vol. 92. P. 112–224. DOI: 10.1016/j.pmatsci.2017.10.001
6. Stoffregen H.A., Butterweck K., Abele E. Fatigue Analysis in Selective Laser Melting: Review and Investigation of Thin-Walled Actuator Housings. *Solid Freeform Fabrication Symposium*. 2014. P. 635–650. DOI: 10.26153/tsw/15713
7. Bathias C., Paris P.C. *Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice*. CRC Press, 2004. 328 p. DOI: 10.1201/9780203020609
8. Mughrabi H. Damage Mechanisms and Fatigue Lives: From the Low to the Very High Cycle Regime. *Procedia Engineering*. 2013. Vol. 55. P. 636–644. DOI: 10.1016/j.proeng.2013.03.307
9. Shanyavsky A.A. Scales of metal fatigue cracking. *Physical mesomechanics*. 2014. Vol. 17, no. 6. P. 87–98.
10. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. *Vychislitel' naya teploperedacha*. M.: Yeditorial URSS, 2009. 782 p.
11. Gordeev G.A., Krivilyov M.D., Ankudivov V.E. Computer simulation of selective laser melting of fine-grained metallic powders. *Computational Continuum Mechanics*. 2017. T. 10, № 3. C. 293–312. DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.3.23

12. *Knyazeva A.G.* Modelirovaniye fizicheskikh i khimicheskikh yavleniy v protsessakh obrabotki poverkhnostey materialov vysokoenergeticheskimi istochnikami. *Mathematical modeling of systems and processes*. 2009. No. 17. P. 66–84.
13. *Agapovichev A.V., Sotov A.V., Smelov V.G.* Mathematical modeling of the process of selective laser melting of Ti-6Al-4V titanium alloy powder. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2020. Vol. 19, no. 2. P. 53–62. DOI: 10.18287/2541-7533-2020-19-2-53-62
14. *Mirzade F.K., Niziev V.G., Panchenko V.Y., Khomenko M.D., Grishaev R.V., Pityana S., Rooyen C. van.* Kinetic approach in numerical modeling of melting and crystallization at laser cladding with powder injection. *Physica B: Condensed Matter*. 2013. Vol. 423. P. 69–76. DOI: 10.1016/j.physb.2013.04.053
15. *Samarskiy A.A.* Teoriya raznostnykh skhem. Moscow: Nauka, 1983. 616 p.
16. *Petrov I.B.* Vychislitel'naya matematika dlya fizikov. Moscow: Fizmatlit, 2021. 376 p.
17. *Dilip J.J.S., Zhang S., Teng C., Zeng K., Robinson C., Pal D., Stucker B.* Influence of processing parameters on the evolution of melt pool, porosity, and microstructures in Ti-6Al-4V alloy parts fabricated by selective laser melting. *Progress in Additive Manufacturing*. 2017. Vol. 2, no. 3. P. 157–167. DOI: 10.1007/s40964-017-0030-2
18. *Nikitin I.S., Golubev V.I., Nikitin A.D., Stratula B.A.* Numerical simulation of selective laser melting of titanium and aluminum alloy powders. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2025. Vol. 37, no. 1. P. 61–80. DOI: 10.20948/mm-2025-01-04
19. *Babaytsev A., Nikitin A., Ripetskiy A.* VHCF of the 3D-Printed Aluminum Alloy AlSi10Mg. *Inventions*. 2023. Vol. 8. 33. DOI: 10.3390/inventions8010033
20. *Nikitin A.D., Stratula B.A.* Modeling of cyclic damage and fatigue strength under high frequency loading of 3D printed aluminum alloy specimens. *Mathematical Modeling and Computational Methods*. 2024. No. 1. P. 18–37. DOI: 10.18698/2309-3684-2024-1-1837
21. *Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D.* Damage and fatigue failure of structural elements under various cyclic loading conditions. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2022. Vol. 86, no. 2. P. 276–290. DOI: 10.31857/S0032823522020084
22. *Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A.* Numerical Modeling of Fatigue Fracture Based on the Nonlocal Theory of Cyclic Damage. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2024. Vol. 16. P. 655–666. DOI: 10.1134/S2070048224700297
23. *Nikitin A., Burago N., Nikitin I., Stratula B.* Algorithms for calculation damage processes. *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2019. Vol. 13. P. 212–224. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.49.22
24. *Bathias C., Drouillac L., Le François P.* How and why the fatigue S–N curve does not approach a horizontal asymptote. *International Journal of Fatigue*. 2001. Vol. 23, no. 1. P. 143–151. DOI: 10.1016/S0142-1123(01)00123-2
25. *Shlyannikov V.N.* Creep–fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zone models. *Engineering Fracture Mechanics*. 2019. Vol. 214. P. 449–463. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2019.04.017
26. *Petukhov D.S., Keller I.E.* Evolutionary Model of Fatigue Fracture Under Irregular Loading. *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57, no. 2. P. 263–270. DOI: 10.3103/S0025654422020194
27. *Plekhov O., Naimark O.* The study of a defect evolution in iron under fatigue loading in gigacyclic fatigue regime. *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2016. Vol. 10, no. 35. P. 414–423. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.35.47
28. *Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D.* Damage and fatigue fracture of structural elements in various cyclic loading modes. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2022. Vol. 86, no. 2. P. 276–290. DOI: 10.31857/S0032823522020084
29. *Bažant Z.P., Jirásek M.* Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics*. 2002. Vol. 128. P. 1119–1149. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)