

Научная статья

Устойчивость слоя жидкости во вращающемся реакторе Хеле–Шоу при конкуренции эффектов плавучести, генерируемых силами инерции

В.Ю. Уточкин, Д.А. Брацун

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

Технологии, основанные на процессах тепло- и массопереноса во вращающейся ячейке Хеле–Шоу, могут эффективно использоваться, в частности, при проектировании микрожидкостных устройств и маломасштабных химических реакторов проточного типа. Квазидвумерная конструкция позволяет регистрировать поле плотности оптическими методами, а вращение делает возможным управление этим полем с помощью пространственно-распределенных инерционных сил. Как известно, в рамках стандартной математической модели в пределе бесконечно тонкого слоя сила Кориолиса исчезает. Однако экспериментальные наблюдения за течением жидкости во вращающейся ячейке Хеле–Шоу указывают на то, что эффект Кориолиса проявляется в полной мере. Корректный вывод уравнения движения в приближении Хеле–Шоу и Буссинеска приводит к появлению слагаемого, отвечающего за плавучесть элемента среды, вызываемой силой Кориолиса. Для изучения нового эффекта в данной работе рассматривается задача конвективной устойчивости жидкости с внутренней генерацией компонента переноса, в качестве которой может выступать как концентрация растворенного вещества, так и температура среды. Исследование системы включает: нахождение основного состояния и линейный анализ его устойчивости; анализ слабо нелинейных решений вблизи точки первой бифуркации; прямое численное моделирование нелинейных режимов конвекции; оценку общих свойств спектра возмущений и ветвления решений вблизи бифуркации равновесия. Для определения характера ветвления привлекается метод многих временных масштабов. Слабонелинейный анализ выявил, что при достижении числом Рэлея критического значения стационарное равновесие жидкости сменяется колебательной конвекцией. Для получения полной картины нелинейной динамики используется метод конечных разностей. Показано, что сила Кориолиса стабилизирует основное состояние системы. Что касается сильно нелинейных режимов конвекции, то плавучесть Кориолиса усложняет сценарий перехода к хаотической конвекции. Продемонстрировано, что переход сопровождается серией бифуркаций предельных циклов и торов, финальным разрушением 2-D или 3-D торов, появлением странных аттракторов тороидального типа. Построена карта устойчивости на плоскости параметров «число Рэлея–число Экмана».

Ключевые слова: вращающаяся ячейка Хеле–Шоу, сила Кориолиса, приближение Буссинеска, конвективная неустойчивость

Получение: 02.09.2024 / *Публикация онлайн:* 10.04.2025

УДК 532.5

1. Введение

Переменное инерционное поле является эффективным механизмом управления тепло- и массопереносом в жидкости. В отличие от статического поля тяжести, оно может контролироваться в эксперименте путем изменения управляющего параметра. Для вращающихся систем таким параметром является угловая скорость. Центрифугирование оказывает пространственно-неоднородное воздействие на жидкость за счет центробежной и кориолисовой сил инерции. Относительный вклад двух воздействий в динамику жидкой среды описывается числом Россби, величина которого во многом определяет классификацию задачи вращения [1]. Еще одним важным критерием служит взаимная ориентация угловой скорости и градиента плотности среды. Если эти векторы коллинеарны, то возникает задача неустойчивости Рэлея–Бенара в тонком слое, вращающемся вокруг перпендикулярной к нему оси [2–4]. Этот случай соответствует малому числу Россби и существенному влиянию на течение силы Кориолиса. Данная формулировка встречается во многих работах, поскольку является хорошим приближением для моделирования приполярной области атмосферы [1]. Основным стимулом для решения таких задач — желание понять влияние планетарного вращения на атмосферные явления [5–7]. Как показано в [2], в рамках линейной теории устойчивости вращение приводит к стабилизации равновесия жидкости и увеличивает порог возникновения конвекции.

Когда ось вращения и градиент плотности перпендикулярны друг другу, формулируется задача центробежной конвекции [8]. Если при этом центробежная сила действует поперек слоя жидкости (например, при вращении тонкого цилиндрического слоя вокруг оси симметрии), то фактически возникает задача Рэлея–Бенара. В случае слоя большего радиуса пространственной неоднородностью центробежного воздействия можно пренебречь, и указанные задачи становятся идентичными. Эта постановка также широко представлена в литературе и связана с изучением атмосферных явлений в экваториальных зонах планет [6].

Совершенно иная ситуация возникает, если и силы инерции, и градиент плотности направлены вдоль тонкого слоя. Долгое время такая конфигурация не привлекала внимания, поскольку не имела прямых гео- и астрофизических приложений. Однако в последние годы она нашла свое применение в задачах ряда новых научных направлений. Например, к этим задачам относятся транспорт питательных веществ в биореакторе, где плоская геометрия используется для управления процессом фотосинтеза с помощью однородного освещения клеточной массы через стенки кюветы [9–11], центрифугирование растворов драгоценных металлов с целью очистки [12]. Обзор разнообразных вращающихся платформ, применяемых в технологиях биомедицины, приведен в [13, 14]. Влияние вращательной и кориолисовой сил инерции на смешение растворов в неравномерно вращающейся дискообразной камере исследовалось в работе [15] в контексте биохимических приложений. В [16] рассматривались

течения в U-образном микроканале, помещенном во вращающуюся полость. В перечисленных работах отмечается, что генерация силой Кориолиса вторичных вихревых структур приводит к повышению эффективности смешения. Хемоконвективные потоки, возникающие в плоском реакторе Хеле–Шоу, экспериментально и теоретически исследовались в работах [17–21]. Разработка микрожидкостных устройств и микросмесителей непрерывного действия на основе геометрии Хеле–Шоу [22] входит в государственный перечень новых научных направлений. Плоская геометрия кюветы дает возможность использовать оптические методы наблюдений (например, интерферометрию Физо) для измерения и контроля концентрационных полей [23, 24]. Таким образом, задача возбуждения конвекции при наличии вращения зачастую решается в приближении плоского слоя.

Как известно, в приближении бесконечно тонкого слоя число Россби стремится к бесконечности, что на первый взгляд позволяет пренебречь силой Кориолиса в уравнении движения [25]. Однако экспериментальные данные, недавно полученные в [26], говорят, что в ячейке Хеле–Шоу эффект Кориолиса проявляется очень ярко. По-видимому, дело в том, насколько сильные неоднородности возникают в жидкости. Если среда однородная, то вывод о незначительности силы Кориолиса справедлив. Однако, если неоднородности среды вследствие действия тепловых и концентрационных полей и возмущения плотности достаточно велики, то ситуация требует более аккуратного вывода разрешающих уравнений. Следует упомянуть серию работ, в которых исследовалось влияние силы Кориолиса на поведение изотермической двухфазной жидкости [27–29]. Так как здесь вариации плотности связаны только с формой межфазной поверхности, в фокусе математической модели находятся ее деформации. Из-за больших деформаций поверхности автор работы [27] принудительно и без строгого обоснования ввел в систему уравнений эффект Кориолиса. Позднее такой же прием обсуждался в [28], где показано, что центробежная сила приводит к вытягиванию центральной капли в разных направлениях, в результате чего развивается неустойчивость в виде пальцевидных отростков. Сила Кориолиса отвечает за азимутальный снос пальцев в противоположном вращению направлении.

Поскольку известные из литературы результаты экспериментов и численного моделирования несмешивающихся жидкостей во вращающейся ячейке Хеле–Шоу демонстрируют определенные расхождения, в работах [30–33] впервые предложено рассмотреть центрифугирование жидкостей, разделенных диффузионной поверхностью. Авторы позиционируют свою математическую модель как инструмент для улучшения понимания несмешивающихся систем. Они обнаружили, что азимутальный угол сноса пальцев линейно зависит от величины силы Кориолиса. Однако следует отметить, что процедура вывода уравнений в [30–33] не представлена, и слагаемое Буссинеска для силы Кориолиса введено без обоснования. Недавняя работа [34] посвящена задаче тепловой конвекции двух смешивающихся жидкостей, которые помещены в равномерно вращающуюся ячейку Хеле–Шоу в форме тонкого кольца. Между внешней и внутренней границами кольца поддерживается фиксированная разность температур. Анализ устойчивости основного состояния продемонстрировал, что в данных условиях существует два режима конвекции: колебательный одновихревой и стационарный двухвихревой. Авторы показали, что увеличение силы Кориолиса провоцирует переход к колебательному режиму. Последнее обстоятельство хорошо согласуется с тем фактом, что спектр неустойчивости Рэлея–Бенара в условиях вращения обогащается также колебательными возмущениями [2]. В задаче из [34] внимание впервые фокусируется на влиянии температурного поля. Однако неодносвязная область не позволяет описать процессы в области, примыкающей к оси вращения. Последняя интересна тем, что сила Кориолиса может превалировать здесь над центробежной силой. Кроме того, центральная область важна в многочисленных технологических приложениях.

В данной работе выводится уравнение движения для случая конвективного течения жидкости, развивающегося в тонкой цилиндрической области, которая равномерно вращается вокруг своей оси симметрии. Полученное в приближениях Буссинеска и Хеле–Шоу уравнение включает слагаемое подъемной силы, обусловленное эффектом Кориолиса. Формулируются условия механического равновесия и исследуется его устойчивость относительно малых возмущений. Поведение системы вблизи бифуркации основного состояния изучается с использованием метода многих временных масштабов. Полная нелинейная динамика системы определяется численно, методом конечных разностей. Статья структурирована следующим образом: в разделе 2 формулируется задача и обсуждаются все аспекты предлагаемой математической модели. Линейный анализ устойчивости основного состояния приводится в разделе 3. В разделе 4 выполняется слабонелинейный анализ вблизи первой бифуркации. В разделе 5 детально описываются численный метод решения и результаты прямого численного моделирования. Итоги исследования представляются в разделе Выводы.

2. Математическая формулировка задачи

Рассмотрим движение неоднородной жидкости (раствора) с динамической вязкостью η плотностью ρ , заполняющей цилиндрическую ячейку Хеле–Шоу радиусом R и высотой $h \ll R$ (Рис. 1). Ячейка равномерно вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$. Учитывая геометрию ячейки, удобнее ввести цилиндрические координаты и представить полное поле скорости \mathbf{v}_0 в виде двухкомпонентной скорости $\mathbf{v}_{||} = (v_r, v_\varphi)$ в плоскости слоя и ортогональной составляющей v_z . Во вращающейся системе отсчета уравнения движения имеют вид:

$$\nabla_{||} \cdot \mathbf{v}_{||} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{||}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{||} \cdot \nabla_{||}) \mathbf{v}_{||} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}_{||}}{\partial z} \right) = -\nabla_{||} \hat{p} + \eta \nabla_{||}^2 \mathbf{v}_{||} + \eta \frac{\partial^2 \mathbf{v}_{||}}{\partial z^2} + 2\rho\omega (\mathbf{v}_{||} \times \mathbf{e}_z) - \rho\omega^2 \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}), \quad (2)$$

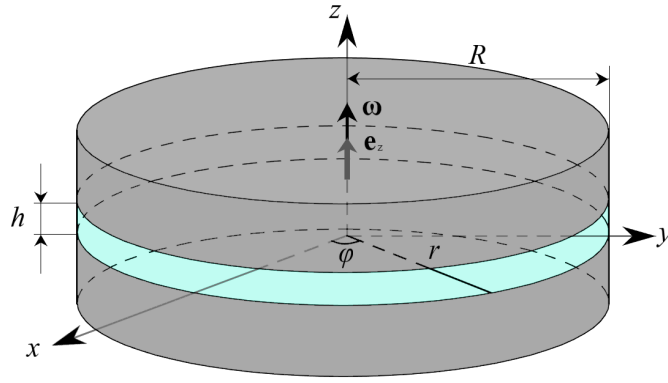


Рис. 1. Схематическое изображение ячейки Хеле–Шоу в цилиндрических координатах; темный оттенок – твердые пластины, светлый – жидкость (раствор)

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v}_{||} \cdot \nabla_{||}) v_z + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \eta \nabla_{||}^2 v_z + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}, \quad (3)$$

где \hat{p} — давление, $\nabla_{||} = (\partial/\partial r, \partial/(r\partial\varphi))$ — градиент в полярных координатах.

Введем компонент переноса A , обуславливающий неоднородность среды по плотности. Уравнение для скалярного поля A запишем как

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A = D \nabla^2 A + Q, \quad (4)$$

где D — коэффициент диффузии. Поле A может представлять собой либо температуру среды, либо концентрацию растворенного вещества, Q — это плотность источников, соответственно, тепла или вещества. Например, при химической реакции нулевого порядка могут присутствовать оба этих источника. Далее считаем, что значение Q постоянно и, в целях упрощения, A будем называть концентрацией.

В предположении, что жидкость, заполняющая ячейку, прилипает к образующим ее твердым стенкам, граничные условия для скорости и концентрации имеют вид:

$$z = \pm \frac{h}{2}: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$r = R: \quad \mathbf{v} = 0, \quad A = 0. \quad (6)$$

Для замыкания дополним систему (1)–(6) уравнением состояния, связывающим плотность жидкости с другими термодинамическими характеристиками. Исходя из того, что жидкий растворитель несжимаем, можно пренебречь зависимостью плотности раствора в ячейке от давления и рассматривать плотность как функцию только концентрации. Если связь плотности с концентрацией слабая, то справедливо приближение Буссинеска, и в разложении плотности в ряд по степеням концентрации можно отбросить все члены выше первого порядка. Таким образом, получаем:

$$\rho(A) = \rho_0(1 + \beta A), \quad (7)$$

где ρ_0 — плотность растворителя, β — коэффициент объемного расширения раствора.

Подставим (7) в уравнения движения (1)–(3) и учтем неоднородность плотности только в слагаемых, ответственных за объемные силы:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{||}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{||} \cdot \nabla_{||}) \mathbf{v}_{||} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}_{||}}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \nabla_{||} p^* + \nu \nabla_{||}^2 \mathbf{v}_{||} + \nu \frac{\partial^2 \mathbf{v}_{||}}{\partial z^2} + 2\omega(1 + \beta A)(\mathbf{v}_{||} \times \mathbf{e}_z) - \beta A \omega^2 \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}), \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\mathbf{v}_{||} \cdot \nabla_{||}) v_z + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \nu \nabla_{||}^2 v_z + \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}, \quad (9)$$

где $\nu = \eta/\rho_0$ — кинематическая вязкость растворителя, центробежная сила внесена под знак градиента:

$$\nabla p^* = \nabla \hat{p} - \rho_0 \omega^2 \mathbf{r}.$$

Поскольку высота ячейки h достаточно мала, то приемлемо приближение Хеле–Шоу и течение можно считать двумерным. Принимая во внимание граничное условие (5), аппроксимируем скорость и концентрацию следующими функциями:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{||}(r, \varphi, z, t) &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \mathbf{u}(r, \varphi, t), \\ v_z(r, \varphi, z, t) &= 0, \\ A(r, \varphi, z, t) &= C(r, \varphi, t), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{u} = (u_r, u_\varphi)$. Приближения (10) подставим в уравнения и усредним при помощи операции

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} dz.$$

Данная процедура сводит геометрию системы к двумерной, и уравнения эволюции исследуемой физической системы во времени принимают вид:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{6}{5}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p^* + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - 12 \frac{\nu}{h^2} \mathbf{u} + 2\omega(\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z) + 2\omega\beta C(\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z) + \beta C \omega^2 \mathbf{r}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C &= D \nabla^2 C + Q, \end{aligned} \quad (11)$$

где принято обозначение $\nabla \equiv \nabla_{||}$. Приведем (11) к безразмерному виду, используя для этого масштабы длины (R), скорости (D/R), времени (R^2/D), давления ($12\rho_0\nu D/h^2$) и концентрации ($\Theta \equiv \sqrt{6\nu Q/\beta h^2 \omega^2}$):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{1}{Sc} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{6}{5}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] &= -\frac{1}{\delta^2} \nabla p^* + \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\delta^2} \mathbf{u} + \sqrt{Ta}(\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z) + \beta \Theta \sqrt{Ta}(\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z) + \hat{R}_\omega C \mathbf{r}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C &= \nabla^2 C + 2\delta^2 \hat{R}_\omega. \end{aligned}$$

В получившейся системе уравнений безразмерные параметры определяются как

$$Sc = \frac{\nu}{D}, \quad \delta = \frac{h}{2\sqrt{3}R}, \quad Ta = \left(\frac{2\omega R^2}{\nu} \right)^2, \quad \hat{R}_\omega = \frac{\beta \Theta \omega^2 R^4}{\nu D}$$

и представляют собой, соответственно, число Шмидта, аспектное отношение ячейки Хеле–Шоу, число Тейлора и центробежное число Рэлея.

Обратим внимание, что в двумерной формулировке ведущее слагаемое в разложении силы Кориолиса (разложение плотности (7), умноженное на $\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z$) исключается из уравнений движения. Применяя к нему операцию взятия ротора, получаем:

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{e}_z) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{e}_z + (\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{e}_z(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0,$$

где два первых слагаемых зануляются тождественно, а два последних — в силу принятой гипотезы о двумерности течения, поскольку в данном пределе

$$\lim_{h/R \rightarrow 0} \nabla_{||} \cdot \mathbf{v}_{||} = 0.$$

Фактически это означает, что при переходе к двумерному случаю соответствующее слагаемое можно выразить как градиент некоторого скаляра и исключить путем переопределения давления (по аналогии с центробежной силой).

Таким образом, приходим к заключению, что уравнение движения может быть модифицировано для двумерных течений. Из проведенного анализа ясно, что сила Кориолиса действует тем слабее, чем меньше аспектное отношение ячейки Хеле–Шоу. В то же время приближение Буссинеска требует, чтобы в итоговом уравнении оставались слагаемые одного порядка малости [35]. При переходе же к плоской конвекции видим, что слагаемое в основном порядке разложения плотности зануляется, что требует учета следующего слагаемого, и ситуация становится аналогичной рассмотрению центробежной конвекции, ведущее слагаемое при которой оказывается потенциальным и также выпадает из рассмотрения.

Исходя из рассуждений выше, переопределим поле давления как

$$\nabla p = \nabla p^* + 2\rho_0 \omega \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z$$

и придем к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{1}{Sc} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{6}{5}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] &= -\frac{1}{\delta^2} \nabla p^* + \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\delta^2} \mathbf{u} + \beta \Theta \sqrt{Ta}(\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z) + \hat{R}_\omega C \mathbf{r}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C &= \nabla^2 C + 2\delta^2 \hat{R}_\omega, \end{aligned} \quad (12)$$

в которой уравнение движения одновременно включает плавучесть, вызванную как центробежной, так и кориолисовой силой. В дополнение к поправочному коэффициенту $6/5$ [18] в уравнение, в отличие от стандартного уравнения Навье–Стокса, вводится член, пропорциональный скорости, который можно интерпретировать как среднюю силу сопротивления, обусловленную наличием плоскостей, ограничивающих ячейку Хеле–Шоу, и который аналогичен силе Дарси в пористой среде.

При двумерном течении удобно использовать двухполювую формулировку системы (12). Функция тока Ψ в полярных координатах связана с компонентами скорости соотношениями:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Применяя к (12) операцию взятия ротора, получаем:

$$\begin{aligned} \Phi + \nabla^2 \Psi &= 0, \\ \frac{1}{Sc} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{6}{5r} J(\Phi, \Psi) \right) &= \nabla^2 \Phi - \frac{1}{\delta^2} \Phi + \frac{\hat{R}_\omega \hat{E}}{Sc} J(\Psi, C) - \hat{R}_\omega \frac{\partial C}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{r} J(C, \Psi) &= \nabla^2 C + 2\delta^2 \hat{R}_\omega, \end{aligned} \quad (13)$$

где Φ — завихренность, $\hat{E} = 4\nu/\omega R^2$ — число Экмана, представляющее собой соотношение между силами вязкого трения и Кориолиса, J — якобиан, который определяется как

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial \varphi} - \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial g}{\partial r}.$$

Примечательно, что слагаемое Кориолиса в уравнении движения (см. третье слагаемое в правой части второго уравнения (13)) по своей форме совпадает со слагаемым конвективного переноса компонента C .

Граничные условия для уравнений (13) имеют вид:

$$r = 1: \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad C = 0. \quad (14)$$

Задача (13), (14) описывает нелинейную динамику двумерных течений во вращающейся ячейке Хеле–Шоу в случае, когда инерцией жидкости пренебрегать нельзя. Предел $\delta \rightarrow 0$ сводит уравнение движения к уравнению Дарси, которое известно из теории фильтрации жидкости через пористую среду. В таком случае формулировка задачи может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{R_\omega Ek}{r} J(C, \Psi) &= \nabla^2 \Psi - R_\omega \frac{\partial C}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{r} J(C, \Psi) &= \nabla^2 C + 2R_\omega, \\ \Psi|_{r=1} &= 0, \quad C|_{r=1} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $Ek = \hat{E}/Sc$, $R_\omega = \delta^2 \hat{R}_\omega$. В системе (15) граничное условие для функции тока учитывает понижение порядка системы уравнений при отбрасывании части слагаемых в уравнении движения.

Следует отметить, что использованная при выводе системы (15) модель Дарси, применяемая для описания течения жидкости в пористых средах, справедлива при условии, что средняя скорость слабо меняется в пространстве [36]. Однако во многих случаях это условие не выполняется, например, при резком изменении свойств жидкости как в контексте проблемы Саффмана–Тейлора и вязком пальцеобразовании [37–39]; при наличии межфазной границы в системе несмешивающихся жидкостей, требующей корректной формулировки граничных условий [40]. Самый простой способ исправить эту неадекватность модели — ввести поправку Бринкмана [41]. Более сложная коррекция заключается в добавлении в уравнение движения инерционного члена конкретной формы, как предложено в [37, 40]. При строгом подходе необходимо сравнивать высоту h ячейки Хеле–Шоу с характерным линейным размером конвективной структуры H . Модель Дарси справедлива, когда высота ячейки мала по сравнению с этой характерной длиной. Случай полностью трехмерных течений, описываемых уравнением Навье–Стокса, получается в противоположном пределе [18]. Учитывать оба этих предела позволяют уравнения (13) и дают хорошее приближение в промежуточном диапазоне H . В настоящей работе рассматривается развитие неустойчивости с длиной волны, сравнимой с радиусом ячейки Хеле–Шоу: $H \approx R$. В этом случае использование уравнений (13) излишне, поэтому применяется модель Дарси.

3. Линейный анализ устойчивости равновесия

Задача (15) допускает стационарное решение, если жидкость находится в состоянии механического равновесия, которое будем называть основным состоянием системы. Формулируя условие равновесия в виде

$\Psi = 0$, заключаем, что в основном состоянии поле концентрации должно иметь вид: $C_0 = C_0(r)$. Тогда задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dC_0}{dr} \right) = -2R_\omega$$

с граничным условием: $C_0 = 0$ при $r = 1$. Его решением служит функция:

$$C_0(r) = R_\omega(1 - r^2)/2. \quad (16)$$

Рассмотрим задачу о возмущениях равновесия (16). Представим поля функции тока и концентрации в виде:

$$\begin{Bmatrix} \Psi(r, \varphi, t) \\ C(r, \varphi, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ C_0(r) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \psi(r, \varphi, t) \\ c(r, \varphi, t) \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

где ψ, c — в общем случае конечные возмущения. Подставляя (17) в (15), получаем задачу для возмущений функции тока и концентрации:

$$\begin{aligned} \frac{R_\omega \text{Ek}}{r} J(c, \psi) &= \nabla^2 \psi - R_\omega \frac{\partial c}{\partial \varphi} + R_\omega^2 \text{Ek} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{r} J(c, \psi) &= \nabla^2 c + R_\omega \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \\ r = 1: \quad \psi &= 0, \quad c = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В настоящем разделе, в соответствии с линейной теорией устойчивости, будем считать возмущения малыми и линеаризуем уравнения (18) вблизи основного состояния (16). Полагая в рамках данного приближения $\{\psi, c\} \sim e^{\lambda t}$, приходим к системе:

$$\begin{aligned} -R_\omega^2 \text{Ek} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} &= \nabla^2 \psi - R_\omega \frac{\partial c}{\partial \varphi}, \\ \lambda c &= \nabla^2 c + R_\omega \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \\ r = 1: \quad \psi &= 0, \quad c = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Система уравнений (19) описывает дискретный спектр нормальных мод, возникающих в круговой области. Нахождение спектра для конкретной области предполагает решение краевой задачи. Тем не менее некоторые универсальные свойства спектра, не зависящие от геометрии задачи, можно установить, анализируя только структуру определяющих уравнений [42]. С этой целью наряду с решением $\{\psi, c\}$ вводим комплексно сопряженное решение $\{\psi^*, c^*\}$ и представляем скалярное произведение в виде:

$$\langle f, g \rangle = \int f(r, \varphi) g(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

Умножаем уравнения (19) на ψ^* и c^* соответственно. С учетом граничных условий также можно записать:

$$\langle \psi^*, \nabla^2 \psi \rangle = -\langle |\nabla \psi|^2 \rangle, \quad \langle c^*, \nabla^2 c \rangle = -\langle |\nabla c|^2 \rangle.$$

После этого имеем:

$$-\langle |\nabla \psi|^2 \rangle - R_\omega \left\langle \psi^*, \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right\rangle + R_\omega^2 \text{Ek} \left\langle \psi^*, \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right\rangle = 0, \quad (20)$$

$$-\langle |\nabla c|^2 \rangle + R_\omega \left\langle c^*, \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right\rangle - \lambda \langle |c|^2 \rangle = 0. \quad (21)$$

Вычитая из равенств (20) и (21) комплексно сопряженные:

$$-\langle |\nabla \psi|^2 \rangle - R_\omega \left\langle \psi, \frac{\partial c^*}{\partial \varphi} \right\rangle + R_\omega^2 \text{Ek} \left\langle \psi, \frac{\partial \psi^*}{\partial \varphi} \right\rangle = 0,$$

$$-\langle |\nabla c|^2 \rangle + R_\omega \left\langle c, \frac{\partial \psi^*}{\partial \varphi} \right\rangle - \lambda^* \langle |c|^2 \rangle = 0,$$

приходим к соотношению:

$$\lambda - \lambda^* = R_\omega^2 \text{Ek} \frac{\langle \psi^*, \partial \psi / \partial \varphi \rangle}{\langle |c|^2 \rangle}, \quad (22)$$

из которого следует действительность инкремента λ и, соответственно, монотонность возмущений при условии $E_k = 0$. Напротив, при $E_k \neq 0$ инкремент будет иметь ненулевую мнимую часть, что говорит о наличии осциллирующих решений линейной задачи. Таким образом, присутствие силы Кориолиса наполняет спектр колебательными возмущениями. Складывая (20) и (21) с комплексно сопряженными, получаем:

$$\frac{\lambda + \lambda^*}{2} \equiv \lambda_r = -\frac{\langle |\nabla c|^2 \rangle}{\langle |c|^2 \rangle} + R_\omega \frac{\langle c^*, \partial\psi / \partial\varphi \rangle + \langle c, \partial\psi^* / \partial\varphi \rangle}{2\langle |c|^2 \rangle}. \tag{23}$$

Левая часть равенства (23) представляет собой действительную часть λ , которая определяет скорость роста (затухания) возмущений. Если ячейка не вращается ($R_\omega = 0$), то система абсолютно устойчива: $\lambda_r < 0$. С ростом скорости вращения система пороговым образом теряет устойчивость при критическом значении числа Рэлея.

Рассмотрим свойства спектра нейтральных монотонных возмущений ($\lambda = 0$) для случая круговой области. Для простоты посчитаем, что эффект Кориолиса не проявляется при $E_k = 0$. Тогда задача (19) примет более простой вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi - R_\omega \frac{\partial c}{\partial\varphi} &= 0, \\ \nabla^2 c + R_\omega \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} &= 0, \\ r=1: \quad \psi &= 0, \quad c = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Из формы записи уравнений (24) видна причина выбора масштаба единиц концентрации: уравнения приобретают определенную симметрию. Если пара функций $\{\psi, c\}$ удовлетворяет уравнениям (24), то удовлетворять им будет и пара $\{c, -\psi\}$. Кроме того, нелинейная задача (18) инвариантна относительно непрерывной группы $SO(2)$ поворотов относительно оси z . Данная симметрия приводит к однопараметрическому семейству решений, каждое из которых можно получить из другого поворотом системы вокруг оси z . Этот вывод справедлив как для стационарных, так и для нестационарных решений (18). Таким образом, для круговой области все критические значения числа Рэлея R_ω двукратно вырождены.

Уравнения (24) можно преобразовать к более компактному виду путем введения комплексной функции

$$\xi(r, \varphi) = \psi(r, \varphi) + ic(r, \varphi)$$

и задачу о критических движениях рассматривать как задачу отыскания собственных значений оператора:

$$\nabla^2\xi + iR_\omega \frac{\partial\xi}{\partial\varphi} = 0, \quad \xi(1, \varphi) = 0. \tag{25}$$

Ее решением, не обращаемым в бесконечность при $r = 0$, служит

$$\xi(r, \varphi) = \alpha J_n(r\sqrt{nR_\omega})e^{-in\varphi}, \tag{26}$$

где n — азимутальное волновое число, имеющее значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, J_n — функция Бесселя порядка n , α — некоторая константа. Спектр собственных значений (25) вычисляется из условия:

$$J_n(r\sqrt{nR_\omega^{(n,l)}}) = 0,$$

где индексом l нумеруется радиальное волновое число, а $R_\omega^{(n,l)}$ означает критическое число Рэлея моды (n, l) .

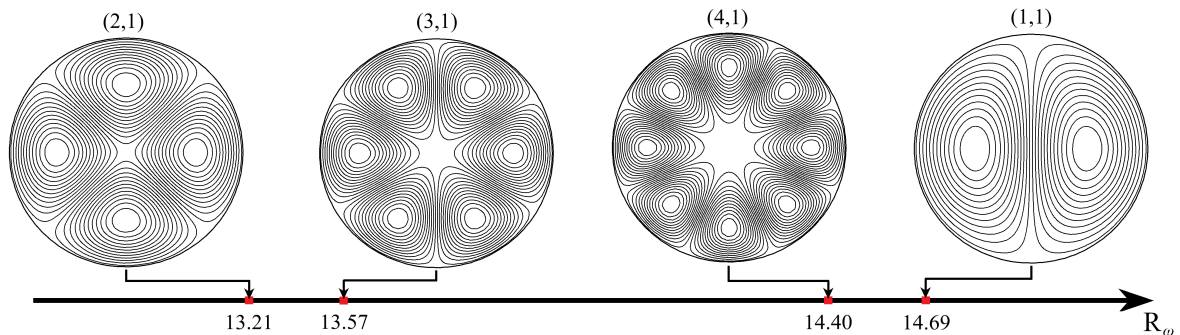


Рис. 2. Нейтральные возмущения функции тока для наиболее опасных конвективных мод (2,1), (3,1), (4,1) и (1,1) без учета эффекта Кориолиса ($E_k = 0$); критические значения чисел Рэлея для каждой из мод приведены на горизонтальной оси

Первичной является мода (2,1), которая сменяет равновесие при $R_\omega = 13.21$. По мере увеличения числа Рэлея следующей возбуждается мода (3,1), за ней следует мода (4,1) и так далее. На рисунке 2 показаны критические возмущения функции тока и концентрации для четырех наиболее опасных мод. Стоит отметить, что мода (0,1) абсолютно устойчива при любом числе Рэлея. Этот вывод справедлив для всех конвективных мод вида (0, n). Азимутальное число n критического возмущения с увеличением числа Рэлея растет гораздо быстрее, чем радиальное число l. Для сравнения можно привести данные об устойчивости мод с волновым числом $l = 2$. Мода (3,2) теряет устойчивость при $R_\omega = 31.75$; мода (2,2) нейтральна при $R_\omega = 35.45$; за ней следует мода (1,2), теряющая устойчивость при $R_\omega = 49.22$. Таким образом, в достаточно широком диапазоне (от 13,21 до 31,75) числа R_ω сосуществуют только моды (n,1).

4. Слабонелинейный анализ

Рассмотрим вопрос ветвления решения вблизи точки первой бифуркации $R_\omega \approx R_{\omega 0}$, где механическое равновесие жидкости сменяется конвективным движением. Для анализа слабо нелинейных решений воспользуемся методом многих временных масштабов. Этот метод позволяет находить определяющие уравнения на медленном многообразии, которое всегда возникает в окрестности бифуркации. Следуя методу, будем искать решение задачи (18) в виде разложений по малым отклонениям от основного состояния:

$$\begin{aligned} \psi &= \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + O(\varepsilon^3), \\ c &= \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + O(\varepsilon^3), \\ R_\omega &= R_{\omega 0} + \varepsilon R_{\omega 1} + \varepsilon^2 R_{\omega 2} + O(\varepsilon^3), \\ Ek &= \varepsilon Ek_1 + \varepsilon^2 Ek_2 + O(\varepsilon^3), \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \tag{27}$$

где $t_n = \varepsilon^n t$ обозначает иерархию времен, смысл которой состоит в разделении процессов вблизи порога возникновения конвекции на «быстрые» (протекающие во времени t_0) и «медленные» (t_1, t_2, \dots). Малый параметр ε характеризует степень надкритичности: $\varepsilon = \sqrt{(R_\omega - R_{\omega 0})/R_{\omega 2}}$.

Подставим (27) в (18) и соберем слагаемые одного порядка. Тогда для порядка $O(\varepsilon)$ получаем краевую задачу:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_1 - R_{\omega 0} \frac{\partial c_1}{\partial \varphi} &= 0, \\ \nabla^2 c_1 + R_{\omega 0} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} &= 0, \\ r = 1: \quad \psi_1 &= 0, \quad c_1 = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

совпадающую с задачей о критических возмущениях (24). Для следующего порядка $O(\varepsilon^2)$ имеем:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_2 - R_{\omega 0} \frac{\partial c_2}{\partial \varphi} &= R_{\omega 1} \frac{\partial c_1}{\partial \varphi} - R_{\omega 0}^2 Ek_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi}, \\ \nabla^2 c_2 + R_{\omega 0} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} &= \frac{\partial c_1}{\partial t_1} - R_{\omega 1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} J(c_1, \psi_1), \\ r = 1: \quad \psi_2 &= 0, \quad c_2 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Наконец, порядку $O(\varepsilon^3)$ отвечают уравнения:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_3 - R_{\omega 0} \frac{\partial c_3}{\partial \varphi} &= R_{\omega 2} \frac{\partial c_1}{\partial \varphi} - R_{\omega 0}^2 Ek_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi}, \\ \nabla^2 c_3 + R_{\omega 0} \frac{\partial \psi_3}{\partial \varphi} &= \frac{\partial c_1}{\partial t_2} + \frac{\partial c_2}{\partial t_1} - R_{\omega 2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} - R_{\omega 1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} J(c_1, \psi_2) + \frac{1}{r} J(c_2, \psi_1), \\ r = 1: \quad \psi_3 &= 0, \quad c_3 = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

С учетом симметрии линейной системы (28) ее решение можно искать в виде:

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \varphi, t) &= a(t_1, t_2, \dots) \psi(r, \varphi) + b(t_1, t_2, \dots) c(r, \varphi), \\ c_1(r, \varphi, t) &= a(t_1, t_2, \dots) c(r, \varphi) - b(t_1, t_2, \dots) \psi(r, \varphi), \end{aligned}$$

где a и b — амплитуды, зависящие от медленных времен, а ψ и c определяются формулой (26).

В правых частях уравнений с высшими порядками членов появляются слагаемые, возмущающие линейную задачу. Зададим скалярное произведение двух произвольных векторных функций в следующем виде:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \sum_i \langle A_i, B_i \rangle.$$

Легко показать, что оператор задачи (28) является самосопряженным. Поэтому условие разрешимости задач (29) и (30) можно сформулировать как ортогональность их правых частей решениям линейной задачи в смысле введенного скалярного произведения. Применительно к (29) это дает систему:

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle \frac{\partial a}{\partial t_1} &= -2R_{\omega 1} \left\langle \psi, \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right\rangle a + R_{\omega 0}^2 Ek_1 \left\langle \psi, \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right\rangle b, \\ \langle \psi^2 \rangle \frac{\partial b}{\partial t_1} &= -R_{\omega 1} \left\langle \psi, \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right\rangle b - R_{\omega 0}^2 Ek_1 \left\langle \psi, \frac{\partial c}{\partial \varphi} \right\rangle a, \end{aligned}$$

которая оказывается линейной. Положив $R_{\omega 1} = 0, Ek_1 = 0, d/dt_1 = 0$, представим ее решение в виде:

$$\psi_2 = (a^2 + b^2)\vartheta, \quad c_2 = (a^2 + b^2)\sigma.$$

Повторяя процедуру для системы (30) с членами третьего порядка, получаем нелинейные амплитудные уравнения:

$$\frac{da}{d\tau} = (R_{\omega}^* - a^2 - b^2)a - Ek^*b, \tag{31}$$

$$\frac{db}{d\tau} = (R_{\omega}^* - a^2 - b^2)b + Ek^*a, \tag{32}$$

где $R_{\omega}^* \equiv 2R_{\omega 1} \left\langle c, \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right\rangle, Ek^* \equiv Ek_2 R_{\omega 0} \left\langle c, \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right\rangle, \tau \equiv \frac{t_2}{\langle c^2 \rangle}, \left\langle \psi, \frac{1}{r} J(\vartheta, \sigma) \right\rangle = -1$.

Опишем нетривиальные решения амплитудных уравнений (31), (32). Если пренебречь эффектом Кориолиса, то из центральной неподвижной точки (0,0) с двукратно вырожденным простым собственным значением ответвляется однопараметрическое семейство устойчивых аттракторов, задаваемых уравнением:

$$a^2 + b^2 = R_{\omega}^*,$$

что и показано на рисунке 3а. Появление цикла равновесий обусловлено наличием SO(2)-симметрии. Каждая неподвижная точка в семействе соответствует конвективному движению, слегка смещенному вдоль направления вращения. Поэтому все члены семейства обладают идентичными свойствами устойчивости. Цикл равновесий ответвляется пороговым образом при $R_{\omega} = R_{\omega 0}$.

Если учесть эффект Кориолиса, то цикл равновесий переходит в устойчивый предельный цикл при сколь угодно малом значении числа Экмана (Рис. 3б). Знак этого числа определяет направление вращения конвективной структуры вокруг оси как целого. При этом изменение знака угловой скорости не влияет на число Рэлея, так как оно возводится в квадрат. Постепенное увеличение R_{ω} при фиксированном значении Ek приводит к сверхкритической бифуркации Хопфа (Рис. 3в).

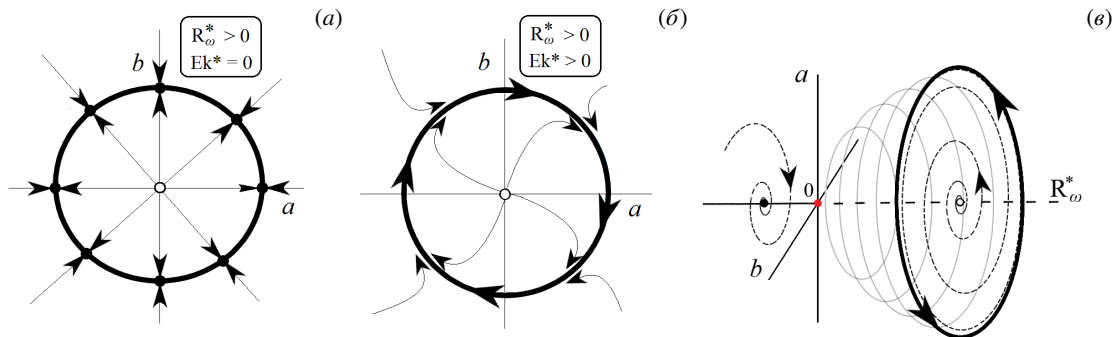


Рис. 3. Фазовый портрет системы (31), (32), показывающий динамику слабо нелинейных решений в окрестности первой точки бифуркации $R_{\omega 0}$: ветвь однопараметрического семейства устойчивых стационарных состояний при $R_{\omega} > R_{\omega 0}, Ek = 0$ (а); устойчивый предельный цикл при $R_{\omega} > R_{\omega 0}, Ek \neq 0$ (б); диаграмма сверхкритической бифуркации Хопфа при $R_{\omega} > R_{\omega 0}, Ek \neq 0$ (в)

5. Численное решение полной нелинейной задачи

5.1. Метод численного решения

Для решения задачи (18) в данной работе использовался метод конечных разностей. Пространственные дифференциальные операторы аппроксимировались центральными разностями на равномерной сетке в полярных координатах. Апробирован ряд сеток с разным разрешением по радиусу и углу: 21×121 , 41×241 , 61×361 , 81×481 . Представленные ниже численные результаты получены на сетке 61×361 . Решение на этой сетке дает значение с относительной погрешностью в пределах 3% к значению, к которому сходится функция тока при дальнейшем сгущении.

Нелинейные уравнения решаются на основе явной схемы. Для производной по времени применялась схема Эйлера первого порядка.

Обозначим дискретный аналог функции $f(r, \varphi, t)$ как $f_{i,k}^m$, что дает значение функции в узле сетки с номером i, k в момент времени $t_m = \sum \Delta t_n$. Конечно-разностные аналоги уравнений (18) с учетом принятых обозначений имеют вид:

$$\nabla^2 \psi_{i,k}^{m+1} = R_\omega \frac{\partial c_{i,k}^m}{\partial \varphi} - R_\omega^2 \text{Ek} \frac{\partial \psi_{i,k}^m}{\partial \varphi} + \frac{R_\omega \text{Ek}}{r_i} J(c_{i,k}^m, \psi_{i,k}^m),$$

$$c_{i,k}^{m+1} = c_{i,k}^m + \Delta t_m \left[\nabla^2 c_{i,k}^m + R_\omega \frac{\partial \psi_{i,k}^m}{\partial \varphi} - \frac{1}{r_i} J(c_{i,k}^m, \psi_{i,k}^m) \right].$$

Алгоритм вычислений на их основе следующий. Допустим, в момент времени t_m известны все данные как для поля $\psi_{i,k}^m$, так и для поля $c_{i,k}^m$. На следующем, $(m+1)$ -м, шаге решается уравнение Пуассона для функции тока, в результате определяются новые значения $\psi_{i,k}^{m+1}$. Затем с использованием явного рекуррентного соотношения обновляются значения поля концентрации $c_{i,k}^{m+1}$, далее процедура повторяется. Уравнение Пуассона решается методом последовательной верхней релаксации с точностью до 10^{-4} . Начальным условием служит зашумленное поле функции тока с амплитудой, не превышающей значение 10^{-3} .

При применении явной схемы необходимо контролировать шаг по времени. Для обеспечения устойчивости решения величину шага по времени на каждой новой итерации рассчитывали по формуле Куранта:

$$\Delta t = \frac{\Delta r^2}{4(1 + 1/(\Delta \varphi^2) + \max|\psi|)}.$$

Стоит отметить, что рассматриваемая задача удобна для численного анализа. Классический итерационный метод решения систем разностных уравнений (процесс Либмана) сходится к решению за 5–7 итераций в стационарных условиях и за 1–2 итерации при использовании метода продолжения по параметру. Однако получение нестационарных решений с большими временами перехода, таких как предельные торы, требует значительных затрат машинного времени.

5.2. Результаты численного моделирования

Приведем некоторые результаты численных экспериментов, иллюстрирующие сложную нелинейную динамику рассматриваемой системы. На рисунке 4 показана область неустойчивости в плоскости параметров R_ω и Ek . Можно видеть, что эффект Кориолиса существенно стабилизирует состояние механического равновесия. Область неустойчивости имеет форму мешка, ограниченного нейтральной кривой бифуркации Хопфа. Минимальное значение числа Рэлея, при котором начинается конвекция, равно $R_\omega = 13.21$ ($\text{Ek} = 0$). Если $\text{Ek} > 0.038$, то основное состояние системы абсолютно устойчиво, поскольку все возмущения затухают.

Для исследования нелинейной динамики системы в области неустойчивости рассмотрено характерное вертикальное сечение при $\text{Ek} = 0.017$ и несколько горизонтальных сечений. На рисунке 5 приводится спектр мощности и фазовый портрет конвективного режима, полученный при значении числа Рэлея $R_\omega = 14.5$ (Рис. 4, нижний квадратик); конвективный режим здесь является периодическим. При пересечении нейтральной кривой возникает $1-T$ предельный цикл. Таким образом, численное моделирование подтверждает вывод из слабонелинейного анализа (см. раздел 4) о возникновении колебательной конвекции при произвольно малом значении числа Экмана. Предельный цикл включает динамическую смену состояний однопараметрического семейства. На рисунке 5 справа приводятся поля возмущений концентрации c в последовательные моменты времени. Рисунок 6 демонстрирует отвечающие им поля возмущений функции тока. Ячейка вращается против часовой стрелки в соответствии с правилом правого винта (см. Рис. 1).

С ростом угловой скорости и числа R_ω в системе происходит вторая бифуркация Хопфа, вследствие чего от предельного цикла ответвляется двухчастотный тор. На рисунке 7 можно видеть появление резонансного $7-T$ цикла на торе и соответствующую структуру течения, изображаемую полями возмущения концентрации. На рисунке 8 приводятся поля возмущений функции тока, отвечающие этому периодическому режиму.

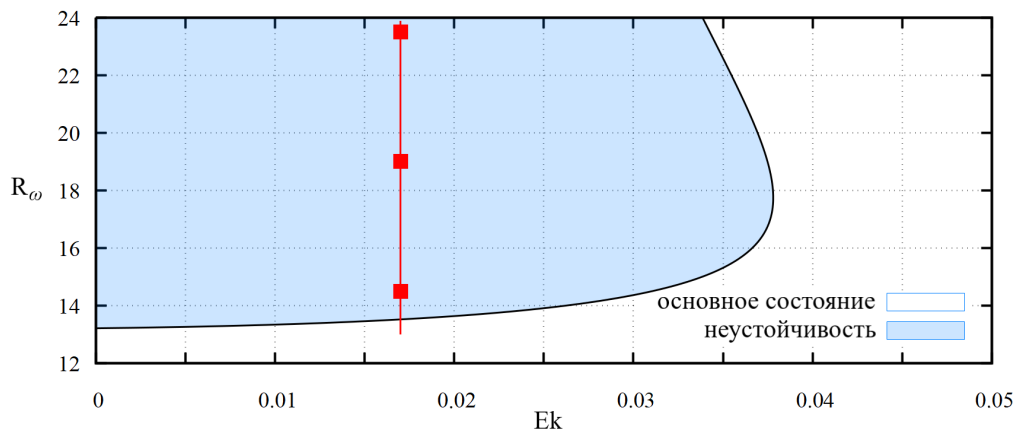


Рис. 4. Нейтральная кривая для бифуркации Хопфа в плоскости параметров «число Рэлея R_ω – число Экмана Ek », разделяющая область колебательной неустойчивости (закрашена) и состояние механического равновесия; численное моделирование выполнено для значений параметров, отмеченных красными квадратиками

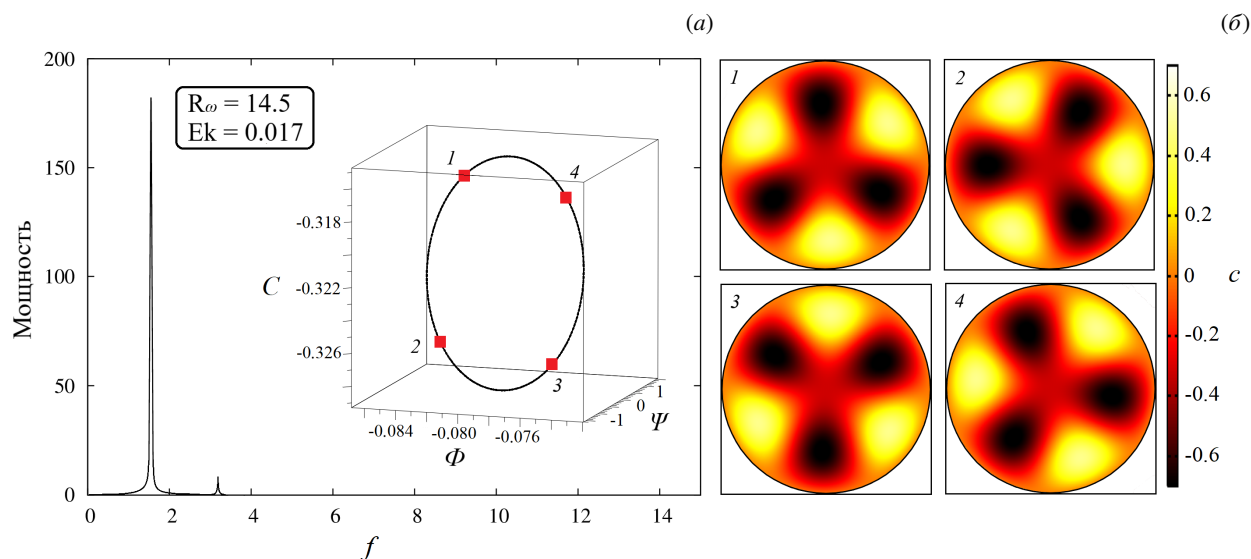


Рис. 5. Спектр мощности и фазовый портрет (а), полученные прямым численным моделированием для значений параметров $R_\omega = 14.5$, $Ek = 0.017$; поля возмущений концентрации c (б) приведены в моменты времени, соответствующие точкам 1–4 аттрактора

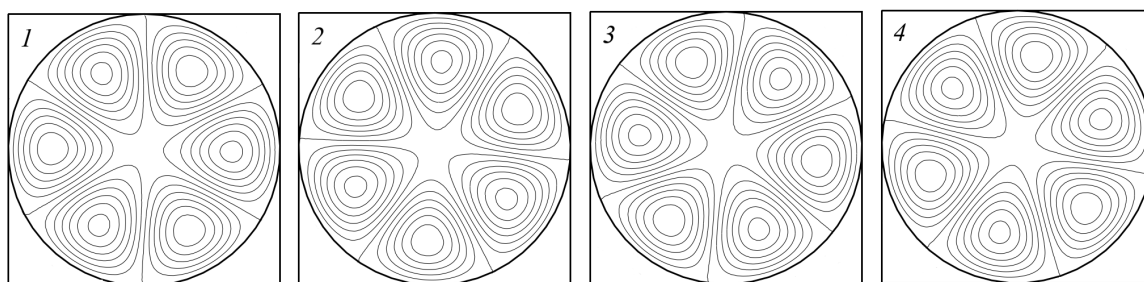


Рис. 6. Поля возмущений функции тока для значений параметров $R_\omega = 14.5$, $Ek = 0.017$ в точках 1–4 аттрактора (см. Рис. 5)

Отметим, что число возникающих вихрей как в режиме $1 - T$ цикла, так и в режиме $7 - T$ цикла совпадает с количеством вихрей моды (3,1). Согласно результатам линейного анализа, проведенного без учета силы Кориолиса, данная мода наблюдается вплоть до $R_\omega = 14.4$ (Рис. 2). Это обстоятельство также свидетельствует в пользу стабилизации состояния системы. Кроме того, в связи с возросшей интенсивностью конвективного движения усилилось и влияние силы Кориолиса на движущуюся жидкость, что привело к более заметным сдвиговым деформациям течения и характерной асимметрии (Рис. 8).

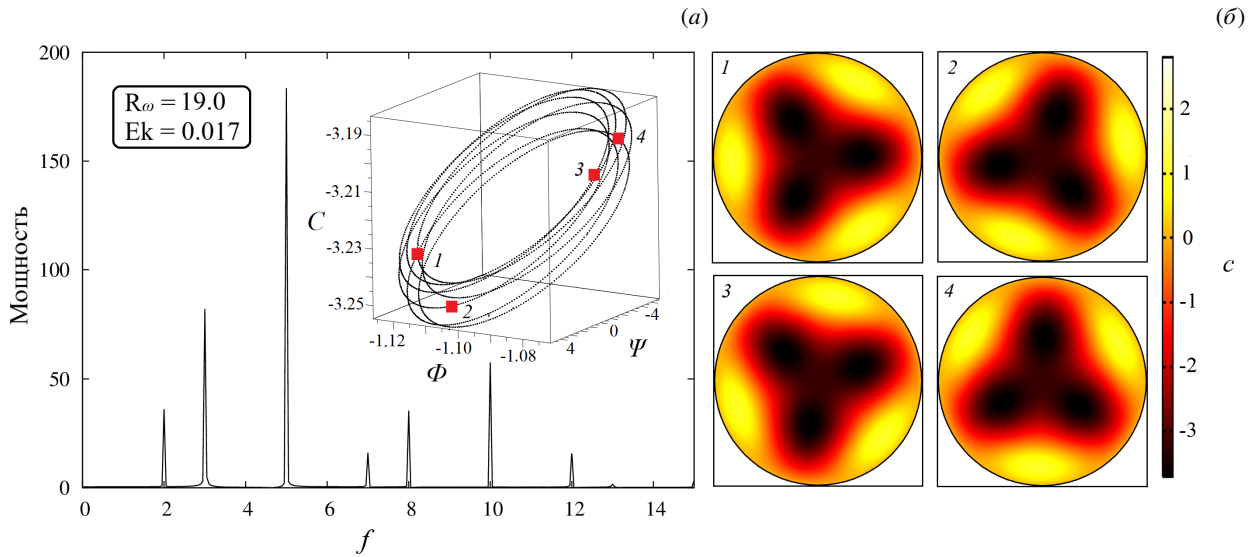


Рис. 7. Спектр мощности и фазовый портрет (а), полученные прямым численным моделированием для значений параметров $R_\omega = 19.0$, $Ek = 0.017$; поля возмущений концентрации c (б) приведены в моменты времени, соответствующие точкам 1–4 аттрактора

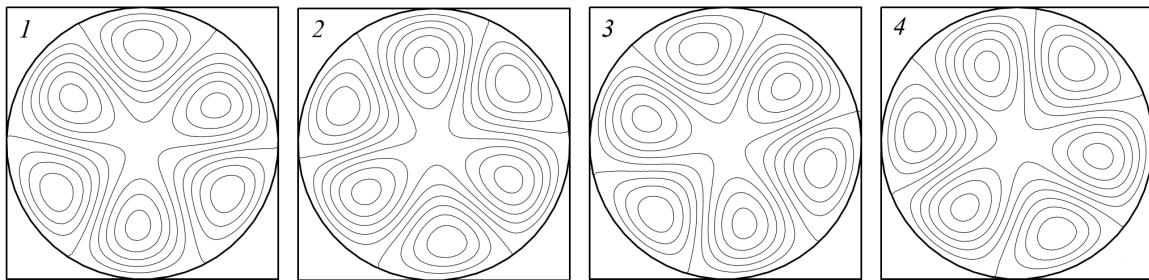


Рис. 8. Поля возмущений функции тока для значений параметров $R_\omega = 19.0$, $Ek = 0.017$ в точках 1–4 аттрактора (см. Рис. 7)

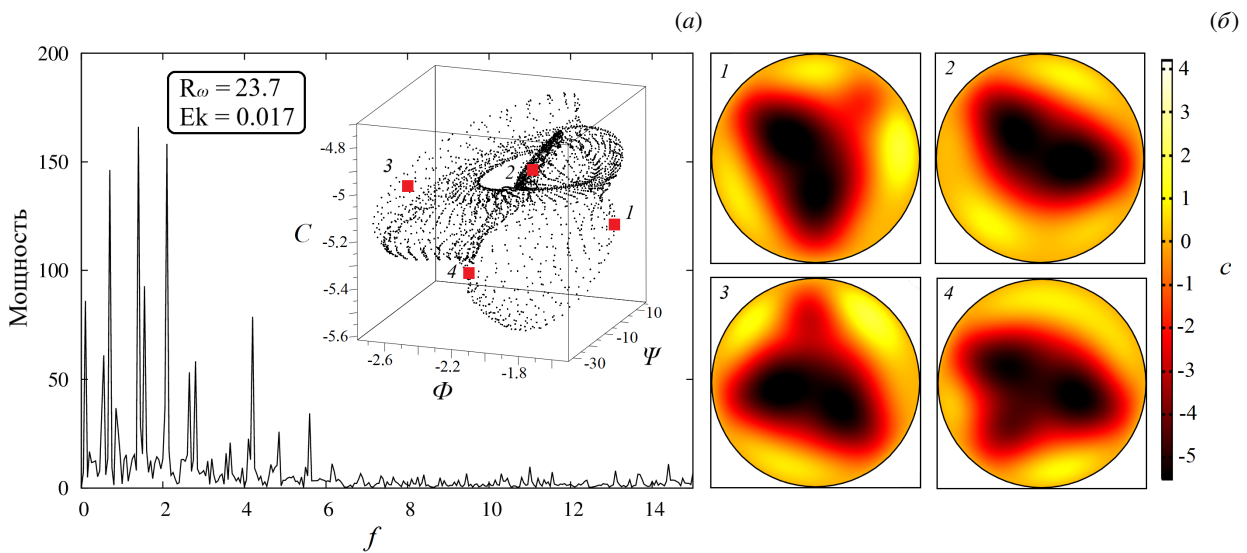


Рис. 9. Спектр мощности и фазовый портрет (а), полученные для значений параметров $R_\omega = 23.7$, $Ek = 0.017$; поля возмущений концентрации (б) приведены в моменты времени, отвечающие точкам 1–4 аттрактора

При дальнейшем увеличении числа Рэлея происходит переход к хаотической конвекции через сложную последовательность бифуркаций тора. Для примера на рисунке 9 приведен фазовый портрет и спектр мощности хаотического аттрактора тороидального типа и соответствующие ему поля возмущений концентрации при значениях управляющих параметров $R_\omega = 23.7$, $Ek = 0.017$, а рисунок 10 иллюстрирует поля возмущений функции

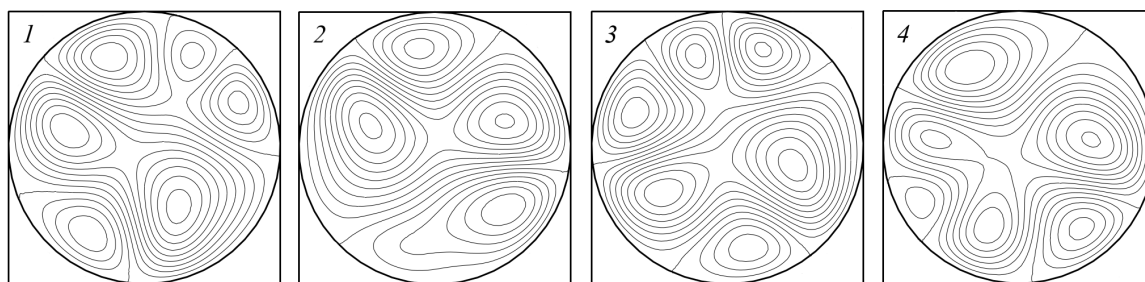


Рис. 10. Поля возмущений функции тока для значений параметров $R_\omega = 23.7$, $E_k = 0.017$ в точках 1–4 аттрактора (см. Рис. 9)

тока в данном режиме. Видно, что хаотичность течения главным образом проявляется в самопроизвольном рождении и исчезновении вихрей: мода (3,1) конкурирует с модой (2,1), что выглядит как поочередная смена числа вихрей.

В заключение скажем, что в общем случае эффект Кориолиса создает предпосылки для ряда бифуркаций с многомерными торами. Нелинейная динамика и бифуркационная структура рассматриваемой динамической системы сложны и запутаны и требуют отдельного исследования.

6. Выводы

В настоящей работе представлено уравнение движения несжимаемой жидкости (раствора) во вращающейся ячейке Хеле–Шоу. Ключевой особенностью данного уравнения является наличие нового слагаемого — слагаемого плавучести, связанной с силой Кориолиса, не исчезающее при допущении двумерного течения. Уравнение описывает, с одной стороны, течения в ячейке Хеле–Шоу, демонстрирующие характерное для силы Кориолиса азимутальное отклонение в зависимости от скорости движения жидкости, с другой, зависимость такого отклонения от изменений плотности жидкости.

Интересно, что слагаемое плавучести имеет ту же структуру, что и нелинейный член в уравнении переноса. Как известно, отношение интенсивностей диффузии импульса и диффузии вещества определяется числом Шмидта. Типичное значение этого безразмерного параметра для жидкости (раствора) составляет 10^3 . Это означает, что движение молекул растворенного вещества зависит в большей степени от свойств растворителя, чем от их диффузии. В случае процессов переноса тепла этот эффект не столь выражен, но остается заметным, что подтверждается типичными значениями числа Прандтля для жидкостей (> 10). Таким образом, нелинейный член в уравнении переноса концентрации (или тепла) играет ключевую роль, поскольку во многом обуславливает динамику этих полей. Факт, что кориолисова плавучесть в уравнении движения имеет такую же нелинейную структуру, свидетельствует об усилении ее влияния на течения в ячейке Хеле–Шоу. При этом, как и классическая сила Кориолиса, новое слагаемое проявляется только в движущейся жидкости.

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2025-0001).

Литература

1. Rouhi A., Lohse D., Marusic I., Sun C., Chung D. Coriolis effect on centrifugal buoyancy-driven convection in a thin cylindrical shell // *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 910. A32. DOI: 10.1017/jfm.2020.959
2. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover Publications, 1981. 652 p.
3. Schwarz K.G. Effect of Rotation on the Stability of Advective Flow in a Horizontal Fluid Layer at a Small Prandtl Number // *Fluid Dynamics*. 2005. Vol. 40. P. 193–201. DOI: 10.1007/s10697-005-0059-7
4. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: Перм. ун-т, 2006. 155 с.
5. Кочин А.Ю., Шварц К.Г. Конечно-амплитудные возмущения адвективных течений в горизонтальном слое несжимаемой жидкости со свободной верхней границей при слабом вращении // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2015. Т. 8, № 2. С. 174–187. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.2.15
6. Cordero S., Busse F.H. Experiments on convection in rotating hemispherical shells: Transition to a quasi-periodic state // *Geophysical Research Letters*. 1992. Vol. 19. P. 733–736. DOI: 10.1029/92GL00574
7. Busse F.H., Hartung G., Jaletzky M., Sommermann G. Experiments on thermal convection in rotating systems motivated by planetary problems // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1998. Vol. 27. P. 161–174. DOI: 10.1016/S0377-0265(97)00006-7
8. Busse F.H., Carrigan C.R. Convection induced by centrifugal buoyancy // *Journal of Fluid Mechanics*. 1974. Vol. 62. P. 579–592. DOI: 10.1017/s0022112074000814

9. Yen H.-W., Hu I.-C., Chen C.-Y., Nagarajan D., Chang J.-S. Design of photobioreactors for algal cultivation // *Biofuels from Algae*. 2019. P. 225–256. DOI: 10.1016/B978-0-444-64192-2.00010-X
10. Waters S.L., Cummings L.J., Shakesheff K.M., Rose F.R.A.J. Tissue growth in a rotating bioreactor. Part I: mechanical stability // *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*. 2006. Vol. 23. P. 311–337. DOI: 10.1093/imammb/dq1013
11. Cummings L.J., Waters S.L. Tissue growth in a rotating bioreactor. Part II: fluid flow and nutrient transport problems // *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*. 2007. Vol. 24. P. 169–208. DOI: 10.1093/imammb/dq1024
12. Spaid M.A., Homsy G.M. Stability of viscoelastic dynamic contact lines: An experimental study // *Physics of Fluids*. 1997. Vol. 9. P. 823–832. DOI: 10.1063/1.869480
13. Gilmore J., Islam M., Martinez-Duarte R. Challenges in the Use of Compact Disc-Based Centrifugal Microfluidics for Healthcare Diagnostics at the Extreme Point of Care // *Micromachines*. 2016. Vol. 7, no. 4. 52. DOI: 10.3390/mi7040052
14. Tang M., Wang G., Kong S.-K., Ho H.-P. A Review of Biomedical Centrifugal Microfluidic Platforms // *Micromachines*. 2016. Vol. 7, no. 2. 26. DOI: 10.3390/mi7020026
15. Lee J., Lee S., Lee M., Prakash R., Kim H., Cho G., Lee J. Enhancing Mixing Performance in a Rotating Disk Mixing Chamber: A Quantitative Investigation of the Effect of Euler and Coriolis Forces // *Micromachines*. 2022. Vol. 13, no. 8. 1218. DOI: 10.3390/mi13081218
16. Hsu C.-W., Shih P.-T., Chen J.M. Enhancement of Fluid Mixing with U-Shaped Channels on a Rotating Disc // *Micromachines*. 2020. Vol. 11, no. 12. 1110. DOI: 10.3390/mi11121110
17. Mizev A.I., Mosheva E.A., Bratsun D.A. Extended classification of the buoyancy-driven flows induced by a neutralization reaction in miscible fluids. Part 1. Experimental study // *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 916. A22. DOI: 10.1017/jfm.2021.201
18. Bratsun D.A., Mizev A.I., Mosheva E.A. Extended classification of the buoyancy-driven flows induced by a neutralization reaction in miscible fluids. Part 2. Theoretical study // *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 916. A23. DOI: 10.1017/jfm.2021.202
19. Уточкин В.Ю., Сираев Р.Р., Брацун Д.А. Хемоконвективные структуры во вращающейся системе реагирующих жидкостей // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020. Т. 13, № 2. С. 205–218. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.2.16
20. Брацун Д.А., Мошова Е.А. Особенности формирования волн плотности в двухслойной системе смешивающихся реагирующих жидкостей // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2018. Т. 11, № 3. С. 302–322. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.3.23
21. Автова Е.В., Брацун Д.А., Костарев К.Г., Мизев А.И., Мошова Е.А. Конвективная неустойчивость в двухслойной системе реагирующих жидкостей с диффузией, зависящей от концентрации компонентов // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2015. Т. 8, № 4. С. 345–358. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.29
22. Bratsun D., Kostarev K., Mizev A., Aland S., Mokbel M., Schwarzenberger K., Eckert K. Adaptive Micromixer Based on the Solutocapillary Marangoni Effect in a Continuous-Flow Microreactor // *Micromachines*. 2018. Vol. 9, no. 11. 600. DOI: 10.3390/mi9110600
23. Mosheva E.A., Shmyrov A.V., Mizev A.I. Solutions Mixing Visualization in Continuous-Flow Microreactors via Interferometric Technique // *Scientific Visualization*. 2023. Vol. 15, no. 3. P. 72–82. DOI: 10.26583/sv.15.3.08
24. Kozlov N., Mosheva E. Investigation of chemoconvection in vibration fields // *Physical Chemistry Chemical Physics*. 2023. Vol. 25. P. 8921–8933. DOI: 10.1039/D2CP06078G
25. Carrillo L., Magdaleno F.X., Casademunt J., Ortín J. Experiments in a rotating Hele-Shaw cell // *Physical Review E*. 1996. Vol. 54. P. 6260–6267. DOI: 10.1103/PhysRevE.54.6260
26. Шмыров А.В., Денисова М.О., Мизев А.И. Влияние центробежного поля на процессы реакции-диффузии-конвекции в двухслойной системе несмешивающихся растворителей // *Вестник ПГУ. Физика*. 2022. № 4. С. 70–80. DOI: 10.17072/1994-3598-2022-4-70-80
27. Schwartz L.W. Instability and fingering in a rotating Hele-Shaw cell or porous medium // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 1989. Vol. 1. P. 167–169. DOI: 10.1063/1.857543
28. Waters S.L., Cummings L.J. Coriolis effects in a rotating Hele-Shaw cell // *Physics of Fluids*. 2005. Vol. 17. 043101. DOI: 10.1063/1.1861752
29. Alvarez-Lacalle E., Gadêlha H., Miranda J.A. Coriolis effects on fingering patterns under rotation // *Physical Review E*. 2008. Vol. 78. 026305. DOI: 10.1103/PhysRevE.78.026305
30. Chen C.-Y., Liu Y.-C. Fingering instabilities of a miscible fluid annulus on a rotating Hele-Shaw cell // *International Journal of Dynamics of Fluids*. 2005. Vol. 1, no. 1. P. 57–68.
31. Chen C.-Y., Liu Y.-C. Numerical simulations of miscible fluids on a rotating Hele-Shaw cell with effects of Coriolis forces // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2005. Vol. 48. P. 853–867. DOI: 10.1002/f1d.958
32. Chen C.-Y., Chen C.-H., Miranda J.A. Numerical study of pattern formation in miscible rotating Hele-Shaw flows // *Physical Review E*. 2006. Vol. 73. 046306. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.046306
33. Chen C.-Y., Huang Y.-S., Miranda J.A. Diffuse-interface approach to rotating Hele-Shaw flows // *Physical Review E*. 2011. Vol. 84. 046302. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.046302
34. Echchadli M., Aniss S. Thermal convection instability of two miscible viscous fluids in a rotating annular Hele-Shaw cell // *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34. P. 31–47. DOI: 10.1063/5.0098332

35. Oberbeck A. Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen // Annalen der Physik. 1879. Vol. 243. P. 271–292. DOI: 10.1002/andp.18792430606
36. Zeng J., Yortsos Y.C., Salin D. On the Brinkman correction in unidirectional Hele–Shaw flows // Physics of Fluids. 2003. Vol. 15. P. 3829–3836. DOI: 10.1063/1.1622947
37. Martin J., Rakotomalala N., Salin D. Gravitational instability of miscible fluids in a Hele–Shaw cell // Physics of Fluids. 2002. Vol. 14. P. 902–905. DOI: 10.1063/1.1431245
38. Kozlov V., Vlasova O. Oscillatory dynamics of immiscible liquids with high viscosity contrast in a rectangular Hele–Shaw channel // Physics of Fluids. 2022. Vol. 34. 032121. DOI: 10.1063/5.0084363
39. Kozlov V., Karpunin I., Kozlov N. Finger instability of oscillating liquid–liquid interface in radial Hele–Shaw cell // Physics of Fluids. 2020. Vol. 32. 102102. DOI: 10.1063/5.0018541
40. Bratsun D.A., De Wit A. On Marangoni convective patterns driven by an exothermic chemical reaction in two-layer systems // Physics of Fluids. 2004. Vol. 16. P. 1082–1096. DOI: 10.1063/1.1648641
41. Brinkman H.C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Flow, Turbulence and Combustion. 1949. Vol. 1. P. 27–34. DOI: 10.1007/BF02120313
42. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.

Сведения об авторах:

Уточкин Владимир Юрьевич (корр.), асп., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр-т, д. 29; e-mail: vyutochkin@psu.ru; ORCID: 0000-0002-0663-0930

Брацун Дмитрий Анатольевич, дфмн, проф., ПНИПУ; e-mail: dabracun@psu.ru; ORCID: 0000-0002-3229-2330

Research article

Stability of a liquid layer in a rotating Hele–Shaw reactor under competition of buoyancy effects generated by inertial forces

V.Yu. Utochkin, D.A. Bratsun

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

Technologies that involve studying heat and mass transfer processes in a rotating Hele–Shaw cell can be effectively used in particular in designing microfluidic devices and small-scale flow-type chemical reactors. A quasi-two-dimensional model allows recording density fields by optical methods, and rotation makes it possible to control them through spatially distributed inertial forces. As is known, in the limit of an infinitely thin layer, the Coriolis force disappears in a standard mathematical model. However, the experimental observations of a fluid flow in a rotating Hele–Shaw cell indicate that the Coriolis effect fully manifests itself. The correct derivation of the equation of motion in the Hele–Shaw and Boussinesq approximation leads to the appearance of a term responsible for the buoyancy of the medium element caused by the Coriolis force. In this paper, to study the new effect, we consider the problem of convective stability of a fluid with internal generation of a transport component, which can be either the concentration of a dissolved substance or the temperature of the medium. The study of the system includes finding its basic state and linear analysis of its stability, analysis of weakly nonlinear solutions near the first bifurcation point, direct numerical modeling of nonlinear convection regimes, and evaluation of the general properties of a disturbance spectrum and the branching of solutions near the equilibrium bifurcation. The character of the branching of solutions is determined by applying the method of multiple time scales. The weakly nonlinear analysis indicates that, when the Rayleigh number reaches a critical value, the steady-state equilibrium of the fluid is replaced by oscillatory convection. The finite difference method is used to obtain a complete picture of the nature of nonlinear dynamics. It is shown that the Coriolis force has a stabilizing effect on the basic state of the system. In the strongly nonlinear regimes of convection, the Coriolis buoyancy leads to a complication of the scenario of transition to chaotic convection. It is demonstrated that the transition is accompanied by a series of bifurcations of limit cycles and tori, the final destruction of 2-D or 3-D tori, the appearance of strange attractors of the toroidal type. A stability map is constructed in the Rayleigh number–Ekman number parameter space.

Keywords: rotating Hele–Shaw cell, Coriolis force, Boussinesq approximation, convective instability

Received: 02.09.2024 / **Published online:** 10.04.2025

References

1. Rouhi A., Lohse D., Marusic I., Sun C., Chung D. Coriolis effect on centrifugal buoyancy-driven convection in a thin cylindrical shell. *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 910. A32. DOI: 10.1017/jfm.2020.959
2. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Dover Publications, 1981. 652 p.
3. Schwarz K.G. Effect of Rotation on the Stability of Advective Flow in a Horizontal Fluid Layer at a Small Prandtl Number. *Fluid Dynamics*. 2005. Vol. 40. P. 193–201. DOI: 10.1007/s10697-005-0059-7

4. *Aristov S.N., Shvarts K.G.* Vkhrevyye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloye zhidkosti. Perm: Perm State University, 2006. 155 p.
5. *Kochinov A.Y., Shvarts K.G.* Finite-amplitude perturbations of the advective flows in a horizontal layer of incompressible liquid with a free upper boundary at low rotation. *Computational Continuum Mechanics*. 2015. Vol. 8, no. 2. P. 174–187. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.2.15
6. *Cordero S., Busse F.H.* Experiments on convection in rotating hemispherical shells: Transition to a quasi-periodic state. *Geophysical Research Letters*. 1992. Vol. 19. P. 733–736. DOI: 10.1029/92GL00574
7. *Busse F.H., Hartung G., Jaletzky M., Sommermann G.* Experiments on thermal convection in rotating systems motivated by planetary problems. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1998. Vol. 27. P. 161–174. DOI: 10.1016/S0377-0265(97)00006-7
8. *Busse F.H., Carrigan C.R.* Convection induced by centrifugal buoyancy. *Journal of Fluid Mechanics*. 1974. Vol. 62. P. 579–592. DOI: 10.1017/s0022112074000814
9. *Yen H.-W., Hu I.-C., Chen C.-Y., Nagarajan D., Chang J.-S.* Design of photobioreactors for algal cultivation. *Biofuels from Algae*. 2019. P. 225–256. DOI: 10.1016/B978-0-444-64192-2.00010-X
10. *Waters S.L., Cummings L.J., Shakesheff K.M., Rose F.R.A.J.* Tissue growth in a rotating bioreactor. Part I: mechanical stability. *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*. 2006. Vol. 23. P. 311–337. DOI: 10.1093/imammb/dq1013
11. *Cummings L.J., Waters S.L.* Tissue growth in a rotating bioreactor. Part II: fluid flow and nutrient transport problems. *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*. 2007. Vol. 24. P. 169–208. DOI: 10.1093/imammb/dq1024
12. *Spaid M.A., Homsy G.M.* Stability of viscoelastic dynamic contact lines: An experimental study. *Physics of Fluids*. 1997. Vol. 9. P. 823–832. DOI: 10.1063/1.869480
13. *Gilmore J., Islam M., Martinez-Duarte R.* Challenges in the Use of Compact Disc-Based Centrifugal Microfluidics for Healthcare Diagnostics at the Extreme Point of Care. *Micromachines*. 2016. Vol. 7, no. 4. 52. DOI: 10.3390/mi7040052
14. *Tang M., Wang G., Kong S.-K., Ho H.-P.* A Review of Biomedical Centrifugal Microfluidic Platforms. *Micromachines*. 2016. Vol. 7, no. 2. 26. DOI: 10.3390/mi7020026
15. *Lee J., Lee S., Lee M., Prakash R., Kim H., Cho G., Lee J.* Enhancing Mixing Performance in a Rotating Disk Mixing Chamber: A Quantitative Investigation of the Effect of Euler and Coriolis Forces. *Micromachines*. 2022. Vol. 13, no. 8. 1218. DOI: 10.3390/mi13081218
16. *Hsu C.-W., Shih P.-T., Chen J.M.* Enhancement of Fluid Mixing with U-Shaped Channels on a Rotating Disc. *Micromachines*. 2020. Vol. 11, no. 12. 1110. DOI: 10.3390/mi11121110
17. *Mizev A.I., Mosheva E.A., Bratsun D.A.* Extended classification of the buoyancy-driven flows induced by a neutralization reaction in miscible fluids. Part 1. Experimental study. *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 916. A22. DOI: 10.1017/jfm.2021.201
18. *Bratsun D.A., Mizev A.I., Mosheva E.A.* Extended classification of the buoyancy-driven flows induced by a neutralization reaction in miscible fluids. Part 2. Theoretical study. *Journal of Fluid Mechanics*. 2021. Vol. 916. A23. DOI: 10.1017/jfm.2021.202
19. *Utochkin V.Y., Siraev R.R., Bratsun D.A.* Chemoconvective structures in a rotating system of reactive fluids. *Computational Continuum Mechanics*. 2020. Vol. 13, no. 2. P. 205–218. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.2.16
20. *Bratsun D.A., Mosheva E.A.* Peculiar properties of density wave formation in a two-layer system of reacting miscible liquids. *Computational Continuum Mechanics*. 2018. Vol. 11, no. 3. P. 302–322. DOI: 10.7242/1999-6691/2018.11.3.23
21. *Aitova E.V., Bratsun D.A., Kostarev K.G., Mizev A.I., Mosheva E.A.* Convective instability in two-layer system of reacting fluids with concentration-dependent diffusion. *Computational Continuum Mechanics*. 2015. Vol. 8, no. 4. P. 345–358. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.29
22. *Bratsun D., Kostarev K., Mizev A., Aland S., Mokbel M., Schwarzenberger K., Eckert K.* Adaptive Micromixer Based on the Solutocapillary Marangoni Effect in a Continuous-Flow Microreactor. *Micromachines*. 2018. Vol. 9, no. 11. 600. DOI: 10.3390/mi9110600
23. *Mosheva E.A., Shmyrov A.V., Mizev A.I.* Solutions Mixing Visualization in Continuous-Flow Microreactors via Interferometric Technique. *Scientific Visualization*. 2023. Vol. 15, no. 3. P. 72–82. DOI: 10.26583/sv.15.3.08
24. *Kozlov N., Mosheva E.* Investigation of chemoconvection in vibration fields. *Physical Chemistry Chemical Physics*. 2023. Vol. 25. P. 8921–8933. DOI: 10.1039/D2CP06078G
25. *Carrillo L., Magdaleno F.X., Casademunt J., Ortín J.* Experiments in a rotating Hele–Shaw cell. *Physical Review E*. 1996. Vol. 54. P. 6260–6267. DOI: 10.1103/PhysRevE.54.6260
26. *Shmyrov A.V., Denisova M.O., Mizev A.I.* The effect of the centrifugal field on the reaction-diffusion-convection processes in a two-layer system of immiscible solvents. *Bulletin of Perm University. Physics*. 2022. No. 4. P. 70–80. DOI: 10.17072/1994-3598-2022-4-70-80
27. *Schwartz L.W.* Instability and fingering in a rotating Hele–Shaw cell or porous medium. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*. 1989. Vol. 1. P. 167–169. DOI: 10.1063/1.857543
28. *Waters S.L., Cummings L.J.* Coriolis effects in a rotating Hele–Shaw cell. *Physics of Fluids*. 2005. Vol. 17. 043101. DOI: 10.1063/1.1861752
29. *Alvarez-Lacalle E., Gadêlha H., Miranda J.A.* Coriolis effects on fingering patterns under rotation. *Physical Review E*. 2008. Vol. 78. 026305. DOI: 10.1103/PhysRevE.78.026305

30. *Chen C.-Y., Liu Y.-C.* Fingering instabilities of a miscible fluid annulus on a rotating Hele–Shaw cell. *International Journal of Dynamics of Fluids*. 2005. Vol. 1, no. 1. P. 57–68.
31. *Chen C.-Y., Liu Y.-C.* Numerical simulations of miscible fluids on a rotating Hele–Shaw cell with effects of Coriolis forces. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2005. Vol. 48. P. 853–867. DOI: 10.1002/fld.958
32. *Chen C.-Y., Chen C.-H., Miranda J.A.* Numerical study of pattern formation in miscible rotating Hele–Shaw flows. *Physical Review E*. 2006. Vol. 73. 046306. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.046306
33. *Chen C.-Y., Huang Y.-S., Miranda J.A.* Diffuse-interface approach to rotating Hele–Shaw flows. *Physical Review E*. 2011. Vol. 84. 046302. DOI: 10.1103/PhysRevE.84.046302
34. *Echchadli M., Aniss S.* Thermal convection instability of two miscible viscous fluids in a rotating annular Hele–Shaw cell. *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34. P. 31–47. DOI: 10.1063/5.0098332
35. *Oberbeck A.* Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen. *Annalen der Physik*. 1879. Vol. 243. P. 271–292. DOI: 10.1002/andp.18792430606
36. *Zeng J., Yortsos Y.C., Salin D.* On the Brinkman correction in unidirectional Hele–Shaw flows. *Physics of Fluids*. 2003. Vol. 15. P. 3829–3836. DOI: 10.1063/1.1622947
37. *Martin J., Rakotomalala N., Salin D.* Gravitational instability of miscible fluids in a Hele–Shaw cell. *Physics of Fluids*. 2002. Vol. 14. P. 902–905. DOI: 10.1063/1.1431245
38. *Kozlov V., Vlasova O.* Oscillatory dynamics of immiscible liquids with high viscosity contrast in a rectangular Hele–Shaw channel. *Physics of Fluids*. 2022. Vol. 34. 032121. DOI: 10.1063/5.0084363
39. *Kozlov V., Karpunin I., Kozlov N.* Finger instability of oscillating liquid–liquid interface in radial Hele–Shaw cell. *Physics of Fluids*. 2020. Vol. 32. 102102. DOI: 10.1063/5.0018541
40. *Bratsun D.A., De Wit A.* On Marangoni convective patterns driven by an exothermic chemical reaction in two-layer systems. *Physics of Fluids*. 2004. Vol. 16. P. 1082–1096. DOI: 10.1063/1.1648641
41. *Brinkman H.C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Flow, Turbulence and Combustion*. 1949. Vol. 1. P. 27–34. DOI: 10.1007/BF02120313
42. *Gershuni G.Z., Zhuhovitsky E.M.* *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1976. 330 p.