ISSN: 1999-6691, e-ISSN: 2782-3709 DOI: http://doi.org/10.7242/1999-6691/2024.17.4.40

Научная статья

Осесимметричная задача фильтрации газа в пороупругой среде

Р.А. Вирц

Алтайский государственный университет, Барнаул, Российская Федерация

Основу модели составляют уравнения фильтрации жидкостей или газов в деформируемых пористых средах, являющиеся обобщением моделей пороупругих сред Маскета–Леверетта. Допущение малости скорости движения твердого скелета среды позволяет свести определяющую систему уравнений к двум уравнениям для нахождения эффективного давления и пористости. Под областью фильтрации газа подразумевается пласт горной породы, в котором на глубине расположен забой нагнетательной скважины; по бокам пласт ограничен непроницаемыми породами. Кровля пласта совпадает с земной поверхностью и является проницаемой. Миграция углекислого газа и его выход на поверхность происходят за счет увеличения пористости кровли пласта. На основе этих предположений поставлены краевые условия для скоростей газовой и твердой фаз, которые далее переписаны в терминах искомой функции эффективного давления среды. Полученная начально-краевая задача решается численно с использованием схемы переменных направлений и метода Рунге–Кутты 4-го порядка точности. Приводится разностная схема и алгоритм решения поставленной задачи. Определены порядки равномерной сходимости по пространственным и временной переменным и получена приближенная оценка скорости сходимости численного решения. Выполнено численное моделирование нескольких вариантов закачки углекислого газа в пласт на разных глубинах нахождения забоя скважины и с различными скоростями нагнетания. Выявлены оптимальные условия нагнетания газа для его хранения в геологической среде в долгосрочной перспективе.

Ключевые слова: пористость, пороупругость, фильтрация, углекислый газ, диоксид углерода, скважина, численное решение, нагнетание

Получение: 15.04.2024 / *Публикация онлайн*: 30.12.2024 УДК 532.5 + 517.95 + 519.63

1. Введение

Геологическое захоронение углерода представляет собой перспективный метод смягчения последствий изменения климата, поскольку позволяет безопасно и надежно удерживать большие объемы диоксида углерода (CO_2) под землей в течение длительных периодов времени. Этот процесс, называемый секвестрацией, предполагает: улавливание CO_2 из источников, например, теплоэлектростанций, промышленных предприятий; его транспортировку; закачку в геологические формации, такие как истощенные нефтегазовые месторождения или глубокие соленые водоносные горизонты. Исследования, связанные с захоронением углекислого газа, сосредоточены на понимании геологических процессов, происходящих при хранении CO_2, оценке рисков и разработке стратегий мониторинга. Моделирование и анализ данных играют важную роль в предсказании поведения CO_2 в подземных формациях и обеспечении его безопасного и долгосрочного содержания. Эффективные технологии хранения и использования CO_2 имеют решающее значение для смягчения последствий изменения климата и перехода к устойчивой энергетической системе.

Проект по закачке CO_2 на месторождении Sleipner (Норвегия) [1] стал первым в мире промышленным проектом по улавливанию и хранению углекислого газа, в рамках которого с 1996 года закачано более 16 млн тонн CO_2. Ключевыми выводами мониторинга на Sleipner стала двойная интерпретация сейсмических и гравиметрических (установленных количественно путем химического анализа) данных при оценке изменения массы свободного CO_2 и развития формы пласта во времени. Опыт, полученный на Sleipner, помог в разработке рекомендаций для мониторинга в будущих проектах по закачке CO_2, показав, что выбор технологий мониторинга, а также продолжительность и объем исследований должны быть специфичными для каждого случая, основанными на рисках, учитывающих долгосрочный характер наблюдений. В связи с этим стала актуальной разработка и использование математических моделей, описывающих данный процесс.

Моделированию секвестрации (связывания с целью долгосрочного хранения в поглотителях) и фильтрации углекислого газа посвящена обширная литература. В работе [2] проведено сравнение решений одномерной и двумерной задач фильтрации с целью поиска оптимального водогазового воздействия на нефтяной пласт. В [3] рассмотрена задача закачки углекислого газа в водонасыщенный проницаемый пласт. Методами прямого численного моделирования определена граница области, занимаемой CO_2 в пласте при различных параметрах нагнетания. Проведено сравнение результатов расчётов по полной модели фильтрации с приближенным автомодельным решением задачи. В работе [4] представлен комплексный экспериментальный подход к характеристике химического воздействия на многофазный поток CO_2 в водонасыщенных породах–коллекторах. Представлены надежные экспериментальные методы измерения относительной проницаемости и степени насыщения порового пространства. Статья [5] содержит всесторонний обзор химико-гидромеханического воздействия CO_2 на коллектор и покрывающие породы, как неповрежденные, так и трещиноватые, которое было изучено с помощью лабораторных экспериментов. Разработке эффективного подхода для облегчения вычислительной нагрузки, связанной с моделированием секвестрации CO_2 с использованием метода конечных разностей и шахматной сетки, посвящено исследование [6]; предложенный метод значительно снижает вычислительные требования к моделированию, что делает его более эффективным для крупномасштабных приложений. В [7] построены математические модели для двух сценариев закачки с разными скоростями, а также проанализированы изменения давлений, характерные для процесса распространения газа в пласте. В [8] рассматривается математическая модель процесса закачки углекислого газа в геологическое хранилище с переменной пористостью. Изучено влияние различных параметров закачки газа на эффективность хранения в пластах с низкой начальной пористостью. Численные расчеты позволили определить оптимальные условия закачки для долгосрочного содержания углекислого газа в геологической среде. В работе [9] представляется двумерная математическая модель явлений переноса углекислого газа в бетонных конструкциях. Для конкретного процесса карбонизации получено двумерное линейное уравнение в частных производных, основанное на принципе баланса масс и конвективно-дисперсионном уравнении. В статье [10] предлагается новый многомасштабный численный метод, с помощью которого проницаемость гидратсодержащих отложений в резервуаре размером в несколько сотен метров оценивается с использованием метода машинного обучения, базирующегося на результатах микроскопического моделирования в масштабе пор. Более подробный обзор математического моделирования хранения углекислого газа в геологических формациях и возникающих при этом проблем см. в [11].

Цель данной работы состоит в апробации модели, учитывающей изменение пористости среды в процессе закачки газа, в получении на ее основе данных о динамике реальных фильтрационных процессов и оценке сходимости численного решения, в выявлении оптимальных параметров закачки газа CO_2 для его безопасного и долгосрочного хранения в геологической среде при разных скоростях нагнетания и глубинах расположения его выхода в породу через забой скважины.

2. Постановка задачи

Математическая модель фильтрации жидкости или газа в пороупругой среде основана на уравнениях сохранения масс для газовой и твердой фаз, законе Дарси, реологическом соотношении для пористой среды и уравнении баланса сил [12, 13]:

$$\frac{\partial(\phi\rho_f)}{\partial t}+\nabla\cdot(\phi\mathbf{v}_f\,\rho_f)=0,\quad \frac{\partial(\rho_s(1-\phi))}{\partial t}+\nabla\cdot((1-\phi)\mathbf{v}_s\,\rho_s)=0, \tag{1}$$

$$\phi(\mathbf{v}_f-\mathbf{v}_s)=-\frac{K(\phi)}{\mu}(\nabla p_f-\rho_f\mathbf{g}),\quad p_f=p_{tot}-p_e, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}_s=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)\left(\frac{\partial p_e}{\partial t}+\mathbf{v}_s\cdot\nabla p_e\right), \tag{3}$$

$$\rho_{tot}g+\nabla\cdot\left((1-\phi)\eta\left(\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{x}}+\left(\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\right)\right)-\nabla p_{tot}=0. \tag{4}$$

В уравнениях (1)–(4) приняты обозначения: t — время; $\mathbf{v}_f$, $\mathbf{v}_s$, ρ_f, ρ_s — векторы скорости и плотности газовой и твердой фаз соответственно; ϕ — пористость; $\mathbf{g}=(0,0,-g)$ — вектор силы тяжести; p_f,p_s — давления в газовой и твердой фазах; $p_e=p_{tot}-p_f$ — эффективное давление; $p_{tot}=\phi p_f+(1-\phi)p_s$ — общее давление; $\rho_{tot}=\phi\rho_f+(1-\phi)\rho_s$ — плотность двухфазной среды; $a_1(\phi)$, $a_2(\phi)$ — характеристики пористого скелета, в частности, $a_1(\phi)$ — обратная объемная вязкость, $a_2(\phi)$ — коэффициент объемной сжимаемости (коэффициенты обратной объемной вязкости и объемной сжимаемости обычно определяются экспериментально и имеют вид: $a_1(\phi)=\phi^m/\eta$, $a_2(\phi)=\phi^l\beta_\phi$, где η — вязкость твердой фазы, β_ϕ — коэффициент сжимаемости пор, $l=1/2$, $m=2$, $n=3$ [12]); $K(\phi)=k'\phi^n$ — коэффициент проницаемости, где k' — проницаемость пористой среды; $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ — операция транспонирования. В дальнейшем используется обозначение $k(\phi)=K(\phi)/\mu$, где μ — динамическая вязкость газа. Плотности газовой и твердой фаз считаются постоянными. Задача записана в эйлеровых координатах $(x,y,z,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, $t\in(0,T)$.

В отличие от подходов других авторов, в которых предполагается однородная пористость по пространству породного слоя, предложенная модель способна отображать различные сценарии течения, встречающиеся в реальных пористых средах. В модели учитывается возможность изменения пористости среды в процессе закачки газа, то есть более точно описывается динамика фильтрационных процессов и реальные условия, при которых пористость может зависеть от воздействия внешних факторов и параметров самого процесса закачки. Аналогичные системы уравнений ранее анализировались в исследованиях [14–25].

Преобразуем систему (1)–(4). Складывая уравнения (1), (2), имеем:

$$\nabla\cdot(\phi(\mathbf{v}_f-\mathbf{v}_s))=-\nabla\cdot\mathbf{v}_s. \tag{5}$$

Используя закон Дарси (2) и реологическое соотношение (3), из (5) получаем:

$$\nabla\cdot(-k(\phi)(\nabla p_{tot}-\nabla p_e-\rho_f\mathbf{g}))=\nabla\cdot\mathbf{v}_s. \tag{6}$$

Закон сохранения массы для твердой фазы можно выразить следующим образом:

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt}=\nabla\cdot\mathbf{v}_s. \tag{7}$$

Уравнения (6), (7) с учетом реологического соотношения (3) принимают вид:

$$\nabla\cdot(-k(\phi)(\nabla p_{tot}-\nabla p_e-\rho_f\mathbf{g}))=a_1(\phi)p_e+a_2(\phi)\frac{dp_e}{dt}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{d\phi}{dt}=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)\frac{dp_e}{dt}, \tag{9}$$

где $d(\cdot)/dt=\partial(\cdot)/\partial t+\mathbf{v}_s\cdot\nabla(\cdot)$. Предполагая, что твердая фаза неподвижна, можно пренебречь конвективными членами и получить: $d(\cdot)/dt\approx\partial(\cdot)/\partial t$ [9]. Обычно вязкость газа намного ниже вязкости твердого скелета, поэтому при практических расчетах девиатор тензора напряжений в уравнении баланса сил (4) можно не принимать во внимание [13]. С учетом введенных выше предположений уравнения (8), (9) приводят к системе для нахождения эффективного давления и пористости:

$$\nabla\cdot(k(\phi)\,(\nabla p_e-\rho\mathbf{g}))=a_1(\phi)p_e+a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{10}$$

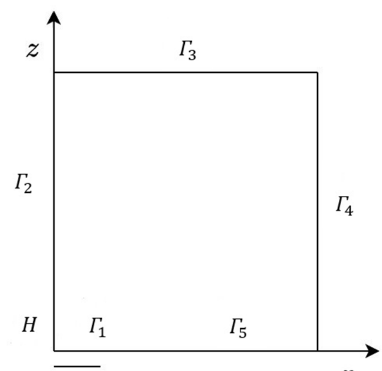
$$\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t}=-a_1(\phi)p_e-a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{11}$$

где $\rho=(1-\phi)\Delta$, $\Delta=\rho_s-\rho_f$.

В дальнейшем будем рассматривать осесимметричный случай, поэтому достаточно провести моделирование фильтрации газа в области, в виде сектора с центральным углом $\pi/2$. В цилиндрических координатах (r,θ,z) уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,k(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(\phi)\left(\frac{\partial p_e}{\partial z}+\rho g\right)\right)=a_1(\phi)p_e+a_2(\phi)\frac{\partial p_e}{\partial t}. \tag{12}$$

Уравнение (11) остается без изменений.



Решим начально–краевую задачу, представляемую системой уравнений (11), (12). Фильтрация газа происходит в конечной области переменных (r,z), граница которой состоит: из части Γ_1, проницаемой для газа и соответствующей нагнетательной скважине; непроницаемых частей Γ_2, Γ_4, Γ_5; кровли Γ_3. При этом $\Gamma_i=\partial\Omega,\ i=1,\ldots,5$. Пусть $Q_T=\Omega\times(0,T)$. На глубине H м происходит закачка в пласт углекислого газа (CO_2) со скоростью $(v(t)\geqslant 0)$, ширина расчетной области закачки равна R м (Рис. 1).

Запишем граничные условия:

– на Γ_1 условия непротекания для твердой фазы и притока газа

$$(\mathbf{v}_s\cdot\mathbf{n})=0,\quad (\mathbf{v}_f\cdot\mathbf{n})=-v(t),\quad v(0)=0,\quad (r,z,t)\in S_1=\Gamma_1\times(0,T), \tag{13}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Γ_i;

– на участках $\Gamma_i, i=2,4,5$ условия непротекания для твердой фазы и газа

$$(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (r,z,t) \in S_i; \tag{14}$$

– на Γ_3 давления твердой фазы и газа (p_s, p_f), совпадающие, соответственно, с литостатическим и гидростатическим [13]

$$p_s = p_a + \rho_s g(H-z), \quad p_f = p_a + \rho_f g(H-z), \quad (r,z,t) \in S_3, \tag{15}$$

где p_a — атмосферное давление.

В дополнение к граничным условиям необходимо задать начальное значение для эффективного давления и пористости среды:

$$t=0: \quad p_e(r,z,0) = p_e^0(r,z), \quad \phi(r,z,0) = \phi^0(r,z).$$

Перепишем граничные условия (13)–(15) применительно к функции p_e. С использованием закона Дарси (2) и представления для p_e они приобретают вид:

$$\frac{k(\phi)}{\phi}(\nabla p_e - \rho\mathbf{g}) \cdot n = -v(t), \quad (r,z,t) \in S_1, \tag{16}$$

$$(\nabla p_e - \rho\mathbf{g}) \cdot n = 0, \quad (r,z,t) \in S_i, \quad i = 2,4,5, \tag{17}$$

$$p_e = 0, \quad (r,z,t) \in S_3. \tag{18}$$

Перейдем к безразмерным переменным:

$$r' = r/R, \quad z' = z/H, \quad t' = t/T, \quad p_e' = p_e/P, \quad v' = v/V,$$

где T — характерное время, масштабы давления и скорости примем равными $P = \Delta gH$ и $V = \Delta g k'/\mu$. Область изменения r', z', t' есть квадрат со стороной, равной единице. Таким образом, система уравнений (11), (12) с краевыми условиями (16)–(18) становится следующей (штрихи у безразмерных величин опущены):

$$\frac{\alpha}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\phi^n \frac{\partial p_e}{\partial r}\right) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial z}\left(\phi^n\left(\frac{\partial p_e}{\partial z} + (1-\phi)\right)\right) = \lambda\phi^m p_e + \omega\phi^l \frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\lambda\phi^m p_e - \omega\phi^l \frac{\partial p_e}{\partial t}, \tag{20}$$

$$\phi^{n-1}\left(\frac{\partial p_e}{\partial z} + (1-\phi)\right) = v(t), \quad (r,z,t) \in S_1, \tag{21}$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial r} = 0, \quad (r,z,t) \in \{S_2, S_4\}, \quad \frac{\partial p_e}{\partial z} + (1-\phi) = 0, \quad (r,z,t) \in S_5, \tag{22}$$

$$p_e = 0, \quad (r,z,t) \in S_3. \tag{23}$$

Входящие в (19), (20) безразмерные параметры имеют вид: $\alpha = k'PT/(\mu R^2)$, $\varepsilon = k'PT/(\mu H^2)$, $\lambda = TP/\eta$, $\omega = P\beta_\phi$.

Общий тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ определяется через тензоры напряжений твердой ($\boldsymbol{\sigma}_s$) и жидкой ($\boldsymbol{\sigma}_f$) фаз по правилу [26]:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-\phi)(-p_s\mathbf{I}) - \phi p_f \mathbf{I} = -p_{tot}\mathbf{I},$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор. Уравнение баланса сил (4) с учетом принятых выше упрощений принимает вид:

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot}\,\mathbf{g}.$$

Последнее уравнение перепишем как $\partial p_{tot}/\partial r = 0$, $\partial p_{tot}/\partial z = -\rho_{tot}\,g$.

Задав краевое условие при $z=0$ для уравнения, характеризующего общее давление в двухфазной среде как

$$p_{tot}(r,0,t) = \phi p_f(r,0,t) + (1-\phi(r,0,t))p_s(r,0,t)$$

и воспользовавшись (15), из представлений для эффективного и общего давлений можно найти давления в жидкой и твердой фазах:

$$p_f = p_{tot} - p_e, \qquad p_s = \frac{p_{tot} - \phi p_f}{1-\phi}.$$

3. Численный анализ

Начально–краевую задачу (19)–(23) решаем численно. В области $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ строим равномерную сетку с шагами h_r, h_z по пространству и шагом τ по времени:

$$\tilde{\omega}_{h_r h_z \tau} = \tilde{\omega}_{h_r} \times \tilde{\omega}_{h_z} \times \omega_\tau : \tilde{\omega}_{h_r} = \{r_i = i h_r,\, i = 0,1,\ldots,N_r,\, N_r h_r = 1\},$$
$$\tilde{\omega}_{h_z} = \{z_j = j h_z,\, j = 0,1,\ldots,N_z,\, N_z h_z = 1\},$$
$$\tilde{\omega}_\tau = \{t_k = k\tau,\, i = 0,1,\ldots,M,\, M\tau = 1\}.$$

Численные решения в узлах сетки (r_i, z_j, t_k) обозначаются через $\varphi_{i,j}^k = \phi(r_i, z_j, t_k)$, $p_{i,j}^k = p_e(r_i, z_j, t_k)$.

При численной реализации уравнения (19) для нахождения эффективного давления применяется схема переменных направлений [27]:

$$a_{i,j}^k \frac{p_{i,j}^{k+1/2} - p_{i,j}^k}{\tau/2} = \Lambda_{rr} p_{i,j}^{k+1/2} + \Lambda_{zz} p_{i,j}^k + f_{i,j}^k, \tag{24}$$

$$a_{i,j}^k \frac{p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j}^{k+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_{rr} p_{i,j}^{k+1/2} + \Lambda_{zz} p_{i,j}^{k+1} + f_{i,j}^k, \tag{25}$$

где

$$\Lambda_{rr} p_{i,j}^{k+1/2} = \frac{1}{h_r}\left[\frac{b_{i+1/2,j}^k}{r_i}\frac{p_{i+1,j}^{k+1/2} - p_{i,j}^{k+1/2}}{h_r} - \frac{b_{i-1/2,j}^k}{r_i}\frac{p_{i,j}^{k+1/2} - p_{i-1,j}^{k+1/2}}{h_r}\right],$$

$$\Lambda_{zz} p_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{h_z}\left[c_{i,j+1/2}^k \frac{p_{i,j+1}^{k+1} - p_{i,j}^{k+1}}{h_z} - c_{i,j-1/2}^k \frac{p_{i,j}^{k+1} - p_{i,j-1}^{k+1}}{h_z}\right],$$

$$a_{i,j}^k = \omega(\varphi_{i,j}^k)^l, \quad b_{i,j}^k = \alpha r_i (\varphi_{i,j}^k)^n, \quad c_{i,j}^k = \varepsilon (\varphi_{i,j}^k)^n,$$

$$d_{i,j}^k = \varepsilon(\varphi_{i,j}^k)^n \left(1 - \phi_{i,j}^k\right), \quad e_{i,j}^k = \lambda(\varphi_{i,j}^k)^m, \quad f_{i,j}^k = \frac{d_{i,j+1}^k - d_{i,j-1}^k}{2h_y} - e_{i,j}^k p_{i,j}^k,$$

$$b_{i+1/2,j}^k = \frac{2b_{i,j}^k b_{i+1,j}^k}{b_{i,j}^k + b_{i+1,j}^k}, \quad b_{i-1/2,j}^k = \frac{2b_{i,j}^k b_{i-1,j}^k}{b_{i,j}^k + b_{i-1,j}^k}, \quad c_{i,j+1/2}^k = \frac{2c_{i,j}^k c_{i,j+1}^k}{c_{i,j}^k + c_{i,j+1}^k}, \quad c_{i,j-1/2}^k = \frac{2c_{i,j}^k c_{i,j-1}^k}{c_{i,j}^k + c_{i,j-1}^k}.$$

Условия (21)–(23) становятся следующими:

$$(\varphi_{i,0}^k)^{n-1}\left(\frac{-3p_{i,0}^{k+1} + 4p_{i,1}^{k+1} - p_{i,2}^{k+1}}{2h_z} + \left(1 - \varphi_{i,0}^k\right)\right) = v, \quad (r_i, z_j, t_k) \in S_1,$$

$$\frac{-3p_{0,j}^{k+1/2} + 4p_{1,j}^{k+1/2} - p_{2,j}^{k+1/2}}{2h_r} = 0, \quad (r_i, z_j, t_k) \in S_2,$$

$$\frac{p_{N_r-2,j}^{k+1/2} - 4p_{N_r-1,j}^{k+1/2} + 3p_{N_r,j}^{k+1/2}}{2h_r} = 0, \quad (r_i, z_j, t_k) \in S_4,$$

$$\frac{-3p_{i,0}^{k+1} + 4p_{i,1}^{k+1} - p_{i,2}^{k+1}}{2h_z} + \left(1 - \varphi_{i,0}^k\right) = 0, \quad (r_i, z_j, t_k) \in S_5,$$

$$p_{i,N_y}^{k+1} = 0, \quad (r_i, z_j, t_k) \in S_3,$$

где производные первого порядка аппроксимируются с помощью трехточечной первой разностной производной и обеспечивают 2-й порядок точности решения.

Для нахождения пористости из уравнения (20) применяется метод Рунге–Кутты 4-го порядка [28]:

$$\frac{\varphi_{i,j}^{k+1}-\varphi_{i,j}^{k}}{\tau}=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4), \tag{26}$$

$$k_1=\left(1-\phi_{i,j}^{k}\right)\left(-\lambda(\varphi_{i,j}^{k})^{m}p_{i,j}^{k}-\omega(\varphi_{i,j}^{k})^{l}\frac{p_{i,j}^{k+1}-p_{i,j}^{k}}{\tau}\right)\equiv F\left(\varphi_{i,j}^{k},p_{i,j}^{k}\right),$$

$$k_2=F\left(\varphi_{i,j}^{k}+\tau k_1/2,p_{i,j}^{k}\right),\quad k_3=F\left(\varphi_{i,j}^{k}+\tau k_2/2,p_{i,j}^{k}\right),\quad k_4=F\left(\varphi_{i,j}^{k}+\tau k_3,p_{i,j}^{k}\right).$$

Вычислительный алгоритм включает шаги:

1. Инициализация — на временном слое $k=0$ присваиваются начальные значения пористости и эффективному давлению $p_{i,j}^{0}$, $\varphi_{i,j}^{0}$.
2. Расчет давления —для каждого временного слоя $k>0$ производится прогонка:
а) по строкам (по направлению r), используются уравнения (24), для вычисления $p_{i,j}^{k+1/2}$ при фиксированном $p_{i,j}^{k}$;
б) по столбцам (по направлению z) согласно уравнению (25) для вычисления $p_{i,j}^{k+1}$ при фиксированном $p_{i,j}^{k+1/2}$.
3. Расчет пористости — для каждого временного слоя $k>0$ находится пористость $\varphi_{i,j}^{k+1}$ из уравнения (26) по рассчитанному давлению $p_{i,j}^{k+1}$.
4. Повторение — на каждом временном слое $k>0$ (M раз) выполняются шаги расчета давления и пористости.

Установим порядки равномерной сходимости численного решения задачи (19)–(23) по пространственным и временной переменным. Для дальнейших рассуждений возьмем за основу результаты работы [29]. Зафиксируем параметры: скорость нагнетания газа $v=0.5$; характерное время $T=1$ сут; глубину расположения источника закачки (забоя нагнетательной скважины) $H=50$ м.

Порядки равномерной сходимости численных решений по пространственным переменным r и z отыщем на основе эволюции пористости. При фиксированном шаге по времени τ определим следующие величины:

$$S_q=\max_k\max_j\max_i\left|\varphi_{i,j}^{q+1}(t_k)-\varphi_{i,j}^{q}(t_k)\right|,$$

$$i=0,1,...,N2^q,\quad j=0,1,...,N2^q,\quad k=0,...,M\quad(q=0,1,2,3),$$

где $M=1/\tau$, $N_r=N_z=N$, $N=50$. Значение S_q вычислим как максимум разности приближенных решений, полученных на двух последовательных вложенных пространственных сетках. Предположим, что для S_q справедлива оценка:

$$S_q=M_1\left(\frac{1}{N2^q}\right)^{\chi}+M_2\tau^{\beta}, \tag{27}$$

где M_1 и M_2 — точные константы, то есть их значения не зависят от q. Как вытекает из (27), для разности $W_q=S_q-S_{q+1}$ верно выражение:

$$W_q=M_1\left(\frac{1}{N2^q}\right)^{\chi}\left(\frac{1}{2^{\chi}}\right), \tag{28}$$

следовательно,

$$W_q/W_{q+1}=2^{\chi}.$$

Из последнего соотношения вытекает, что порядок скорости сходимости χ для соответствующего значения q определяется формулой (см. Табл. 1):

$$\chi(q)=\log_2(W_q/W_{q+1})\quad(q=0,1,2,3).$$

Минимизируя найденные значения $\chi(q)$, можно оценить порядок скорости сходимости метода. Использование соотношения (28) позволяет установить значение постоянной M_1. Таким образом, из проведенного вычислительного эксперимента в первом слагаемом приближенного решения

$$\left|\phi(r_i,z_j,t_k)-\varphi_{ij}^{k}\right|\leqslant M_1N^{-\chi}+M_2\tau^{\beta} \tag{29}$$

значения постоянных χ и M_1 получаются следующими: $\chi\approx1.311$, $M_1\approx2.05$.

По аналогии с χ и M_1 можно найти значения постоянных M_2 и β. Для этого фиксируем параметры пространственной сетки и рассматриваем последовательность вложенных временных сеток. Тогда имеем минимальное значение $\beta \approx 1.443$ (Табл. 2) и соответствующую константу $M_2 \approx 1.17$. Итак, расчетным путем определены все постоянные равномерной сходимости, входящие в оценку (27). С учетом этого приближенное решение (29) принимает вид:

$$\left|\phi(r_i,z_j,t_k)-\varphi_{ij}^k\right| \leqslant 2.05h^{1.311}+1.17\tau^{1.443}.$$

Таблица 1. Порядок равномерной сходимости по пространственным переменным

q	0	1	2	3
χ	1.311	1.312	1.313	1.313

Таблица 2. Порядок равномерной сходимости по временной переменной

q	0	1	2	3
β	1.443	1.556	1.600	1.601

Для проверки корректности реализации численного алгоритма уравнение (19) решено с помощью двух разностных схем: явной схемы с ограничением на шаг по времени и схемы со стабилизирующей поправкой [30]. Разница между полученными результатами для пористости и давления в нескольких контрольных точках на момент окончания процесса закачки и через месяц после остановки служила критерием адекватности алгоритма.

Рассмотрены две контрольные точки области фильтрации: точка 1 возле забоя скважины в момент окончания закачки; точка 2 вблизи кровли через месяц после окончания закачки. Вычисленная пористость в точке 1 составила: $\phi_1 = 0.125$ при расчете давления по явной схеме; $\phi_1 = 0.124$ при расчете давления по схеме со стабилизирующей поправкой. Рассчитанное в контрольной точке 2 давление равнялось: $p_2 = 0.154014$ МПа (при явной схеме); $p_2 = 0.1550273$ МПа (при схеме со стабилизирующей поправкой). Сравнение результатов расчетов с использованием двух разностных схем показывает незначительное расхождение в значениях вычисленных параметров. В частности, максимальная разница по пористости составляет 0.001 вблизи скважины на момент окончания закачки, а максимальное отличие по давлению — 0.00101325 МПа через месяц после остановки закачки. Эти расхождения свидетельствуют об устойчивости и точности выбранного расчетного алгоритма.

4. Обзор результатов

Рассмотрено три варианта нагнетания углекислого газа в пласт горной породы через скважину с забоем, находящимся на глубине H м. Как правило, для закачки газа используются скважины отработанных газовых или нефтяных месторождений. В данной работе диаметр скважины равен $D = 168$ мм [31]; для простоты принято, что забой скважины расположен в центре нижней границы области фильтрации (Рис. 1). Параметры нагнетания углекислого газа представлены в таблице 3. Там же, для детальной картины процесса приведены сведения о расходах газа при закачке. Объемный и массовый расходы газа находятся по формулам $Q = \pi D^2 v/4$ и $Q_m = Q\rho_f$ соответственно. Физические свойства газа и пористой среды приняты следующими: $\eta = 10^{18}$ Па·с, $\beta_\phi = 10^{-8}$ Па$^{-1}$, $k' = 10^{-13}$ м^2, $\mu = 1463\cdot 10^{-8}$ Па·с, $g = 9.8$ м/с^2, $\rho_s = 2.6\cdot 10^3$ кг/м^3, $\rho_f = 800$ кг/м^3. Прочность некоторых горных пород на сжатие и растяжение представлена в таблице 4 [32].

Таблица 3. Параметры нагнетания CO_2

Свойство, обозначение, размерность	Вариант нагнетания		
	A	B	C
Начальная пористость ϕ^0	0.025	0.025	0.025
Безразмерная скорость нагнетания v	1	0.3	0.1
Глубина забоя скважины в пласте H, м	50	300	800
Длительность закачки газа T, сут	7	7	7
Расход газа Q, м^3/с	$1.133\cdot 10^{-5}$	$3.398\cdot 10^{-6}$	$1.132\cdot 10^{-6}$
Массовый расход Q_m, кг/с	0.0086	0.0026	$8.632\cdot 10^{-4}$
Общая масса закачанного за время t газа Q_t, кг	5201.28	1572.48	522.10
Максимальное значение тензора напряжений в пласте в зоне забоя скважины $\lvert\boldsymbol{\sigma}\rvert_{\max}$, МПа	1.41855	7.90335	21.0756

Закачка во всех вариантах продолжалась в течение $T = 7$ сут. Распределения пористости среды и давления газа на момент остановки закачки при параметрах нагнетания A представлены на рисунке 2. Пористость породы

Таблица 4. Прочность горных пород CO_2

Порода	Предел прочности	
	на сжатие σ_c, Па	на растяжение σ_s, Па
Гранит	1391.56	108.562
Порфирит	2210.71	177.646
Известняк	276.339	29.6
Песчаник	1618.55	69.0846

вблизи скважины подвергается наибольшему изменению. Это связано с тем, что газ, закачиваемый в скважину, создает вблизи забоя более высокое давление, чем в остальной части породы. Высокое давление приводит к значительному расширению пор в этой области и, следовательно, к увеличению пористости. Давление газа у забоя скважины составляет около 10.1325 МПа. В слоях породы, находящихся выше забойной зоны возрастания пористости не наблюдается.

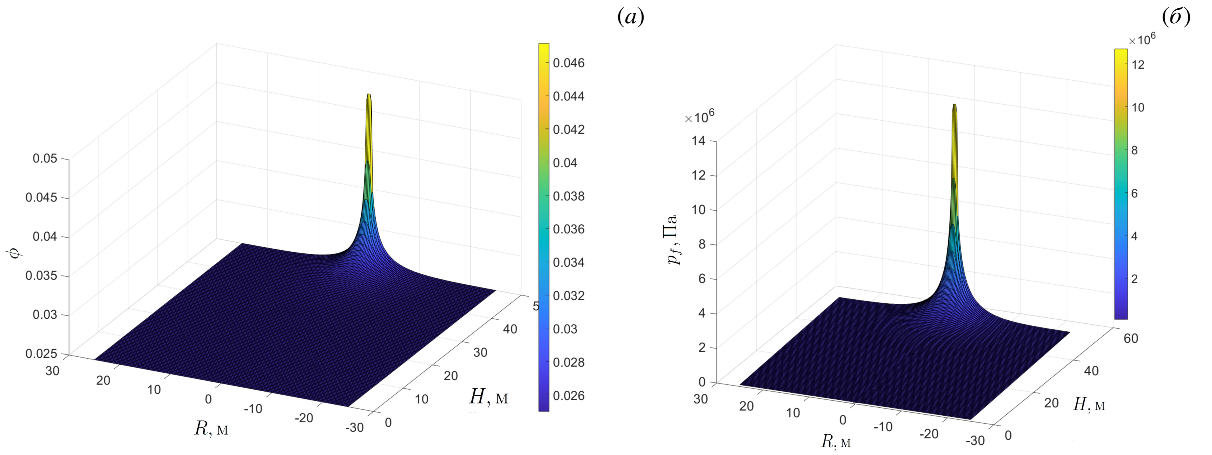


Рис. 2. Вариант A: распределения пористости (*а*) и давления газа (*б*) на момент остановки закачки (через 7 сут)

На следующие, 8-е сутки после остановки закачки газа, пористость и давление представлено на рисунке 3. Пористость и давление у скважины постепенно уменьшаются, но в более верхних слоях породы, наоборот, увеличиваются. Уменьшение пористости и давления зоне забоя скважины связано с остановкой закачки газа и, соответственно, с уменьшением его давления в области нагнетания. Давление газа у скважины на 8-е сут в 10 раз меньше, чем на момент остановки закачки.

Разница в давлении между областью нагнетания и кровлей пласта создает градиент давления, который приводит к миграции газа вверх по пласту. Это подтверждается увеличением пористости и давления вблизи кровли пласта спустя месяц после прекращения закачки (Рис. 4). Если давление газа в зоне кровли пласта превышает атмосферное давление, газ может выходить на поверхность через естественные трещины или перфорационные отверстия в обсадной колонне. В данном случае вблизи кровли пласта давление составляет около 0.151987 МПа, то есть не равно атмосферному. Таким образом наблюдаемые изменения пористости и давления указывают на миграцию CO_2 в направлении кровли пласта и его возможный выход на поверхность. Максимальное значение тензора напряжений в зоне забоя в этом случае равно $|\boldsymbol{\sigma}|_{\max} = 1.41855$ МПа.

При параметрах нагнетания варианта B пористость среды представлена после остановки закачки газа на следующие, 8-е сут (Рис. 5) и спустя год (Рис. 6). Спустя год на верхней кровле пласта пористость не равна начальному значению и газ достигнет поверхности. Максимальное значение тензора напряжений в этом случае равно $|\boldsymbol{\sigma}|_{\max} = 7.90335$ МПа.

При параметрах нагнетания C пористость среды на момент остановки закачки газа и на следующие сутки представлена на рисунке 7, через полгода и год — на рисунке 8. Результаты расчетов для пористости спустя 180 дней и год не отличаются друг от друга. Данные показывают, что пористость в зоне забоя скважины уменьшается с увеличением времени после остановки закачки газа и достигает стационарного значения через 180 дней.

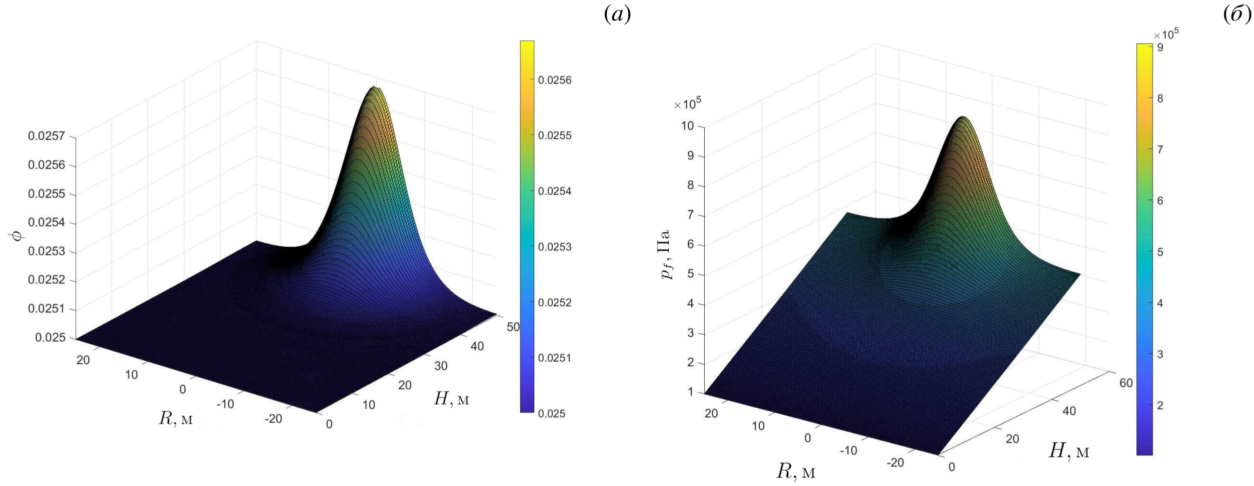


Рис. 3. Вариант A: пористость (*а*) и давление газа (*б*) на момент времени 8 сут

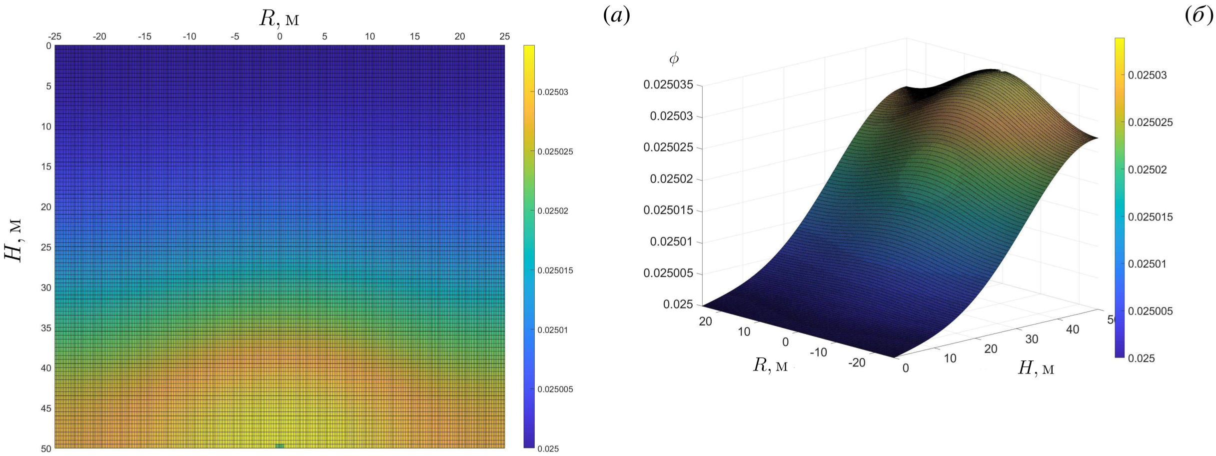


Рис. 4. Вариант нагнетания A: пористость спустя 30 сут

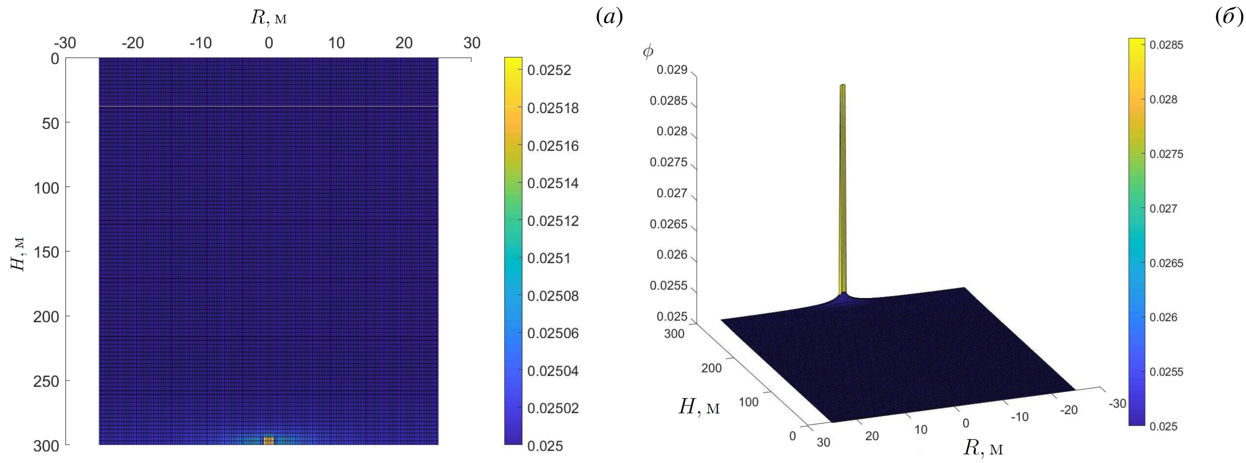


Рис. 5. Вариант нагнетания B: пористость на момент остановки закачки (через 7 сут)

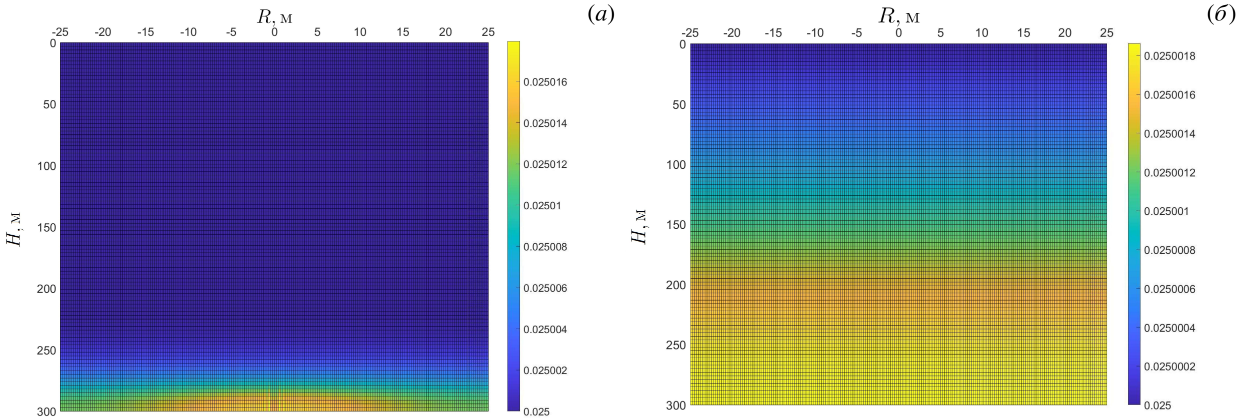


Рис. 6. Вариант нагнетания B: пористость на 8-е сут (*а*) и спустя 1 год (*б*) после остановки закачки

Максимальное значение тензора напряжений, равное 21.0756 МПа, указывает на потенциальный риск разрушения горной породы (Табл. 4), что может привести к быстрому подъему газа к верхней границе пласта. Однако при отсутствии разрушения породы сценарий C закачки газа является оптимальным для долгосрочной утилизации и хранения CO_2 в геологическом образовании.

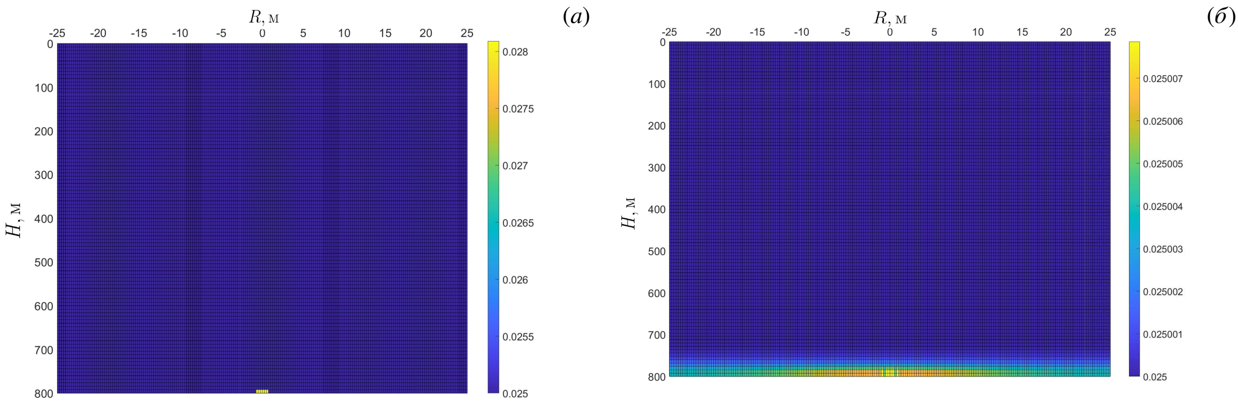


Рис. 7. Вариант нагнетания C: распределения пористости на момент остановки закачки (*а*) и на следующие, 8-е сут после остановки (*б*)

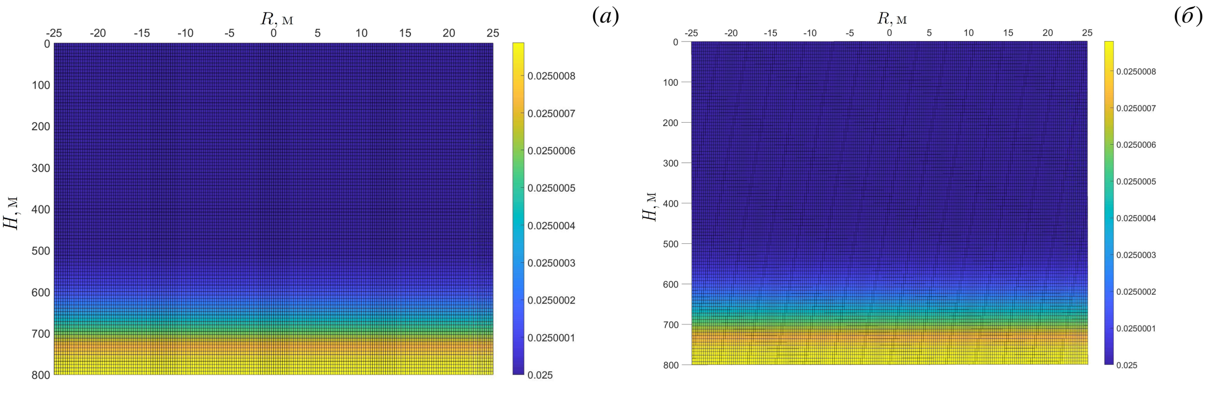


Рис. 8. Вариант нагнетания C: пористость спустя 180 дней (*а*) и спустя 1 год (*б*) после остановки закачки

В работе определены интегральные значения характеристик, таких как пористость, скорость и время нагнетания, давление газа, общая масса закачанного газа, которые могут привести к разрушению среды при различных сценариях закачки. Прочность горных пород оценивалась согласно критериям из таблицы 4. Установлены критические значения параметров, при которых возможно разрушение среды в области фильтрации при разных вариантах нагнетания. Для варианта нагнетания A критическими являются: пористость 0.035, максимальное значение тензора напряжений 3.34373 МПа, скорость нагнетания $1.5{\cdot}10^{-5}$ м^3/с. При этих условиях масса закачанного газа составляет 120000 кг. Для достижения этих критических величин закачка будет длится примерно 115.7 дней. При варианте нагнетания B критическая пористость увеличивается до 0.04, значение тензора напряжений возрастает до 8.106 МПа, а скорость нагнетания снижается до $4.5{\cdot}10^{-6}$ м^3/с. При этом критическая масса закачанного газа равняется 80000 кг, а для закачки требуется 257.1 дней. Вариант C характеризуется критическими величинами: пористости 0.045, максимального значения тензора напряжений 21.2782 МПа, скорости нагнетания $2.0{\cdot}10^{-6}$ м^3/с, массы закачанного газа 30000 кг, длительности закачки до достижения этих значений 217 дней.

5. Заключение

В представленной работе рассмотрена задача захоронения углекислого газа (CO_2) в пороупругой среде в осесимметричной постановке. Обсуждаемая проблема является актуальной в контексте смягчения последствий изменения климата, поскольку захоронение CO_2 в геологических формациях считается одним из перспективных методов сокращения выбросов парниковых газов в атмосферу. В рамках исследования сформулирована математическая постановка задачи и разработан численный алгоритм для моделирования процесса закачки CO_2 в вязкоупругую породу. Алгоритм включает решение системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих фильтрацию газа в пороупругой среде. Выполнена оценка скорости сходимости применяемого численного подхода.

Проведено численное моделирование процесса закачки CO_2 для трех сценариев, учитывающих варьирование скорости нагнетания газа и глубины расположения его выхода в породу через забой скважины. Результаты вычислительных экспериментов позволили определить оптимальные параметры закачки газа CO_2 для его безопасного и долгосрочного хранения в геологической среде. Полученные результаты имеют важное значение для развития технологий геологического захоронения CO_2. Они могут быть использованы при проектировании и оптимизации систем закачки углекислого газа, для оценки рисков и разработки мер по предотвращению утечек CO_2 из геологической формации.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10045, https://rscf.ru/project/23-71-10045/

Литература

1. *Furre A.-K.*, *Eiken O.*, *Alnes H.*, *Vevatne J.N.*, *Kiær A.F.* 20 Years of Monitoring CO2-injection at Sleipner // Energy Procedia. 2017. Vol. 114. P. 3916–3926. DOI: 10.1016/j.egypro.2017.03.1523
2. *Андреева А.И.*, *Афанасьев А.А.* Сравнение оптимальных режимов водогазового воздействия в рамках одномерной и двумерной постановок задачи фильтрации // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 3. С. 253–262. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.3.19
3. *Афанасьев А.А.*, *Мельник О.Э.*, *Цветкова Ю.Д.* Моделирование фильтрации при подземном захоронении углекислого газа с применением высокопроизводительных вычислительных систем // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6, № 4. С. 420–429. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.4.46
4. *Kim K.*, *Kundzicz P.M.*, *Makhnenko R.Y.* Effect of CO2 Injection on the Multiphase Flow Properties of Reservoir Rock // Transport in Porous Media. 2023. Vol. 147, no. 2. P. 429–461. DOI: 10.1007/s11242-023-01916-6
5. *Vafaie A.*, *Cama J.*, *Soler J.M.*, *Kivi I.R.*, *Vilarrasa V.* Chemo-hydro-mechanical effects of CO2 injection on reservoir and seal rocks: A review on laboratory experiments // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2023. Vol. 178. 113270. DOI: 10.1016/j.rser.2023.113270
6. *Anthony E.*, *Vedanti N.* 2D parallel simulation of seismic wave propagation in poroelastic media to monitor a CO2 geological sequestration process // Journal of African Earth Sciences. 2024. 105194. DOI: 10.1016/j.jafrearsci.2024.105194
7. *Urych T.*, *Chećko J.*, *Magdziarczyk M.*, *Smoliński A.* Numerical Simulations of Carbon Dioxide Storage in Selected Geological Structures in North-Western Poland // Frontiers in Energy Research. 2022. Vol. 10. 827794. DOI: 10.3389/fenrg.2022.827794

8. *Вирц Р.А.*, *Папин А.А.* Моделирование захоронения углекислого газа в вязкоупругой пористой среде // Вычислительные технологии. 2022. Т. 27, № 6. С. 4–18. DOI: 10.25743/ICT.2022.27.6.002
9. *Hidayat M.N.*, *Kusuma J.*, *Aris N.* A Two-Dimensional Mathematical Model of Carbon Dioxide (CO2) Transport in Concrete Carbonation Processes // Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi. 2021. Vol. 17, no. 3. P. 405–417. DOI: 10.20956/j.v17i3.12227
10. *Junji Yamaguchi A.*, *Sato T.*, *Tobase T.*, *Wei X.*, *Huang L.*, *Zhang J.*, *Bian J.*, *Liu T.-Y.* Multiscale numerical simulation of CO2 hydrate storage using machine learning // Fuel. 2023. Vol. 334. 126678. DOI: 10.1016/j.fuel.2022.126678
11. *Вирц Р.А.*, *Папин А.А.* Проблемы математического моделирования хранения углекислого газа в геологических формациях. Барнаул: Алтайский государственный университет, 2021. 70 с.
12. *Connolly J.A.D.*, *Podladchikov Y.Y.* Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodinamica Acta. 1998. Vol. 11, no. 2/3. P. 55–84. DOI: 10.1080/09853111.1998.11105311
13. *Mareschal J.-C.* Mathematical Geoscience. Springer-Verlag London Limited, 2011. 883 p.
14. *El-Amin M.F.*, *Sun S.*, *Salama A.* Modeling and Simulation of Nanoparticle Transport in Multiphase Flows in Porous Media: CO2 Sequestration //. SPE, 2012. P. 1–10. DOI: 10.2118/163089-MS
15. *Bear J.* Dynamics of Fluids in Porous Media. New York: American Elsevier Publishing Company, 1972. 764 p.
16. *Morency C.*, *Huismans R.S.*, *Beaumont C.*, *Fullsack P.* A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2007. Vol. 112. B10. DOI: 10.1029/2006JB004701
17. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987. 463 с.
18. *Khasanov M.K.*, *Rafikova G.R.*, *Musakaev N.G.* Mathematical Model of Carbon Dioxide Injection into a Porous Reservoir Saturated with Methane and Its Gas Hydrate // Energies. 2020. Vol. 13, no. 2. 440. DOI: 10.3390/en13020440
19. *Virts R.A.*, *Papin A.A.*, *Tokareva M.A.* Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1666, no. 1. 012041. DOI: 10.1088/1742-6596/1666/1/012041
20. *Papin A.A.*, *Tokareva M.A.*, *Virts R.A.* Filtration of Liquid in a Non-isothermal Viscous Porous Medium // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2020. Vol. 13, no. 6. P. 763–773. DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-6-763-773
21. *Вирц Р.А.*, *Папин А.А.*, *Вайгант В.А.* Численное решение одномерной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в вязкой пористой среде // Известия Алтайского государственного университета. 2018. № 4. С. 62–67. DOI: 10.14258/izvasu(2018)4-11
22. *Сибин А.Н.*, *Сибин Н.Н.* Численное решение одномерной задачи фильтрации с учетом суффозионных процессов // Известия Алтайского государственного университета. 2017. № 1. С. 123–126. DOI: 10.14258/izvasu(2017)1-24
23. *Tokareva M.A.* Solvability of initial boundary value problem for the equations of filtration in poroelastic media // Journal of Physics: Conference Series. 2016. Vol. 722, no. 1. 012037. DOI: 10.1088/1742-6596/722/1/012037
24. *Tokareva M.A.*, *Papin A.A.* Global Solvability of a System of Equations of One-Dimensional Motion of a Viscous Fluid in a Deformable Viscous Porous Medium // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2019. Vol. 13. P. 350–362. DOI: 10.1134/S1990478919020169
25. *Papin A.A.*, *Tokareva M.A.* On Local Solvability of the System of the Equations of One Dimensional Motion of Magma // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2017. Vol. 10, no. 3. P. 385–395. DOI: 10.17516/1997-1397-2017-10-3-385-395
26. *Terzaghi K.* Theoretical soil mechanics. Wiley, 1943. 528 p. DOI: 10.1002/9780470172766.fmatter
27. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
28. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1986. 512 с.
29. *Першин И.В.*, *Титов В.А.*, *Шишкин Г.И.* Экспериментальное определение порядка равномерной сходимости специальных разностных схем // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 6. С. 85–94.
30. *Хакимзянов Г.С.*, *Черный С.Г.* Методы вычислений. Ч. 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2007. 160 с.
31. *Петрушин Е.О.*, *Арутюнян А.С.* Техническая характеристика скважин и оборудования для проведения гидродинамических исследований // Наука. Техника. Технологии (политехнический вестник). 2015. № 2. С. 73–83.
32. *Шамшев Ф.А.* Технология и техника разведочного бурения. М.: Недра, 1973. 494 с.

Сведения об авторах:

Вирц Рудольф Александрович (корр.), б/с, мнс., Алтайский государственный университет (АлтГУ), 656049, г. Барнаул, пр-т. Ленина, д. 61; e-mail: virtsrudolf@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6689-6757