

Научная статья

Влияние геометрических параметров на распространение SH-волн в пьезоэлектрической/пьезомагнитной пластине

Т.И. Белянкова¹, Е.И. Ворович²

¹ Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

² Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

В рамках квазистатического приближения исследуются особенности распространения сдвиговых горизонтально поляризованных волн в магнитоэластичной составной пластине, контактирующей с вакуумом. Пластина представляет собой жестко сцепленные пьезоэлектрический и пьезомагнитный слои. На внешних поверхностях предполагается отсутствие механических напряжений и равенство нулю магнитного потенциала. В зависимости от характера задаваемых электрических условий рассмотрены задачи с электрически открытыми и электрически закрытыми внешними поверхностями. Волновой процесс инициирован действием удаленного источника гармонических колебаний и считается установившимся. Решение задач строится в образах Фурье в виде разложения по совокупности экспонент. Получены дисперсионные уравнения задач, которые приведены в удобном для численной реализации матричном виде. На примере пластины PZT-5H/CoFe₂O₄ установлена связь толщины каждого из ее слоев с особенностями трансформации фазовых и групповых скоростей поверхностных акустических волн с горизонтальной поляризацией (SH-ПАВ). При варьировании геометрических параметров системы фиксировалась толщина либо пластины, либо одного из слоев. В рамках задачи с электрически закрытыми внешними поверхностями установлены существенные различия в поведении скоростей в зависимости от толщины пьезоэлектрического и пьезомагнитного слоев. Определены условия максимального и минимального влияния толщин слоев на поведение 2-х и последующих мод SH-ПАВ. Показано, что при наличии в пластине очень тонкого пьезомагнитного слоя существенно меняется поведение 2-й моды ПАВ: возрастает как частота выхода моды, так и асимптотическое значение скорости. Выявлены закономерности влияния толщины пьезоэлектрического и пьезомагнитного слоев пластины на поведение коэффициента электромагнитомеханической связи в широком диапазоне частот. Полученные результаты приведены в безразмерных параметрах и могут представлять интерес при разработке новых функционально ориентированных материалов, оценке их эксплуатационных характеристик, а также при создании высокоэффективных устройств, работающих на поверхностных акустических волнах.

Ключевые слова: пьезоэлектрический материал, пьезомагнитный материал, магнитоэластичный материал, поверхностные акустические волны с горизонтальной поляризацией, коэффициент электромагнитомеханической связи

Получение: 19.08.2024 / Публикация онлайн: 30.12.2024

УДК 539.3

1. Введение

Широкое исследование физических явлений, связанных со взаимодействием акустических поверхностных и объемных волн с электрическими и магнитными полями в пьезоэлектрических, диэлектрических, полупроводниковых и магнитоэластичных материалах, и открытие акустомагнитоэлектрического эффекта [1–6] заложили основу их использования в различных приложениях методов неразрушающего контроля, количественной ультразвуковой и лазерной ультразвуковой диагностике, акустической микроскопии. Обзор современных магнитоэластичных (МЭУ) материалов и устройств на их основе приведен в [7, 8]. Благодаря расширяющимся возможностям получения и применения высококачественных МЭУ материалов и пьезоэлектрических /пьезомагнитных (ПЭ/ПМ) структур в последние годы все большее внимание уделяется изучению внешних и внутренних факторов, влияющих на изменение их свойств и особенности распространения в них акустических поверхностных и объемных волн. Для адекватной оценки влияния пьезоэлектрического и магнитоэлектрического эффектов на распространение волн необходимо привлечение точных аналитических или численно-аналитических решений задач электромагнитоупругости. В [9, 10] найдены точные решения задач МЭУ для пространственных анизотропных, однородных и многослойных прямоугольных пластин, испытывающих как поверхностные, так и внутренние нагрузки [9], и для бесконечно протяженных многослойных пластин [10]. В [11] определены типы электромагнитных условий на поверхности полупространства с гексагональной (6 mm) симметрией материала, допускающих распространение поверхностных акустических волн (ПАВ) с горизонтальной поляризацией (волн SH типа) или кратко SH-ПАВ. Для изучения динамических характеристик слоистых МЭУ структур в [12, 13] предложены численно-аналитический метод ортогональных полиномиальных разложений и подход к построению новой формы фундаментального решения трехмерных задач динамической электромагнитоупругости [14]. В [15–18] получены и исследованы особенности SH-ПАВ, распространяющихся вдоль свободной поверхности МЭУ структур, с учетом МЭУ эффекта в зависимости от параметров структуры и характера граничных условий. В [19, 20] выявлены особенности поведения SH-волн в композитных пластинах при разных электромагнитных условиях на свободных поверхностях. В [21] проведено сравнение дисперсионных свойств трехслойных гетероструктур, при различном сочетании однородных ПЭ, ПМ и композитных слоев. В [22–28] рассмотрены особенности поведения SH-волн в слоистых ПЭ/ПМ структурах в зависимости от отношения толщин слоев и свойств ПЭ материала при идеальных [22–24] и неидеальных [25–27] условиях на границе раздела. В [22–24] для пластин с разными электромагнитными условиями на внешних поверхностях на примере

первых мод ПАВ показано изменение фазовых и групповых (в [22]) скоростей в зависимости от соотношения толщин слоев при фиксированной толщине одного из них, приведено распределение перемещений, напряжений, электрического и магнитного потенциалов в ПЭ/ПМ пластине.

Следует отметить, что часто при исследовании влияния различных факторов на особенности распространения SH-волн в двухфазных ПЭ/ПМ пластинах результаты приводятся в зависимости от безразмерного волнового числа [22–27]. Такой подход не дает полного представления о дисперсионных свойствах пластины, о влиянии характера электромагнитных граничных условий, свойств и толщины ПЭ и ПМ материалов на сдвиг резонансных частот, на изменение частотной зависимости фазовых и групповых скоростей SH-волн. В [28] особенности распространения SH-ПАВ и поведения коэффициентов электромагнитомеханической связи (КЭММС) для биморфных ПЭ/ПМ пластин рассмотрены в частотной области. Показана связь скоростных и пьезоэлектрических характеристик ПЭ слоя с изменением дисперсионных свойств, поведением скоростей SH-ПАВ и КЭММС составных пластин в зависимости от задаваемых поверхностных электромагнитных условий.

В настоящей работе в рамках квазистатического приближения исследуются особенности распространения поверхностных SH-волн в МЭУ пластине. Пластина состоит из ПЭ и ПМ слоев, на границе раздела которых выполняются условия жесткого сцепления, внешние поверхности контактируют с вакуумом и свободны от механических напряжений. Целью является определение влияния толщины каждого из слоев пластины на частотную зависимость скоростей SH-ПАВ и КЭММС. В силу преобладающей роли электрических граничных условий обсуждаются задачи с электрически открытыми или электрически закрытыми (металлизированными и заземленными) внешними поверхностями при открытых магнитных условиях. Волновой процесс инициируется удаленным источником гармонических колебаний, которые полагаются установившимся. Для составной пластины PZT-5H/CoFe₂O₄ анализируются особенности трансформации скоростей SH-волн в зависимости от изменения толщины слоев либо при фиксированной толщине пластины, либо при фиксированной толщине одного из слоев.

2. Постановка задачи

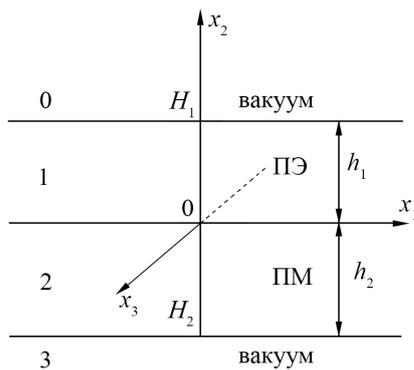


Рис. 1. Геометрия задачи

Рассматривается задача распространения SH-ПАВ в направлении горизонтальной оси x_1 в биморфной магнитоэластичной пластине ($|x_1|, |x_3| \leq \infty$); ПЭ ($0 < x_2 < H_1$) и ПМ ($H_2 < x_2 < 0$) слои жестко сцеплены между собой; внешние поверхности свободно контактируют с вакуумом (Рис. 1). Полагаем, что ПЭ и ПМ материалы имеют симметрию класса 6 mm, ось симметрии и вектор поляризации направлены вдоль оси x_3 .

Распространение SH-ПАВ в пластине инициировано действием удаленного источника гармонических колебаний, с учетом характера движения среды зависимость от времени t для всех параметров задачи представляется в виде (ω — угловая частота):

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = f(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t}.$$

Перемещения $u_k^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)$, электрический $\varphi^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)$ и магнитный $\psi^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)$ потенциалы удовлетворяют условиям ($n = \{1, 2\}$, $m = \{0, 3\}$):

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} = 0, \quad u_2^{(n)} = 0, \quad \mathbf{u}^{(m)} = \{u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, u_3^{(m)}\} = 0, \quad \partial(\cdot)/\partial x_3 = 0, \\ u_3^{(n)} = u_3^{(n)}(x_1, x_2) e^{-i\omega t}, \quad \varphi^{(n)} = \varphi^{(n)}(x_1, x_2) e^{-i\omega t}, \quad \psi^{(n)} = \psi^{(n)}(x_1, x_2) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Значения верхнего индекса n отвечают, соответственно, пьезоэлектрическому и пьезомагнитному слоям, значения m — вакууму. Поскольку рассматривается установившийся режим гармонических колебаний, экспоненциальный множитель далее опущен.

В квазистатическом приближении движение составной МЭУ среды описывается уравнениями [3–5]:

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}^{(n)} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}^{(n)} = 0, \quad n = \{1, 2\}, \quad (2)$$

и определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} \tau_{lk}^{(n)} = c_{lksp}^{(n)} u_{s,p}^{(n)} + e_{lkp}^{(n)} \varphi_{,p}^{(n)} + f_{lkp}^{(n)} \psi_{,p}^{(n)}, \quad d_l^{(n)} = e_{lsp}^{(n)} u_{s,p}^{(n)} - \varepsilon_{lp}^{(n)} \varphi_{,p}^{(n)} - \alpha_{lp}^{(n)} \psi_{,p}^{(n)}, \\ b_l^{(n)} = f_{lsp}^{(n)} u_{s,p}^{(n)} - \alpha_{lp}^{(n)} \varphi_{,p}^{(n)} - \mu_{lp}^{(n)} \psi_{,p}^{(n)} \quad (k, l, s, p = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Для вакуума ($m = \{0, 3\}$) справедливы равенства:

$$\Delta \varphi^{(m)} = 0, \quad \Delta \psi^{(m)} = 0. \quad (4)$$

Здесь ∇ — оператор Гамильтона; $\mathbf{T}^{(n)}$, $\mathbf{D}^{(n)}$ и $\mathbf{B}^{(n)}$ — тензор напряжений, векторы индукции электрического и магнитного полей n -й составляющей МЭУ структуры; $\mathbf{u}^{(n)}$ — вектор механических перемещений; $\varphi^{(n)}$ и $\psi^{(n)}$ — электрический и магнитный потенциалы, которым отвечают векторы напряженности $\mathbf{H} = -\nabla\psi$ и $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, соответственно, магнитного и электрического полей; $\rho^{(n)}$ — плотность, $c_{iksp}^{(n)}$, $e_{ikp}^{(n)}$, $f_{ikp}^{(n)}$ — компоненты тензоров упругих, пьезоэлектрических и пьезомагнитных констант, $\varepsilon_{lp}^{(n)}$, $\mu_{lp}^{(n)}$ — компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости, $\alpha_{lp}^{(n)}$ — компоненты тензора магнитоэлектрических констант материала n -й составляющей структуры. Участвующий в (4) оператор Лапласа с учетом (1) имеет вид: $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$.

Полагаем, что на границе раздела ПЭ и ПМ слоев выполнены условия:

$$x_2=0: \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}^{(2)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(2)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}^{(2)}, \quad \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}, \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)}, \quad \psi^{(1)} = \psi^{(2)}. \quad (5)$$

Внешние поверхности пластины свободны от механических нагрузок:

$$x_2 = H_1: \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}^{(1)} = 0, \quad x_2 = H_2: \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}^{(2)} = 0, \quad (6)$$

и магнитно открыты [4, 5]:

$$x_2 = H_1: \quad \psi^{(1)} = 0, \quad x_2 = H_2: \quad \psi^{(2)} = 0. \quad (7)$$

В зависимости от задания электрических условий на внешних поверхностях структур рассмотрим задачи:

I — электрически закрывая

$$x_2 = H_1: \quad \varphi^{(1)} = 0, \quad x_2 = H_2: \quad \varphi^{(2)} = 0; \quad (8)$$

II — электрически открытая

$$x_2 = H_1: \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(0)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(0)}, \quad x_2 = H_2: \quad \varphi^{(2)} = \varphi^{(3)}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(2)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{(3)}. \quad (9)$$

Здесь \mathbf{N} — вектор нормали к поверхности структуры и границе раздела. Для удобства дальнейшего изложения введем расширенный вектор перемещений $\mathbf{u}^{em(n)} = \{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)} = \varphi^{(n)}, u_5^{(n)} = \psi^{(n)}\}$ n -й структуры. С учетом (1) и свойств структур слоев участвующие в представлениях (2), (4)–(9) отличные от нуля компоненты тензора напряжений и векторов электрической и магнитной индукции (3) принимают вид:

– для ПЭ слоя

$$\begin{aligned} \tau_{13}^{(1)} &= c_{44}^{(1)} u_{3,1}^{(1)} + e_{15}^{(1)} u_{4,1}^{(1)}, & \tau_{23}^{(1)} &= c_{44}^{(1)} u_{3,2}^{(1)} + e_{15}^{(1)} u_{4,2}^{(1)}, & d_1^{(1)} &= e_{15}^{(1)} u_{3,1}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)} u_{4,1}^{(1)}, \\ d_2^{(1)} &= e_{15}^{(1)} u_{3,2}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)} u_{4,2}^{(1)}, & b_1^{(1)} &= -\mu_{11}^{(1)} u_{5,1}^{(1)}, & b_2^{(1)} &= -\mu_{11}^{(1)} u_{5,2}^{(1)}; \end{aligned} \quad (10)$$

– для ПМ слоя

$$\begin{aligned} \tau_{13}^{(2)} &= c_{44}^{(2)} u_{3,1}^{(2)} + f_{15}^{(2)} u_{5,1}^{(2)}, & \tau_{23}^{(2)} &= c_{44}^{(2)} u_{3,2}^{(2)} + f_{15}^{(2)} u_{5,2}^{(2)}, & d_1^{(2)} &= -\varepsilon_{11}^{(2)} u_{4,1}^{(2)}, \\ d_2^{(2)} &= -\varepsilon_{11}^{(2)} u_{4,2}^{(2)}, & b_1^{(2)} &= f_{15}^{(2)} u_{3,1}^{(2)} - \mu_{11}^{(2)} u_{5,1}^{(2)}, & b_2^{(2)} &= f_{15}^{(2)} u_{3,2}^{(2)} - \mu_{11}^{(2)} u_{5,2}^{(2)}; \end{aligned} \quad (11)$$

– для вакуума

$$d_2^{(0)} = -\varepsilon_0 u_{4,2}^{(0)}, \quad b_2^{(0)} = -\mu_0 u_{5,2}^{(0)}, \quad d_2^{(3)} = -\varepsilon_0 u_{4,2}^{(3)}, \quad b_2^{(3)} = -\mu_0 u_{5,2}^{(3)}. \quad (12)$$

При записи упругих, пьезоэлектрических и пьезомагнитных констант использованы сокращения Фойгта. В (12) ε_0 , μ_0 являются диэлектрической и магнитной проницаемостями вакуума.

Далее воспользуемся безразмерными параметрами [28]:

$$\begin{aligned} l' &= l/H, \quad \rho'^{(n)} = \rho^{(n)}/\rho^{(2)}, \quad c'_{ij}{}^{(n)} = c_{ij}^{(n)}/c_{44}^{(2)}, \quad e'_{ij}{}^{(n)} = e_{ij}^{(n)}/\xi_e/c_{44}^{(2)}, \quad \varepsilon'_{ij}{}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)}/\xi_e^2/c_{44}^{(2)}, \\ f'_{ij}{}^{(n)} &= f_{ij}^{(n)}/\xi_m/c_{44}^{(2)}, \quad \mu'_{ij}{}^{(n)} = \mu_{ij}^{(n)}/\xi_m^2/c_{44}^{(2)}, \quad \varphi'^{(n)} = \varphi^{(n)}/(\xi_e H), \quad \psi'^{(n)} = \psi^{(n)}/(\xi_m H), \end{aligned}$$

где $\xi_e = 10^{10}$ В/м, $\xi_m = 10^7$ А/м — метрические множители, $\kappa_2 = \omega H/V_S^{(2)}$ — безразмерная частота, H — характерный линейный размер, к которому отнесены все линейные (l) параметры задач, $V_S^{(2)} = \sqrt{c_{44}^{(2)}/\rho_0^{(2)}}$ — скорость объемной сдвиговой волны в ПМ структуре.

С учетом (1) и представлений (10)–(12) уравнения движения (2) ПЭ/ПМ пластины в безразмерных переменных принимают вид:

– для ПЭ

$$\sum_{k=1}^2 \left[A_{44}^{(1)} u_{3,kk}^{(1)} + e_{15}^{(1)} u_{4,kk}^{(1)} \right] = -\rho^{(1)} \kappa_2^2 u_3^{(1)}, \quad \sum_{k=1}^2 \left[e_{15}^{(1)} u_{3,kk}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)} u_{4,kk}^{(1)} \right] = 0, \quad \sum_{k=1}^2 u_{5,kk}^{(1)} = 0; \quad (13)$$

– для ПМ

$$\sum_{k=1}^2 \left[u_{3,kk}^{(2)} + f_{15}^{(2)} u_{5,kk}^{(2)} \right] = -\kappa_2^2 u_3^{(2)}, \quad \sum_{k=1}^2 u_{4,kk}^{(2)} = 0, \quad \sum_{k=1}^2 \left[f_{15}^{(2)} u_{3,kk}^{(2)} - \mu_{11}^{(2)} u_{5,kk}^{(2)} \right] = 0; \quad (14)$$

– для вакуума

$$\sum_{k=1}^2 u_{4,kk}^{(m)} = 0, \quad \sum_{k=1}^2 u_{5,kk}^{(m)} = 0. \quad (15)$$

Запишем граничные условия (4)–(9) в виде:

– механические условия на внешних поверхностях

$$x_2 = H_1: \quad \tau_{23}^{(1)} = 0, \quad x_2 = H_2: \quad \tau_{23}^{(2)} = 0; \quad (16)$$

– на границе раздела

$$x_2 = 0: \quad \tau_{23}^{(1)} = \tau_{23}^{(2)}, \quad d_2^{(1)} = d_2^{(2)}, \quad b_2^{(1)} = b_2^{(2)}, \quad u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad u_4^{(1)} = u_4^{(2)}, \quad u_5^{(1)} = u_5^{(2)}; \quad (17)$$

– электрические и магнитные условия на внешних поверхностях в задаче I

$$x_2 = H_1: \quad u_4^{(1)} = 0, \quad u_5^{(1)} = 0, \quad x_2 = H_2: \quad u_4^{(2)} = 0, \quad u_5^{(2)} = 0, \quad (18)$$

и в задаче II

$$x_2 = H_1: \quad u_4^{(1)} = u_4^{(0)}, \quad d_2^{(1)} = d_2^{(0)}, \quad u_5^{(1)} = 0, \quad x_2 = H_2: \quad u_4^{(2)} = u_4^{(3)}, \quad d_2^{(2)} = d_2^{(3)}, \quad u_5^{(2)} = 0. \quad (19)$$

3. Решение задачи

Решения задач I (13), (14), (16)–(18) и II (13)–(15), (19) будем строить в пространстве образов Фурье (α — параметр преобразования по координате x_1). Перемещение, электрический и магнитный потенциалы для составляющих пластины и вакуума ищем в виде ($p = \{3,4,5\}$, $s = \{4,5\}$, $n = \{1,2\}$):

$$U_p^{(n)}(\alpha, x_2) = \sum_{k=1}^3 g_{pk}^{(n)} \left[C_{1k}^{(n)} \operatorname{ch}(\sigma_k^{(n)} x_2) + C_{2k}^{(n)} \operatorname{sh}(\sigma_k^{(n)} x_2) \right], \quad (20)$$

$$U_s^{(0)}(\alpha, x_2) = C_s^{(0)} e^{-\alpha x_2}, \quad U_s^{(3)}(\alpha, x_2) = C_s^{(3)} e^{\alpha x_2}.$$

Здесь $U_p^{(n)}$ — трансформанты Фурье компонент расширенного вектора перемещений; участвующие в представлении (20) параметры $\sigma_k^{(n)}$ и коэффициенты $g_{pk}^{(n)}$ имеют вид [28]:

$$\begin{aligned} (\sigma_1^{(1)})^2 &= \alpha^2 - \gamma_e \kappa_2^2, & (\sigma_2^{(1)})^2 &= (\sigma_3^{(1)})^2 = \alpha^2, & (\sigma_1^{(2)})^2 &= \alpha^2 - \gamma_m \kappa_2^2, & (\sigma_2^{(2)})^2 &= (\sigma_3^{(2)})^2 = \alpha^2, \\ \gamma_e &= \frac{\varepsilon_{11}^{(1)} \rho^{(1)}}{c_{44}^{(1)} \varepsilon_{11}^{(1)} + (e_{15}^{(1)})^2}, & \gamma_m &= \frac{\mu_{11}^{(2)}}{\mu_{11}^{(2)} + (f_{15}^{(2)})^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} g_{31}^{(1)} &= 1, & g_{32}^{(1)} &= g_{33}^{(1)} = 0, & g_{41}^{(1)} &= e_{15}^{(1)} / \varepsilon_{11}^{(1)}, & g_{42}^{(1)} &= 1, & g_{43}^{(1)} &= 0, & g_{51}^{(1)} &= g_{52}^{(1)} = 0, & g_{53}^{(1)} &= 1, \\ g_{31}^{(2)} &= 1, & g_{32}^{(2)} &= g_{33}^{(2)} = 0, & g_{41}^{(2)} &= g_{43}^{(2)} = 0, & g_{42}^{(2)} &= 1, & g_{51}^{(2)} &= f_{15}^{(2)} / \mu_{11}^{(2)}, & g_{52}^{(2)} &= 0, & g_{53}^{(2)} &= 1; \end{aligned} \quad (22)$$

неизвестные $C_k^{(n)}$ определяются из граничных условий соответствующих задач при удовлетворении им решений (20) с учетом (21), (22). Далее, после применения обращения Фурье, получаем решение задач I, II.

4. Дисперсионные уравнения

Дисперсионные уравнения задач I, II для пьезомагнитной среды можно записать как

$$\det \mathbf{A}^s(\alpha, \kappa_2) = 0 \quad (s = I, II), \quad (23)$$

где структура матриц обуславливается граничными условиями (16)–(19):

$$\mathbf{A}^I = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_e^I(H_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_e^I(0) & -\mathbf{P}_m(0) \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_m^I(H_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{II} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_e^{II}(H_1) & \mathbf{0} & \mathbf{G}_e(H_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_e^I(0) & -\mathbf{P}_m(0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_m^{II}(H_2) & \mathbf{0} & \mathbf{G}_e(H_2) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Матрицы \mathbf{A}^I и \mathbf{A}^{II} имеют размерность соответственно 12×12 и 14×14 . В силу условий (17) матрицы $\mathbf{P}_e(0)$ и $\mathbf{P}_m(0)$ размерностью 6×6 одинаковы для задач I, II ($s = e, m$):

$$\mathbf{P}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & l_{11}^{(n)} \sigma_1^{(n)} & l_{12}^{(n)} \sigma_2^{(n)} & l_{13}^{(n)} \sigma_3^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & l_{21}^{(n)} \sigma_1^{(n)} & l_{22}^{(n)} \sigma_2^{(n)} & l_{23}^{(n)} \sigma_3^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & l_{31}^{(n)} \sigma_1^{(n)} & l_{32}^{(n)} \sigma_2^{(n)} & l_{33}^{(n)} \sigma_3^{(n)} \\ g_{31}^{(n)} & g_{32}^{(n)} & g_{33}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ g_{41}^{(n)} & g_{42}^{(n)} & g_{43}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \\ g_{51}^{(n)} & g_{52}^{(n)} & g_{53}^{(n)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Здесь и далее в обозначениях матриц нижнему индексу $s = e$ отвечает верхний индекс $n = 1$, нижнему индексу $s = m$ — верхний индекс $n = 2$. Матрицы $\mathbf{P}_e^{II}(H_1)$ и $\mathbf{P}_m^{II}(H_2)$ размерностью 4×6 представимы в виде:

$$\mathbf{P}_s^{II} = \begin{pmatrix} l_{11}^{(n)} \sigma_1^{(n)} s_1^{(n)} & l_{12}^{(n)} \sigma_2^{(n)} s_2^{(n)} & l_{13}^{(n)} \sigma_3^{(n)} s_3^{(n)} & l_{11}^{(n)} \sigma_1^{(n)} c_1^{(n)} & l_{12}^{(n)} \sigma_2^{(n)} c_2^{(n)} & l_{13}^{(n)} \sigma_3^{(n)} c_3^{(n)} \\ l_{21}^{(n)} \sigma_1^{(n)} s_1^{(n)} & l_{22}^{(n)} \sigma_2^{(n)} s_2^{(n)} & l_{23}^{(n)} \sigma_3^{(n)} s_3^{(n)} & l_{21}^{(n)} \sigma_1^{(n)} c_1^{(n)} & l_{22}^{(n)} \sigma_2^{(n)} c_2^{(n)} & l_{23}^{(n)} \sigma_3^{(n)} c_3^{(n)} \\ g_{41}^{(n)} c_1^{(n)} & g_{42}^{(n)} c_2^{(n)} & g_{43}^{(n)} c_3^{(n)} & g_{41}^{(n)} s_1^{(n)} & g_{42}^{(n)} s_2^{(n)} & g_{43}^{(n)} s_3^{(n)} \\ g_{51}^{(n)} c_1^{(n)} & g_{52}^{(n)} c_2^{(n)} & g_{53}^{(n)} c_3^{(n)} & g_{51}^{(n)} s_1^{(n)} & g_{52}^{(n)} s_2^{(n)} & g_{53}^{(n)} s_3^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где

$$l_{1k}^{(1)} = c_{44}^{(1)} g_{3k}^{(1)} + e_{15}^{(1)} g_{4k}^{(1)}, \quad l_{2k}^{(1)} = e_{15}^{(1)} g_{3k}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)} g_{4k}^{(1)}, \quad l_{3k}^{(1)} = -\mu_{11}^{(1)} g_{5k}^{(1)}, \quad l_{1k}^{(2)} = g_{3k}^{(2)} + f_{15}^{(2)} g_{5k}^{(2)}, \\ l_{2k}^{(2)} = -\varepsilon_{11}^{(2)} g_{4k}^{(2)}, \quad l_{3k}^{(2)} = f_{15}^{(2)} g_{3k}^{(2)} - \mu_{11}^{(2)} g_{5k}^{(2)}, \quad s_k^{(n)} = sh(\sigma_k^{(n)} H_n), \quad c_k^{(n)} = ch(\sigma_k^{(n)} H_n) \quad (n=1,2).$$

Матрицы \mathbf{P}_s^I размерностью 3×6 получаются из матриц \mathbf{P}_s^{II} вычеркиванием 2-й строки. Векторы $\mathbf{G}_e(H_1)$, $\mathbf{G}_e(H_2)$ имеют вид:

$$\mathbf{G}_e(H_n) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_0 \alpha \gamma^{(n)} & -\gamma^{(n)} & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \gamma^{(1)} = e^{-\alpha H_1}, \quad \gamma^{(2)} = e^{\alpha H_2}. \quad (27)$$

5. Численный анализ

Исследование влияния толщин слоев в составных пьезомагнитных пластинах на особенности распространения SH-ПАВ проведено на примере пластины PZT-5Н/CoFe₂O₄. Параметры материалов слоев и скорости сдвиговых волн без учета (индекс S) и с учетом пьезоэлектрических (индекс Se) и пьезомагнитных (индекс Sm) свойств приведены в таблице [3, 10]. Используются обозначения: $V_S = \sqrt{c_{44}/\rho}$, $V_{Se} = \sqrt{(c_{44} + (e_{15})^2/\varepsilon_{11})/\rho}$,

$$V_{Sm} = \sqrt{(c_{44} + (f_{15})^2/\mu_{11})/\rho}.$$

Таблица. Параметры задачи

Материал	ρ , [кг/м ³]	$c_{44} \cdot 10^{10}$, [н/м ²]	e_{15} , [Кл/м ²]	$\varepsilon_{11} \cdot 10^{-10}$, [Кл ² /(н·м ²)]	f_{15} , [н/(А·м)]	$\mu_{11} \cdot 10^{-6}$, [н·с ² /Кл ²]	V_S , [м/с]	V_{Se} , [м/с]	V_{Sm} , [м/с]
PZT-5Н	7500	2.3	17	151	0	5	1751	2370	—
CoFe ₂ O ₄	5300	4.53	0	0.8	550	-590	2924	—	2907

Рисунки 2–8 иллюстрируют поведение относительных фазовых $V_F^I/V_S^{(2)}$ (Рис. 2, 3; Рис. 4–7а, в, д) и групповых $V_g^I/V_S^{(2)}$ (Рис. 3; Рис. 4–7б, г, е) скоростей SH-ПАВ для задачи I . На рисунке 9а–г представлены относительные фазовые скорости $V_F^{II}/V_S^{(2)}$ для задачи II . Здесь $V_F^s = \kappa_2/\zeta^s$, $V_g^s = d\kappa_2^s/d\zeta^s$, $s = I, II$, ζ^s — нули дисперсионного уравнения (23) с обозначениями (24)–(27).

Для сравнения на рисунке 2 показаны характерные кривые относительной фазовой скорости $V_F^I/V_S^{(2)}$ для однородной ПЭ пластины ($h_2 = 0$, Рис. 2а; параметры ПЭ материала отнесены к параметрам ПМ материала), однородной ПМ пластины ($h_1 = 0$, Рис. 2б) и составной ПЭ/ПМ пластины ($h_1 = h_2 = 1$, Рис. 2в). Сплошными линиями на рисунке 2а, б изображены первые пять мод однородных ПЭ и ПМ пластин толщиной $h_1 = 1$ и $h_2 = 1$, штриховые линии отвечают первым восьми модам этих пластин толщиной $h_1 = 2$ и $h_2 = 2$. На рисунке 2г приведен фрагмент рисунка 2б в окрестности $V_S^{(2)}$.

Из рисунков видно, что для однородной ПЭ пластины в случае задачи с электрически закрытыми внешними поверхностями характерен выход скоростей первых двух мод ПАВ на значение скорости волны Гуляева–Блюштейна с электрически закрытой поверхностью (V_{GB}^I) [5]. С увеличением толщины пластины этот выход происходит на более низких частотах (Рис. 2а). Скорость 1-й моды изменяется от $V_S^{(1)}$ до V_{GB}^I , скорость 2-й

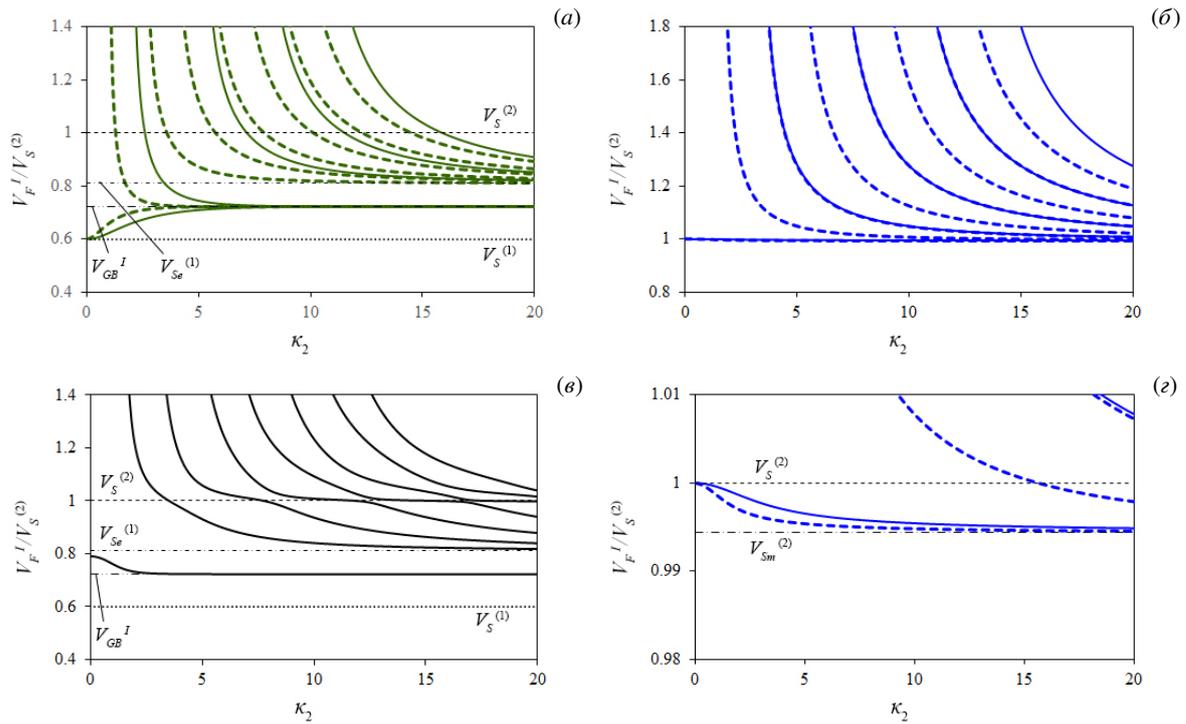


Рис. 2. Скорости SH-ПАВ в однородной ПЭ (а), в однородной ПМ (б, г), в составной ПЭ/ПМ (в) пластинах; на фрагменте (б) показаны скорости в окрестности $V_S^{(2)}$ (г)

моды падает от бесконечно больших значений в момент зарождения моды до V_{GB}^I . Скорости 3-й и последующих мод асимптотически приближаются к $V_{Se}^{(1)}$. Для однородной ПМ пластины (Рис. 2б, г) скорость 1-й моды ПАВ принимает значения от $V_S^{(2)}$ до $V_{Sm}^{(2)}$, скорости 2-й, 3-й и других мод асимптотически приближаются к $V_S^{(2)}$. Для составной ПЭ/ПМ пластины (Рис. 2в) скорость 1-й моды постепенно меняется от начального значения V_F^{I0} , которое обуславливается свойствами и соотношением толщин слоев [22, 24], до асимптотического V_F^{I*} , близкого к V_{GB}^I . Следует отметить, что в случае пластины из PZT-5Н/CoFe₂O₄, начиная с 4-й моды, в окрестности $V_S^{(2)}$ наблюдаются «террасные» участки [29–31], на которых скорости практически постоянны в определенном диапазоне частот.

При исследовании влияния толщины ПЭ и ПМ слоев составной пластины на скорости SH-ПАВ информативным является анализ поведения групповых скоростей ПАВ. На рисунке 3 приведены относительные фазовые V_F^I и групповые V_g^I скорости в однородных ПЭ (Рис. 3а, $h_1 = 1, h_2 = 0$) и ПМ (Рис. 3б, $h_1 = 0, h_2 = 1$) пластинах, а также в составных ПЭ/ПМ пластинах с тонким ПМ (Рис. 3в, $h_1 = 1, h_2 = 0.01$) или ПЭ слоем (Рис. 3г, $h_1 = 0.01, h_2 = 1$). Из сравнения кривых (см. Рис. 3а, в) видно, что при наличии очень тонкого ПМ слоя имеют место значительные изменения скоростей 1-й и 2-й мод ПАВ. Для 1-й моды значения скоростей V_F^I и V_g^I превосходят соответствующие величины у ПЭ пластины в низкочастотной области. Выход V_F^I и V_g^I на асимптотическое значение скорости V_F^{I*} в

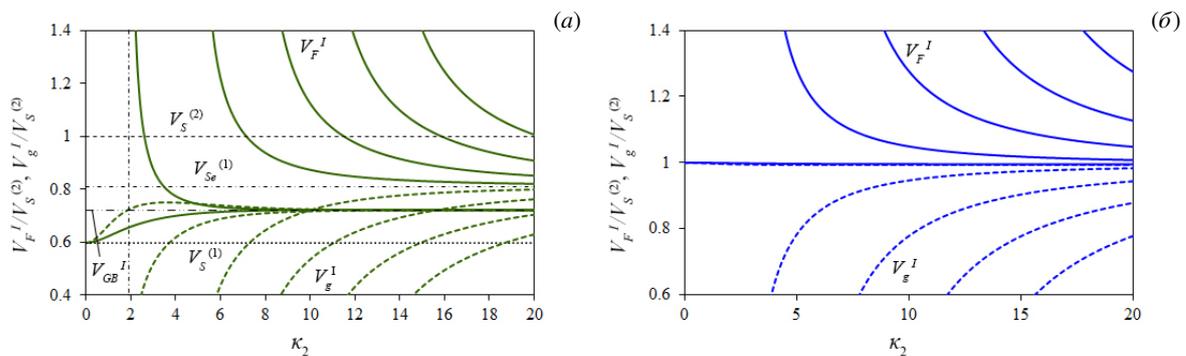


Рис. 3. Относительные фазовые V_F^I (сплошные линии) и групповые V_g^I (тонкие штриховые линии) скорости ПАВ в однородной ПЭ (а), однородной ПМ (б) пластинах и составных пластинах ПЭ/ПМ с тонким ПМ (в) и тонким ПЭ (г) слоями

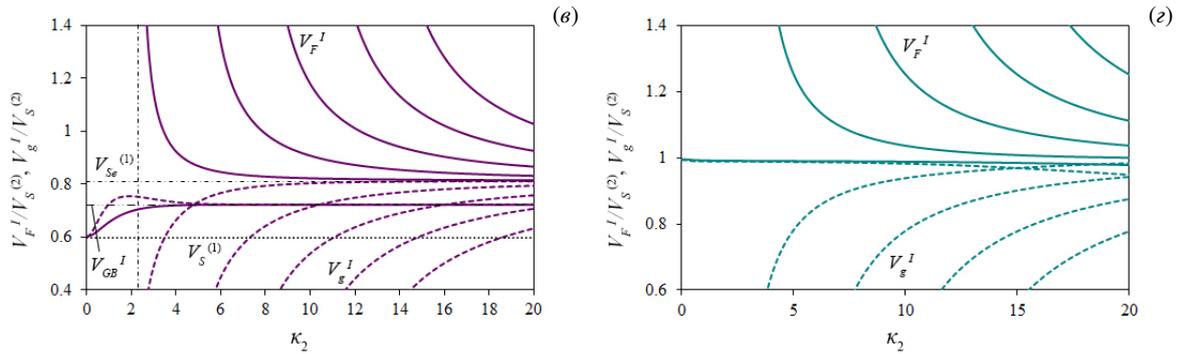


Рис. 3. Продолжение

составной пластине происходит на частотах много ниже. Более заметные изменения наблюдаются в поведении скорости 2-й моды. В частности, в отличие от однородной ПЭ пластины, возрастает частота выхода моды, значения скоростей V_F^I и V_g^I с ростом частоты приближаются к $V_{Se}^{(1)}$. В присутствии тонкого ПЭ слоя (Рис. 3з) кривые скоростей относительно аналогичных величин однородной ПМ пластины меняются мало. Так, частоты выхода 1-х мод в составной пластине чуть ниже, однако с ростом номера моды расхождение усиливается. Для 1-й моды отмечается падение скоростей V_F^I и V_g^I ниже $V_{Sm}^{(2)}$.

Более подробно рассмотрим особенности поведения скоростей SH-ПАВ в составной пластине в зависимости от толщины ПЭ и ПМ слоев на примере первых трех мод.

5.1. Задача 1. Влияние на скорости SH-ПАВ изменения толщин ПМ и ПЭ слоев при фиксированной толщине пластины

Полагаем, что толщина составной ПЭ/ПМ пластины зафиксирована: $h = h_1 + h_2 = 2$. На рисунках 4 и 5 приведены первые три моды относительных фазовых V_F^I и групповых V_g^I скоростей SH-ПАВ составной пластины при уменьшающейся толщине ПМ (Рис. 4) и уменьшающейся толщине ПЭ (Рис. 5) слоя. Штрихпунктирные «PM» и штриховые «PE» линии на рисунках 4 и 5 отвечают соответствующим модам скоростей для однородной ПМ пластины (см. штриховые линии, Рис. 2б) и однородной ПЭ пластины (см. штриховые линии, Рис. 2а) при толщине $h = 2$. Цифрой 1 на рисунках отмечены кривые скоростей составной пластины с $h_1 = h_2 = 1$. Цифрами 2–7 на рисунке 4 отмечены кривые скоростей с толщиной ПМ слоя $h_2 = \{0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0.02\}$, толщина ПЭ слоя в этом случае увеличивается: $h_1 = \{1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 1.9, 1.98\}$.

При уменьшении толщины ПМ слоя за счет увеличения толщины ПЭ слоя для 1-й моды (Рис. 4а, б) начальные значения скоростей V_F^{I0} и V_g^{I0} уменьшаются до $V_S^{(1)}$, меняется характер кривых. Так, значения V_F^I и V_g^I при $h_2 = \{1, 0.8\}$ (кривые 1, 2) уменьшаются, при $h_2 = \{0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0.02\}$ (соответственно, кривые 3–7) возрастают от начального значения до V_F^{I*} . Асимптотически скорость ПАВ в составной пластине V_F^{I*} близка к значению V_{GB}^I , но не превосходит его ($V_F^{I*} < V_{GB}^I$). Достижение асимптотического значения V_F^{I*} происходит при значительно меньших частотах, чем в однородной ПЭ пластине. Для 2-й и 3-й мод (Рис. 4в–е) частоты выхода мод, относительно пластины с равными по толщине слоями ($h_1 = h_2 = 1$, кривые 1), сдвигаются в низкочастотную область и приближаются к частотам однородной ПЭ пластины. Изгибы скоростей V_F^I и V_g^I , характерные для ПЭ/ПМ пластины с $h_1 = h_2 = 1$ (Рис. 2в), сглаживаются, значения V_F^I уменьшаются. С ростом частоты в составной

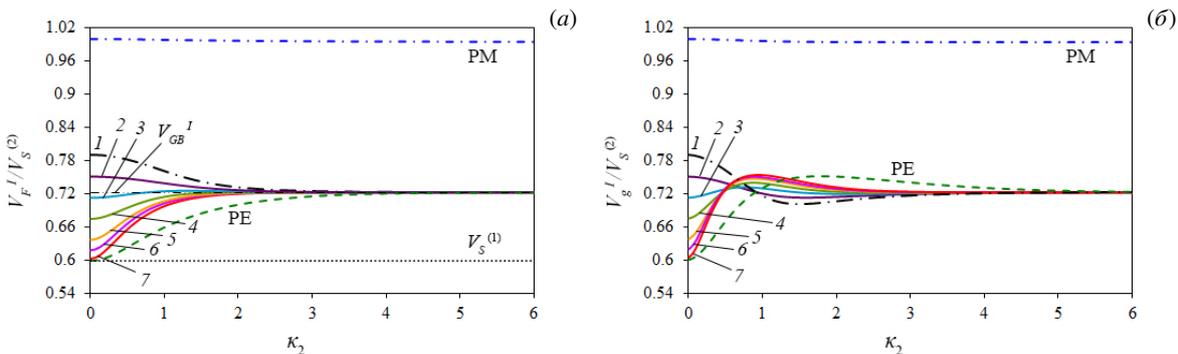


Рис. 4. Поведение первых трех мод фазовых (а), (в), (д) и групповых (б), (г), (е) скоростей SH-ПАВ в составной ПЭ/ПМ пластине при ее фиксированной толщине и уменьшающейся толщине ПМ слоя

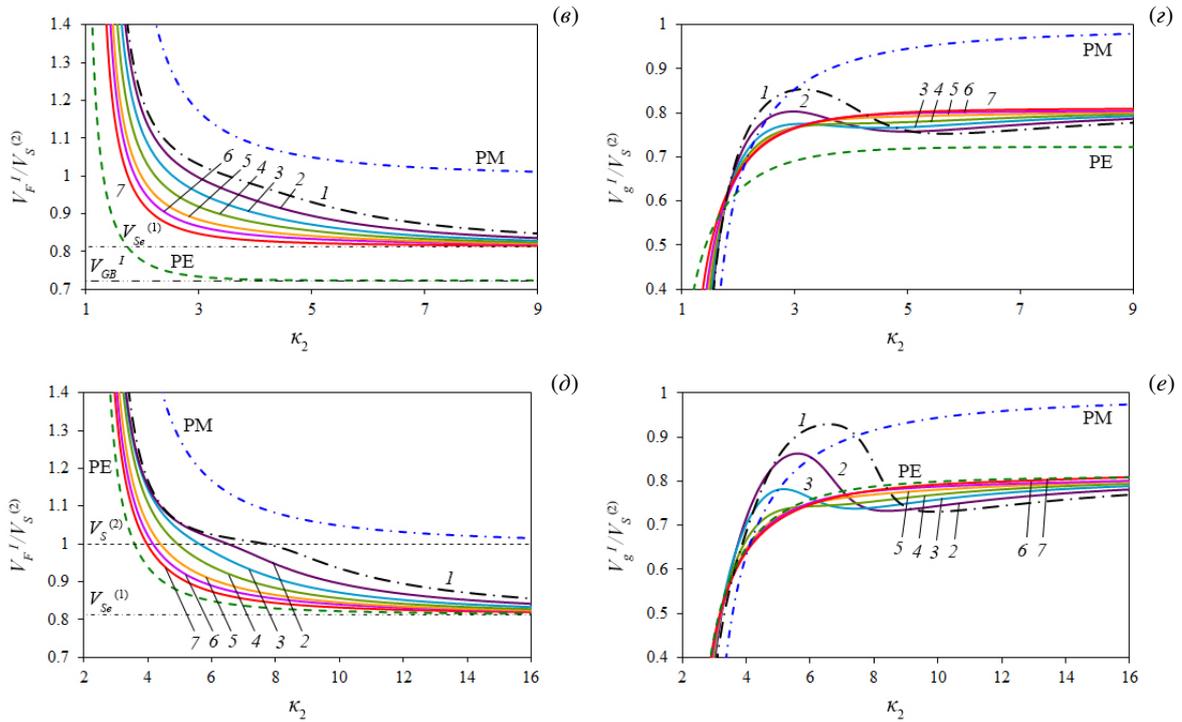


Рис. 4. Продолжение

пластине, в отличие от однородной ПЭ пластины, скорости V_F^I и V_g^I обеих мод приближаются к $V_{Se}^{(1)}$ (Рис. 4в, д). На рисунке 5 цифрами 2–7 отмечены кривые скоростей пластины с уменьшающейся толщиной ПЭ слоя $h_1 = \{0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0.02\}$ и увеличивающейся толщиной ПМ слоя: $h_2 = \{1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 1.9, 1.98\}$. При уменьшении толщины ПЭ слоя за счет увеличения толщины ПМ слоя для 1-й моды (Рис. 5а, б) скорости V_F^{I0} и V_g^{I0} растут от начальных значений для пластины с $h_1 = h_2 = 1$ (кривая 1) до $V_S^{(2)}$, при этом $V_F^{I0} \approx V_g^{I0} < V_S^{(2)}$. По сравнению с ПЭ пластиной характер частотной зависимости не меняется, но частота выхода скоростей на асимптотическое значение $V_{Se}^{(2)}$ заметно возрастает. Для 2-й моды (Рис. 5в, г) характерен сдвиг частот выхода в сторону аналогичных величин у однородной ПМ пластины. Незначительный изгиб при $h_1 = h_2 = 1$ (кривая 1) усиливается (кривые 2, 3). С уменьшением толщины ПЭ слоя, начиная с $h_1 = 0.4$ (кривые 4), в окрестности $V_S^{(2)}$ сначала в небольшом диапазоне частот появляются «террасные» участки, а затем длина этих участков существенно увеличивается (см. $h_1 = 0.2$, кривые 5). При h_1 от 0.1 до 0.02 (см. кривые 6, 7) скорости выходят на $V_{Sm}^{(2)}$. Следует отметить, что скорости 2-х мод ПАВ составной пластины, как для $h_1 = \{1, 0.8, 0.6\}$, так и для $h_1 = \{0.4, 0.2\}$, после выхода с «террасного» участка ($\kappa_2 > \kappa_n^*$, см. Рис. 5в, д) асимптотически приближаются к $V_{Se}^{(1)}$. В тонких ПЭ слоях выход скоростей на асимптотическое значение происходит при более высоких частотах. Для 3-х мод сохраняется характер поведения скоростей 2-х мод с той разницей, что выход скоростей на «террасные» участки наблюдается при больших толщинах ($h_1 = 0.6$), расширяются диапазоны частот, соответствующие этим участкам, возрастают значения частоты выхода скоростей на асимптотические значения.

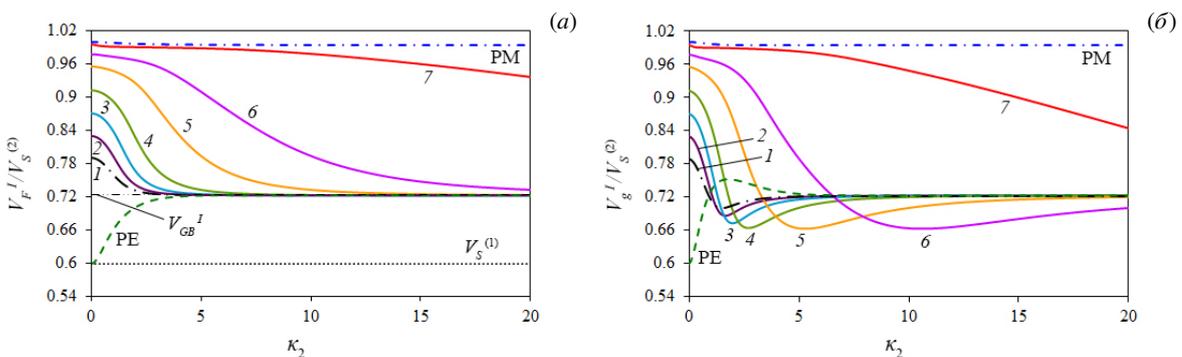


Рис. 5. Поведение первых трех мод фазовых (а), (в), (д) и групповых (б), (г), (е) скоростей SH-ПАВ в составной ПЭ/ПМ пластине при ее фиксированной толщине и уменьшающейся толщине ПЭ слоя

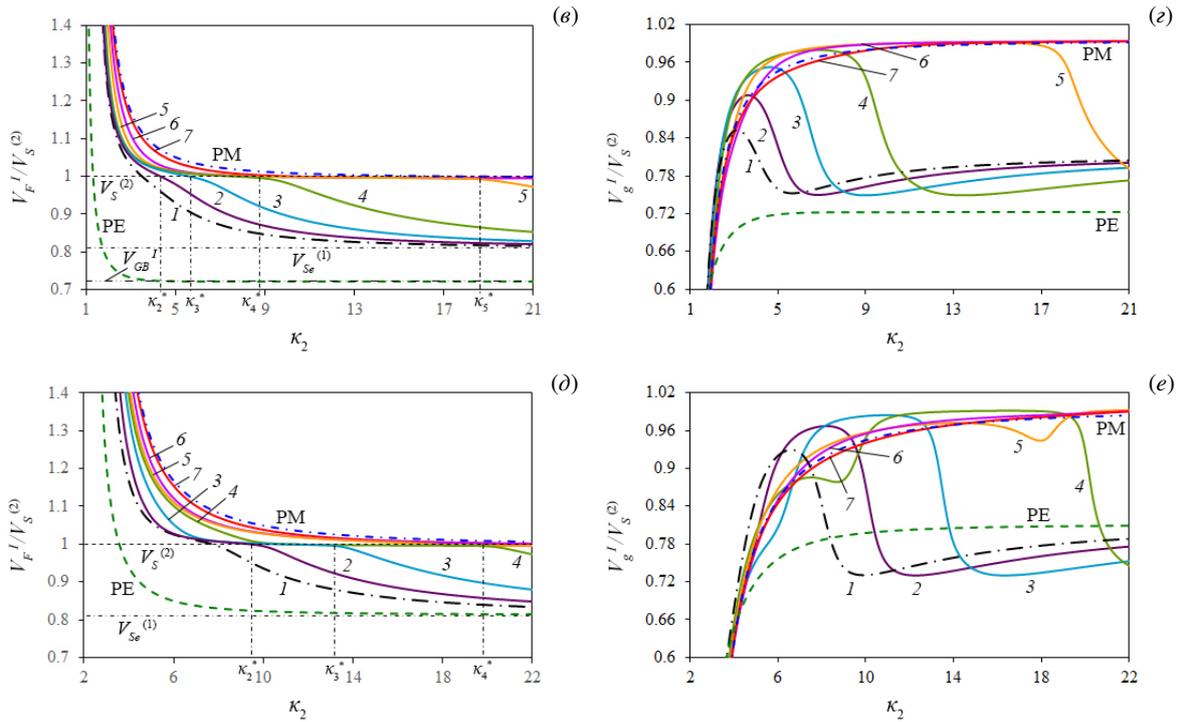


Рис. 5. Продолжение

5.2. Задача 1. Влияние на скорости SH-ПАВ изменения толщины одного из слоев при фиксированной толщине другого слоя

Полагаем, что в составной ПЭ/ПМ пластине один слой меняет толщину, а толщина другого слоя зафиксирована. На рисунках 6 и 7 показано поведение первых трех мод фазовых V_F^I и групповых V_g^I скоростей SH-ПАВ при уменьшении толщины ПМ ($h_1 = 1$, Рис. 6) и ПЭ ($h_2 = 1$, Рис. 7) слоев. Штрихпунктирные «PM» и штриховые «PE» линии отвечают соответствующим модам скоростей для однородной ПМ пластины (см. сплошные линии, Рис. 2б) и однородной ПЭ пластины (см. сплошные линии, Рис. 2а), имеющих толщины $h = 1$. Цифрами 1–7 на рисунке 6 отмечены кривые скоростей в ПМ слое толщиной $h_2 = \{1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0.02\}$.

Из сравнения рисунков 4 и 6 видно, что для 1-й моды поведение V_F^I и V_g^I составной пластины при фиксированном h_1 повторяет поведение скоростей при фиксированной толщине пластины. При уменьшении толщины ПМ слоя и фиксированном $h_1 = 1$ (Рис. 6а, б) сохраняется падение начальных значений скоростей до $V_S^{(1)}$ и вид кривых скоростей. Однако значения частот выхода на асимптотическую скорость V_F^{I*} , по сравнению с составной пластиной при $h_1 = h_2 = 1$, возрастают (см. кривую I), но не превосходят частоты выхода на асимптотику, присущую однородной ПЭ пластине. Для 2-й и 3-й мод ПАВ (Рис. 6в–е) уменьшение толщины ПМ слоя приводит, относительно пластины с $h_1 = h_2 = 1$ (кривая I), к росту значения частоты выхода соответствующих мод; значения фазовых скоростей падают до $V_{Se}^{(1)}$. В окрестности $V_S^{(2)}$ на частотах $\kappa_2 < \kappa_n^0$ (Рис. 6в, д) влияние толщины ПМ слоя

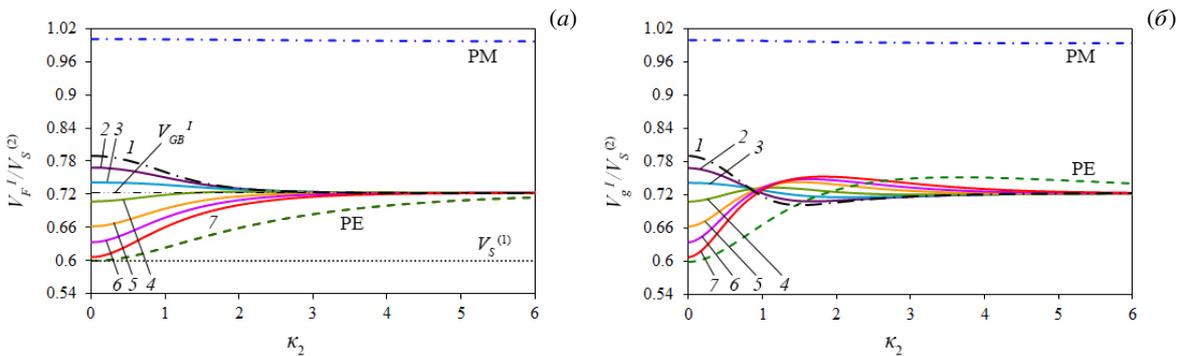


Рис. 6. Поведение первых трех мод фазовых (а), (в), (д) и групповых (б), (г), (е) скоростей SH-ПАВ в составной ПЭ/ПМ пластине при уменьшении толщины ПМ слоя и фиксированной толщине ПЭ слоя

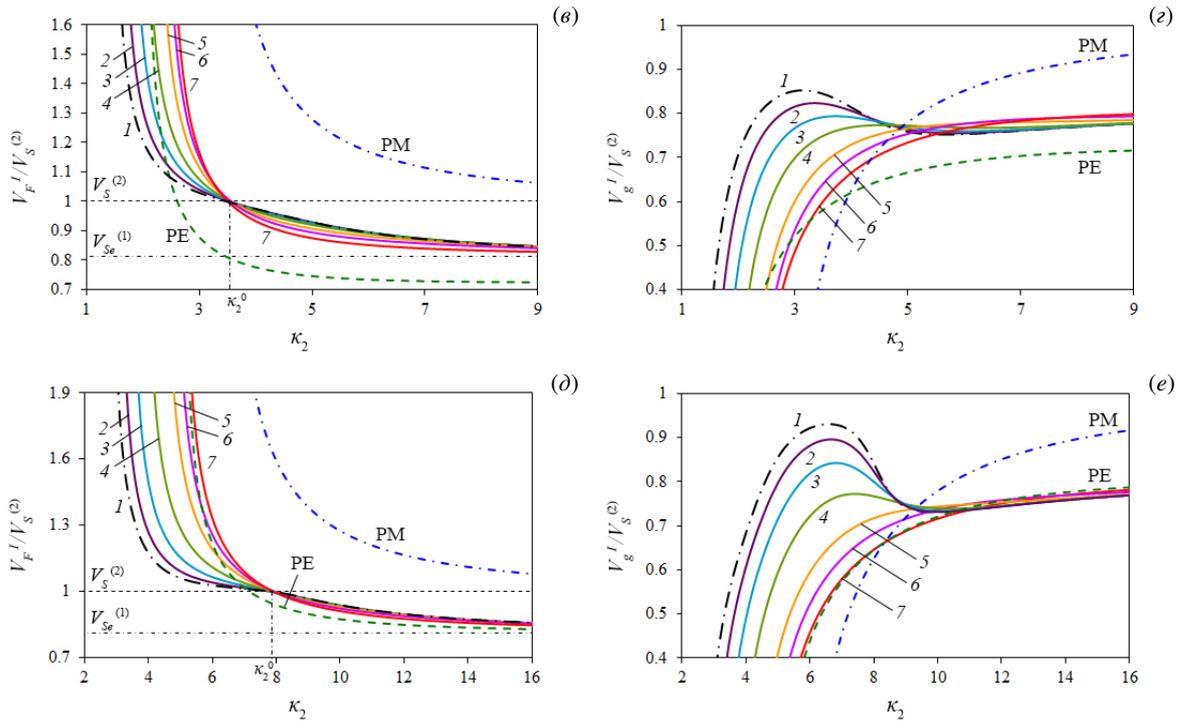


Рис. 6. Продолжение

на величину скоростей V_F^I существенно, на частотах $\kappa_2 > \kappa_n^0$ — незначительно. У кривых групповых скоростей V_g^I в пластинах с фиксированной толщиной h (Рис. 4г, е) и фиксированной толщиной h_1 (Рис. 6г, е) наблюдается сглаживание при уменьшении толщины ПМ слоя, однако характер изменений различен.

На рисунках 7 цифрами 1–7 отмечены кривые скоростей в ПЭ слое с толщиной $h_1 = \{1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0.02\}$; толщина ПМ слоя зафиксирована: $h_2 = 1$. Из сравнения рисунков 5 и 7 видно, что для 1-й моды при уменьшении толщины ПЭ слоя поведение скоростей V_F^I и V_g^I составной пластины с фиксированными h_2 и h совпадает, за исключением низкочастотного диапазона и начальных значений скоростей. Для 2-х и 3-х мод кривые скоростей

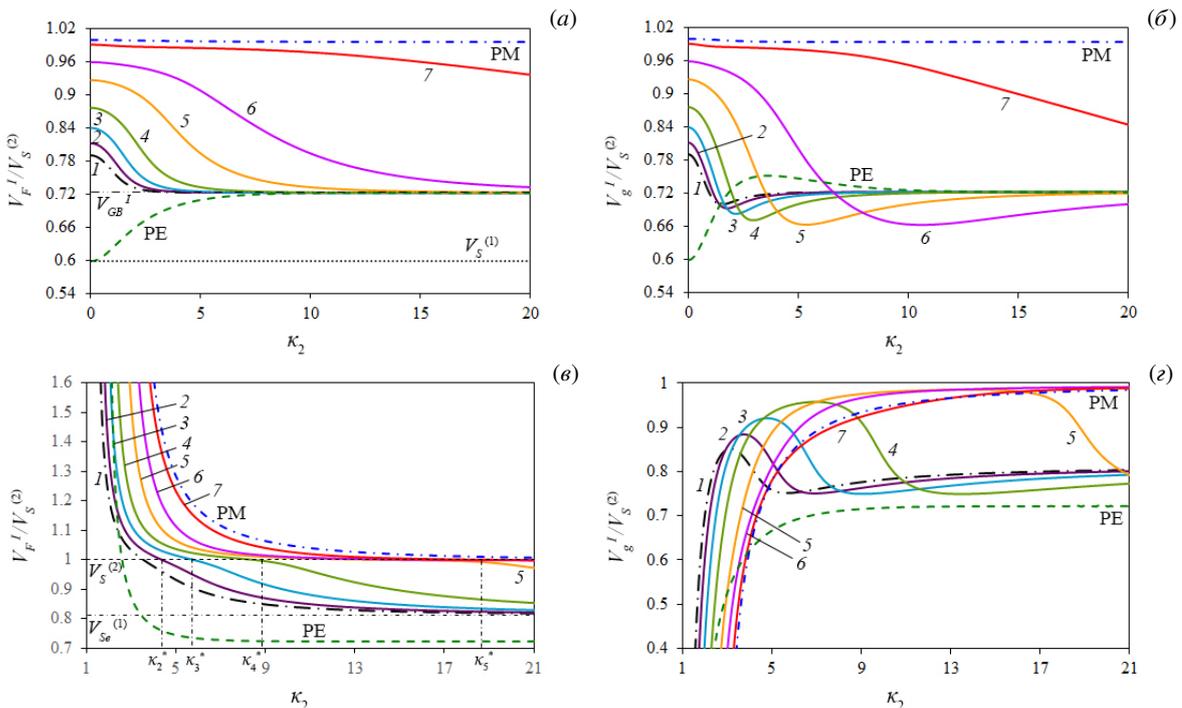


Рис. 7. Поведение первых трех мод фазовых (а), (в), (д) и групповых (б), (г), (е) скоростей SH-ПАВ в составной ПЭ/ПМ пластине при уменьшении толщины ПЭ слоя и фиксированной толщине ПМ слоя

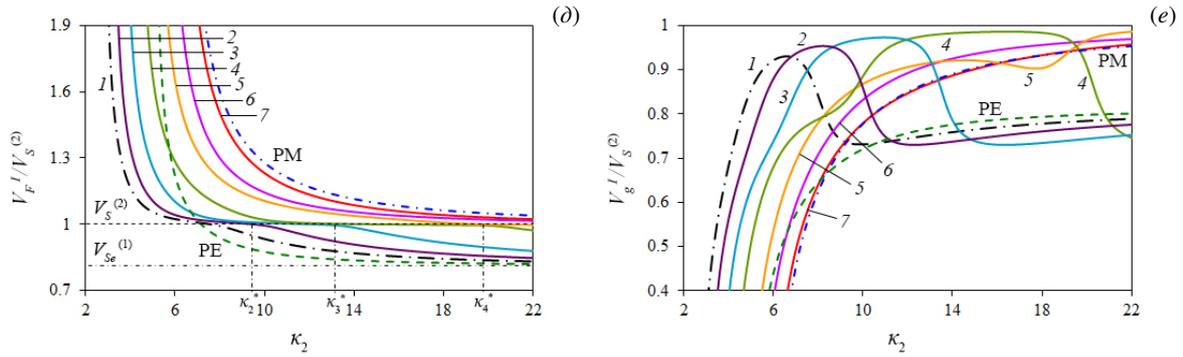


Рис. 7. Продолжение

при $h_2 = 1$, как и при фиксированном h , сохраняют свой характер, с той лишь разницей, что при $h_2 = 1$ существенно расширяется диапазон частот выхода мод ПАВ, а также диапазон частот, на которых фазовые скорости уменьшаются до $V_S^{(2)}$. Отметим, что как при фиксированном h_2 , так и при фиксированном h совпадают значения частот κ_n^* , при прохождении которых ($\kappa_2 > \kappa_n^*$) скорости, отвечающие равным толщинам ПЭ слоя, совпадают. На рисунке 8а, б в более удобном, чем на рисунках 5в, д и 7в, д, масштабе показано поведение V_F^I составной пластины для 2-х (Рис. 8а) и 3-х (Рис. 8б) мод в окрестности $V_S^{(2)}$ при фиксированной толщине пластины h (сплошные линии) и фиксированной толщине ПМ слоя h_2 (штриховые линии). Кривые 1–4, как и на рисунках 5в, д и 7в, д, соответствуют ПЭ слою толщиной $h_1 = \{1, 0.8, 0.6, 0.4\}$.

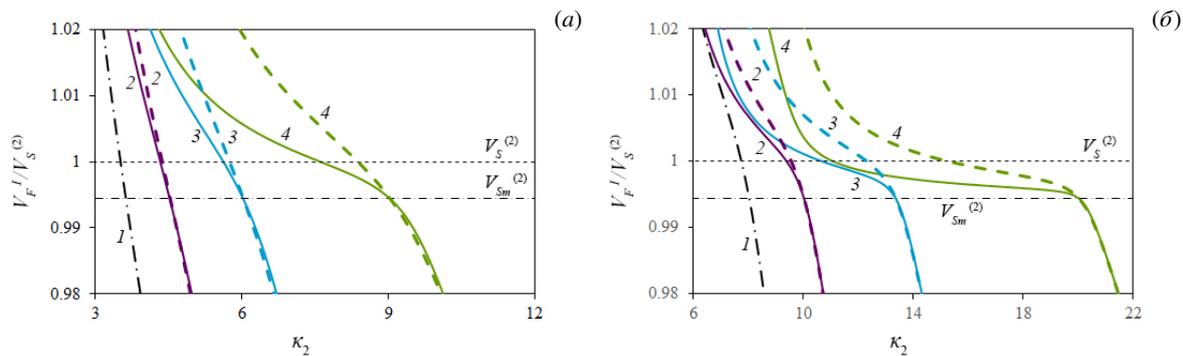


Рис. 8. Поведение 2-х (а) и 3-х (б) мод фазовых скоростей SH-ПАВ составной ПЭ/ПМ пластины при ее фиксированной толщине (сплошные линии) и постоянной толщине ПМ слоя (штриховые линии) в зависимости от толщины ПЭ слоя

Из рисунков видно, что влияние толщины ПМ слоя на скорости SH-ПАВ 2-х и последующих мод в большей степени сказывается на частотах, при которых $V_F^I > V_S^{(2)}$ и усиливается с ростом номера моды и уменьшением толщины ПЭ слоя. Частоты, на которых $V_F^I < V_{Sm}^{(2)}$, зависят от толщины ПМ слоя минимально, преобладающее воздействие оказывает толщина ПЭ слоя. На «террасных» участках (см. кривые 3, 4, Рис. 8а, б, Рис. 5в, д и Рис. 7в, д) скорость V_F^I с ростом частоты медленно меняется от $V_S^{(2)}$ до $V_{Sm}^{(2)}$.

5.3. Задача II. Влияние на скорости SH-ПАВ изменения толщины слоев ПЭ/ПМ пластины

Как и в задаче I, для составной ПЭ/ПМ пластины с электрически закрытыми внешними поверхностями, в задаче II с электрически открытыми внешними поверхностями, свободно контактирующими с вакуумом, определяющую роль в поведении скоростей SH-ПАВ играет соотношение физических свойств ПЭ и ПМ слоев и их толщины. На рисунке 9а, б представлено изменение по частоте 1-х мод скорости V_F^{II} при уменьшении толщины ПМ (Рис. 9а) и ПЭ (Рис. 9б) слоев. На рисунке 9в, г показан выход кривых V_F^{II} на асимптотические значения при уменьшении толщины ПМ слоя при фиксированной толщине пластины (Рис. 9в) и фиксированной толщине ПЭ слоя (Рис. 9г). Сплошные линии на рисунках отвечают изменению толщин слоев при фиксированной толщине пластины, штриховые — изменению толщины одного слоя при фиксированной толщине другого. Как и ранее, цифрами 1–7 отмечены кривые скоростей, соответственно, при толщине 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0.02 ПМ (Рис. 9а) и ПЭ (Рис. 9б) слоя.

Сравнение рисунков 9а, в, г и 4а, 6а показывает, что при уменьшении толщины ПМ слоя, как в задаче I, так и в задаче II, максимальное значение V_F^{II} достигается для пластины с $h_1 = h_2 = 1$, минимальное — при $h_2 = 0.02$. В отличие от задачи I, в задаче II при уменьшении толщины ПМ слоя скорости V_F^{II} сначала становятся максимальными в низкочастотном диапазоне, а затем уменьшаются, асимптотически приближаясь к V_F^{II*} . Вид

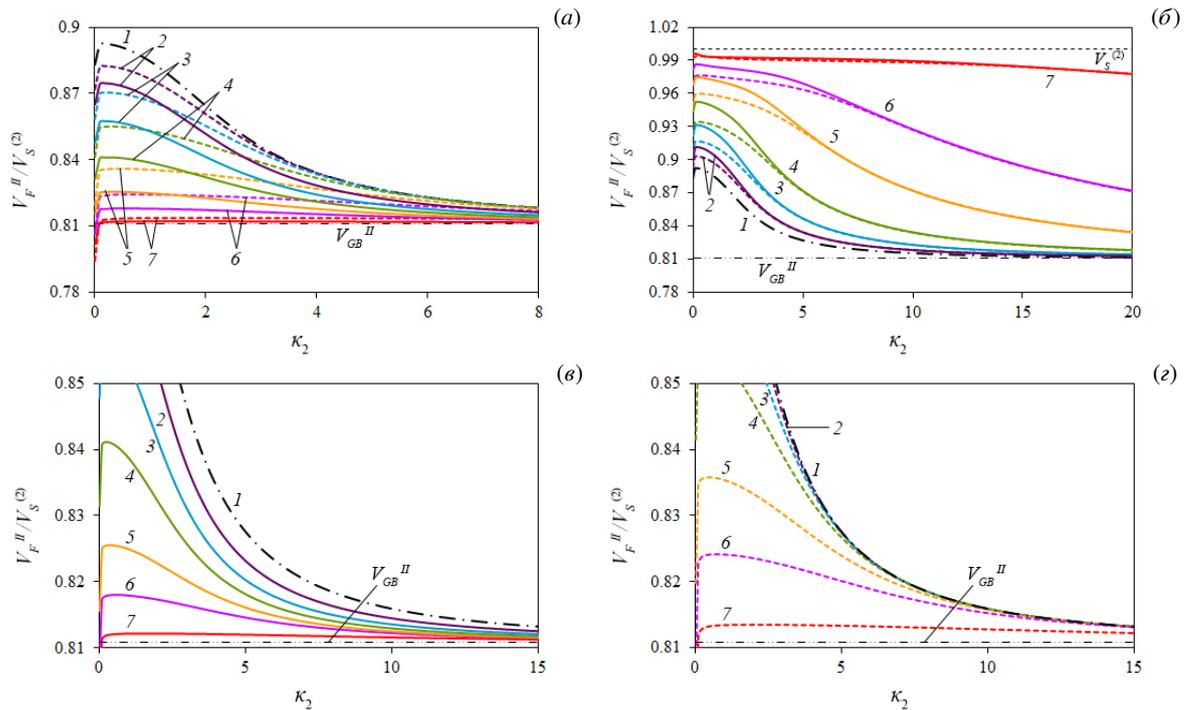


Рис. 9. Поведение 1-х мод скоростей SH-ПАВ составной ПЭ/ПМ пластины в зависимости от толщины слоев для задачи II: (а) – уменьшается толщина ПМ слоя при фиксированных h (сплошные линии) и h_1 (штриховые линии); (б) – уменьшается толщина ПЭ слоя при фиксированных h (сплошные линии) и h_2 (штриховые линии); на фрагментах (в), (г) представлены кривые фрагмента (а) в измененном масштабе

кривых скоростей не меняется. Асимптотическое значение V_F^{II*} для составной пластины близко к V_{GB}^{II} , но превышает его $V_F^{II*} > V_{GB}^{II}$. Выход V_F^{II} на значения V_F^{II*} при фиксированном h и фиксированном h_1 различен (Рис. 9в, г). Из сравнения рисунков рисунка 9б с рисунками 5а, 7а видно, что при уменьшении толщины ПЭ слоя поведение 1-х мод скоростей V_F^I и V_F^{II} сохраняется, лишь другими становятся значения: $V_F^{II} > V_F^I$ и $V_F^{II*} > V_F^{I*}$.

5.4. Влияние изменения толщины слоев ПЭ и ПМ составной пластины на коэффициент электромагнитомеханической связи (КЭММС)

Не менее важной и востребованной характеристикой свойств составной ПЭ/ПМ пластины является зависимость КЭММС от частоты. На рисунке 10а–в показаны графики КЭММС (K_{2E}^o), построенные по 1-м модам фазовых скоростей для составных ПЭ/ПМ пластин при различной толщине ПМ и ПЭ слоев для случая открытых магнитных условий (индекс «о»). По аналогии с [5, 28] КЭММС определяется формулой:

$$K_{2E}^o = \left[(V_F^{II})^2 - (V_F^I)^2 \right] / \left[(V_F^{II})^2 \right].$$

Сплошные линии соответствуют кривым K_{2E}^o при фиксированной толщине пластины, штриховые линии — при фиксированной толщине одного из слоев. Как и ранее, цифрами 1–7 отмечены кривые КЭММС при соответствующих толщинах слоев 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1, 0.02: ПМ (Рис. 10а) и ПЭ слоя (Рис. 10б). На рисунке 10в приведен фрагмент рисунка 10а для толщин $h_2 = \{1, 0.8, 0.6\}$ (см., соответственно, кривые 1–3). Для сравнения на рисунке 10г представлены графики коэффициента электромагнитомеханической связи (КЭМС) K_2 ($K_2 = \left[(V_F^o)^2 - (V_F^s)^2 \right] / \left[(V_F^o)^2 \right]$, где V_F^o и V_F^s — скорости SH-ПАВ в однородной ПЭ пластине с электрически открытыми «о» и закрытыми «s» поверхностями) однородной ПЭ пластины в зависимости от ее толщины (кривые 1–4).

Из рисунка 10а, в видно, что при уменьшении толщины ПМ слоя, начиная с $h_2 = 0.6$ для составной пластины с фиксированной толщиной h (сплошная линия, кривая 3) и с $h_2 = 0.4$ для пластины с фиксированным ПЭ слоем (штриховая линия, кривая 4, Рис. 10а), максимум КЭММС возрастает, приближаясь к максимальному значению КЭМС однородной ПЭ пластины (Рис. 10г), и достигается в низкочастотной области. С ростом частоты КЭММС уменьшается, его асимптотическое значение приближается к K_2 ПЭ полупространства. Выход на асимптотическое значение для пластины с фиксированной h происходит на более низких частотах, чем при фиксированной h_1 . Наблюдаются диапазоны частот, при которых изменение толщины ПМ слоя мало влияет на КЭММС. При $h_2 = \{0.6, 0.8, 1\}$ (Рис. 10в) в пластинах с фиксированной толщиной h_1 (штриховые линии, соответственно, кривые 3–1) и $h_2 = 0.8$ в пластинах с фиксированной толщиной h (сплошная линия, кривая 2) постепенно

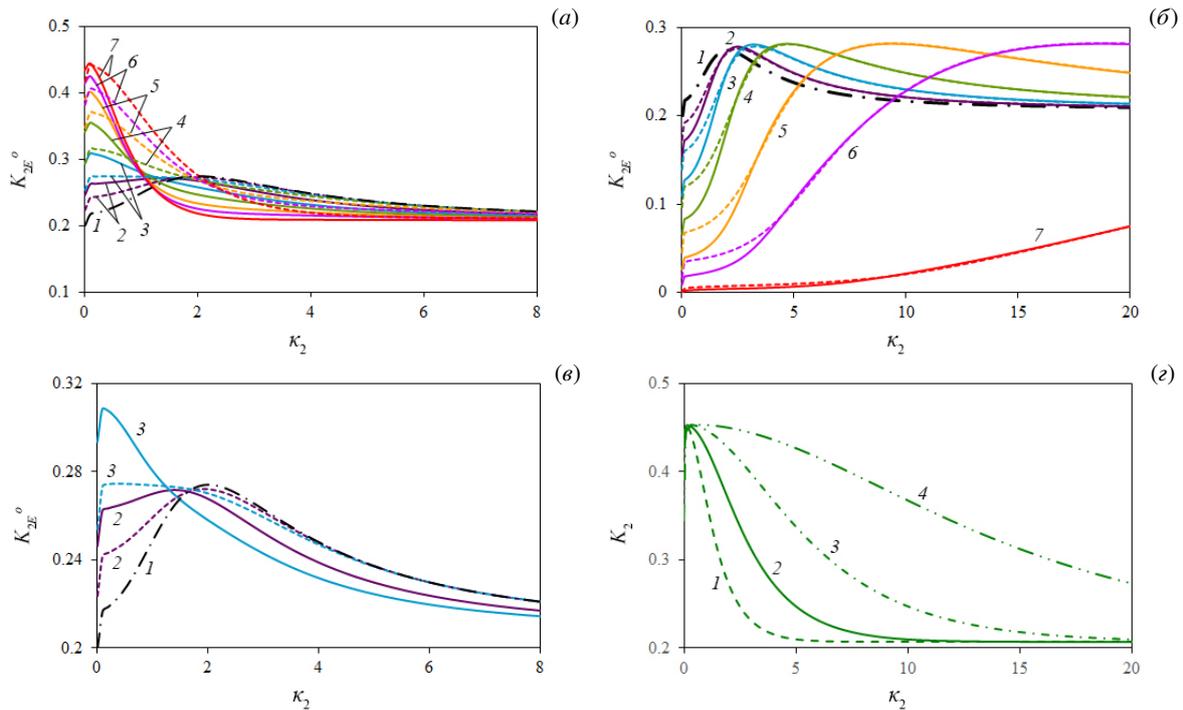


Рис. 10. Влияние толщин слоев на КЭММС составной ПЭ/ПМ пластины: (а) – уменьшается толщина ПМ слоя при фиксированных h (сплошные линии) и h_1 (штриховые линии); (б) – уменьшается толщина ПЭ слоя при фиксированных h (сплошные линии) и h_2 (штриховые линии); (в) – фрагмент (а) в измененном масштабе; (г) – КЭММС однородной ПЭ пластины толщиной 2 (кривая 1), 1 (2), 0.5 (3) и 0.2 (4)

увеличивается значение частоты максимума КЭММС, но величина коэффициента меняется незначительно. При уменьшении толщины ПЭ слоя (Рис. 10б), как в пластине с фиксированной толщиной, так и в пластине с фиксированной толщиной ПМ слоя, необходимо отметить следующее: 1) уменьшение начального значения КЭММС; незначительное изменение максимального значения, которое, начиная с $h_1 = 0.4$, практически не меняется; 2) существенный рост частоты максимума КЭММС; 3) увеличение области значений КЭММС, близких к максимальному. Асимптотически уменьшения КЭММС составной пластины близки к κ_2 ПЭ полупространства (кривые 3–5). При дальнейшем уменьшении толщины ПЭ слоя, начиная с $h_1 = 0.2$, выход на асимптотические значения, как и на максимальные значения КЭММС, происходит на более высоких частотах.

6. Заключение

Исследованы особенности распространения SH-ПАВ в составной МЭУ пластине из ПЭ и ПМ слоев. Волновой процесс инициирован удаленным источником гармонических колебаний, режим которых полагается установившимся. На границе раздела слоев выполнены условия сцепления. Внешние поверхности свободно контактируют с вакуумом, механические нагрузки отсутствуют, магнитный потенциал равен нулю. Рассмотрены задачи с электрически открытыми и закрытыми поверхностными условиями. Решение задач о распространении SH-волн в ПЭ/ПМ пластине представлено в трансформантах Фурье. Приведены удобные для использования матричные формы дисперсионных уравнений.

На примере пластины $PZT-5H/CoFe_2O_4$ проведен детальный анализ влияния изменения толщины каждого из слоев на скорости SH-ПАВ и поведение КЭММС в широком диапазоне частот. При варьировании геометрических параметров фиксировались либо толщина пластины, либо толщина одного из слоев. Для задачи с электрически закрытыми поверхностями показано, что при наличии даже очень тонкого ПМ слоя происходят значительные изменения в поведении 2-й моды ПАВ: возрастает частота выхода моды и асимптотическое значение скорости. Установлены условия, при которых в поведении скоростей SH-ПАВ ПЭ/ПМ пластины, начиная со 2-й моды, в определенных частотных диапазонах появляются «террасные» участки со скоростями, близкими к скорости сдвиговой волны в ПМ слое. Получены условия максимального и минимального влияния толщины каждого из слоев на характерные особенности трансформации фазовых и групповых скоростей SH-ПАВ для 2-х и последующих мод. Установлены закономерности влияния толщины ПМ и ПЭ слоев пластины на поведение КЭММС.

Авторы выражают благодарность члену-корреспонденту РАН В.В. Калинчуку за конструктивные замечания и внимание к работе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 24-29-00773).

Литература

1. *Bleustein J.L.* A new surface wave in piezoelectric materials // *Applied Physics Letters*. 1968. Vol. 13. P. 412–413. DOI: 10.1063/1.1652495
2. *Гуляев Ю.В.* Поверхностные электрорезонансные волны в твердых телах // *Письма в журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1969. Т. 9, № 1. С. 63–65.
3. *Фильтры на поверхностных акустических волнах. Расчет, технология и применение / под ред. Г. Мэттьюза.* М.: Радио и связь, 1981. 472 с.
4. *Alshits V.I., Darinskii A.N., Lothe J.* On the existence of surface waves in half-infinite anisotropic elastic media with piezoelectric and piezomagnetic properties // *Wave Motion*. 1992. Vol. 16. P. 265–283. DOI: 10.1016/0165-2125(92)90033-X
5. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.
6. *Gulyaev Y.V.* Review of shear surface acoustic waves in solids // *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*. 1998. Vol. 45, no. 4. P. 935–938. DOI: 10.1109/58.710563
7. *Vinyas M.* Computational Analysis of Smart Magneto-Electro-Elastic Materials and Structures: Review and Classification // *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2021. Vol. 28, no. 3. P. 1205–1248. DOI: 10.1007/s11831-020-09406-4
8. *Wang H., Wu B., Gao X., Liu Y., Li X., Liu X.* Ultrasonic Guided Wave Defect Detection Method for Tank Bottom Plate Based on Sh0 Mode Multichannel Magnetostrictive Sensor // *Measurement*. 2023. Vol. 223. 113790. DOI: 10.2139/ssrn.4515168
9. *Pan E.* Three-dimensional Green's functions in anisotropic magneto-electro-elastic bimetals // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2002. Vol. 53. P. 815–838. DOI: 10.1007/s00033-002-8184-1
10. *Chen J., Pan E., Chen H.* Wave propagation in magneto-electro-elastic multilayered plates // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44, no. 3/4. P. 1073–1085. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.003
11. *Wei W.-Y., Liu J.-X., Fang D.-N.* Existence of Shear Horizontal Surface Waves in a Magneto-Electro-Elastic Material // *Chinese Physics Letters*. 2009. Vol. 26, no. 10. 104301. DOI: 10.1088/0256-307x/26/10/104301
12. *Bou Matar O., Gasmi N., Zhou H., Goueygou M., Talbi A.* Legendre and Laguerre polynomial approach for modeling of wave propagation in layered magneto-electro-elastic media // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2013. Vol. 133, no. 3. P. 1415–1424. DOI: 10.1121/1.4776198
13. *Othmani C., Zhang H., Lü C., Qing Wang Y., Reza Kamali A.* Orthogonal polynomial methods for modeling elastodynamic wave propagation in elastic, piezoelectric and magneto-electro-elastic composites—A review // *Composite Structures*. 2022. Vol. 286. 115245. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.115245
14. *Dziatkiewicz G.* New forms of the fundamental solutions for 3D magneto-electro-elasticity equations // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 91. P. 563–580. DOI: 10.1016/j.apm.2020.09.052
15. *Melkumyan A.* Twelve shear surface waves guided by clamped/free boundaries in magneto-electro-elastic materials // *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. P. 3594–3599. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.09.016
16. *Mai Y.-W., Niraula O.P., Wang B.L.* A horizontal shear surface wave in magneto-electro-elastic materials // *Philosophical Magazine Letters*. 2007. Vol. 87. P. 53–58. DOI: 10.1080/09500830601096908
17. *Liu J.-x., Fang D.-N., Wei W.-Y., Zhao X.-F.* Love waves in layered piezoelectric/piezomagnetic structures // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 315. P. 146–156. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.01.055
18. *Zakharenko A.A.* Analytical Investigation of Surface Wave Characteristics of Piezoelectromagnetics of Class 6 mm // *ISRN Applied Mathematics*. 2011. P. 1–8. DOI: 10.5402/2011/408529
19. *Zakharenko A.A.* Consideration of SH-wave fundamental modes in piezoelectromagnetic plate: electrically open and magnetically open boundary conditions // *Waves in Random and Complex Media*. 2013. Vol. 23, no. 4. P. 373–382. DOI: 10.1080/17455030.2013.834396
20. *Zakharenko A.A.* Investigation of SH-Wave Fundamental Modes in Piezoelectromagnetic Plate: Electrically Closed and Magnetically Closed Boundary Conditions // *Open Journal of Acoustics*. 2014. Vol. 4. P. 90–97. DOI: 10.4236/oja.2014.42009
21. *Calas H., Otero J.A., Rodriguez-Ramos R., Monsivais G., Stern C.* Dispersion relations for SH wave in magneto-electro-elastic heterostructures // *International Journal of Solids and Structures*. 2008. Vol. 45. P. 5356–5367. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.05.017
22. *Ezzin H., Amor M.B., Ghazlen M.H.B.* Propagation behavior of SH waves in layered piezoelectric/piezomagnetic plates // *Acta Mechanica*. 2017. Vol. 228. P. 1071–1081. DOI: 10.1007/s00707-016-1744-9
23. *Li L., Wei P.J.* The piezoelectric and piezomagnetic effect on the surface wave velocity of magneto-electro-elastic solids // *Journal of Sound and Vibration*. 2014. Vol. 333, no. 8. P. 2312–2326. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.12.005
24. *Nie G., An Z., Liu J.* SH-guided waves in layered piezoelectric/piezomagnetic plates // *Progress in Natural Science*. 2009. Vol. 19, no. 7. P. 811–816. DOI: 10.1016/j.pnsc.2008.10.007
25. *Nie G., Liu J., Fang X., An Z.* Shear horizontal (SH) waves propagating in piezoelectric–piezomagnetic bilayer system with an imperfect interface // *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223, no. 9. P. 1999–2009. DOI: 10.1007/s00707-012-0680-6
26. *Wei H.-X., Li Y.-D., Xiong T., Guan Y.* Propagation of SH waves in a piezoelectric/piezomagnetic plate: Effects of interfacial imperfection couplings and the related physical mechanisms // *Physics Letters A*. 2016. Vol. 380, no. 38. P. 3013–3021. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.07

27. Pang Y., Feng W., Liu J., Zhang C. SH wave propagation in a piezoelectric/piezomagnetic plate with an imperfect magnetoelastoelectric interface // *Waves in Random and Complex Media*. 2019. Vol. 29, no. 3. P. 580–594. DOI: 10.1080/17455030.2018.1539277
28. Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Турчин А.С. SH-волны на поверхности биморфной магнитоэлектрорупругой пластины // *Наука юга России*. 2024. Т. 20, № 2. С. 3–15. DOI: 10.7868/S25000640240201
29. Гринченко В.Т., Мелешко М.М. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
30. Alshits V.I., Maugin G.A. Dynamics of multilayers: elastic waves in an anisotropic graded or stratified plate // *Wave Motion*. 2005. Vol. 41, no. 4. P. 357–394. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2004.09.002
31. Shuvalov A.L., Poncelet O., Kiselev A.P. Shear horizontal waves in transversely inhomogeneous plates // *Wave Motion*. 2008. Vol. 45, no. 5. P. 605–615. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2007.07.008

Сведения об авторах:

Белянкова Татьяна Ивановна (корр.), кфмн., доц., внс. Южный научный центр РАН (ЮНЦ РАН), 344006, г. Ростов-на-Дону, пр-т Чехова, д. 41; e-mail: tbelen415@mail.ru; ORCID: 0000-0003-3988-2007

Ворович Елена Иосифовна, кфмн., доц., Донской государственный технический университет (ДГТУ), 344003, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; e-mail: solomlub@yandex.ru; ORCID: 0009-0003-7711-0777

Research article

The effect of geometric parameters on the propagation of SH waves in a piezoelectric/piezomagnetic plate

T.I. Belyankova¹, E.I. Vorovich²

¹ Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation

² Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

The propagation features of horizontally polarized shear waves in a magnetoelastoelectric composite plate in contact with vacuum are investigated within the quasi-static approximation. The plate consists of rigidly coupled piezoelectric and piezomagnetic layers. It is assumed that there are no mechanical stresses on the outer surfaces, and the magnetic potential is zero. Depending on the nature of the specified electrical conditions, problems with electrically open and electrically closed external surfaces are considered. The wave process is initiated by the action of a remote source of harmonic oscillations and is assumed to be steady. The solution of the problems is constructed in Fourier images as an expansion into a set of exponentials. Dispersion equations of the problems, which are presented in a matrix form convenient for numerical implementation, were obtained. Using the example of the PZT-5H/CoFe₂O₄ plate, the effect of the thickness of each of its layers on the transformation features of phase and group velocities of surface acoustic waves with horizontal polarization (SH-SAW) is established. When changing the geometric parameters, either the plate thickness or the thickness of one of its layers was fixed. Within the framework of the problem with electrically closed external surfaces, significant differences in the behavior of velocities were established depending on the thickness of the piezoelectric and piezomagnetic layers. The conditions for the maximum and minimum effect of the thickness of each layer on the behavior of the 2nd and subsequent SH-SAW modes were determined. It is shown that in the presence of a very thin piezomagnetic layer in the plate, the behavior of the 2nd SAW mode changes significantly: both the mode output frequency and the asymptotic value of the velocity increase. The regularities of the effect of changing the thickness of the piezoelectric and piezomagnetic layers of the plate on the transformation of the electromagnetic-mechanical coupling coefficient in a wide frequency range were revealed. The obtained results are given in dimensionless parameters and can be of interest in the development of new functionally oriented materials, the assessment of their performance characteristics, as well as in the creation of highly efficient devices operating on surface acoustic waves.

Keywords: piezoelectric material, piezomagnetic material, magnetoelastoelectric material, shear horizontally polarized surface acoustic waves, electromagnetomechanical coupling coefficient

Received: 19.08.2024 / **Published online:** 30.12.2024

References

1. Bleustein J.L. A new surface wave in piezoelectric materials. *Applied Physics Letters*. 1968. Vol. 13. P. 412–413. DOI: 10.1063/1.1652495
2. Gulyaev Y.V. Electroacoustic surface waves in solids. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*. 1969. Vol. 9. P. 37–38.
3. Matthews H. *Surface wave filters: design, construction and use*. New York: Wiley, 1977. 521 p.
4. Alshits V.I., Darinskii A.N., Lothe J. On the existence of surface waves in half-infinite anisotropic elastic media with piezoelectric and piezomagnetic properties. *Wave Motion*. 1992. Vol. 16. P. 265–283. DOI: 10.1016/0165-2125(92)90033-X
5. Maugin G. *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. North Holland, 1988. 598 p.

6. *Gulyaev Y.V.* Review of shear surface acoustic waves in solids. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*. 1998. Vol. 45, no. 4. P. 935–938. DOI: 10.1109/58.710563
7. *Vinyas M.* Computational Analysis of Smart Magneto-Electro-Elastic Materials and Structures: Review and Classification. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2021. Vol. 28, no. 3. P. 1205–1248. DOI: 10.1007/s11831-020-09406-4
8. *Wang H., Wu B., Gao X., Liu Y., Li X., Liu X.* Ultrasonic Guided Wave Defect Detection Method for Tank Bottom Plate Based on Sh0 Mode Multichannel Magnetostrictive Sensor. *Measurement*. 2023. Vol. 223. 113790. DOI: 10.2139/ssrn.4515168
9. *Pan E.* Three-dimensional Green's functions in anisotropic magneto-electro-elastic bimetals. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2002. Vol. 53. P. 815–838. DOI: 10.1007/s00033-002-8184-1
10. *Chen J., Pan E., Chen H.* Wave propagation in magneto-electro-elastic multilayered plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44, no. 3/4. P. 1073–1085. DOI: 10.1016/j.ijso1str.2006.06.003
11. *Wei W.-Y., Liu J.-X., Fang D.-N.* Existence of Shear Horizontal Surface Waves in a Magneto-Electro-Elastic Material. *Chinese Physics Letters*. 2009. Vol. 26, no. 10. 104301. DOI: 10.1088/0256-307x/26/10/104301
12. *Bou Matar O., Gasmi N., Zhou H., Goueygou M., Talbi A.* Legendre and Laguerre polynomial approach for modeling of wave propagation in layered magneto-electro-elastic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2013. Vol. 133, no. 3. P. 1415–1424. DOI: 10.1121/1.4776198
13. *Othmani C., Zhang H., Lü C., Qing Wang Y., Reza Kamali A.* Orthogonal polynomial methods for modeling elastodynamic wave propagation in elastic, piezoelectric and magneto-electro-elastic composites—A review. *Composite Structures*. 2022. Vol. 286. 115245. DOI: 10.1016/j.compstruct.2022.115245
14. *Dziatkiewicz G.* New forms of the fundamental solutions for 3D magnetoelastoelectricity equations. *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 91. P. 563–580. DOI: 10.1016/j.apm.2020.09.052
15. *Melkumyan A.* Twelve shear surface waves guided by clamped/free boundaries in magneto-electro-elastic materials. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. P. 3594–3599. DOI: 10.1016/j.ijso1str.2006.09.016
16. *Mai Y.-W., Niraula O.P., Wang B.L.* A horizontal shear surface wave in magnetoelastoelectric materials. *Philosophical Magazine Letters*. 2007. Vol. 87. P. 53–58. DOI: 10.1080/09500830601096908
17. *Liu J.-x., Fang D.-N., Wei W.-Y., Zhao X.-F.* Love waves in layered piezoelectric/piezomagnetic structures. *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 315. P. 146–156. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.01.055
18. *Zakharenko A.A.* Analytical Investigation of Surface Wave Characteristics of Piezoelectromagnetics of Class 6 mm. *ISRN Applied Mathematics*. 2011. P. 1–8. DOI: 10.5402/2011/408529
19. *Zakharenko A.A.* Consideration of SH-wave fundamental modes in piezoelectromagnetic plate: electrically open and magnetically open boundary conditions. *Waves in Random and Complex Media*. 2013. Vol. 23, no. 4. P. 373–382. DOI: 10.1080/17455030.2013.834396
20. *Zakharenko A.A.* Investigation of SH-Wave Fundamental Modes in Piezoelectromagnetic Plate: Electrically Closed and Magnetically Closed Boundary Conditions. *Open Journal of Acoustics*. 2014. Vol. 4. P. 90–97. DOI: 10.4236/oja.2014.42009
21. *Calas H., Otero J.A., Rodriguez-Ramos R., Monsivais G., Stern C.* Dispersion relations for SH wave in magneto-electro-elastic heterostructures. *International Journal of Solids and Structures*. 2008. Vol. 45. P. 5356–5367. DOI: 10.1016/j.ijso1str.2008.05.017
22. *Ezzin H., Amor M.B., Ghozlen M.H.B.* Propagation behavior of SH waves in layered piezoelectric/piezomagnetic plates. *Acta Mechanica*. 2017. Vol. 228. P. 1071–1081. DOI: 10.1007/s00707-016-1744-9
23. *Li L., Wei P.J.* The piezoelectric and piezomagnetic effect on the surface wave velocity of magneto-electro-elastic solids. *Journal of Sound and Vibration*. 2014. Vol. 333, no. 8. P. 2312–2326. DOI: 10.1016/j.jsv.2013.12.005
24. *Nie G., An Z., Liu J.* SH-guided waves in layered piezoelectric/piezomagnetic plates. *Progress in Natural Science*. 2009. Vol. 19, no. 7. P. 811–816. DOI: 10.1016/j.pnsc.2008.10.007
25. *Nie G., Liu J., Fang X., An Z.* Shear horizontal (SH) waves propagating in piezoelectric–piezomagnetic bilayer system with an imperfect interface. *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223, no. 9. P. 1999–2009. DOI: 10.1007/s00707-012-0680-6
26. *Wei H.-X., Li Y.-D., Xiong T., Guan Y.* Propagation of SH waves in a piezoelectric/piezomagnetic plate: Effects of interfacial imperfection couplings and the related physical mechanisms. *Physics Letters A*. 2016. Vol. 380, no. 38. P. 3013–3021. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.07
27. *Pang Y., Feng W., Liu J., Zhang C.* SH wave propagation in a piezoelectric/piezomagnetic plate with an imperfect magnetoelastoelectric interface. *Waves in Random and Complex Media*. 2019. Vol. 29, no. 3. P. 580–594. DOI: 10.1080/17455030.2018.1539277
28. *Belyankova T.I., Vorovich E.I., Turchin A.S.* SH-waves on the surface of a bimorph magnetoelastoelectric plate. *Science in the South of Russia*. 2024. Vol. 20, no. 2. P. 3–15. DOI: 10.7868/S25000640240201
29. *Grinchenko V.T., Meleshko M.M.* *Garmonicheskiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh*. Kyiv: Naukova dumka, 1981. 284 p.
30. *Alshits V.I., Maugin G.A.* Dynamics of multilayers: elastic waves in an anisotropic graded or stratified plate. *Wave Motion*. 2005. Vol. 41, no. 4. P. 357–394. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2004.09.002
31. *Shuvalov A.L., Poncelet O., Kiselev A.P.* Shear horizontal waves in transversely inhomogeneous plates. *Wave Motion*. 2008. Vol. 45, no. 5. P. 605–615. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2007.07.008