ISSN: 1999-6691, e-ISSN: 2782-3709 DOI: http://doi.org/10.7242/1999-6691/2025.18.1.8

Научная статья

Маломодовая модель крупномасштабного конвективного течения в удлиненной прямоугольной полости

Р.А. Степанов, А.Ю. Васильев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Численно исследуется крупномасштабная циркуляция (КМЦ) турбулентного конвективного течения в прямоугольной полости с аспектным отношением 2:1:1. КМЦ характеризуется сложной временной динамикой и существенно влияет на процессы тепломассопереноса. Большое количество публикаций посвящено анализу КМЦ в цилиндрических полостях, для которых детально описаны особенности формирования и различного рода смены направления вращения КМЦ. Новизна данной работы состоит в рассмотрении турбулентного конвективного течения в удлиненной прямоугольной области с асимметричными граничными условиями для скорости и температуры на горизонтальных границах. Численное решение задачи позволило обнаружить, что в полости формируется КМЦ, имеющая выраженный колебательный характер в трех плоскостях. Прямое численное моделирование и моделирование методом крупных вихрей, выполненное в пакете OpenFOAM, дают похожее поведение КМЦ. С помощью собственного ортогонального разложения выделены наиболее энергосодержащие моды, каждая их которых, как оказалось, вносит основной вклад в соответствующую проекцию углового момента КМЦ. Эволюция этих мод описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных проекцией системы уравнений термогравитационной конвекции на базис пространственных мод с помощью подхода Галеркина. Сформулированная маломодовая нелинейная модель включает только три моды и способна воспроизвести наблюдаемые колебания КМЦ. С физической точки зрения осцилляцию КМЦ можно интерпретировать как слабо нелинейное триадное взаимодействие крупномасштабных мод.

Ключевые слова: конвекция Рэлея–Бенара, численное моделирование, собственное ортогональное разложение, маломодовая модель

Получение: 14.11.2024 / *Публикация онлайн*: 10.04.2025 УДК 532.5; 536.252

1. Введение

Изучение крупномасштабных течений (КТ) в турбулентной конвекции вызывает большой интерес с точки зрения переноса тепла и многообразия режимов поведения. Особо важными являются случаи с асимметричными граничными условиями для скорости и температуры, которые ближе к физическому состоянию, встречающемуся в природе. Крупномасштабная циркуляция (КМЦ), возникающая в таких системах, характеризуется сложной структурой и нелинейной динамикой, определяемой взаимодействием турбулентных пульсаций и КТ [1–3]. КМЦ — та часть КТ, которая вносит доминирующий вклад в тепловой поток. Несмотря на большое число исследований, многие аспекты КМЦ, в том числе ее динамика, механизмы формирования и эволюция структур, даже при симметричных граничных условиях, остаются недостаточно изученными [4].

КМЦ представляет собой сложный многомерный процесс, понимание которого требует учета множества взаимосвязанных факторов. КМЦ формируется в результате неустойчивости, вызванной плотностными градиентами в системе, и играет ключевую роль в переносе тепла, массы и импульса. Однако описание ее поведения сопряжено с рядом трудностей, которые обусловлены как физическими, так и математическими причинами. К примеру, широко известная проблема переориентации КМЦ в кубической ячейке обсуждается во множестве работ, и до сих пор не выработан единый подход к выбору математической основы для физической интерпретации [5]. При этом одним из препятствий является нелинейный характер и множественность факторов, определяющих КМЦ. Возникающие турбулентные структуры имеют широкий диапазон пространственных и временных масштабов, что приводит к сильной зависимости глобальной динамики от локальных эффектов. Кроме того, взаимодействие крупных циркуляционных ячеек с мелкомасштабными турбулентными флуктуациями значительно усложняет численное моделирование и прогнозирование структуры КМЦ на основе известных параметров задачи. Другой важный аспект — влияние граничных условий. Различные конфигурации, такие как твердые стенки с условиями прилипания или свободные границы, приводят к изменениям КТ, распределения напряжений и механизмов теплообмена [6–9], делают динамику КМЦ чувствительной к геометрии и физическим параметрам системы и увеличивают сложность ее описания. Детальное математическое представление КМЦ требует решения уравнений Навье –Стокса в сочетании с уравнениями переноса тепла и массы, вследствие чего такие задачи становятся затратными по вычислительным ресурсам. Даже современные численные методы и высокопроизводительные вычислительные системы часто сталкиваются с ограничениями при моделировании крупномасштабных систем, особенно в турбулентных режимах. Теория среднего поля для конвективной турбулентности показывает, что неоднородность КТ приводит к перераспределению турбулентного теплового потока, что может играть ключевую роль в формировании крупномасштабных когерентных структур [4].

В данной работе обсуждаются структуры и динамика КТ в конвективной турбулентности при асимметричных граничных условиях для скорости и температуры на горизонтальных границах. При этом в качестве объекта, в котором проводится исследование, выбрана прямоугольная ячейка, вытянутая в горизонтальном направлении, что должно создать условия для возникновения интенсивной и устойчивой КМЦ. Ставится задача построить маломодовую модель, которая воспроизводила бы основные динамические свойства КМЦ. Для вывода модели используется собственное ортогональное разложение, успешно примененное ранее для анализа конвективного течения в кубической ячейке [10]. Такой подход позволяет выделить основные моды, определяющие динамику системы, описать поведение КМЦ с минимальными вычислительными затратами и сделать модель удобной для теоретического анализа и вычислительных экспериментов.

2. Математическая постановка задачи

Рассматривается задача о конвективной турбулентности в прямоугольной полости длиной $L = 0.2$ м, шириной $W = 0.1$ м и высотой $H = 0.1$ м (аспектное отношение 2:1:1). Все границы считаются твердыми, кроме верхней, вдоль которой жидкость движется без прилипания. Жидкость нагревается на нижней границе при зафиксированной температуре и охлаждается на верхней за счет постоянного оттока тепла (см. Рис. 1). Система уравнений, записанная в декартовой системе координат и представляющая термогравитационное движение несжимаемой ньютоновской жидкости в приближении Буссинеска, имеет вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0,\\
\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j)=-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho_0}\right)+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}+\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)g\delta_{i2},\\
\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j T)=\chi\frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2},\\
\frac{\rho}{\rho_0}=1-\beta(T-T_0).
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь u_i — i-я компонента вектора скорости течения жидкости $\mathbf{u}$; p — давление; T — температура; ρ — плотность; β — коэффициент теплового расширения; g — ускорение свободного падения; δ_{i2} — символ Кронекера; $\rho_0,\ \nu,\ \chi$ — плотность, кинематическая вязкость и температуропроводность при эталонной температуре T_0.

Задача решается при следующих граничных условиях:

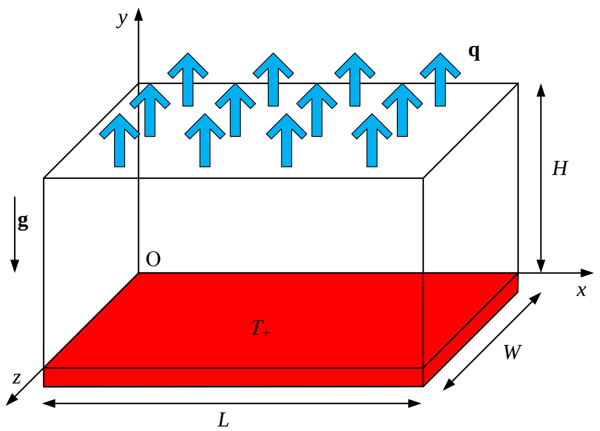

Рис. 1. Схема расчетной области

– на боковых стенках и на нижней границе выполняется условие прилипания

$$\mathbf{u}|_{\Gamma}=\mathbf{u}|_{y=0}=0;$$

– на свободной верхней границе имеет место проскальзывание

$$u_y|_{y=H}=\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{y=H}=\left.\frac{\partial u_z}{\partial y}\right|_{y=H}=0;$$

– боковые границы являются адиабатическими

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0;$$

– на нижней границе задается постоянная температура

$$T|_{y=0}=T_+;$$

– на верхней границе постоянным является тепловой поток

$$-\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=H}=\frac{P}{\lambda S}\equiv\xi,$$

где $P=34$ Вт — мощность отвода тепла, S — площадь верхней границы, $\lambda=0.608$ Вт/(м·К) — теплопроводность среды.

При переходе к безразмерным параметрам задачи в качестве единиц длины и времени приняты высота слоя H и время свободного падения $t_f=H/U_f$, при этом скорость свободного падения определяется формулой: $U_f=\sqrt{\beta g\xi H^2}$. Тогда можно вычислить потоковое число Рэлея $\mathrm{Ra}_F=\beta g\xi H^4/(\nu\kappa)$ и число Прандтля $\mathrm{Pr}=\nu/\kappa$. Обычное число Рэлея находится по перепаду температуры θ: $\mathrm{Ra}=\mathrm{Ra}_F\mathrm{Nu}^{-1}$, где число Нуссельта $\mathrm{Nu}=\xi H/\theta$. Численное моделирование выполнено для фиксированных значениях управляющих параметров: $\mathrm{Ra}_F=5.4\cdot10^9$ и $\mathrm{Pr}=6.12$.

Прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation — DNS) течений в условиях турбулентности требует огромных вычислительных ресурсов, поскольку для достижения сходимости численного решения необходимо разрешать пространственные масштабы течения: масштаб Колмогорова $\eta_K = \left(\nu^3 \epsilon_u^{-1}\right)^{1/4}$ и масштаб Бэтчелора $\eta_B = \eta_K \mathrm{Pr}^{-1/2}$. В работе [11] получено точное соотношение между скоростью диссипации кинетической энергии и управляющими параметрами: $\epsilon_u = \nu^3 H^{-4}(\mathrm{Nu}-1)\mathrm{Ra}\mathrm{Pr}^{-2}$. При развитом турбулентном режиме ($\mathrm{Nu} \gg 1$) можно считать, что $\epsilon_u \approx \nu^3 H^{-4} \mathrm{Ra}_F \mathrm{Pr}^{-2}$, тогда оценки диссипативных масштабов будут выглядеть следующим образом: $\eta_K = H \mathrm{Ra}_F^{-1/4} \mathrm{Pr}^{1/2}$ и $\eta_B = H \mathrm{Ra}_F^{-1/4}$. Следует отметить, что здесь Ra_F вычисляется по заданным параметрам задачи, а значит, оценка минимального шага сетки может быть сделана априори.

В задачах конвективной турбулентности большой интерес представляет долговременная динамика КМЦ из-за редких и глобальных событий: переориентации и инверсии. Интервалы времени квазиустойчивого состояния КМЦ могут варьироваться в широком диапазоне, поэтому необходимы длительные расчеты для регистрации и накопления статистических данных о редких событиях [12]. Это дополнительно усугубляет проблему вычислительной ресурсоемкости задачи.

Альтернативой прямому численному моделированию турбулентных течений является метод крупных вихрей (Large Eddy Simulation — LES), который менее требователен к вычислительным ресурсам. Идея LES подхода заключается в разделении всех переменных на разрешаемые вычислительной сеткой (крупномасштабные течения) и подсеточные. Уравнения, описывающие крупномасштабное течение, получаются путем применения к ним низкочастотного фильтра (1), ширина которого пропорциональна размеру ячейки $\Delta = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3}$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0, \\
\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_i \overline{u}_j) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\overline{p}}{\rho_0}\right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \left(\frac{\overline{\rho}}{\rho_0}\right) g \delta_{i2}, \\
\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_j \overline{T}) = \chi \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}, \\
\frac{\overline{\rho}}{\rho_0} = 1 - \beta\left(\overline{T} - T_0\right),
\end{gathered} \tag{2}$$

где $\overline{u}_i$, $\overline{p}$, $\overline{T}$ — отфильтрованные скорость, давление и температура, $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j$ — подсеточный тензор напряжений, $q_j = \overline{u_j T} - \overline{u}_j \overline{T}$ — подсеточный тепловой поток, Δ_x, Δ_y, Δ_z — размеры ячейки в направлении соответствующих осей декартовой системы координат.

В результате операции фильтрации из уравнений исключаются мелкомасштабные части полей скорости и температуры. Нелинейное воздействие мелкомасштабной турбулентности на крупномасштабное течение задается через подсеточные переменные. Для замыкания уравнений (2) подсеточные тензор напряжений и тепловой поток параметризуются с использованием модели Смагоринского и гипотезы градиентной диффузии:

$$\begin{gathered}
\tau_{ij} = -2\nu_{sgs} \overline{S}_{ij} = -2(C_s \Delta)^2 \left|\overline{S}\right| \overline{S}_{ij}, \\
q_j = -\chi_{sgs} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j},
\end{gathered}$$

где ν_{sgs} — подсеточная вязкость, χ_{sgs} — подсеточная температуропроводность, $C_s = 0{,}18$ — коэффициент Смагоринского, $\overline{S}_{ij} = 1/2\,(\partial \overline{u}_i / \partial x_j + \partial \overline{u}_j / \partial x_i)$ — тензор скорости деформации, $\left|\overline{S}\right| = \sqrt{2 \overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij}}$ — норма тензора скорости деформации. Для вычисления подсеточной температуропроводности применяется гипотеза о постоянстве подсеточного (Pr_{sgs}) числа Прандтля: $\chi_{sgs} = \nu_{sgs} / \mathrm{Pr}_{sgs}$. В данной задаче принято $\mathrm{Pr}_{sgs} = 0.9$ для всей расчетной области.

Уравнения тепловой конвекции (1) и (2) решаются методом конечных объемов в пакете вычислительной гидродинамики с открытым исходным кодом OpenFoam v2106. Фактический средний перепад температуры составляет $\Delta \mathrm{T} = 6\ ^\circ\mathrm{C}$, что соответствует $\mathrm{Ra} = 1.1 \cdot 10^8$. Расчеты осуществляются как на однородной, так и на неоднородной структурированной сетках, дискретизирующих прямоугольную расчетную область. Подход DNS реализуется только на однородных сетках. Для разрешения тепловых и динамических пограничных слоев в расчетах на основе LES подхода строится неоднородная сетка со сгущением вблизи всех границ. Параметры проведенных расчетов представлены в таблице. Масштаб Колмогорова численно разрешается в обоих DNS расчетах, а масштаб Бэтчелора только в DNS-54.

Интегрирование по времени выполняется согласно неявной схеме 2-го порядка точности. Шаг интегрирования является адаптивным, критерий Куранта–Фридрихса–Леви не превышает 0.4. Дискретизация конвективных и диффузионных слагаемых осуществляется центрально-разностной схемой 2-го порядка аппроксимации. Для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), получаемой в результате дискретизации, применяется метод бисопряженных градиентов PBiCG с предобуславливателем DILU (для скорости и температуры) и GAMG метод (для давления) [13]. Схемы дискретизации и методы решения СЛАУ при подходах DNS и LES одинаковы.

Таблица. Параметры вычислительных экспериментов

Расчет	$N_x \times N_y \times N_z$	$\max(\Delta/\eta_K)$	$\max(\Delta/\eta_B)$
DNS-16	400×200×200	0.55	1.38
DNS-54	600×300×300	0.37	0.91
LES	200×100×100	1.38	3.42

3. Результаты численного моделирования

3.1. Сравнение результатов DNS и LES расчетов

Одна из основных характеристик конвективного течения при заданных управляющих параметрах — это турбулентный перенос тепла и импульса, характеризующийся числами Нуссельта и Рейнольдса $\mathrm{Re} = u_{rms}H/\nu$. Здесь $u_{rms} = \sqrt{\langle \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\rangle_{t,V}}$ — среднеквадратичная скорость жидкости в объеме, а выражение $\langle \ldots \rangle_{t,V}$ означает осреднение по времени и объему. Интегральные параметры в расчетах меняются несущественно: при DNS-16 — $\mathrm{Nu} = 46.12$, $\mathrm{Re} = 542$; при DNS-54 — $\mathrm{Nu} = 46.28$, $\mathrm{Re} = 536$; при LES — $\mathrm{Nu} = 47.71$, $\mathrm{Re} = 558$. В DNS подходе значения Nu и Re, определенные на разных сетках, отличаются не более чем на 2%. В значениях Nu и Re между LES подходом и DNS-16 разница составляет менее 4%. Вычисленным значениям числа Nu соответствует приблизительно $\mathrm{Ra} = 1.1 \cdot 10^8$.

Для количественного описания интенсивности КТ используется полный угловой момент:

$$\mathbf{L}(t) = \rho_0 \int_{\Omega} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\, d\mathbf{r},$$

где $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор относительно центра пространственной области Ω. Компоненты углового момента характеризуют интенсивность вращения вихревых структур вокруг осей, направленных вдоль соответствующих осей системы координат. КМЦ включает в себя те крупномасштабные вихревые структуры, которые участвуют в переносе тепла. На рисунке 2 показана временная эволюция полного углового момента для DNS (Рис. 2*а*) и LES подходов (Рис. 2*б*). Результаты обоих подходов демонстрируют, что в прямоугольной полости возникает устойчивая КМЦ, но направление вращения при этом получается противоположное (что, по всей видимости, определяется случайностью начального состояния). Интенсивность КМЦ характеризуется компонентой L_z углового момента, а значения варьируются относительно устойчивого среднего значения. Различие между средними значениями L_z не превышает 4%. В обоих подходах наблюдаются квазипериодические колебания L_x и L_y относительно нуля со сдвигом по фазе φ_0.

Для более детального сравнения характеристик КТ в случае двух подходов вычислены спектры пульсаций компонент углового момента. Структура спектров и распределение энергии пульсаций по временным масштабам качественно и количественно совпадают (см. Рис. 3). В спектрах пульсаций L_x и L_y присутствует локальный

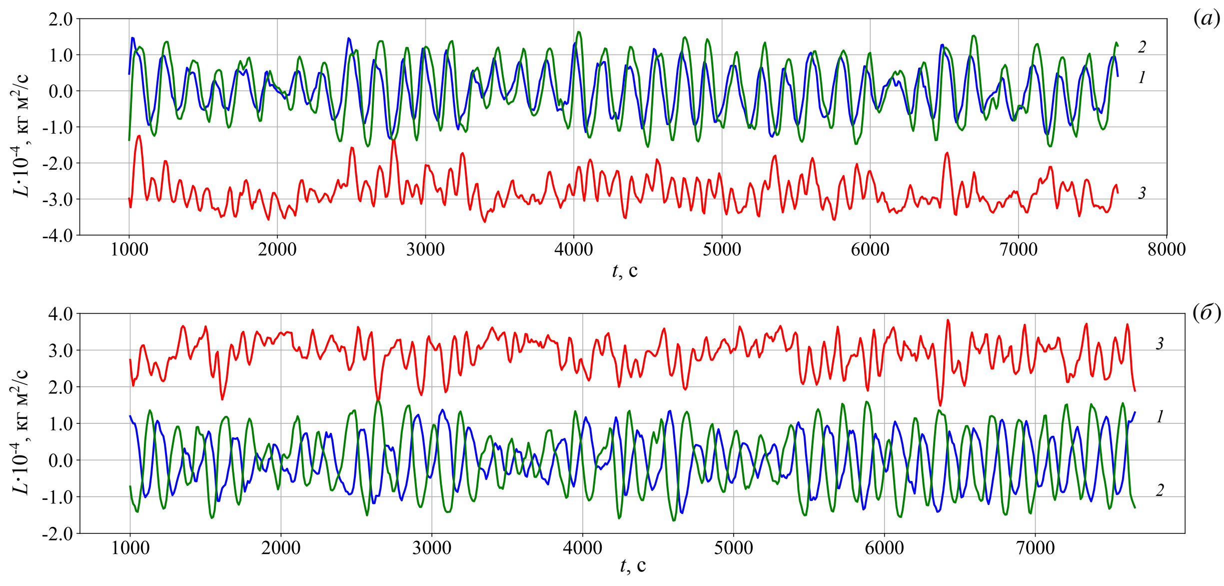

Рис. 2. Временная эволюция компонент углового момента при DNS (*а*) и LES (*б*) подходах: L_x (кривая *1*), L_y (*2*), L_z (*3*)

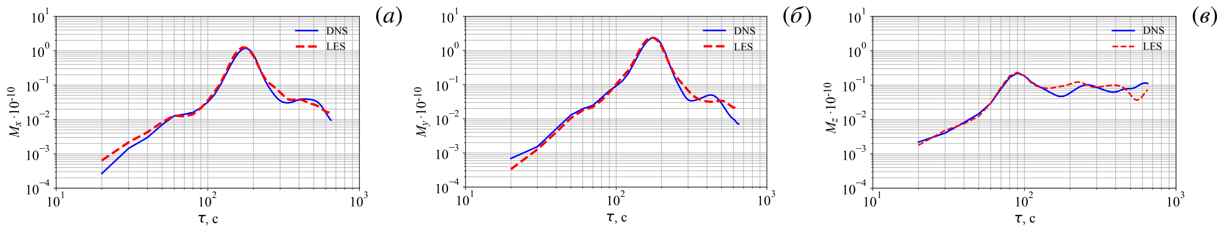

Рис. 3. Вейвлет спектры компонент углового момента DNS (сплошная линия) и LES (пунктирная линия): L_x (*а*), L_y (*б*), L_z (*в*)

максимум энергии на временном масштабе $\tau_0^{xy} = 180$ с. Доминирующий масштаб $\tau_0^z \approx \tau_0^{xy}/2$ имеет место и в спектрах пульсаций L_z. Временные масштабы характеризуют периоды колебаний соответствующих компонент углового момента.

Выше говорится, что между колебаниями L_y и L_x есть ненулевой фазовый сдвиг. На рисунке 4 представлена кросскорреляционная функция временных рядов L_y и L_x в зависимости от нормированного временного масштаба τ/τ_0^{xy}. Из рисунка видно, что фазовый сдвиг в обоих подходах одинаков и равен $\varphi_0 = \pi/4$.

В задаче конвективной турбулентности LES подход качественно и количественно воспроизводит основные свойства пространственно-временного поведения КТ, поэтому построение маломодовой модели опирается далее на результаты LES расчета.

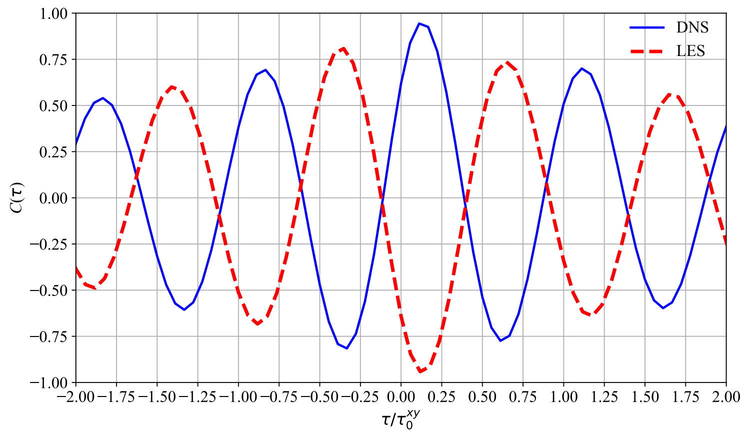

Рис. 4. Взаимная корреляционная функция временных рядов L_y и L_x: DNS (сплошная линия), LES (пунктирная линия)

3.2. Собственное ортогональное разложение

Собственное ортогональное разложение (Proper Orthogonal Decomposition — POD) [14] направлено на поиск оптимального базиса пространственных мод $\boldsymbol{\varphi}_n(\mathbf{r})$ для представления векторного поля $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ в малоразмерном подпространстве. Задача нахождения пространственных мод сводится к интегральному уравнению Фредгольма:

$$\int_{\Omega} \mathbf{R}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(n)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \lambda_n \boldsymbol{\varphi}^{(n)}(\mathbf{r}), \tag{3}$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle \mathbf{U}(\mathbf{r},t)\mathbf{U}(\mathbf{r}',t)\rangle_t$ — ядро разложения или ковариационная матрица, λ_n — собственное значение, $\langle \ldots \rangle_t$ — обозначение осреднения по времени. Собственные пространственные моды образуют ортогональный базис $\int_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}^{(n)}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(m)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{nm}$, позволяющий представить поле $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ в виде линейной комбинации произведений функций, одна из которых зависит только от временной (t), а другая от пространственной $(\mathbf{r})$ переменной:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \boldsymbol{\varphi}^{(n)}(\mathbf{r}).$$

Коэффициенты $a_n(t)$ не коррелируют между собой, и их энергия равна собственному значению $\langle a_n(t) a_m(t)\rangle_t = \lambda_n \delta_{nm}$. Собственные значения являются мерой турбулентной энергии данной моды.

В задачах естественной конвекции для учета связи между полями скорости и температуры рассматривается общий вектор состояния $\mathbf{U}=(\mathbf{u},\gamma(T-T_0))$, где γ — коэффициент масштабирования, определяемый формулой:

$$\gamma=\sqrt{\left\langle\frac{\int\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}}{\int(T(\mathbf{r},t)-T_0)^2d\mathbf{r}}\right\rangle_t}=0.0118.$$

Интегральное уравнение (3) преобразуется в матричную задачу на собственные значения. Несмотря на то, что оптимальный базис находится по результатам LES подхода, то есть по данным на сетках с низким разрешением, размер ядра $\mathbf{R}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ чрезвычайно большой: $4N\times4N$, где $N=N_x\times N_y\times N_z$. Для уменьшения объема вычислительных ресурсов при решении задачи на собственные значения используется метод «моментальных снимков» (Method of Snapshots) [15]. Метод основан на представлении собственных мод в виде линейной комбинации из N_t мгновенных полей $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$:

$$\boldsymbol{\varphi}^{(n)}(\mathbf{r})=\sum_{i=1}^{N_t}\Phi_i^{(n)}\mathbf{U}(\mathbf{r},t).$$

Задача на собственные значения переписывается следующим образом:

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}^{(n)}=\lambda_n\boldsymbol{\Phi}^{(n)},$$

где $\mathbf{C}$ — временная корреляционная матрица, компоненты которой определяются выражением:

$$C_{ij}=\frac{1}{N_t}\int\limits_{\Omega}\mathbf{U}(\mathbf{r},t_i)\cdot\mathbf{U}(\mathbf{r},t_j)d\mathbf{r}.$$

При построении редуцированной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей динамику КТ, важен учет симметрии задачи. Каждый элемент группы симметрии порождает допустимое решение. Вычислительная область, система уравнений (1), (2) и граничные условия удовлетворяют двум независимым отражательным симметриям — S_x, S_z относительно плоскостей $x=L/2$, $z=W/2$, и одной вращательной симметрии — R_π на угол π вокруг оси y. Эти элементарные симметрии действуют на поле скорости и температуры следующим образом:

$$S_x:\begin{cases}(x,y,z)\to(L-x,y,z),\\(u_x,u_y,u_z,T)\to(-u_x,u_y,u_z,T),\end{cases}$$
$$S_z:\begin{cases}(x,y,z)\to(x,y,W-z),\\(u_x,u_y,u_z,T)\to(u_x,u_y,-u_z,T),\end{cases}$$
$$R_\pi:\begin{cases}(x,y,z)\to(L-x,y,W-z),\\(u_x,u_y,u_z,T)\to(-u_x,u_y,-u_z,T).\end{cases}$$

В процессе расчета трехмерные распределения скорости и температуры в вычислительной области сохраняются каждые 10 с, что соответствует набору исходных данных, состоящему из 800 распределений. Для отыскания собственных мод на основе исходных данных создается их дополнительный набор. Он получается последовательным применением элементарных симметрий задачи к первым 250 распределениям, что увеличивает количество распределений до 1000, куда входят и не преобразованные первые 250 распределений. Количество распределений в расширенном наборе данных ограничено оперативной памятью персонального компьютера. Для восстановления собственных мод из 1000 распределений требуется 128 Гб оперативной памяти.

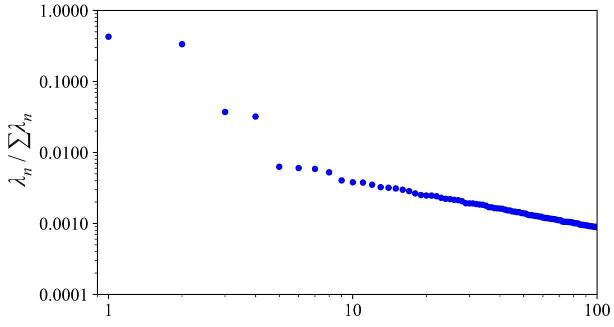

Рис. 5. Нормированный спектр собственных значений

Собственные значения λ_n характеризуют турбулентную энергию соответствующих мод, поэтому по скорости убывания моды с номером n можно судить о характере течения. Нормированный спектр собственных значений показан на рисунке 5. Спектр собственных мод затухает медленно, что соответствует развитому турбулентному течению. Вклад первой и второй собственных мод в полную энергию турбулентного течения (сумма кинетической и тепловой энергии) приблизительно одинаковый и составляет 43 и 33% соответственно. Примерно равные вклады в энергию течения вносят третья и четвертая собственные моды. Однако их доля на порядок меньше доли первых двух мод и не превышает 4%. В первых четырех модах содержится приблизительно 83% общей энергии течения. Далее анализ ограничивается первыми четырьмя модами, которых, как будет показано далее, в разделе 4, достаточно для создания редуцированной модели, воспроизводящей динамику КТ.

Ранее отмечалось, что в рассматриваемой задаче обнаружена особенность во временном поведении компонент углового момента, а именно их низкочастотные колебания. В связи с этим интересно определить степень участия в этих колебаниях выделенных собственных мод. На первом этапе оценивается вклад каждой моды в интегральный угловой момент:

$$\mathbf{L}_n = \rho_0 \int\limits_{\Omega} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{u}_n^* d\mathbf{r},$$

где $\mathbf{u}_n^* = \sqrt{\lambda_n}\boldsymbol{\varphi}_u^{(n)}$ — среднее по времени поле скорости n-й моды, $\boldsymbol{\varphi}_u^{(n)}$ — n-я мода поля скорости. Получилось, что первая собственная мода обладает нулевым интегральным угловым моментом $\mathbf{L}=0$, поскольку удовлетворяет всем симметриям задачи. Структура поля скорости первой собственной моды $\mathbf{u}_1^*$ показана на рисунке 6 и представляет собой тор, сконцентрированный в углах между верхней и боковыми границами. В конвективных течениях с симметрийными граничными условиями такие торы обычно формируется парами у нижней и верхней границ. Вторая мода $\mathbf{u}_2^*$ является симметричной относительно z и вносит вклад только в $L_z = 2.87$. Две другие моды — $\mathbf{u}_3^*$ и $\mathbf{u}_4^*$, участвуют, соответственно, в $L_y = 0.86$ и $L_x = 0.69$. Важно, что L_y и L_x примерно в 3 раза меньше, чем L_z, что согласуется с отличием на порядок их энергий. На рисунках 7–9 изображена структура полей скорости мод $\mathbf{u}_2^*$, $\mathbf{u}_3^*$ и $\mathbf{u}_4^*$. В целом для этих мод она подобна и представляет собой квазидвумерный вихрь, занимающий всю полость и вращающийся, соответственно, каждый вокруг своей оси: z, y и x. Таким образом, собственное ортогональное разложение позволяет выделить моды, которые дают вклад только в одну компоненту интегрального углового момента.

Временная динамика собственных мод характеризуется коэффициентами $a_n(t)$, которые вычисляются как проекции вектора состояния системы $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ на собственные моды:

$$a_n(t) = \int\limits_{\Omega} \mathbf{U}(\mathbf{r},t) \cdot \boldsymbol{\varphi}^{(n)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

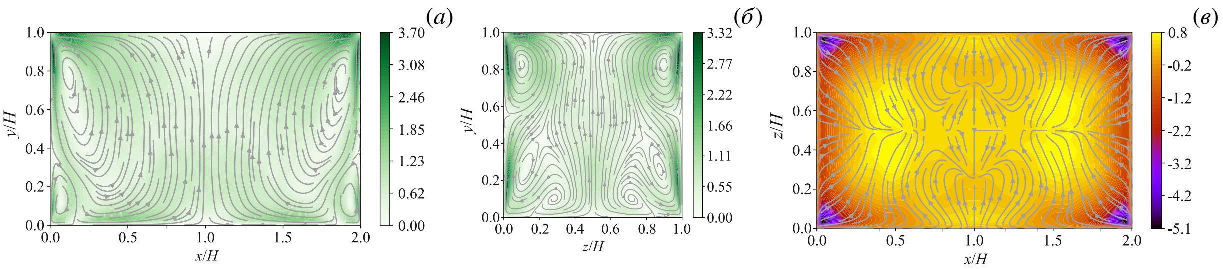

Рис. 6. Линии тока поля скорости моды $n=1$ в трех ортогональных плоскостях: $z=H/2$ (*а*), $x=H$ (*б*), $y=H/2$ (*в*); цветом показаны модуль скорости на (*а*) и (*б*) и вертикальная компонента скорости на (*в*)

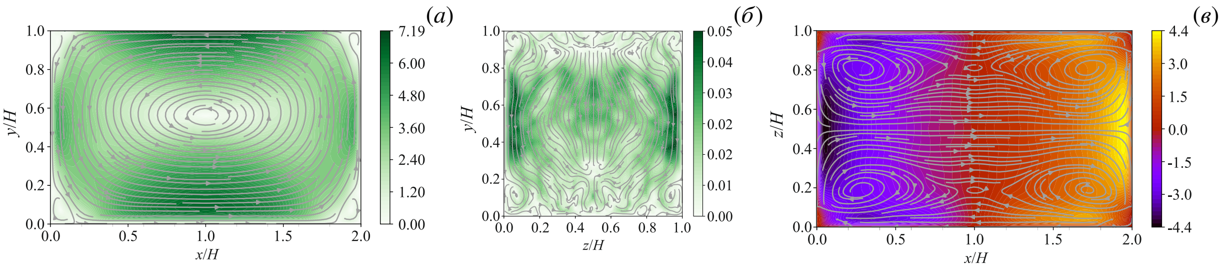

Рис. 7. Линии тока поля скорости моды $n=2$ в трех ортогональных плоскостях (по аналогии с Рис. 6)

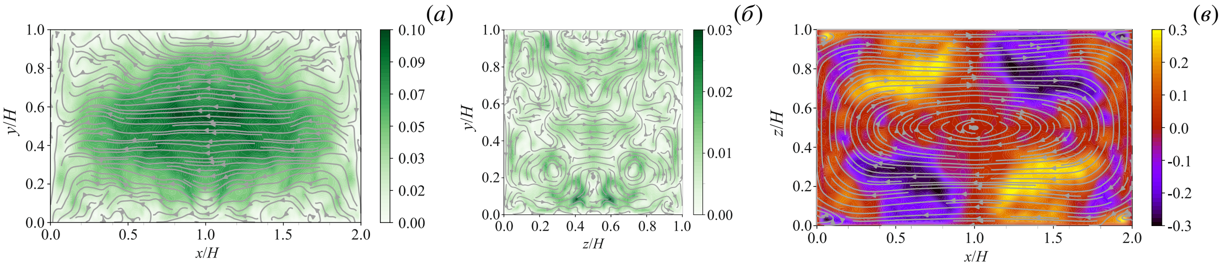

Рис. 8. Линии тока поля скорости моды $n=3$ в трех ортогональных плоскостях (по аналогии с Рис. 6)

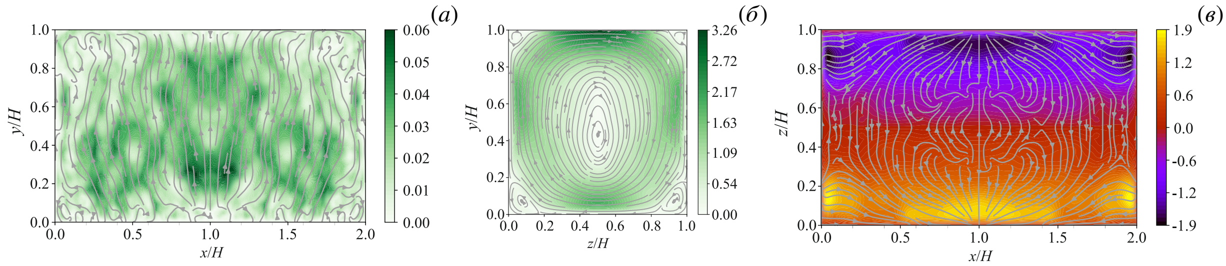

Рис. 9. Линии тока поля скорости моды $n=4$ в трех ортогональных плоскостях (по аналогии с Рис. 6)

Вариации значений амплитуд первой и второй собственных мод представлены на рисунке 10*а*. Несмотря на близкие значения их энергий, поведение этих мод во времени существенно отличается. Амплитуды обеих мод колеблются относительно устойчивых средних значений $\langle a_1\rangle_t=\sqrt{\lambda_1}$, $\langle a_2\rangle_t=\sqrt{\lambda_2}$, однако среднеквадратичная величина амплитуды второй моды в 5.4 раза больше, чем первой. Коэффициенты $a_3(t)$ и $a_4(t)$ коррелируют, соответственно, с L_y и L_x (см. Рис. 10*б*), поскольку третья и четвертая мода представляют собой крупномасштабные вихри, оси которых ориентированы вдоль осей y, x системы координат.

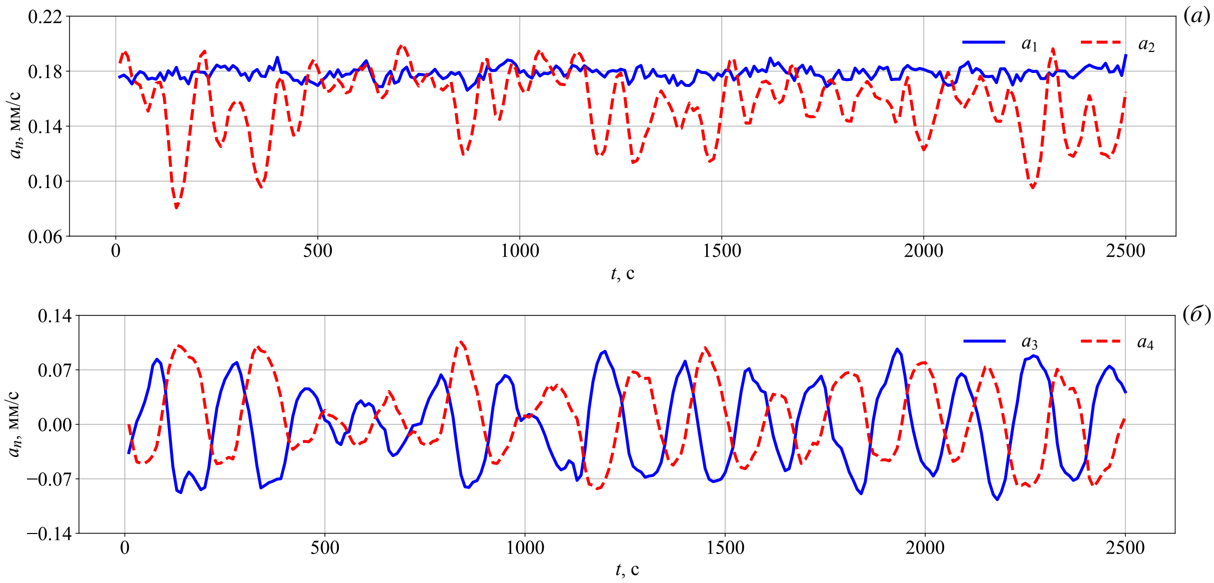

Рис. 10. Временная эволюция амплитуд первых четырех собственных мод: a_1 – сплошная линия, a_2 – штриховая линия (*а*); a_3 – сплошная линия, a_4 – штриховая линия (*б*)

4. Маломодовая модель

Полученные результаты POD анализа позволяют описать динамику КТ небольшим количеством переменных, которые в сумме содержат основную часть кинетической и тепловой энергии. При построении амплитудных уравнений используется метод Галеркина, согласно которому (1) проецируется на пространственные моды. Тогда для коэффициента $a_n(t)$ нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение имеет следующий общий вид:

$$\frac{da_n}{dt}=\left(L^b_{nm}+L^d_{nm}\right)a_m+Q_{nmp}a_m a_p+T_n, \tag{4}$$

где T_n — дополнительное слагаемое, которое необходимо для замыкания системы уравнений маломодовой модели. Компоненты L^b_{nm}, L^d_{nm}, Q_{nmp} характеризуют вклады силы Архимеда, вязких и нелинейных членов уравнения (1):

$$L^b_{nm}=\frac{g\beta}{\gamma}\int\varphi^{(m)}_\theta\delta_{i2}\varphi^{(n)}_i d\mathbf{r},$$

$$L^d_{nm}=\int\left[\nu\frac{\partial^2\varphi^{(m)}_i}{\partial x_j\partial x_j}\varphi^{(n)}_i+\chi\frac{\partial^2\varphi^{(m)}_\theta}{\partial x_j\partial x_j}\varphi^{(n)}_\theta\right]d\mathbf{r},$$

$$Q_{nmp}=-\int\left[\frac{\partial\left(\varphi^{(p)}_j\varphi^{(m)}_i\right)}{\partial x_j}\varphi^{(n)}_i+\frac{\partial\left(\varphi^{(p)}_j\varphi^{(m)}_\theta\right)}{\partial x_j}\varphi^{(n)}_\theta\right]d\mathbf{r},$$

где $\varphi_\theta^{(n)}$ — собственная пространственная мода поля температуры. Стоит отметить, что при выводе уравнения (4) слагаемое с давлением отсутствует в силу равенства:

$$\int\limits_{\Omega} \nabla p \cdot \boldsymbol{\varphi}_u^{(n)} d\mathbf{r} = -\int\limits_{\Omega} p \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}_u^{(n)}) d\mathbf{r} + \oint\limits_{S} p \left(\boldsymbol{\varphi}_u^{(n)} \cdot \mathbf{n} \right) dS = 0. \tag{5}$$

Два слагаемых в выражении (5) равны нулю, поскольку собственные моды сохраняют свойства бездивергентности в несжимаемом течении и для скорости выполняются граничные условия непротекания. Матрица коэффициентов L_{nm}^b и L_{nm}^d имеет диагональный вид (см. Рис. 11). Все значения коэффициентов в матрице L_{nm}^b положительны, что согласуется с тем, что сила Архимеда является источником движения. Характерно, что наибольшие значения приходятся на вторую и четвертую моды, которые отвечают за перенос тепла между верхней и нижней границами. Вклад третей моды в значения L_{nm}^b практически нулевой, поскольку данная мода слабо коррелирует с наложенным вертикальным градиентом температуры, поддерживающим движение среды. На рисунке 12 представлены коэффициенты, отвечающие за нелинейные слагаемые и отражающие связь между различными модами.

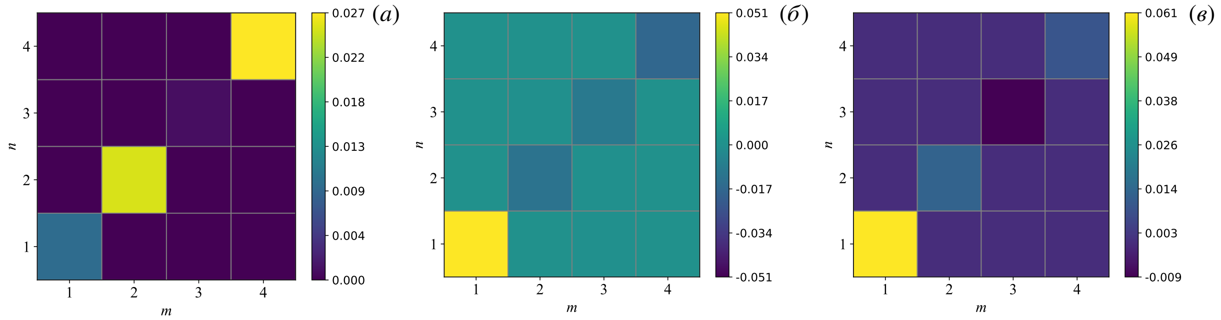

Рис. 11. Матрица коэффициентов: L_{nm}^b (*а*), L_{nm}^d (*б*), $L_{nm}^b + L_{nm}^d$ (*в*)

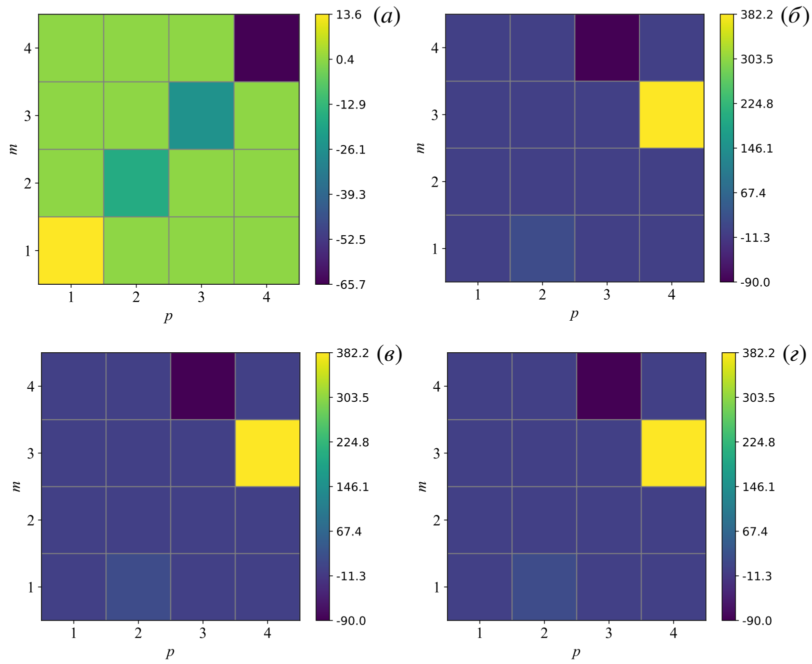

Рис. 12. Матрица нелинейных коэффициентов: Q_{1mp} (*а*), Q_{2mp} (*б*), Q_{3mp}, (*в*), Q_{4mp} (*г*)

Амплитуда первой моды практически не меняется (см. Рис. 10*а*) и может считаться постоянной. В этом случае ее вклад в динамику второй, третьей и четвертой мод становится линейным. Поэтому система обыкновенных дифференциальных уравнений модели с минимальным числом переменных и минимальным набором слагаемых принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{a}_2}{dt} &= (L_{22}^b + L_{22}^d)\tilde{a}_2 + (Q_{234} + Q_{243})\tilde{a}_3\tilde{a}_4 - \alpha_{22}\tilde{a}_2^3, \\ \frac{d\tilde{a}_3}{dt} &= (Q_{324} + Q_{342})\tilde{a}_2\tilde{a}_4, \\ \frac{d\tilde{a}_4}{dt} &= (Q_{423} + Q_{432})\tilde{a}_2\tilde{a}_3, \end{aligned} \tag{6}$$

где $L^b_{22} = 0.025$, $L^d_{22} = -0.012$, $Q_{234} = 382.15$, $Q_{243} = -89.98$, $Q_{324} = -381.91$, $Q_{342} = 60.30$, $Q_{423} = 90.10$ и $Q_{432} = -59.92$. Во-первых, следует отметить, что из всех слагаемых выражения (4) оставлены только три амплитуды: $\tilde{a}_2$, $\tilde{a}_3$ и $\tilde{a}_4$. Такой выбор сделан для того, чтобы обеспечить основной энергетический баланс. Во-вторых, замыкание, описывающее турбулентную диссипацию и включающее линейные и кубические слагаемые в общем виде [16]

$$T_n(t) = \left(L^t_{nm} - \alpha_{nm} \sum_{p>1} \tilde{a}^2_p(t) \right) \tilde{a}_m(t),$$

ограничено доминирующим вкладом кубического слагаемого $\tilde{a}^3_2$.

Результаты численного решения системы (6) представлены на рисунке 13. Построенная модель воспроизводит свойства крупномасштабного течения, а именно низкочастотные колебания собственных мод. При выборе $\alpha_{22} = 10^5$ значения периодов хорошо согласуются с установленными путем численного моделирования (см. Рис. 14*а*). Также наблюдается запаздывание $\tilde{a}_4$ относительно $\tilde{a}_3$. Однако модель (6) дает фазовый сдвиг между амплитудами $\tilde{a}_3$ и $\tilde{a}_4$, равный $2\varphi_0$ (см. Рис. 14*б*), что в два раза больше, чем результаты прямого численного моделирования и моделирования методом крупных вихрей. Количественного соответствия можно добиться, если не исключать из рассмотрения слагаемые $\tilde{a}_3$ и $\tilde{a}_4$. Но это не входит в задачу настоящего исследования.

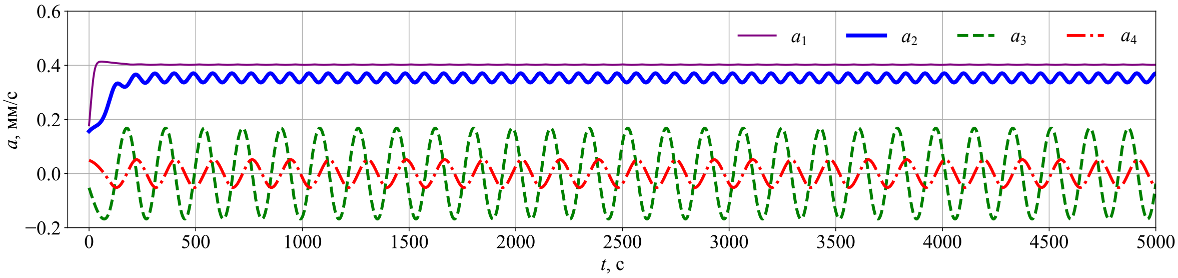

Рис. 13. Временная эволюция амплитуд собственных мод, полученная из решения редуцированной системы ОДУ: $\tilde{a}_1$ – сплошная тонкая линия, $\tilde{a}_2$ – сплошная жирная линия, $\tilde{a}_3$ – пунктирная линия, $\tilde{a}_4$ – штриховая линия

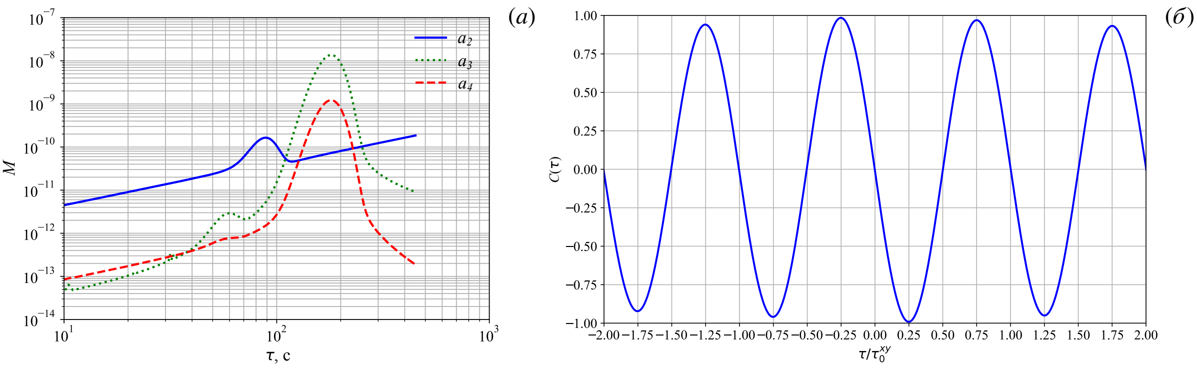

Рис. 14. Вейвлет-спектры пульсаций амплитуд собственных мод (*а*): $\tilde{a}_2$ – сплошная линия, $\tilde{a}_3$ – пунктирная линия, $\tilde{a}_4$ – штриховая линия; взаимная корреляционная функция временных рядов $\tilde{a}_3$ и $\tilde{a}_4$ (*б*)

Используя решение для $\tilde{a}_2$, $\tilde{a}_3$ и $\tilde{a}_4$, можно найти $\tilde{a}_1$ из уравнения:

$$\frac{d\tilde{a}_1}{dt} = \left(L^b_{11} + L^d_{11}\right)\tilde{a}_1 + Q_{111}\tilde{a}^2_1 + Q_{122}\tilde{a}^2_2 + Q_{133}\tilde{a}^2_3 + Q_{144}\tilde{a}^2_4 - \alpha_{11}\tilde{a}^3_1, \tag{7}$$

где $L^b_{11} = 9.43 \cdot 10^{-3}$, $L^d_{11} = 5.15 \cdot 10^{-2}$, $Q_{111} = 13.58$, $Q_{122} = -17.18$, $Q_{133} = -25.32$, $Q_{144} = -65.75$ и $\alpha_{11} = 3.7 \cdot 10^5$. Численное решение $\tilde{a}_1$, которое согласуется с ранее сделанным допущением стационарности первой моды, показано на рисунке 13 (тонкая линия).

5. Заключение

Проведено численное моделирование конвективной турбулентности в прямоугольной полости с асимметричными граничными условиями для скорости и температуры на горизонтальных границах. Расчеты выполнены для развитых режимов турбулентной конвекции при числе Прандтля $\mathrm{Pr} = 6.12$ и числе Рэлея $\mathrm{Ra} = 1.1 \cdot 10^8$. Число Рэлея в данных расчетах на порядок больше, чем в работе [10]. Подход LES позволил существенно улучшить временную статистику данных. Анализ полного углового момента дал понимание структуры и динамики КТ. Обнаружено, что на фоне КМЦ в полости присутствуют квазипериодические по времени крупномасштабные вихревые структуры с ненулевыми значениями компонент L_x и L_y углового момента, сравнимыми по величине с компонентой L_z.

Собственное ортогональное разложение, примененное к расширенному набору совместных полей скорости и температуры, открыло возможность представить структуру КТ в виде суперпозиции четырех энергонесущих мод. Вклад этих мод в турбулентную энергию течения составляет 83%. Первая собственная мода выделяется по своей структуре. Она выглядит как вихревое кольцо, прижатое к верхней границе. Эту моду можно также считать частью КМЦ, при которой жидкость поднимается в центре ячейки и опускается вдоль боковых границ. Остальные три моды имеют характерную структуру в виде квазидвумерных крупномасштабных вихрей с взаимно перпендикулярными направлениями осей вращения, параллельными осям системы координат, и каждый из этих вихрей вносит вклад только в одну компоненту углового момента. Такая четкая структура первых четырех собственных мод получена благодаря учету симметрии задачи.

Применение метода Галеркина совместно с собственным ортогональным разложением позволило построить маломодовую модель КМЦ, включающую лишь три моды, имеющие влияние на динамику КТ. Маломодовая модель качественно воспроизводит все основные свойства КТ, наблюдаемые в численных решениях полной задачи. С теоретической точки зрения было важно подтвердить, что периоды колебаний L_x и L_y являются удвоенными периодами колебаний L_z, отвечающими за интенсивность КМЦ. С физической точки зрения это можно интерпретировать как слабо нелинейное триадное взаимодействие крупномасштабных мод. С помощью разложения по фурье-модам выделен основной механизм сложного конвективного процесса [17]. В рассмотренной задаче собственные моды $\mathbf{u}_2^*$, $\mathbf{u}_3^*$ и $\mathbf{u}_4^*$ вносят основной вклад в фурье-моды с волновыми векторами $\mathbf{k}_2=(1,-2,0)$, $\mathbf{k}_3=(-1,0,2)$ и $\mathbf{k}_4=(0,2,-2)$, образующими триаду $\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4=0$, в пределах которой моды обмениваются энергией и спиральностью.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-72-20067. Расчеты осуществлены на оборудовании Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

Литература

1. *Bodenschatz E.*, *Pesch W.*, *Ahlers G.* Recent Developments in Rayleigh-Bénard Convection // Annual Review of Fluid Mechanics. 2000. Vol. 32. P. 709–778. DOI: `10.1146/annurev.fluid.32.1.709`
2. *Ahlers G.*, *Grossmann S.*, *Lohse D.* Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection // Reviews of Modern Physics. 2009. Vol. 81, no. 2. P. 503–537. DOI: `10.1103/RevModPhys.81.503`
3. *Lohse D.*, *Xia K.-Q.* Small-Scale Properties of Turbulent Rayleigh-Bénard Convection // Annual Review of Fluid Mechanics. 2010. Vol. 42. P. 335–364. DOI: `10.1146/annurev.fluid.010908.165152`
4. *Asulin A.*, *Tkachenko E.*, *Kleeorin N.*, *Levy A.*, *Rogachevskii I.* Large-scale semi-organized rolls in a sheared convective turbulence: Mean-field simulations // Physics of Fluids. 2024. Vol. 36, no. 7. 075131. DOI: `10.1063/5.0214459`
5. *Vasiliev A.*, *Frick P.*, *Kumar A.*, *Stepanov R.*, *Sukhanovskii A.*, *Verma M.* Transient flows and reorientations of large-scale convection in a cubic cell // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2019. Vol. 108. 104319. DOI: `10.1016/j.icheatmasstransfer.2019.104319`
6. *Maojing H.*, *Xiaozhou H.* Heat transport in horizontally periodic and confined Rayleigh-Bénard convection with no-slip and free-slip plates // Theoretical and Applied Mechanics Letters. 2022. Vol. 12, no. 2. 100330. DOI: `10.1016/j.taml.2022.100330`
7. *Hay W.A.*, *Papalexandris M.V.* Numerical simulations of turbulent thermal convection with a free-slip upper boundary // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2019. Vol. 475, no. 2232. 20190601. DOI: `10.1098/rspa.2019.0601`
8. *Marichal J.*, *Papalexandris M.V.* On the dynamics of the large scale circulation in turbulent convection with a free-slip upper boundary // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2022. Vol. 183. 122220. DOI: `10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122220`
9. *Васильев А.Ю.*, *Сухановский А.Н.*, *Фрик П.Г.* Влияние горизонтальных теплоизолирующих пластин на структуру конвективных течений и теплоперенос в замкнутой полости // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 15, № 1. С. 83–97. DOI: `10.7242/1999-6691/2022.15.1.7`
10. *Soucasse L.*, *Podvin B.*, *Rivière P.*, *Soufiani A.* Proper orthogonal decomposition analysis and modelling of large-scale flow reorientations in a cubic Rayleigh-Bénard cell // Journal of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 881. P. 23–50. DOI: `10.1017/jfm.2019.746`
11. *Shraiman B.I.*, *Siggia E.D.* Heat transport in high-Rayleigh-number convection // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 42, issue 6. P. 3650–3653. DOI: `10.1103/PhysRevA.42.3650`
12. *Vasiliev A.*, *Sukhanovskii A.*, *Frick P.*, *Budnikov A.*, *Fomichev V.*, *Bolshukhin M.*, *Romanov R.* High Rayleigh number convection in a cubic cell with adiabatic sidewalls // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 102. P. 201–212. DOI: `10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.015`
13. *Greenshields C.*, *Weller H.* Notes on Computational Fluid Dynamics: General Principles. Reading, UK: CFD Direct Ltd, 2022

ISSN: 1999-6691, e-ISSN: 2782-3709 DOI: http://doi.org/10.7242/1999-6691/2025.18.1.8

14. *Berkooz G.*, *Holmes P.*, *Lumley J.L.* The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows // Annual Review of Fluid Mechanics. 1993. Vol. 25, Volume 25, 1993. P. 539–575. DOI: 10.1146/annurev.fl.25.010193.002543

15. *Sirovich L.* Turbulence and the dynamic of coherent structures. Part I: coherent structures // Quarterly of Applied Mathematics. 1987. Vol. 45. P. 561–571. DOI: 10.1090/qam/910462

16. *Podvin B.*, *Sergent A.* A large-scale investigation of wind reversal in a square Rayleigh-Bénard cell // Journal of Fluid Mechanics. 2015. Vol. 766. P. 172–201. DOI: 10.1017/jfm.2015.15

17. *Ингель Л.Х.* О возмущениях горизонтального стратифицированного течения, обусловленных неоднородным объемным тепловыделением // Вычислительная механика сплошных сред. 2024. Т. 17, № 2. С. 160–168. DOI: 10.7242/1999-6691/2024.17.2.15

Сведения об авторах:

Степанов Родион Александрович (корр.), дфмн, внс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: rodion@icmm.ru; ORCID: 0000-0001-8098-0720

Васильев Андрей Юрьевич, кфмн, снс, ИМСС УрО РАН; e-mail: vasiliev.a@icmm.ru; ORCID: 0000-0002-3517-2553

Research article

A low-dimentsional model of large-scale convective flow in an elongated rectangular cavity

R.A. Stepanov, A.Yu. Vasiliev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

The work focuses on studying the large-scale circulation (LSC) of turbulent convective flow in the case of a free upper boundary. LSC is characterized by complex temporal dynamics and significantly influences heat and mass transfer processes. A large number of studies have analyzed LSC in cylindrical cavities, detailing the features of its formation and various changes in the direction of its rotation. The novelty of this work lies in considering turbulent convective flow in an elongated rectangular domain, where the lower boundary is uniformly heated, and the upper boundary is free, allowing for quasi-stationary heat outflow. Numerical simulations revealed the formation of LSC with pronounced oscillatory behavior in three planes. Direct numerical simulations and large-eddy simulations performed using the OpenFOAM package demonstrated similar LSC behavior. Using a proper orthogonal decomposition, the most energy-containing modes were identified, each of which was found to contribute primarily to the corresponding projection of the angular momentum of the LSC. The evolution of these modes is described by a system of ordinary differential equations derived by projecting the governing equations of thermogravitational convection onto the basis of spatial modes using the Galerkin approach. As a result, a low-dimensional nonlinear model was formulated, including only three modes and capable of reproducing the observed LSC oscillations. From a physical perspective, the observed LSC oscillations can be interpreted as weakly nonlinear triadic interactions of large-scale modes.

Keywords: Rayleigh–Benard convection, numerical modelling, principal orthogonal decomposition, low-dimentional model

Received: 14.11.2024 / *Published online*: 10.04.2025

References

1. *Bodenschatz E.*, *Pesch W.*, *Ahlers G.* Recent Developments in Rayleigh-Bénard Convection. Annual Review of Fluid Mechanics. 2000. Vol. 32. P. 709–778. DOI: 10.1146/annurev.fluid.32.1.709

2. *Ahlers G.*, *Grossmann S.*, *Lohse D.* Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection. Reviews of Modern Physics. 2009. Vol. 81, no. 2. P. 503–537.

3. *Lohse D.*, *Xia K.-Q.* Small-Scale Properties of Turbulent Rayleigh-Bénard Convection. Annual Review of Fluid Mechanics. 2010. Vol. 42. P. 335–364. DOI: 10.1146/annurev.fluid.010908.165152

4. *Asulin A.*, *Tkachenko E.*, *Kleeorin N.*, *Levy A.*, *Rogachevskii I.* Large-scale semi-organized rolls in a sheared convective turbulence: Mean-field simulations. Physics of Fluids. 2024. Vol. 36, no. 7. 075131. DOI: 10.1063/5.0214459

5. *Vasiliev A.*, *Frick P.*, *Kumar A.*, *Stepanov R.*, *Sukhanovskii A.*, *Verma M.* Transient flows and reorientations of large-scale convection in a cubic cell. International Communications in Heat and Mass Transfer. 2019. Vol. 108. 104319. DOI: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2019.104319

6. *Maojing H.*, *Xiaozhou H.* Heat transport in horizontally periodic and confined Rayleigh-Bénard convection with no-slip and free-slip plates. Theoretical and Applied Mechanics Letters. 2022. Vol. 12, no. 2. 100330. DOI: 10.1016/j.taml.2022.100330

7. *Hay W.A.*, *Papalexandris M.V.* Numerical simulations of turbulent thermal convection with a free-slip upper boundary. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2019. Vol. 475, no. 2232. 20190601. DOI: 10.1098/rspa.2019.0601

8. *Marichal J.*, *Papalexandris M.V.* On the dynamics of the large scale circulation in turbulent convection with a free-slip upper boundary. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2022. Vol. 183. 122220. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.122220
9. *Vasiliev A.Y.*, *Sukhanovskii A.N.*, *Frick P.G.* Influence of horizontal heat-insulating plates on the structure of convective flows and heat transfer in a closed cavity. Computational Continuum Mechanics. 2023. Vol. 15, no. 1. P. 83–97. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.1.7
10. *Soucasse L.*, *Podvin B.*, *Rivière P.*, *Soufiani A.* Proper orthogonal decomposition analysis and modelling of large-scale flow reorientations in a cubic Rayleigh-Bénard cell. Journal of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 881. P. 23–50. DOI: 10.1017/jfm.2019.746
11. *Shraiman B.I.*, *Siggia E.D.* Heat transport in high-Rayleigh-number convection. Phys. Rev. A. 1990. Vol. 42, issue 6. P. 3650–3653. DOI: 10.1103/PhysRevA.42.3650
12. *Vasiliev A.*, *Sukhanovskii A.*, *Frick P.*, *Budnikov A.*, *Fomichev V.*, *Bolshukhin M.*, *Romanov R.* High Rayleigh number convection in a cubic cell with adiabatic sidewalls. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 102. P. 201–212. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.015
13. *Greenshields C.*, *Weller H.* Notes on Computational Fluid Dynamics: General Principles. Reading, UK: CFD Direct Ltd, 2022
14. *Berkooz G.*, *Holmes P.*, *Lumley J.L.* The Proper Orthogonal Decomposition in the Analysis of Turbulent Flows. Annual Review of Fluid Mechanics. 1993. Vol. 25, Volume 25, 1993. P. 539–575. DOI: 10.1146/annurev.fl.25.010193.002543
15. *Sirovich L.* Turbulence and the dynamic of coherent structures. Part I: coherent structures. Quarterly of Applied Mathematics. 1987. Vol. 45. P. 561–571. DOI: 10.1090/qam/910462
16. *Podvin B.*, *Sergent A.* A large-scale investigation of wind reversal in a square Rayleigh-Bénard cell. Journal of Fluid Mechanics. 2015. Vol. 766. P. 172–201. DOI: 10.1017/jfm.2015.15
17. *Ingel L.K.* On perturbations of a horizontal stratified flow due to inhomogeneous volumetric heat release. Computational Continuum Mechanics. 2024. Vol. 17, no. 2. P. 160–168. DOI: 10.7242/1999-6691/2024.17.2.15