

Научная статья

МГД-перемешивание тяжелой примеси вращающимся магнитным полем, создаваемым секционным кольцевым индуктором

*Р.С. Окатьев, Г.Л. Лосев, И.В. Колесниченко**Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

Эффективность процесса перемешивания двухфазной жидкости (жидкого металла с частицами примеси) в цилиндрической ячейке исследована численно с использованием двухжидкостной модели многофазной среды. Перемешивание осуществляется за счет электромагнитной силы, которая порождается кольцевым индуктором вращающегося магнитного поля. Индуктор состоит из шести кольцевых секций, равномерно располагающихся по высоте ячейки. Каждая из секций создает независимое магнитное поле. Рассмотрены три конфигурации электромагнитной силы. Первая конфигурация соответствует сонаправленному вращению магнитных полей всех шести секций и совпадает с классическим случаем вращающегося магнитного поля. Во второй конфигурации в трех верхних кольцах генерируются магнитные поля, вращающиеся в одном направлении, а в трех нижних – магнитные поля, тоже вращающиеся в одном направлении, но в противоположном верхним. В третьей конфигурации направления вращения кольцевых магнитных полей чередуются по высоте ячейки. Введен параметр, характеризующий неоднородность распределения примеси. Показано, что наиболее эффективное перемешивание достигается во второй конфигурации. Это связано с возникновением крупномасштабного колебательного режима течения. Конфигурация однородного вращающегося магнитного поля обеспечивает наименее качественное перемешивание вследствие малой полойдальной скорости. В третьей конфигурации наблюдаются колебания параметра неоднородности распределения примеси, обусловленные хаотическим характером течения. При индукторе второй конфигурации определено оптимальное время перемешивания, при котором степень неоднородности распределения примеси оказывается наименьшей.

Ключевые слова: секционный индуктор, вращающееся магнитное поле, магнитная гидродинамика, перемешивание примеси, многофазные среды, численное моделирование

Получение: 28.04.2025 / *Публикация онлайн:* 30.07.2025

УДК 537.84; 532.5

1. Введение

Перемешивание жидких металлов является важной технологической задачей, возникающей в металлургии, литейном производстве, полупроводниковой промышленности и материаловедении. Эффективное управление существующими при этом течениями способствует гомогенизации состава расплавов, улучшению качества отливок, интенсификации процессов кристаллизации, устранению химической неоднородности (ликвации) в сплавах.

Высокая температура и химическая агрессивность жидких металлов обуславливают необходимость использования бесконтактных способов воздействия. Благодаря электропроводности среды оказывается возможным генерирование течения в ней за счет переменного магнитного поля [1]. При наложении переменного магнитного поля на электропроводящую жидкость образуется объемная сила Лоренца, которая и вызывает движение. Электромагнитное перемешивание, в отличие от механического, не требует контакта с расплавом, что снижает риск загрязнения его нежелательными химическими элементами и преждевременный износ оборудования.

Распространенным видом электромагнитного влияния на жидкие металлы является вращающееся магнитное поле (ВМП). При перемешивании ВМП повышается степень однородности расплава, перераспределяются легирующие включения, удаляются неметаллические включения (оксиды, соли, шлаки) за счет возникающих центробежной и электромагнитной сил [2]. ВМП позволяет управлять темпом кристаллизации и скоростью тепломассообмена — оно гомогенизирует неоднородности температуры на фронте кристаллизации, может препятствовать образованию дендритов и способствовать формированию мелкозернистой структуры [3–5]. С помощью ВМП можно улучшить свойства композитных материалов за счет более равномерного распределения упрочняющих частиц в металле (например, в стали и алюминиевых композитах) [6, 7]. В производстве монокристаллов кремния и других полупроводников ВМП используется для контроля тепломассопереноса в расплаве, что снижает дефектность кристаллов [8, 9].

Одна из основных проблем применения классического ВМП — малая интенсивность вторичных полойдальных течений [10]. Следствием этого является слабая эффективность перемешивания и, как результат, неоднородное распределение в расплаве температуры или примеси. Повысить качество продукта на выходе можно за счет усложнения топологии течения путем изменения в процессе перемешивания положения индуктора относительно ячейки с жидким металлом или вариаций амплитуды и частоты магнитного поля [11, 12]. Перемешивание также становится качественнее при модуляции питания индуктора ВМП [13, 14], изменении направления поля и чередовании включения/выключения питания [15–17]. Еще одним способом повышения интенсивности полойдального течения служит комбинация ВМП с бегущим магнитным полем [18]. Но, хотя комбинированное воздействие и делает перемешивание более эффективным, в сравнении с классическим ВМП, оно все равно приводит к образованию только крупномасштабного течения, которое в объеме электропроводной жидкости характеризуется неоднородностью поля скорости и наличием застойных зон. В итоге степень однородности свойств получаемых слитков снижается. Таким образом, актуальной становится задача поиска других способов

усложнения топологии накладываемого магнитного поля и, как следствие, повышения эффективности перемешивания электропроводной среды.

Сделать полоидальное течение более интенсивным можно и без сочетания с бегущим полем. Для этого нужно взять индукторы ВМП такой конструкции, которая позволит создавать противонаправленные течения, то есть генерировать локальные области неустойчивости, характеризующиеся высокой степенью пульсаций скорости [19], что теоретически должно способствовать повышению эффективности перемешивания. В данной работе численно исследуется вопрос эффективности перемешивания тяжелой примеси в цилиндрической ячейке с жидким металлом, которая помещена в секционный электромагнитный перемешиватель на основе ВМП при трех различных конфигурациях как создаваемого магнитного поля, так и электромагнитной силы.

2. Постановка задачи

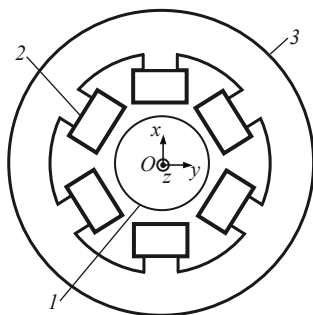


Рис. 1. Вид сверху на кольцевой индуктор: 1 – цилиндр, заполненный жидким металлом; 2 – генерирующие катушки; 3 – магнитопровод

Рассматривается течение, возникающее в цилиндрическом объеме проводящей жидкости I , ось вращения которого совпадает с направлением действия силы тяжести. Генерация течения в объеме происходит за счет электромагнитных сил, порождаемых индуктором. Индуктор состоит из шести однотипных колец, каждое из которых включает по 6 сегментов–катушек 2, соединенных вертикальными магнитопроводами и генерирующих магнитное поле. Катушки расположены на выступах магнитопровода 3 (Рис. 1). Индуктор приведенной формы способен создавать электромагнитное поле и, как следствие, объемную силу различной пространственной топологии, что открывает возможность перемешивания течений разных масштабов и интенсивности. Модельная форма индуктора основывается на физическом прототипе, по которому ранее выполнялась верификация электромагнитных и гидродинамических расчетов (см. [20, 21]).

Базовым элементом индуктора является отдельное кольцо, образуемое 6-ю сегментами–катушками, генерирующими магнитное поле. Располагая шесть базовых элементов друг над другом и задавая разные направления ВМП, в каждом из них можно формировать различные конфигурации электромагнитной силы и, соответственно, различную структуру течения. В работе рассматриваются три конфигурации:

- 1) однородное вращающееся магнитное поле (ОВМП) — все кольца индуктора создают ВМП одинакового направления;
- 2) двухсекционное вращающееся магнитное поле (ДВМП) — три верхних кольца индуктора генерируют магнитные поля, вращающиеся по часовой стрелке, а три нижних — поля, вращающиеся против часовой стрелки;
- 3) многосекционное вращающееся магнитное поле (МВМП) — каждое кольцо индуктора производит ВМП, направленное противоположно полям колец–соседей, то есть направления действия электромагнитных сил по высоте цилиндра чередуются.

Схематическое представление перечисленных конфигураций приведено на рисунке 2. Здесь также показано расположение осей декартовой системы координат. Для удобства описания результатов будет использоваться цилиндрическая система; начало ее отсчета совпадает с началом декартовой системы, а связь радиальной и азимутальной компонент векторов с соответствующими декартовыми компонентами определяется известными формулами.

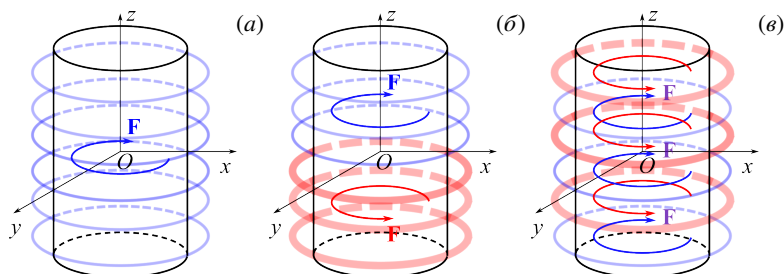


Рис. 2. Три рассматриваемые конфигурации магнитного поля и электромагнитной силы: ОВМП (а), ДВМП (б), МВМП (в); вращение магнитного поля по часовой стрелке показано тонкой линией, противоположное – толстой линией; вектор результирующей закручивающей электромагнитной силы $\mathbf{F}$ – незамкнутая линия со стрелкой

3. Математическая модель

Математическая модель, описывающая процесс перемешивания посредством ВМП жидкого металла с частицами тяжелой примеси в расчетной области, показанной на рисунке 1, основывается на уравнениях магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Параметром, характеризующим взаимосвязь течения проводящей

жидкости и магнитного поля, служит магнитное число Рейнольдса $Re_m = \sigma \mu \mu_0 U L$, где σ — проводимость среды, μ — магнитная проницаемость, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная, U и L — характерное значение скорости движения проводящей среды в области исследования и характерный размер последней. По предварительной оценке авторов в рассматриваемой задаче $Re_m \ll 1$. Вследствие этого можно пренебречь влиянием течения среды на магнитное поле. Кроме того, задача решается в рамках электродинамического приближения, поскольку индуцированные течением жидкости токи малы по сравнению с наведенными. Поэтому возможно разделение связанной МГД-задачи на отдельные подзадачи: электродинамическую и гидродинамическую. Существенным допущением при решении электродинамической подзадачи является рассмотрение жидкого металла без учета частиц примеси, то есть как среды с однородной проводимостью, которая равна проводимости жидкости $\sigma = 2.6$ МСм/м. Оценки характерных для данной задачи значений объемной доли примеси $\varphi \approx 1\%$ и проводимости частиц $\sigma_s = 50$ МСм/м по различным моделям эффективной проводимости [22] дают отклонения электропроводности неоднородной среды и, как следствие, электромагнитной силы в пределах 10%. Однако учет этих величин привел бы к кратному повышению вычислительной сложности из-за необходимости решать сопряженную задачу с перерасчетом электродинамической составляющей на каждом временном шаге. Поэтому в настоящей работе они не принимаются в расчет. К тому же отметим, что электромагнитная сила, действующая на дисперсную фазу со стороны жидкости и связанная с разностью электропроводностей фаз, учитывается в гидродинамической подзадаче.

Математическая постановка электродинамической подзадачи включает уравнения электродинамики Максвелла:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_c, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля; $\mathbf{j}_c$ — плотность переменного электрического тока в генерирующих катушках; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$ — индукция магнитного поля. Проходящий через катушки переменный ток частоты f приводит к генерации переменного магнитного поля. Это поле в свою очередь создает переменное вихревое электрическое поле $\mathbf{E}$, которое генерирует в электропроводящих объемах вихревые токи, плотность которых определяется законом Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

В рамках электродинамической подзадачи найдем, как распределяется в ячейке с жидким металлом и в окружающем ее пространстве электромагнитная сила, обусловленная взаимодействием наведенных вихревых токов и магнитного поля:

$$\mathbf{F}^{em} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}.\quad (2)$$

Электродинамическую подзадачу (1), (2) решим в гармонической постановке с помощью конечно-элементного программного комплекса ANSYS Emax. Алгоритм реализации описан ранее в работах [19, 21, 23]. При расчетах используем нерегулярную тетраэдрическую сетку с приблизительным числом элементов $2 \cdot 10^6$. Различные конфигурации ВМП учтем путем задания соответствующего распределения фаз электрического тока в генерирующих катушках. При всех конфигурациях ВМП зафиксируем в катушках частоту электрического тока ($f = 50$ Гц) и его силу (1 А). Катушки имеют по 998 витков. Для всех элементов расчетной области, кроме магнитопроводов, магнитную проницаемость μ положим равной 1. Магнитную проницаемость ферромагнитных магнитопроводов будем считать постоянной и равной $3.3 \cdot 10^3$ Гн/м. Генерацию вихревых токов рассмотрим только внутри ячейки с металлом.

Далее, из решения гидродинамической подзадачи определим характеристики течения двухфазной электропроводящей жидкости в цилиндрической ячейке радиусом 48 мм и высотой 300 мм. Течение жидкости создается электромагнитной силой (2), поле которой уже известно из решения электродинамической подзадачи. Двухфазную жидкость опишем в рамках многоскоростного подхода [24], согласно которому для фаз принимается, что это взаимопроникающие жидкости. Каждая из них занимает всю расчетную область и характеризуется объемной долей. Обозначим объемную долю примесной фазы как φ , а объемную долю несущей жидкости как $1 - \varphi$. Далее, для удобства, во всех соотношениях величины, относящиеся к примесной фазе (кроме объемной доли φ), будем помечать нижним индексом s , а величины, относящиеся к основной фазе, индекса не имеют. Тогда уравнения неразрывности и движения для обеих фаз запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}((1-\varphi)\rho) + \nabla \cdot ((1-\varphi)\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varphi \rho_s) + \nabla \cdot (\varphi \rho_s \mathbf{u}_s) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}((1-\varphi)\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot ((1-\varphi)\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) &= -(1-\varphi)\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + (1-\varphi)\rho \mathbf{g} + K(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}) + \mathbf{F}^{em}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varphi \rho_s \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot (\varphi \rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s) &= -\varphi \nabla p - \nabla p_s + \nabla \cdot \mathbf{T}_s + \varphi \rho_s \mathbf{g} - K(\mathbf{u}_s - \mathbf{u}) + \mathbf{F}_s^{lift} + \mathbf{F}_s^{em}.\end{aligned}\quad (3)$$

В уравнениях (3) ρ — плотность жидкости; ρ_s — плотность дисперсной фазы; $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}_s$ — векторы скорости несущей и дисперсной фаз; K — коэффициент межфазного взаимодействия; $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_s$ — тензоры вязких напряжений несущей и дисперсной фаз; $\mathbf{F}_s^{\text{lift}}$ и $\mathbf{F}_s^{\text{em}}$ — подъемная и электромагнитная силы, влияющие на дисперсную фазу; p_s — гранулярное давление.

Несущую фазу считаем вязкой несжимаемой жидкостью, поэтому выражение для тензора вязких напряжений выглядит так:

$$\mathbf{T} = (1 - \varphi)\eta(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T),$$

где $\eta = \eta_m + \eta_t$ — эффективная вязкость, складывающаяся из динамической и турбулентной составляющих.

Дисперсная фаза описывается в рамках модели гранулярной среды [25, 26]. Тензор вязких напряжений при этом имеет вид, аналогичный виду тензора вязких напряжений сжимаемой вязкой жидкостью:

$$\mathbf{T}_s = \varphi(\zeta_s - (2/3)\eta_s)(\nabla \cdot \mathbf{u}_s)\mathbf{I} + \varphi\eta_s(\nabla\mathbf{u}_s + \nabla\mathbf{u}_s^T).$$

Особенностью гранулярной модели является определение коэффициентов объемной (ζ_s) и динамической (η_s) вязкости дисперсной фазы, а также гранулярного давления через кинетические уравнения, которые строятся по аналогии с уравнениями для газовых сред. Величина

$$p_s = \varphi\rho_s\Theta_s + 2\rho_s(1 + e_{ss})\varphi^2g_0\Theta_s,$$

называемая гранулярным давлением, описывает изменение давления в дисперсной фазе вследствие кинетических эффектов и столкновений между частицами [27, 28]. Здесь Θ_s — гранулярная температура, которая, подобно термодинамической температуре, служит мерой средней кинетической энергии случайного движения частиц примеси [29]; g_0 — эмпирическая функция радиального распределения

$$g_0 = \left[1 - (\varphi/\varphi_{\max})^{1/3}\right]^{-1};$$

e_{ss} — коэффициент восстановления, который в случае абсолютно упругих столкновений частиц имеет значение 0.9.

В расчете динамической вязкости так же, как и в соотношении для гранулярного давления, учтем вклады, связанные с переносом импульса случайным движением примесных частиц (кинетическую составляющую) и столкновением их друг с другом (коллизонную составляющую) [30]:

$$\eta_s = \eta_s^{\text{kin}} + \eta_s^{\text{col}}.$$

Основной вклад вносит кинетическая вязкость, которая определяется формулой:

$$\eta_s^{\text{kin}} = \frac{d_s\rho_s\sqrt{\Theta_s\pi}}{6(3 - e_{ss})} [1 + (2/5)(1 + e_{ss})(3e_{ss} - 1)g_0\varphi],$$

где d_s — диаметр частиц примеси. При больших объемных долях примеси вклад коллизонной вязкости

$$\eta_s^{\text{col}} = (4/5)\varphi\rho_sd_sg_0(1 + e_{ss})\sqrt{\Theta_s/\pi}$$

становится преобладающим.

Эффекты сжимаемости, обуславливаемые объемной вязкостью, оказываются малыми из-за квадратичной зависимости ее коэффициента от объемной доли примеси φ [31]:

$$\zeta_s = (4/3)\varphi^2\rho_sd_sg_0(1 + e_{ss})\sqrt{\Theta_s/\pi}.$$

В используемой модели суммарная сила, действующая на дисперсную фазу, складывается из подъемной и электромагнитной компонент. Подъемная сила

$$\mathbf{F}_s^{\text{lift}} = -C_l\varphi\rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

связана с локальной неоднородностью скорости несущей фазы и максимальна в пристеночных областях. Коэффициент C_l является нелинейной эмпирической функцией числа Рейнольдса частиц примеси, которое определяется по диаметру частицы [32]:

$$\text{Re}_p = \frac{\rho|\mathbf{u} - \mathbf{u}_s|d_s}{\eta}.$$

Электромагнитная сила, влияющая на дисперсную фазу, зависит от разности электропроводностей фаз и может быть оценена согласно выражению, предложенному для силы, которую испытывает одиночная сферическая частица [33, 34]:

$$\mathbf{F}_s^{\text{em}} = \frac{3V_p}{2} \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{2\sigma + \sigma_s} \right) \mathbf{F}^{\text{em}} = \frac{3V_p}{2} \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{2\sigma + \sigma_s} \right) (\mathbf{j} \times \mathbf{B}),$$

где V_p — объем частицы, $\mathbf{F}^{\text{em}} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ — электромагнитная сила, действующая на несущую жидкость в отсутствие частицы. Предполагая, что все частицы являются сферическими и имеют одинаковый диаметр, получим выражение для плотности электромагнитной силы, влияющей на дисперсную фазу:

$$\mathbf{F}_s^{\text{em}} = \frac{3\varphi}{2} \left(\frac{\sigma - \sigma_s}{2\sigma + \sigma_s} \right) (\mathbf{j} \times \mathbf{B}).$$

Взаимодействие между фазами описывается коэффициентом K , для которого используется формула [35]:

$$K = \frac{3\varphi(1-\varphi)\rho}{4v_r^2 d_s} C_D |\mathbf{u}_s - \mathbf{u}|.$$

Здесь C_D — коэффициент гидродинамического сопротивления; v_r — средняя скорость релаксации частицы, которая соответствует скорости ее свободного движения при равновесии сил Архимеда, тяжести и гидросопротивления. Для коэффициента сопротивления воспользуемся обобщением классической модели Стокса [36]:

$$C_D = \left(0.63 + \frac{4.8}{\sqrt{\text{Re}_p/v_r}} \right)^2.$$

Выражение для скорости релаксации частицы имеет вид [37]:

$$v_r = \frac{1}{2} \left(A - 0.06\text{Re}_p + \sqrt{0.06\text{Re}_p^2 + 0.12\text{Re}_p(2B - A) + A^2} \right),$$

где параметры A и B зависят от объемной доли примеси:

$$A = (1 - \varphi)^{4.14}, \quad B = \begin{cases} (1 - \varphi)^{2.65}, & \varphi \leq 0.15, \\ 0.8(1 - \varphi)^{1.28}, & \varphi > 0.15. \end{cases}$$

Гидродинамическую подзадачу (3) решим методом конечных объемов, реализованным в программном комплексе вычислительной гидродинамики ANSYS Fluent. Для этого расчетную область заменим сеткой со сгущением вблизи боковых стенок, состоящей из $2.7 \cdot 10^5$ тетраэдрических элементов. Шаг по времени возьмем постоянным, равным 0.1 с. Турбулентность течения опишем SST $k - \omega$ моделью. Перенос данных с электродинамической сетки на гидродинамическую осуществим с помощью скрипта собственной разработки на языке Python. За свойства несущей жидкости примем характеристики эвтектического сплава Ga-Sn-Zn [38]: $\rho = 6150 \text{ кг/м}^3$, $\eta = 1.75 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$, $\sigma = 2.6 \text{ МСм/м}$. Плотность частиц дисперсной фазы на 10% больше плотности несущей фазы и составляет $\rho_s = 6765 \text{ кг/м}^3$. В качестве примеси рассмотрим сферические частицы диаметром 50 мкм и проводимостью $\sigma_s = 50 \text{ МСм/м}$. Дополнительно в расчетах будем учитывать межфазное поверхностное натяжение, которому присвоим постоянную величину 0.535 Н/м.

4. Результаты

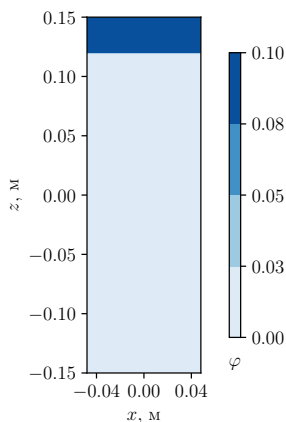


Рис. 3. Начальное распределение примеси (сечение ячейки плоскостью Oxz декартовой системы координат)

Проанализируем структуру течений, генерируемых в объеме проводящей жидкости при различных конфигурациях внешних сил, а также процесс переноса примеси этими течениями. В качестве начального состояния системы рассмотрим состояние покоя, когда скорость жидкости во всем рабочем объеме нулевая. Начальное распределение примеси зададим в виде локализованной в верхней части расчетной области зоны толщиной 30 мм с объемной долей примеси $\varphi = 0.1$. Долю примеси вне этой области положим равной нулю. Начальное распределение примеси показано на рисунке 3.

При наложении внешних электромагнитных сил в момент времени $t = 0$ за счет движения жидкости начинается процесс перемешивания. Действующая в азимутальном направлении сила порождает крупномасштабное вращательное движение, которое в силу неразрывности среды и конечных размеров рабочего объема генерирует вторичное полоидальное течение. Именно последнее обеспечивает перенос частиц примеси по высоте ячейки. Поля скорости несущей и дисперсной фаз близки, различия по величине скорости не превышают 2%. Поэтому в дальнейшем при анализе результатов будут демонстрироваться распределения только полоидальной скорости несущей жидкости $\mathbf{u}_p$ и объемной доли примеси.

На рисунках 4, 5, 7 представлены распределения модуля полоидальной скорости и объемной доли примеси при трех конфигурациях электромагнитной силы в разные моменты времени. Все поля приведены в плоскости Oxz

декартовой системы координат (см. Рис. 2). В этом сечении азимутальная компонента скорости u_φ совпадает с компонентой скорости u_y , а модуль полоидальной скорости определяется как

$$|\mathbf{u}_p| = \sqrt{u_x^2 + u_z^2}.$$

ОВМП порождает в жидкости квазитвердотельное вращение (Рис. 4). Градиент давления, связанный с центробежной силой, создает в объеме среды два тороидальных вихря вследствие движения жидкости в зону пониженного давления вблизи верхнего и нижнего торцов цилиндра. Вихри, порождая квазистационарную картину течения, сохраняют с течением времени свою интенсивность и размеры. Стационарность и относительно небольшая величина полоидальной скорости (порядка 1 см/с) обуславливают малую эффективность перемешивания примеси.

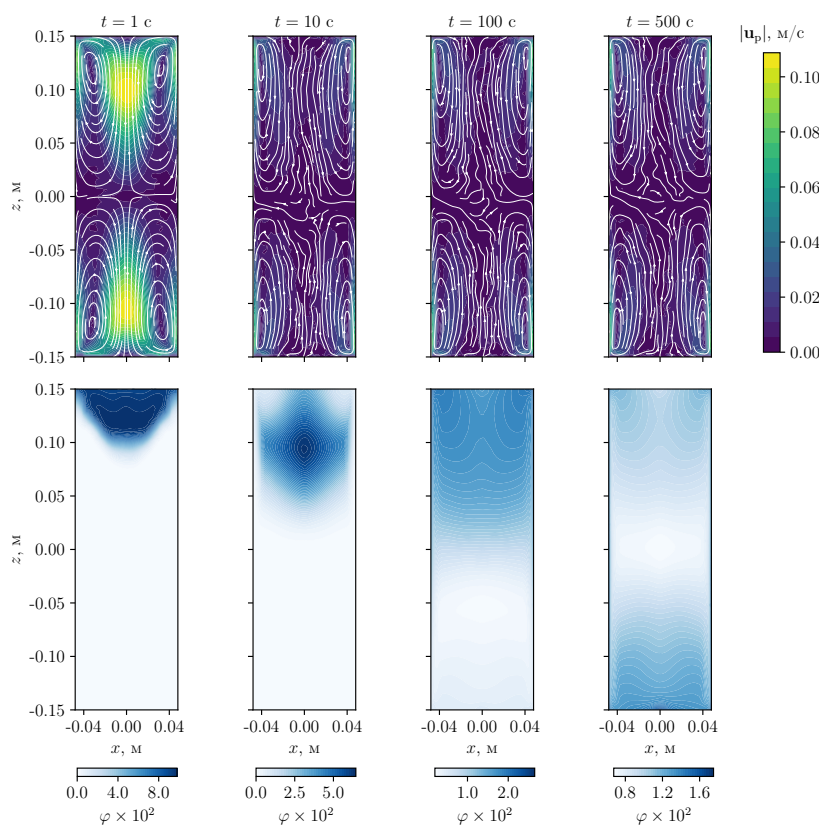


Рис. 4. Поля полоидальной скорости жидкости (вверху) и объемной доли примеси (внизу) для конфигурации ОВМП в разные моменты времени

Первоначально сосредоточенная в верхней части ячейки тяжелая примесь под действием гравитации оседает на дно. Крупномасштабное вращательное движение жидкости приводит к перераспределению концентрации частиц и в радиальном направлении за счет сил инерции и гомогенизации состава дисперсной фазы. Однако интенсивность вторичных полоидальных течений оказывается недостаточной, чтобы обеспечить эффективный перенос по высоте ячейки. В результате возникает неоднородность концентрации примеси вдоль оси Oz , в итоге примесь постепенно накапливается в придонной области. При этом оказавшаяся в нижней части ячейки частицы почти не вовлекаются в движение по вертикали, что исключает возможность их однородного распределения и в дальнейшем, на больших временах.

В конфигурации ДВМП (см. Рис. 5) на начальном этапе ($t = 0 \div 30$ с) в течении постепенно формируется пара вторичных тороидальных вихрей вблизи плоскости с вертикальной координатой $z = 0$. Вследствие существования тангенциального разрыва азимутальной скорости, который связан с резким изменением направления поля, развивается неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Из-за суперпозиции магнитных полей от находящихся близко индукторов, генерирующих противонаправленные магнитные поля, образуется локальная неоднородность электромагнитной силы в азимутальном направлении, проявляющаяся в уменьшении амплитуды силового воздействия. Азимутальная неоднородность в совокупности с развивающейся неустойчивостью приводит к формированию крупномасштабного колебательного режима. Колебания обнаруживают себя как периодические изменения размеров вихрей, нарушающие симметрию поля полоидальной скорости относительно оси вращения цилиндра. Перестройка полоидальной компоненты скорости течения за один период колебаний (4 с) приведена на рисунке 6.

Возникающий при конфигурации ДВМП колебательный режим вызывает интенсивное перемешивание примеси в области гидродинамической неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Кроме того, при наличии

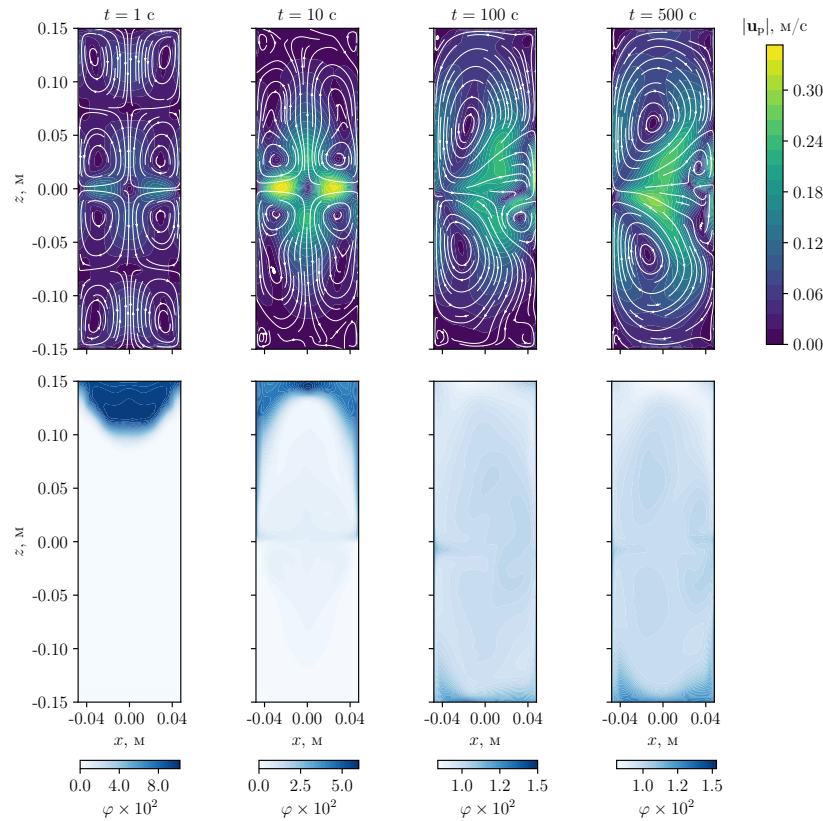


Рис. 5. Поля полоидальной скорости жидкости (вверху) и объемной доли примеси (внизу) для конфигурации ДВМП

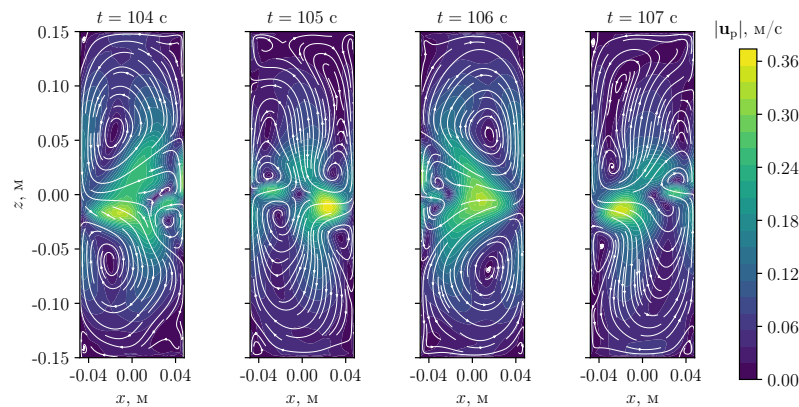


Рис. 6. Поля полоидальной скорости жидкости для конфигурации ДВМП в течение одного периода крупномасштабных колебаний

двух противонаправленных азимутальных вихрей формируется «запирающее» течение, которое способствует замедлению оседания частиц на дно ячейки. В результате на умеренных временах перемешивания (до $t = 500$ с) достигается почти однородное распределение примеси в срединной части ячейки и наблюдается образование слоя с пониженной (вверху ячейки) и повышенной (внизу) концентрацией примеси. В силу умеренной интенсивности полоидального течения, а также наличия застойных зон в углах рассматриваемого объема жидкости (см. Рис. 5), со временем появляются локализованные области повышенной объемной доли примеси.

Конфигурации МВМП соответствует более сложная структура течения. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, развивающаяся во всех зонах смены направления вращения поля, приводит к хаотизации течения и появлению вихрей крупных и средних масштабов (см. Рис. 7). При этом характерные размеры полоидальных вихрей оказываются меньше, чем при рассмотренных ранее конфигурациях. Нерегулярный характер течения сохраняется во времени, а интенсивность незначительно колеблется вблизи некоторого среднего значения. С образованием хаотической структуры перенос примеси по объему ячейки замедляется, и скорость осаждения тяжелых частиц падает. На начальной стадии перемешивания (до $t = 10$ с) из-за сравнительно малой скорости полоидального течения размывание зоны исходного распределения концентрации слабое. В последующем (при

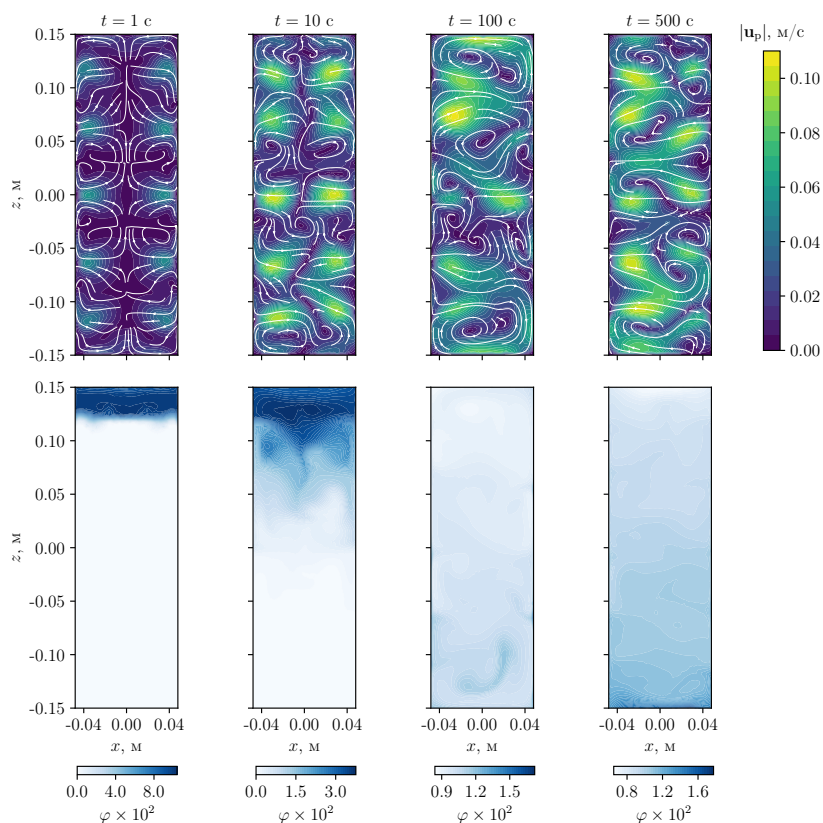


Рис. 7. Поля полоидальной скорости жидкости (вверху) и объемной доли примеси (внизу) в конфигурации МВМП

$t > 100$ с) структура течения усложняется, что способствует эффективному перемешиванию.

Для количественной оценки степени гомогенизации распределения примеси в процессе перемешивания введем параметр неоднородности:

$$\tau(t) = \int_V (\varphi(t) - \varphi^*)^2 dV,$$

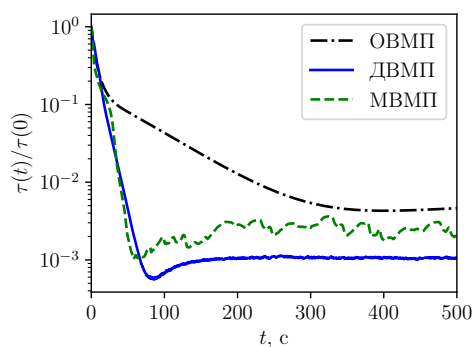


Рис. 8. Зависимость от времени нормированного параметра неоднородности распределения примеси

где $\varphi^* = 0.01$ — объемная доля примеси при однородном распределении по объему. На рисунке 8 для всех конфигураций электромагнитной силы (2) представлена зависимость от времени параметра неоднородности, нормированного на его начальное значение $\tau(0)$. ОВМП обеспечивает наименее качественное перемешивание вследствие малой полоидальной компоненты скорости течения. Поэтому перераспределение примеси по высоте ячейки в основном происходит за счет естественного оседания. Участок слабого изменения параметра неоднородности на графике при $t = 300 \div 500$ с обусловлен тем, что часть тяжелой примеси скапливается в придонном слое, в то время как неосевшая доля вовлечена в поток несущей жидкости. Минимум зависимости приходится на $t \approx 400$ с. В дальнейшем величина τ повышается по причине осаждения частиц примеси и их скопления в придонном слое.

Перемешивание МВМП обладает большей эффективностью. Тем не менее на графике $\tau(t)$ для данного режима наблюдаются нерегулярные флуктуации параметра. Они обусловлены перемещением примеси из придонной и пристеночной областей к центральной части ячейки посредством хаотического вихревого течения. Благодаря этому при заданных в исследовании одинаковых параметрах воздействие МВМП на больших временах оказывается более эффективным, нежели перемешивание однородным полем.

Наименьшей степенью неоднородности характеризуется конфигурация ДВМП. Следует отметить, что зависимость от времени параметра неоднородности $\tau(t)$ в этом случае имеет минимум, по которому можно оценить оптимальную продолжительность перемешивания. Наличие минимума обусловлено «запирающим» течением, которое, снижая скорость оседания, увеличивает время существования однородного распределения частиц. После

прохождения точки минимума график параметра неоднородности выходит на участок плато, обусловленный балансом осаждения и вовлечения осевших частиц обратно в поток жидкости. За счет достаточно высокой интенсивности и нестационарности течения при выбранной геометрии рабочей ячейки и заданных параметрах ДВМП обеспечивает наилучшие условия перемешивания среды.

5. Заключение и дискуссия

Рассмотрена структура течений в проводящей двухфазной среде под воздействием различных конфигураций внешнего ВМП, а также эволюция объемной доли дисперсной фазы, перераспределяющейся в условиях возникающих потоков и поля силы тяжести.

ОВМП генерирует в расчетной области квазитвердотельное вращение жидкости. Магнитное поле такой конфигурации является аналогом классического способа перемешивания, но характеризуется малой величиной полоидальной компоненты скорости, что приводит к низкой степени перемешивания.

Измельчение вихревой структуры за счет создания неустойчивых течений противонаправленными ВМП повышает эффективность перемешивания. Однако особенности топологии магнитного поля индуктора не позволяют развить высокую интенсивность потоков при той же подводимой к перемешивателю мощности, что и при других конфигурациях. Кроме того, высокая степень пульсаций скорости приводит к неустойчивым режимам перемешивания и удержанию примесей в вихрях. Важно, что в данном случае речь идет не о турбулентных мелкомасштабных пульсациях скорости (оказывающих влияние на эффективную диффузию), а об изменении среднего (крупномасштабного) поля скорости со временем.

В качестве меры интенсивности течений рассмотрим энергию компонент течения — полоидальной

$$E_p = \int_V (u_r^2 + u_z^2) dV$$

и азимутальной

$$E_t = \int_V u_\phi^2 dV.$$

На рисунке 9 видно, что ОВМП характеризуется высоким значением E_t и низким значением E_p , энергии отличаются на 3 порядка. Режим крупномасштабной генерации течения, в котором создается одна крупномасштабная контрвихревая пара, оказывается наиболее эффективным для перемешивания примеси за счет создания области неустойчивости с большими пульсациями скорости. При этом энергия азимутального течения снижается незначительно в сравнении с ОВМП, а энергия полоидального течения возрастает более чем на порядок. Ранее было показано [19], что режим МВМП характеризуется близкими величинами E_t и E_p и важным является то, что выравнивание энергий достигается не только вследствие роста полоидальной составляющей, но и ввиду ослабления азимутального течения по сравнению с конфигурацией ОВМП. Этот эффект связан с наличием азимутальной неоднородности электромагнитной силы, возникающей на стыке разнонаправленных вращающихся магнитных полей. В режиме ДВМП имеется одна область смены направления электромагнитной силы, ослабляющая суммарное силовое воздействие, что и приводит к снижению энергии азимутального течения. В режиме МВМП из-за увеличения числа пар таких разнонаправленных индукторов величина эффективной силы падает более существенно. Уменьшение же скорости вращения жидкости является причиной того, что времена перестройки полоидальной вихревой структуры оказываются большими в сравнении с периодом колебаний в режиме ДВМП.

Введенная характеристика неоднородности распределения примеси показывает, что для выбранной в качестве объекта исследования цилиндрической ячейки именно ДВМП, порождающее пульсирующие полоидальные

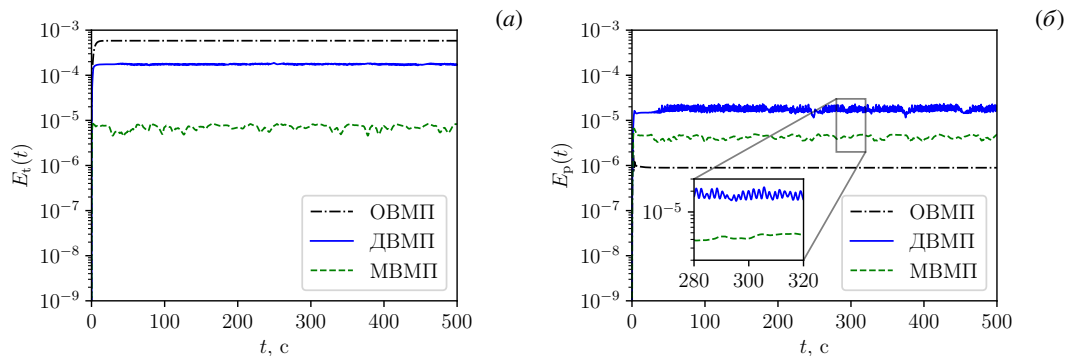


Рис. 9. Зависимость от времени энергии азимутальной (а) и полоидальной (б) скоростей течения для трех конфигураций вращающегося магнитного поля

вихри, обеспечивает наилучшую гомогенизацию. Этот результат согласуется с выводами работы [39], в которой утверждается, что одним из важных факторов повышения качества перемешивания примеси является асимметрия течения. При этом существует оптимальное время перемешивания, определяемое физическими свойствами несущей жидкости и примеси, при котором достигается минимальная степень неоднородности объемной доли. Дальнейшее перемешивание приводит к повышению неоднородности концентрации при седиментации дисперсной фазы и формировании застойных зон в углах ячейки. Режим перемешивания при МВМП воздействии также имеет слабо выраженный минимум на зависимости от времени параметра неоднородности объемной доли примеси, но хаотический характер течения препятствует однозначному нахождению оптимального времени перемешивания из-за наличия множественных локальных экстремумов у зависимости $\tau(t)$. Однако стоит отметить, что нерегулярная пространственно-временная структура течения приводит к возвращению осевшей примеси в поток жидкости и этот факт дает основания полагать, что на больших временах эффективность перемешивания в режиме МВМП для рассмотренной конфигурации системы может оказаться выше, нежели в режиме ДВМП.

Работа выполнена в рамках госзадания ИМСС УрО РАН (тема № 124012300246-9).

Литература

1. Moffatt H.K. Electromagnetic stirring // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 1991. Vol. 3, no. 5. P. 1336–1343. DOI: 10.1063/1.858062
2. Jie J.C., Zou Q.C., Sun J.L., Lu Y.P., Wang T.M., Li T.J. Separation mechanism of the primary Si phase from the hypereutectic Al–Si alloy using a rotating magnetic field during solidification // *Acta Materialia*. 2014. Vol. 72. P. 57–66. DOI: 10.1016/j.actamat.2014.03.031
3. Murty B.S., Kori S.A., Chakraborty M. Grain refinement of aluminium and its alloys by heterogeneous nucleation and alloying // *International Materials Reviews*. 2002. Vol. 47, no. 1. P. 3–29. DOI: 10.1179/095066001225001049
4. Denisov S., Dolgikh V., Khripchenko S., Kolesnichenko I., Nikulin L. The effect of traveling and rotating magnetic fields on the structure of aluminum alloy during its crystallization in a cylindrical crucible // *Magnetohydrodynamics*. 2014. Vol. 50, no. 4. P. 407–422. DOI: 10.22364/mhd.50.4.8
5. Al-Omari K., Roósz A., Rónaföldi A., Veres Z. Effect of Forced Melt Flow on Al–Si Eutectic-Alloy Microstructures // *Crystals*. 2022. Vol. 12, no. 5. 731. DOI: 10.3390/cryst12050731
6. Timofeev V., Pervukhin M., Vinter E., Sergeev N. Behavior of non-conducting particles in molten aluminium cast into electromagnetic molds // *Magnetohydrodynamics*. 2020. Vol. 56, no. 4. P. 459–472. DOI: 10.22364/mhd.56.4.10
7. Liu D.-d., Zhou Y.-j., Yang R., et al. Effect of electromagnetic stirring current on the mechanical properties of Cu–15Ni–8Sn alloy and its mechanism of inducing dendrite refinement and Sn distribution homogenization // *Materials Today Communications*. 2023. Vol. 37. 107224. DOI: 10.1016/j.mtcomm.2023.107224
8. Grants I., Gerbeth G. The suppression of temperature fluctuations by a rotating magnetic field in a high aspect ratio Czochralski configuration // *Journal of Crystal Growth*. 2007. Vol. 308, no. 2. P. 290–296. DOI: 10.1016/j.jcrysgro.2007.09.002
9. Liu H., Zeng Z., Qiu Z., Yin L., Xiao Y. Effect of rotating magnetic field on instabilities of thermocapillary flow in a Czochralski silicon melt pool // *Physics of Fluids*. 2020. Vol. 32, no. 10. DOI: 10.1063/5.0024416
10. Davidson P.A., Hunt J.C.R. Swirling recirculating flow in a liquid-metal column generated by a rotating magnetic field // *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. Vol. 185. P. 67–106. DOI: 10.1017/s0022112087003082
11. Kolesnichenko I., Khalilov R., Khripchenko S., Pavlinov A. MHD-stirrer for cylindrical molds of continuous casting machines fabricated aluminium alloy // *Magnetohydrodynamics*. 2012. Vol. 48, no. 1. P. 221–233.
12. Kolesnichenko I., Pavlinov A., Khalilov R. Movement of solid-liquid interface in gallium alloy under the action of rotating magnetic field // *Magnetohydrodynamics*. 2013. Vol. 49, no. 1/2. P. 191–199. DOI: 10.22364/mhd.49.1-2.23
13. Rübiger D., Eckert S., Gerbeth G., Franke S., Czarske J. Flow structures arising from melt stirring by means of modulated rotating magnetic fields // *Magnetohydrodynamics*. 2012. Vol. 48, no. 1. P. 213–220. DOI: 10.22364/mhd.48.1.24
14. Losev G.L., Kolesnichenko I.V., Khalilov R.I. Control of the metal crystallization process by the modulated traveling magnetic field // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 1128. 012051. DOI: 10.1088/1742-6596/1128/1/012051
15. Nikrityuk P.A., Ungarish M., Eckert K., Grundmann R. Spin-up of a liquid metal flow driven by a rotating magnetic field in a finite cylinder: A numerical and an analytical study // *Physics of Fluids*. 2005. Vol. 17, no. 6. DOI: 10.1063/1.1897323
16. Vogt T., Grants I., Rübiger D., Eckert S., Gerbeth G. On the formation of Taylor–Görtler vortices in RMF-driven spin-up flows // *Experiments in Fluids*. 2011. Vol. 52, no. 1. P. 1–10. DOI: 10.1007/s00348-011-1196-x
17. Nikrityuk P.A., Ungarish M., Eckert K., Grundmann R. Losev, G. and Shvydkiy, E. and Sokolov, I. and Pavlinov, A. and Kolesnichenko, I. // *Magnetohydrodynamics*. 2019. Vol. 55, no. 1/2. P. 107–114. DOI: 10.22364/mhd.55.1-2.13
18. Khripchenko S.Y., Dolgikh V.M., Siraev R.R. Distribution of titanium diboride microparticles introduced into aluminum ingot by MHD-stirring of a crystallizing melt // *Computational Continuum Mechanics*. 2022. Vol. 15, no. 4. P. 438–448. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.34
19. Kolesnichenko I., Okatev R. Equalisation the toroidal and poloidal kinetic energies of liquid metal stirring flow // *The European Physical Journal Plus*. 2024. Vol. 139, no. 9. DOI: 10.1140/epjp/s13360-024-05629-7

20. Колесниченко И.В., Мамыкин А.Д., Халилов Р.И. Электромагнитный перемешиватель жидкого металла: верификация электромагнитной части задачи // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 4. С. 45–51. DOI: 10.17072/1994-3598-2022-4-45-51
21. Озерных В.С., Лосев Г.Л., Гольбрайх Е., Колесниченко И.В. Начальная стадия формирования вихревого течения в индукторе с вращающимися встречно магнитными полями // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16, № 4. С. 493–503. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.4.41
22. Losev G.L., Okatiev R.S. Об измерении зависимости эффективной проводимости жидких металлов с твердыми частицами от объемной доли примеси // Расплавы. 2024. № 1. С. 3–16. DOI: 10.31857/s0235010624010016
23. Колесниченко И.В., Халилов Р.И. Экстремум зависимости напора электромагнитного насоса для жидкого металла от частоты питающего тока // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 4. С. 495–506. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.38
24. Нigmatулин Р.И. Динамика многофазных сред. Часть I. М.: Наука, 1987. 464 с.
25. Ding J., Gidaspow D. A bubbling fluidization model using kinetic theory of granular flow // AIChE Journal. 1990. Vol. 36, no. 4. P. 523–538. DOI: 10.1002/aic.690360404
26. Shirvanian P.A., Calo J.M., Hradil G. Numerical simulation of fluid–particle hydrodynamics in a rectangular spouted vessel // International Journal of Multiphase Flow. 2006. Vol. 32, no. 6. P. 739–753. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.02.009
27. Chapman S., Cowling T.G. The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases. Cambridge University Press, 1990. 423 p.
28. Gidaspow D. Multiphase Flow and Fluidization: Continuum and Kinetic Theory Descriptions. Elsevier Science, 1994. 467 p.
29. Goldhirsch I. Introduction to granular temperature // Powder Technology. 2008. Vol. 182, no. 2. P. 130–136. DOI: 10.1016/j.powtec.2007.12.002
30. Wang J. Continuum theory for dense gas-solid flow: A state-of-the-art review // Chemical Engineering Science. 2020. Vol. 215. 115428. DOI: 10.1016/j.ces.2019.115428
31. Lun C.K.K., Savage S.B., Jeffrey D.J., Chepurniy N. Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield // Journal of Fluid Mechanics. 1984. Vol. 140. P. 223–256. DOI: 10.1017/s0022112084000586
32. Saffman P.G. The lift on a small sphere in a slow shear flow // Journal of Fluid Mechanics. 1965. Vol. 22, no. 2. P. 385–400. DOI: 10.1017/s0022112065000824
33. Leenov D., Kolin A. Theory of Electromagnetophoresis. I. Magnetohydrodynamic Forces Experienced by Spherical and Symmetrically Oriented Cylindrical Particles // The Journal of Chemical Physics. 1954. Vol. 22, no. 4. P. 683–688. DOI: 10.1063/1.1740149
34. Zhang L., Wang S., Dong A., Gao J., Damoah L.N.W. Application of Electromagnetic (EM) Separation Technology to Metal Refining Processes: A Review // Metallurgical and Materials Transactions B. 2014. Vol. 45, no. 6. P. 2153–2185. DOI: 10.1007/s11663-014-0123-y
35. Syamlal M., O'Brien T.J. Simulation of granular layer inversion in liquid fluidized beds // International Journal of Multiphase Flow. 1988. Vol. 14, no. 4. P. 473–481. DOI: 10.1016/0301-9322(88)90023-7
36. Dallavalle J.M. Micromeritics: The Technology of Fine Particles. New York: Pitman, 1948. 555 p.
37. Garside J., Al-Dibouni M.R. Velocity-Voidage Relationships for Fluidization and Sedimentation in Solid-Liquid Systems // Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development. 1977. Vol. 16, no. 2. P. 206–214. DOI: 10.1021/i260062a008
38. Dobosz A., Plevachuk Y., Sklyarchuk V., Sokoliuk B., Gancarz T. Thermophysical properties of the liquid Ga–Sn–Zn eutectic alloy // Fluid Phase Equilibria. 2018. Vol. 465. P. 1–9. DOI: 10.1016/j.fluid.2018.03.001
39. Williams B.S., Marteau D., Gollub J.P. Mixing of a passive scalar in magnetically forced two-dimensional turbulence // Physics of Fluids. 1997. Vol. 9, no. 7. P. 2061–2080. DOI: 10.1063/1.869326

Сведения об авторах:

Окатьев Роман Сергеевич (корр.), мнс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: okatjev.r@icmm.ru; ORCID: 0000-0003-2741-1531

Лосев Геннадий Леонидович, кфмн, нс, ИМСС УрО РАН; e-mail: losev.g@icmm.ru; ORCID: 0000-0002-8028-3041

Колесниченко Илья Владимирович, дфмн, зав. лаб., ИМСС УрО РАН; e-mail: kiv@icmm.ru; ORCID: 0000-0001-9378-5334

Research article

MHD-stirring of a heavy impurity under a rotating magnetic field generated by a multi-section inductor**R.S. Okatev¹, G.L. Losev¹, I.V. Kolesnichenko¹***Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*

We study numerically the efficiency of stirring a two-phase dispersed fluid (liquid metal with impurity particles) in a cylindrical cell using a multiphase two-fluid model. The stirring is driven by an electromagnetic force generated by a sectional rotating magnetic field inductor. The inductor consists of six annular segments evenly distributed along the height of the cell. Each segment generates a rotating magnetic field independently. We consider three electromagnetic force configurations. The first configuration corresponds to a co-directional rotation of the magnetic fields of all six inductors, matching the case of a classical rotating magnetic field. In the second configuration, the three upper rings generate a magnetic field rotating in one direction, while the lower three rotate in the opposite direction. In the third configuration, the rotation directions of the magnetic fields alternate along the cell height. We introduce a parameter characterizing the inhomogeneity of the impurity distribution. It was shown that the most efficient mixing is achieved in the second configuration, which is attributed to the emergence of a large-scale oscillatory flow regime. The uniform rotating magnetic field configuration provides the least efficient mixing due to low poloidal velocity. In the third configuration, oscillations in the impurity distribution inhomogeneity parameter associated with the chaotic nature of the flow are observed. The optimal stirring time at which the degree of impurity distribution inhomogeneity is the least is determined.

Keywords: sectional inductor, rotating magnetic field, magnetohydrodynamics, impurity stirring, multiphase media, numerical simulation

Received: 28.04.2025 / *Published online:* 30.07.2025

References

1. Moffatt H.K. Electromagnetic stirring. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 1991. Vol. 3, no. 5. P. 1336–1343. DOI: 10.1063/1.858062
2. Jie J.C., Zou Q.C., Sun J.L., Lu Y.P., Wang T.M., Li T.J. Separation mechanism of the primary Si phase from the hypereutectic Al–Si alloy using a rotating magnetic field during solidification. *Acta Materialia*. 2014. Vol. 72. P. 57–66. DOI: 10.1016/j.actamat.2014.03.031
3. Murty B.S., Kori S.A., Chakraborty M. Grain refinement of aluminium and its alloys by heterogeneous nucleation and alloying. *International Materials Reviews*. 2002. Vol. 47, no. 1. P. 3–29. DOI: 10.1179/095066001225001049
4. Denisov S., Dolgikh V., Khripchenko S., Kolesnichenko I., Nikulin L. The effect of traveling and rotating magnetic fields on the structure of aluminum alloy during its crystallization in a cylindrical crucible. *Magnetohydrodynamics*. 2014. Vol. 50, no. 4. P. 407–422. DOI: 10.22364/mhd.50.4.8
5. Al-Omari K., Roósz A., Rónaföldi A., Veres Z. Effect of Forced Melt Flow on Al–Si Eutectic-Alloy Microstructures. *Crystals*. 2022. Vol. 12, no. 5. 731. DOI: 10.3390/cryst12050731
6. Timofeev V., Pervukhin M., Vinter E., Sergeev N. Behavior of non-conducting particles in molten aluminium cast into electromagnetic molds. *Magnetohydrodynamics*. 2020. Vol. 56, no. 4. P. 459–472. DOI: 10.22364/mhd.56.4.10
7. Liu D.-d., Zhou Y.-j., Yang R., et al. Effect of electromagnetic stirring current on the mechanical properties of Cu-15Ni-8Sn alloy and its mechanism of inducing dendrite refinement and Sn distribution homogenization. *Materials Today Communications*. 2023. Vol. 37. 107224. DOI: 10.1016/j.mtcomm.2023.107224
8. Grants I., Gerbeth G. The suppression of temperature fluctuations by a rotating magnetic field in a high aspect ratio Czochralski configuration. *Journal of Crystal Growth*. 2007. Vol. 308, no. 2. P. 290–296. DOI: 10.1016/j.jcrysgro.2007.09.002
9. Liu H., Zeng Z., Qiu Z., Yin L., Xiao Y. Effect of rotating magnetic field on instabilities of thermocapillary flow in a Czochralski silicon melt pool. *Physics of Fluids*. 2020. Vol. 32, no. 10. DOI: 10.1063/5.0024416
10. Davidson P.A., Hunt J.C.R. Swirling recirculating flow in a liquid-metal column generated by a rotating magnetic field. *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. Vol. 185. P. 67–106. DOI: 10.1017/s0022112087003082
11. Kolesnichenko I., Khalilov R., Khripchenko S., Pavlinov A. MHD-stirrer for cylindrical molds of continuous casting machines fabricated aluminium alloy. *Magnetohydrodynamics*. 2012. Vol. 48, no. 1. P. 221–233.
12. Kolesnichenko I., Pavlinov A., Khalilov R. Movement of solid-liquid interface in gallium alloy under the action of rotating magnetic field. *Magnetohydrodynamics*. 2013. Vol. 49, no. 1/2. P. 191–199. DOI: 10.22364/mhd.49.1-2.23
13. Rübiger D., Eckert S., Gerbeth G., Franke S., Czarske J. Flow structures arising from melt stirring by means of modulated rotating magnetic fields. *Magnetohydrodynamics*. 2012. Vol. 48, no. 1. P. 213–220. DOI: 10.22364/mhd.48.1.24
14. Losev G.L., Kolesnichenko I.V., Khalilov R.I. Control of the metal crystallization process by the modulated traveling magnetic field. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 1128. 012051. DOI: 10.1088/1742-6596/1128/1/012051
15. Nikrityuk P.A., Ungarish M., Eckert K., Grundmann R. Spin-up of a liquid metal flow driven by a rotating magnetic field in a finite cylinder: A numerical and an analytical study. *Physics of Fluids*. 2005. Vol. 17, no. 6. DOI: 10.1063/1.1897323

16. *Vogt T., Grants I., Rübiger D., Eckert S., Gerbeth G.* On the formation of Taylor–Görtler vortices in RMF-driven spin-up flows. *Experiments in Fluids*. 2011. Vol. 52, no. 1. P. 1–10. DOI: 10.1007/s00348-011-1196-x
17. *Nikrityuk P.A., Ungarish M., Eckert K., Grundmann R.* Losev, G. and Shvydkiy, E. and Sokolov, I. and Pavlinov, A. and Kolesnichenko, I. *Magnetohydrodynamics*. 2019. Vol. 55, no. 1/2. P. 107–114. DOI: 10.22364/mhd.55.1-2.13
18. *Khripchenko S.Y., Dolgikh V.M., Siraev R.R.* Distribution of titanium diboride microparticles introduced into aluminum ingot by MHD-stirring of a crystallizing melt. *Computational Continuum Mechanics*. 2022. Vol. 15, no. 4. P. 438–448. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.34
19. *Kolesnichenko I., Okatev R.* Equalisation the toroidal and poloidal kinetic energies of liquid metal stirring flow. *The European Physical Journal Plus*. 2024. Vol. 139, no. 9. DOI: 10.1140/epjp/s13360-024-05629-7
20. *Kolesnichenko I., Mamykin A., Khalilov R.* Electromagnetic liquid metal stirrer: verification of the electromagnetic part of the problem. *Bulletin of Perm University. Physics*. 2022. No. 4. P. 45–51. DOI: 10.17072/1994-3598-2022-4-45-51
21. *Ozernykh V.S., Losev G.L., Golbraikh E., Kolesnichenko I.V.* Initial stage of formation of vortex flow in an inductor with counter-rotating magnetic fields. *Computational Continuum Mechanics*. 2023. Vol. 16, no. 4. P. 493–503. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.4.41
22. *Losev L.G., Okatev R.S.* Measurement of the Dependence of the Effective Electrical Conductivity of Liquid Metals with Solid Particles on the Volume Fraction of an Impurity. *Russian Metallurgy (Metally)*. 2024. Vol. 2024. P. 65–71. DOI: 10.1134/s0036029524701374
23. *Kolesnichenko I.V., Khalilov R.I.* Extremum in the dependence of the head generated by electromagnetic pump of liquid metal on feeding current frequency. *Computational Continuum Mechanics*. 2022. Vol. 15, no. 4. P. 495–506. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.38
24. *Nigmatulin R.I.* *Dynamics of Multiphase Media*. Vol. 1. New York: Hemisphere, 1991. 507 p.
25. *Ding J., Gidaspow D.* A bubbling fluidization model using kinetic theory of granular flow. *AIChE Journal*. 1990. Vol. 36, no. 4. P. 523–538. DOI: 10.1002/aic.690360404
26. *Shirvanian P.A., Calo J.M., Hradil G.* Numerical simulation of fluid–particle hydrodynamics in a rectangular spouted vessel. *International Journal of Multiphase Flow*. 2006. Vol. 32, no. 6. P. 739–753. DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.02.009
27. *Chapman S., Cowling T.G.* *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases*. Cambridge University Press, 1990. 423 p.
28. *Gidaspow D.* *Multiphase Flow and Fluidization: Continuum and Kinetic Theory Descriptions*. Elsevier Science, 1994. 467 p.
29. *Goldhirsch I.* Introduction to granular temperature. *Powder Technology*. 2008. Vol. 182, no. 2. P. 130–136. DOI: 10.1016/j.powtec.2007.12.002
30. *Wang J.* Continuum theory for dense gas-solid flow: A state-of-the-art review. *Chemical Engineering Science*. 2020. Vol. 215. 115428. DOI: 10.1016/j.ces.2019.115428
31. *Lun C.K.K., Savage S.B., Jeffrey D.J., Chepurniy N.* Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield. *Journal of Fluid Mechanics*. 1984. Vol. 140. P. 223–256. DOI: 10.1017/s0022112084000586
32. *Saffman P.G.* The lift on a small sphere in a slow shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1965. Vol. 22, no. 2. P. 385–400. DOI: 10.1017/s0022112065000824
33. *Leenov D., Kolin A.* Theory of Electromagnetophoresis. I. Magnetohydrodynamic Forces Experienced by Spherical and Symmetrically Oriented Cylindrical Particles. *The Journal of Chemical Physics*. 1954. Vol. 22, no. 4. P. 683–688. DOI: 10.1063/1.1740149
34. *Zhang L., Wang S., Dong A., Gao J., Damoah L.N.W.* Application of Electromagnetic (EM) Separation Technology to Metal Refining Processes: A Review. *Metallurgical and Materials Transactions B*. 2014. Vol. 45, no. 6. P. 2153–2185. DOI: 10.1007/s11663-014-0123-y
35. *Syamlal M., O'Brien T.J.* Simulation of granular layer inversion in liquid fluidized beds. *International Journal of Multiphase Flow*. 1988. Vol. 14, no. 4. P. 473–481. DOI: 10.1016/0301-9322(88)90023-7
36. *Dallavalle J.M.* *Micromeritics: The Technology of Fine Particles*. Pitman, 1948. 555 p.
37. *Garside J., Al-Dibouni M.R.* Velocity-Voidage Relationships for Fluidization and Sedimentation in Solid-Liquid Systems. *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*. 1977. Vol. 16, no. 2. P. 206–214. DOI: 10.1021/i260062a008
38. *Dobosz A., Plevachuk Y., Sklyarchuk V., Sokoliuk B., Gancarz T.* Thermophysical properties of the liquid Ga–Sn–Zn eutectic alloy. *Fluid Phase Equilibria*. 2018. Vol. 465. P. 1–9. DOI: 10.1016/j.fluid.2018.03.001
39. *Williams B.S., Marteau D., Gollub J.P.* Mixing of a passive scalar in magnetically forced two-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*. 1997. Vol. 9, no. 7. P. 2061–2080. DOI: 10.1063/1.869326