

Научная статья

Численное исследование естественной конвекции в кольцевом канале с подвижным внутренним цилиндром

Э.И. Нарыгин¹, П.Т. Зубков²

¹ Тюменский нефтяной научный центр, Тюмень, Российская Федерация

² Тюменский государственный университет, Тюмень, Российская Федерация

Численно исследуется естественная конвекция вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей весь объем бесконечного горизонтального кольцевого канала. Конвекция вызвана перепадом температуры на внешней границе канала и может стать причиной вращения внутреннего цилиндра вокруг своей оси. Предполагается, что трением на оси вращения можно пренебречь. В качестве математической модели термоконвекции использовано приближение Буссинеска. Для численного решения задачи применен алгоритм SIMPLER. Уравнение движения внутреннего цилиндра получено из закона сохранения момента импульса. Выбор метода численного интегрирования уравнения движения внутреннего цилиндра не сказывается на результате. Проанализировано влияние безразмерных параметров на структуру течения и угловую скорость внутреннего цилиндра. Безразмерные параметры изменялись в пределах: число Грасгофа $10^3 \dots 2 \cdot 10^5$, число Прандтля $0.5 \dots 15$, безразмерная теплопроводность $0 \dots \infty$, радиус внутреннего цилиндра $0.05 \dots 0.9$. Расчеты показали, что структура течения обуславливает величину угловой скорости внутреннего цилиндра, которая достигает максимума при одноячеечном течении и минимальном радиусе внутреннего цилиндра. С ростом числа Грасгофа максимально возможная скорость вращения внутреннего цилиндра монотонно растет и реализуется при больших внутренних радиусах. Число Прандтля оказывает противоположное влияние на скорость вращения цилиндра. При его снижении угловая скорость увеличивается и становится экстремальной при меньших значениях радиуса. Увеличение теплопроводности внутреннего цилиндра приводит к росту угловой скорости, но максимум получается при меньшем внутреннем радиусе. Влияние рассмотренных параметров на угловую скорость обуславливается изменением структуры течения в канале. Установленные результаты могут быть полезны при разработке технических устройств, в которых имеет место кольцевой канал с вращающимся внутренним цилиндром.

Ключевые слова: естественная конвекция, кольцевой канал, численное моделирование, вращение, приближение Буссинеска, число Грасгофа, число Прандтля, алгоритм SIMPLER, метод конечных объемов

Получение: 24.04.2024 / Публикация онлайн: 30.12.2024

УДК 532.5.032

1. Введение

Естественная конвекция — течение жидкости/газа в поле гравитационных сил вследствие разности плотностей. Неоднородность поля плотности может быть вызвана, например, нагревом или охлаждением. Конвективные течения бывают однофазными [1] и многофазными [2], существенно отличающимися масштабом: они имеют размеры от микроскопического [3] до сотен километров [4]. Чаще всего естественно-конвективные течения являются слабыми [5], но существуют условия, при которых интенсивность течения весьма значительная [6].

Теоретическим и экспериментальным исследованием естественной конвекции занимаются ученые из различных областей. Так, конвективный вклад в теплообмен необходимо учитывать при предсказании атмосферных явлений [6], при планировании систем охлаждения технических устройств [7], при создании альтернативных источников энергии [8].

С точки зрения практического применения естественной конвекции в горизонтальном кольцевом канале наибольший интерес представляют задачи максимизации отвода тепла с внутреннего цилиндра. Одной из первых по экспериментальному и теоретическому изучению теплопереноса в концентрических и эксцентрических кольцевых каналах была работа [7]. Вначале в качестве теплоносителя рассматривались вода и воздух. С развитием нанотехнологий выяснилось, что для интенсификации теплового потока эффективно использовать наножидкости. В [9] изучалось влияние доли наночастиц на число Нуссельта. Получено, что если твердые частицы составляют 4%, то среднее число Нуссельта увеличивается для всех чисел Релея из диапазона $10^3 \dots 10^5$. В большинстве публикаций температура внутреннего и внешнего цилиндров принимается постоянной.

В исследованиях, посвященных теплообмену в системах типа солнечного коллектора, решается противоположная задача: минимизируются потери тепла на внутреннем цилиндре, происходящие за счет конвекции и излучения. В работе [10] показано, что излучение существенно сказывается на структуре течения и температурном поле. Доля потерь тепла вследствие излучения может достигать 60%. Для их минимизации в [11] предложено часть кольцевого канала, не получающего солнечного излучения, заполнить теплоизоляционным материалом. Это позволило снизить тепловые потери путем уменьшения интенсивности конвективных течений.

В данной работе изучается естественная конвекция в устройстве, имеющем заполненный вязкой несжимаемой жидкостью кольцевой канал, внутри которого находится подвижный цилиндр. Исследуется влияние геометрических и теплофизических параметров на структуру течения и угловую скорость внутреннего цилиндра. Оценивается возможность генерирования энергии благодаря перепаду температуры между разными участками внешней границы.

2. Постановка задачи и математическая модель

Рассматривается естественная конвекция вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей бесконечный горизонтальный кольцевой канал, образованный двумя концентрическими цилиндрами. Внешний радиус канала r_o , внутренний — r_i . Под действием внешней силы внутренний цилиндр может вращаться с угловой скоростью ω вокруг своей оси, перпендикулярной плоскости поперечного сечения (Рис. 1). Предполагается, что вращение цилиндра в жидкости происходит без проскальзывания, а влияние трения на оси вращения пренебрежимо мало. На внешней границе поддерживается постоянный перепад температуры; выделены две области с постоянной, но разной температурой, расположенные напротив друг друга: температура горячей области T_h , температура холодной области T_c . Размер областей определяется углами α_h и α_c , а положение — углом γ . На оставшихся частях внешней границы задан равный нулю тепловой поток. Теплофизические характеристики жидкости и внутреннего цилиндра считаются постоянными. В начальный момент времени жидкость и внутренний цилиндр покоятся при температуре $T^* = (T_h + T_c)/2$.

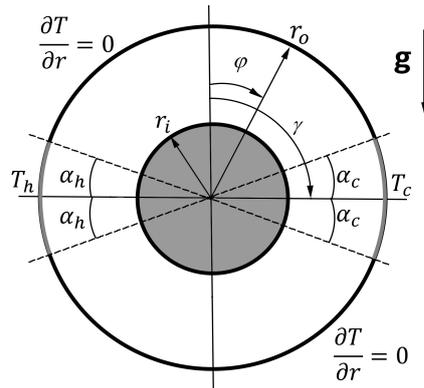


Рис. 1. Поперечное сечение кольцевого канала

Перепад температуры на внешней границе канала приводит к образованию в нем естественно-конвективных течений. Движение жидкости в кольцевой области вызывает вращение внутреннего цилиндра за счет вязкого трения. Кинетическая энергия вращения цилиндра может использоваться для совершения механической работы.

Далее приняты следующие обозначения: r, φ — полярные координаты; t — время; v_r, v_φ — компоненты вектора скорости; p — давление в жидкости; μ — динамическая вязкость; β — коэффициент объемного расширения; g — ускорение свободного падения; c — теплоемкость; λ_l, λ_s — коэффициенты теплопроводности жидкости и внутреннего цилиндра; ρ_0 — плотность жидкости при температуре T^* ; ρ_s — плотность внутреннего цилиндра.

Моделирование проводилось в безразмерных переменных: $R = r/r_o$, $\tau = t\mu/(r_o^2\rho_0)$, $V_R = v_r\rho_0 r_o/\mu$, $V_\varphi = v_\varphi\rho_0 r_o/\mu$, $\Theta = (T - T^*)/(T_h - T_c)$, $\Omega = \omega r_o^2\rho_0/\mu$, $P = (p + \rho_0 g r \cos\varphi)\rho_0 r_o^2/\mu^2$. Также введены следующие безразмерные параметры: число Грасгофа $Gr = g\beta\rho_0^2(T_h - T_c)r_o^3/\mu^2$; число Прандтля $Pr = c\mu/\lambda_l$; безразмерный внутренний радиус канала $R_i = r_i/r_o$; безразмерная теплопроводность $\tilde{\lambda}_{sl} = \lambda_s/\lambda_l$; плотность подвижного цилиндра $\rho_{sl} = \rho_s/\rho_l$.

Математическая модель естественной конвекции в кольцевом канале с подвижным внутренним цилиндром в приближении Буссинеска представлена в работе [12]. Система уравнений с учетом введенных обозначений принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_R}{\partial \tau} + V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{R} &= -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V_R}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V_R}{\partial \varphi^2} - \frac{V_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + Gr \Theta \cos\varphi + S_R, \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial \tau} + V_R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{V_R V_\varphi}{R} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{V_\varphi}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} - Gr \Theta \sin\varphi + S_\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial R} (R V_R) + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + V_R \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} &= \frac{1}{Pr} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \tilde{\lambda} \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right) \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\tilde{\lambda}(R) = \begin{cases} 1, & R > R_i, \\ \lambda_{sl}, & R < R_i, \end{cases} \quad (2)$$

$$S_R(R) = \begin{cases} 0, & R > R_i, \\ -10^{30}V_R, & R < R_i, \end{cases} \quad (3)$$

$$S_\varphi(R) = \begin{cases} 0, & R > R_i, \\ 10^{30}\Omega R - 10^{30}V_\varphi, & R < R_i. \end{cases}$$

Уравнение для угловой скорости ω внутреннего цилиндра получается из закона сохранения его момента импульса:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (4)$$

где I — момент инерции внутреннего цилиндра, $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ — момент силы, действующей на цилиндр.

На внутренний цилиндр со стороны жидкости действует сила вязкого трения, ее момент на единицу площади представляется как $r_i \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \Big|_{r=r_i}$. Для нахождения момента силы следует проинтегрировать удельный момент силы по поверхности внутреннего цилиндра:

$$\int_0^{2\pi} r_i \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \Big|_{r=r_i} r_i d\varphi. \quad (5)$$

После подстановки $I = m r_i^2 / 2 = \rho_s \pi r_i^4 / 2$, выражения (5) и учета условия непротекания $v_r = 0$ на поверхности подвижного цилиндра уравнение (4) переписывается как

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2\mu}{\rho_s \pi r_i^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \Big|_{r=r_i} d\varphi. \quad (6)$$

В безразмерных переменных уравнение (6) принимает вид:

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{2}{\rho_{sl} \pi R_i^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial R} - \frac{V_\varphi}{R} \right) \Big|_{R=R_i} d\varphi. \quad (7)$$

Задача решается при следующих условиях:

– на границах

$$R=0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi: \quad V_R=0, V_\varphi=0, \partial\theta/\partial R;$$

$$R=1, \begin{cases} |\varphi - \gamma - \pi| \leq \alpha_h: & V_R=0, V_\varphi=0, \theta=0.5, \\ |\varphi - \gamma| \leq \alpha_c: & V_R=0, V_\varphi=0, \theta=-0.5, \\ |\varphi - \gamma| > \alpha_c, |\varphi - \gamma - \pi| > \alpha_h: & V_R=0, V_\varphi=0, \partial\theta/\partial R=0; \end{cases} \quad (8)$$

– в начальный момент:

$$\tau=0: \quad V_R=V_\varphi=\Omega=\theta=0.$$

3. Численная реализация

Для численной реализации задачи авторами разработана программа на языке FORTRAN. Дискретные аналоги системы уравнений (1) получены методом конечного объема [13]. Решение осуществлялось согласно алгоритму SIMPLER [13]. Расчеты проводились на равномерной расчетной сетке 82×82 . Определение оптимального шага сетки по пространству с точки зрения качества результатов и скорости вычислений выполнено в работе [12].

Задача решается методом сквозного счета, то есть одновременно для жидкости и внутреннего цилиндра. Для достижения корректных результатов необходимо, чтобы граница раздела между жидкостью и твердым телом проходила по граням контрольных объемов. Для задания скорости в области, занятой внутренним цилиндром, в уравнение движения (1) вводятся дополнительные источниковые члены $S_R(R)$, $S_\varphi(R)$ (см. (3)) [14]. Множитель 10^{30} выбирался таким, чтобы источниковый член был намного больше остальных членов дискретного аналога. Следует заметить, что в качестве множителя можно взять любое достаточно большое число. Использование таких источниковых членов (3) позволяет при решении системы алгебраических уравнений получать $V_R \approx 0$, $V_\varphi \approx \Omega R$ для всех контрольных объемов, занятых внутренним цилиндром. Для контрольных объемов, удовлетворяющих условию $R > R_i$, источниковые члены равняются нулю и никак не влияют на искомые компоненты вектора скорости жидкости.

Учет разной величины теплопроводности жидкости и материала внутреннего цилиндра осуществляется с помощью безразмерной ступенчатой функции (2). Если текущий радиус R меньше R_i , то теплопроводность равна теплопроводности внутреннего цилиндра, иначе — теплопроводности жидкости.

Система уравнений решается последовательно, то есть сначала из уравнений движения определяются составляющие скорости жидкости в направлениях R и φ . Затем вычисляется поправка давления и корректируется поле скорости. После этого решается уравнение теплопроводности. Система уравнений (1)–(8) нелинейная, для ее численного решения необходимо прибегать к внутренним итерациям. Коэффициенты уравнений пересчитываются по значениям переменных, полученных на предыдущей итерации. Уравнение движения внутреннего цилиндра (7) решается на каждой внутренней итерации для V_φ .

4. Интегрирование уравнения движения внутреннего цилиндра

Рассмотрим подходы к решению обыкновенных дифференциальных уравнений: метод Эйлера, метод Рунге–Кутты, аналитическое решение. Сравним их на примере уравнения (7).

Используя условие прилипания на поверхности раздела жидкости, уравнение (7) можно переписать как

$$\frac{d\Omega}{d\tau} + C\Omega = F(\tau), \quad (9)$$

где $C = \frac{4}{\rho_{sl} R_i^2}$, $F(\tau) = \frac{2}{\rho_{sl} \pi R_i^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \right) \Big|_{R=R_i} d\varphi$. Уравнение (9) имеет аналитическое решение:

$$\Omega^{\tau+\Delta\tau} = \Omega^\tau e^{-C\Delta\tau} + \int_\tau^{\tau+\Delta\tau} F(\xi) e^{-C(\tau+\Delta\tau-\xi)} d\xi. \quad (10)$$

Используя уравнение (10), дискретный аналог (9) запишем в виде [4]:

$$\Omega^{\tau+\Delta\tau} = \Omega^\tau e^{-C\Delta\tau} + \frac{1}{C} \frac{F(\tau) + F(\tau+\Delta\tau)}{2} (1 - e^{-C\Delta\tau}). \quad (11)$$

Дискретные аналоги для применения метода Эйлера и метода Рунге–Кутты 2-го порядка можно, соответственно, представить как

$$\Omega^{\tau+\Delta\tau} = \Omega^\tau + \Delta\tau(F(\tau) - C\Omega^\tau), \quad (12)$$

$$\Omega^{\tau+\Delta\tau} = \Omega^\tau + \frac{\Delta\tau}{2} (F(\tau+\Delta\tau) - C\Omega^{\tau+\Delta\tau} + F(\tau) - C\Omega^\tau). \quad (13)$$

Численное интегрирование $F(\tau)$ выполним методом средних прямоугольников. Для производной $(\partial V_\varphi / \partial R) \Big|_{R=R_i}$ воспользуемся первым порядком аппроксимации. Выяснено, что более высокие порядки аппроксимации дают такие же результаты [12].

Проведены тестовые расчеты с параметрами: $Gr = 10^4$, $Pr = 1$, $R_i = 0.4$, $\lambda_{sl} = 0$, $\rho_{sl} = 1$, $\alpha_h = \alpha_c = \pi/5$, $\gamma = \pi/2$. Для их других комбинаций результаты аналогичны. Решения, выполненные тремя различными методами, совпадают (Рис. 2). Далее в вычислительных экспериментах применяется метод Эйлера.

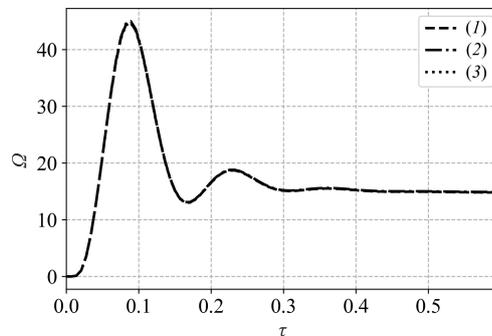


Рис. 2. Зависимость угловой скорости Ω от времени τ при разных подходах к ее расчету: метод Эйлера (1), аналитическое решение (2), метод Рунге–Кутты 2-го порядка (3)

5. Результаты расчетов

Результаты получены при следующих значениях параметров: $\rho_{sl} = 1$, $\alpha_h = \alpha_c = \pi/5$, $\gamma = \pi/2$, $10^3 \leq Gr \leq 2 \cdot 10^5$, $0.5 \leq Pr \leq 15$, $0 \leq \lambda_{sl} < \infty$, $0.05 \leq R_i \leq 0.9$.

5.1. Структура течения

Рассмотрим случай $Gr = 10^4$, $Pr = 1$, $R_i = 0.5$, $\lambda_{sl} = 0$. При выбранных значениях параметров естественная конвекция имеет одноячеечную структуру, захватывающую всю область, заполненную вязкой несжимаемой жидкостью. Линии тока близки к concentрическим окружностям. Вблизи зон нагрева и охлаждения имеет место их сгущение. Центры линий тока совпадают с центром расчетной области (Рис. 3). Конвективное течение жидкости в кольцевом канале приводит к вращению внутреннего цилиндра. По мере развития течения скорость вращения увеличивается до тех пор, пока не достигнет максимального значения. Затем наблюдаются затухающие колебания угловой скорости с последующим выходом на стационарный режим (Рис. 2). Направление вращения цилиндра и конвективного вихря совпадают. Далее речь пойдет о стационарном режиме течения.

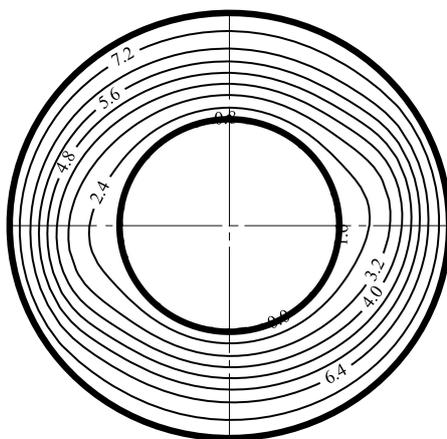


Рис. 3. Структура течения при $Gr = 10^4$, $Pr = 1$, $R_i = 0.5$, $\lambda_{sl} = 0$, $\tau = 1$

Скорость вращения внутреннего цилиндра зависит от его размера. Существует такой радиус, при котором для фиксированных теплофизических свойств жидкости и цилиндра угловая скорость максимальна. Величина глобального максимума скорости вращения и значение внутреннего радиуса кольцевого канала, при котором эта скорость достигается, зависят от расположения зон нагрева и охлаждения и теплофизических свойств системы. Вслед за изменением внутреннего радиуса в кольцевой области начинает перестраиваться структура течения. При малых величинах внутреннего радиуса в объеме, заполненном жидкостью, кроме основного вихря, формируются два вторичных, направление вращения которых совпадает с основным вихрем (Рис. 4). Вторичные вихри располагаются вблизи поверхности цилиндра и тормозят его вращение. Поэтому при малых внутренних радиусах скорость вращения цилиндра низкая. С увеличением внутреннего радиуса канала интенсивность вторичных вихрей снижается, а угловая скорость внутреннего цилиндра растет, и происходит это до достижения максимального значения. О том, что реализуется максимум угловой скорости, свидетельствует превращение линий тока в concentрические окружности. Последующее увеличение внутреннего радиуса уже не влияет на структуру течения, но его интенсивность снижается, что приводит к уменьшению скорости вращения цилиндра.

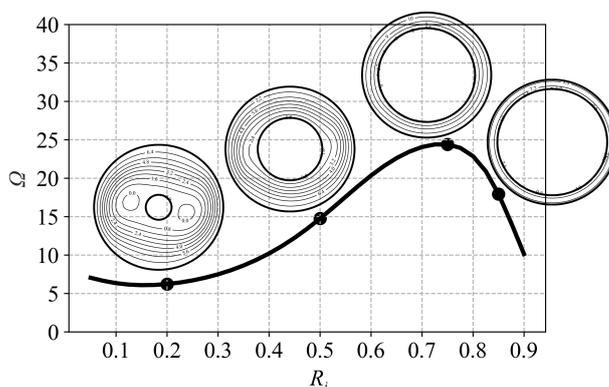


Рис. 4. Зависимость угловой скорости цилиндра от радиуса при $Gr = 10^4$, $Pr = 1$, $R_i = 0.5$, $\lambda_{sl} = 0$

5.2. Влияние числа Грасгофа

В зависимости от числа Грасгофа в характере скорости вращения цилиндра можно выделить три фазы. В первой фазе (участок 1→2, Рис. 5) скорость, как и термогравитационная подъемная сила, растет. Конвекция имеет одноячеечную структуру с линиями тока, близкими к концентрическим окружностям. По мере повышения значения числа Грасгофа линии тока все больше отличаются от окружностей и сгущаются вблизи участков с постоянной температурой. Повышение угловой скорости продолжается до точки 2, соответствующей локальному максимуму. Во второй фазе (участок 2→3, Рис. 5) наблюдается снижение угловой скорости. С увеличением числа Грасгофа вблизи внутреннего цилиндра образуются и растут два вторичных вихря, которые начинают тормозить вращение цилиндра. Снижение угловой скорости цилиндра происходит до точки 3, соответствующей локальному минимуму. В третьей фазе (участок 3→4, Рис. 5) угловая скорость повышается, как и число Грасгофа. Это связано с тем, что влияние на скорость потерь вследствие разрастания вторичных вихрей меньше, чем ее прирост в результате интенсификации течения. Здесь рассмотрена связь угловой скорости с числом Грасгофа при $R_i = 0.5$. При других значениях R_i поведение скорости аналогичное.

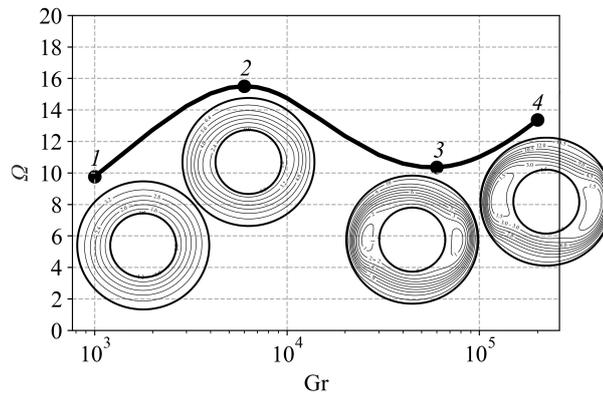


Рис. 5. Зависимость угловой скорости от числа Грасгофа при $Pr = 1$, $R_i = 0.5$, $\lambda_{sl} = 0$

На рисунке 6а представлена зависимость скорости вращения для радиусов $R_i = 0.2$ и $R_i = 0.7$. Видно, что значения чисел Грасгофа, при которых достигаются точки экстремума 2 и 3, будут увеличиваться при увеличении внутреннего радиуса.

При разных радиусах кольцевой области влияние параметров на угловую скорость немонотонное и неодинаковое. Значение внутреннего радиуса R_i^{opt} , обеспечивающее максимум угловой скорости — Ω^{opt} , зависит от величины чисел Грасгофа, Прандтля и теплопроводности внутреннего цилиндра. На оптимальный радиус могут влиять и другие параметры, не рассматриваемые в статье, например, расположение и размер зон нагрева и охлаждения, трение при вращении внутреннего цилиндра.

С увеличением числа Gr максимум угловой скорости смещается в сторону больших внутренних радиусов (Рис. 6б). При $Gr = 10^4$ максимальная угловая скорость реализуется при $R_i^{opt} = 0.625$. С ростом Gr на один порядок Ω^{opt} будет достигаться при $R_i^{opt} = 0.8$. Как и число Грасгофа, абсолютное значение Ω^{opt} монотонно повышается. При изменении Gr с 10^4 до 10^5 угловая скорость увеличивается с 32.98 до 91.57.

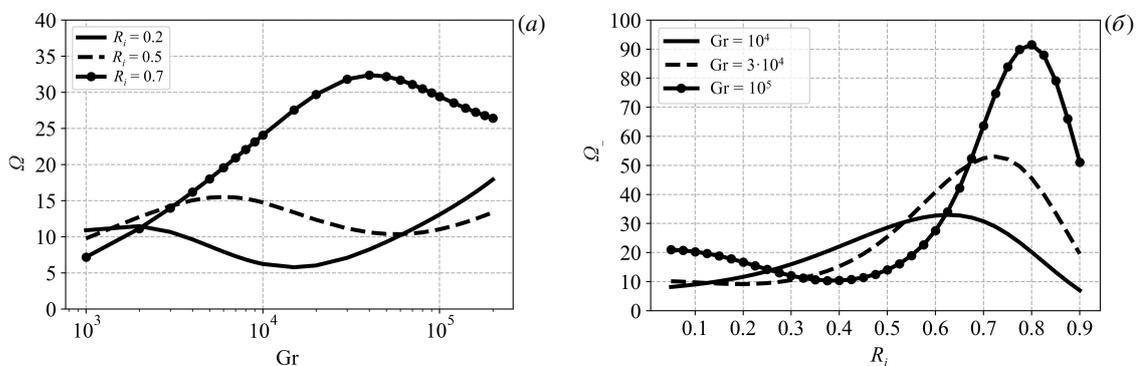


Рис. 6. Зависимость угловой скорости при $Pr = 1$, $\lambda_{sl} = 0$, $\tau = 2$ от числа Грасгофа (а) и от внутреннего радиуса (б)

Положение точек экстремума 2, 3 на рисунке 5 определяется не только геометрическими характеристиками, но и теплофизическими свойствами как канала, так и заполняющей его жидкости. Независимо от влияющих параметров локальный максимум характерен для одноячеечной структуры течения (см. Рис. 5 и 7).

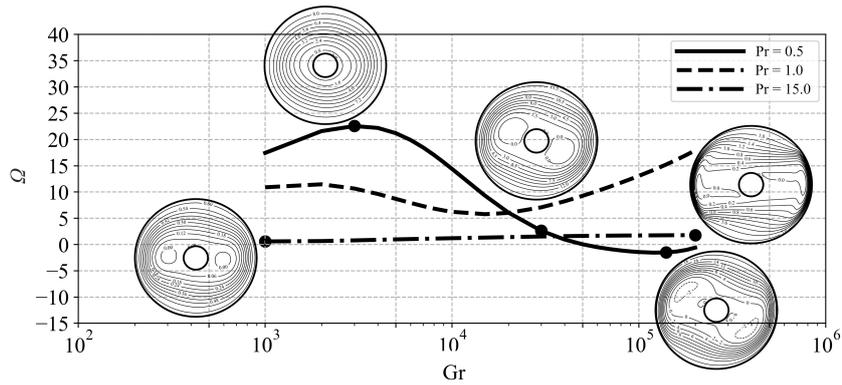


Рис. 7. Зависимость угловой скорости при $R_i = 0.2$, $\lambda_{sl} = 0$, $\tau = 2$ от числа Грасгофа

С уменьшением числа Прандтля Pr экстремумам в точках 2, 3 отвечают большие значения числа Gr . Так, при изменении числа Pr от 1 до 0.5 число Грасгофа, которому соответствует локальный максимум, принимает значения от $2 \cdot 10^3$ до $3 \cdot 10^3$ (Рис. 7). После достижения локального максимума угловая скорость снижается, хотя число Gr продолжает увеличиваться. Это связано с формированием и ростом интенсивности вторичных вихрей. Разрастание вторичных вихрей приводит сначала к остановке внутреннего цилиндра, а далее — к смене направления вращения. При дальнейшем росте числа Грасгофа оба вторичных вихря охватывают в канале все большие объемы. Это длится до тех пор, пока они не разделятся пополам. Образовавшиеся вблизи цилиндра два новых вихря по направлению вращения совпадают с основным вихрем и снова раскручивают внутренний цилиндр.

При увеличении числа Pr экстремумы в точках 2, 3 достигаются при меньших числах Грасгофа. При $Pr = 15$ точки 2, 3 выходят за границы диапазона обсуждаемых значений Gr . При минимальном числе Грасгофа течение приобретает трехъячеичную структуру. С повышением числа Грасгофа вторичные вихри интенсифицируются, однако их расщепление не наблюдается.

5.3. Влияние числа Прандтля

Рассмотрим случай $Gr = 10^4$, $\lambda_{sl} = 0$. Зависимость угловой скорости внутреннего цилиндра от числа Pr монотонна. При изменении Pr от 0.5 до 4 происходит ее резкое уменьшение (Рис. 8а). При дальнейшем увеличении числа Pr вращение внутреннего цилиндра продолжает замедляться, но не так значительно. Снижение угловой скорости связано с двумя процессами. Во-первых, с повышением числа Прандтля падает интенсивность течения. Во-вторых, активизируется течение вторичных вихрей, тормозящее внутренний цилиндр. При разных R_i темпы снижения скорости различны. Из этого следует, что при увеличении числа Pr становится меньше абсолютное значение угловой скорости — Ω^{opt} , и достижение максимума происходит при больших значениях внутреннего радиуса (Рис. 8б). Так, при $Pr = 0.5$ имеем $\Omega^{opt} = 48.62$ и $R_i^{opt} = 0.55$, при $Pr = 7$ — $\Omega^{opt} = 11.12$ и $R_i^{opt} = 0.775$.

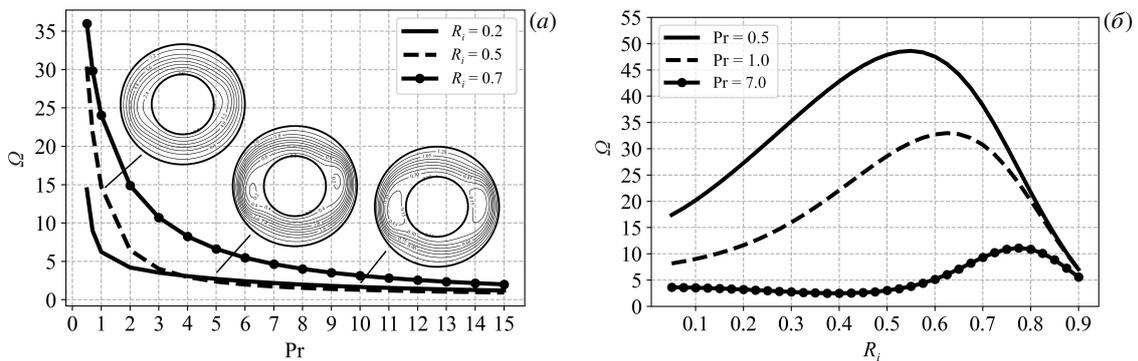


Рис. 8. Зависимость угловой скорости при $Gr = 10^4$, $\lambda_{sl} = 0$, $\tau = 2$ от числа Pr (а), от внутреннего радиуса (б)

5.4. Влияние теплопроводности внутреннего цилиндра

Теплопроводность внутреннего цилиндра оказывает существенное влияние на структуру естественно-конвективных течений и скорость вращения цилиндра за счет изменения поля температуры. С увеличением λ_{sl} градиент температуры во внутреннем цилиндре уменьшается. При $\lambda_{sl} \rightarrow \infty$ градиент температуры стремится к нулю, а температура не зависит от величины углов α_h , α_c и в пределе равняется $0.5(T_h - T_c)$.

Рассмотрим случай, когда $Gr = 10^4$, $Pr = 1$. Характер влияния λ_{sl} на угловую скорость зависит от величины внутреннего радиуса (Рис. 9а). Для радиусов из большого диапазона ($R_i < 0.65$) с ростом теплопроводности увеличивается и угловая скорость. Это связано со снижением интенсивности вторичных вихрей и прослеживается по приближению формы линий тока к концентрическим окружностям. При небольшом диапазоне изменения радиусов (от 0.65 до 0.78) наблюдается вначале резкий подъем угловой скорости с последующим медленным снижением. Причем скорость Ω при $\lambda_{sl} \rightarrow \infty$ может быть ниже, чем при $\lambda_{sl} = 0$. При $R_i > 0.78$ с ростом теплопроводности Ω монотонно падает. Увеличение теплопроводности приводит к более однородному температурному полю во внутреннем цилиндре, то есть к снижению подъемной силы и, как следствие, уменьшению интенсивности течения в кольцевой области.

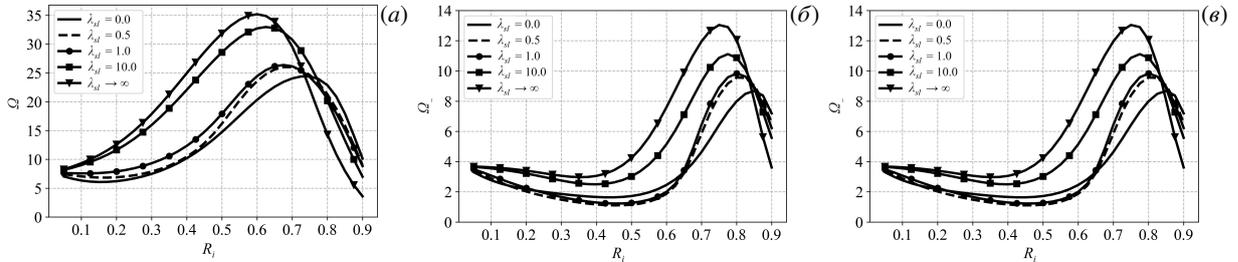


Рис. 9. Зависимость угловой скорости от внутреннего радиуса R_i при различных сочетаниях чисел Грасгофа и Прандтля: $Gr = 10^4$, $Pr = 1$ (а); $Gr = 10^4$, $Pr = 7$ (б); $Gr = 10^5$, $Pr = 1$ (в)

На угловой скорости наиболее сказывается варьирование теплопроводности в диапазоне значений от 0 до 20. При последующем увеличении теплопроводности температура цилиндра остается практически постоянной и перестает влиять на структуру течения.

Границы зон с различным характером воздействия λ_{sl} на Ω зависят от величины чисел Gr и Pr . При увеличении числа Pr от 1 до 7 появляется новая зона, в которой с ростом λ_{sl} интенсифицируются вторичные вихри (Рис. 9б). Достигнув максимального разрастания, вихри начинают уменьшаться, что имеет следствием резкое снижение угловой скорости с последующим ростом.

Изменение числа Gr оказывает похожее с числом Pr влияние на вид зависимости Ω от λ_{sl} . С ростом числа Грасгофа до 10^5 при некоторых значениях R_i и увеличивающейся теплопроводности λ_{sl} угловая скорость Ω вначале снижается, а потом растет (Рис. 9в). На характере зависимости сказывается соотношение сил, действующих на внутренний цилиндр. Торможение происходит за счет увеличения интенсивности вторичных вихрей, ускорение — благодаря интенсификации основного вихря. При малых радиусах ($R_i \leq 0.1$) ускорение вращения вследствие интенсификации течения превышает темп торможения, оказываемого вихрями, находящимися вблизи поверхности внутреннего цилиндра.

Угловая скорость Ω^{opt} монотонно увеличивается с ростом теплопроводности внутреннего цилиндра. Для фиксированных параметров $Gr = 10^4$, $Pr = 1$ при теплопроводности от 0 до ∞ значения максимальной угловой скорости принадлежат отрезку [24.40; 35.19]. При этом R_i^{opt} изменяется в узком диапазоне: от 0.6 до 0.75 (Рис. 9а). Для достижения максимальной угловой скорости при увеличении теплопроводности нужно уменьшать радиус внутреннего цилиндра.

Структура течения оказывает существенное влияние на угловую скорость внутреннего цилиндра. Максимум угловой скорости Ω^{opt} достигается при течении с одноячеечной структурой. Отклонение формы линий тока от концентрических окружностей свидетельствует об изменении структуры течения, которое приводит к снижению угловой скорости. Максимум угловой скорости реализуется при минимальном внутреннем радиусе канала, при котором линии тока представляют собой концентрические окружности.

6. Заключение

Полученные результаты показывают, что геометрические и теплофизические характеристики области исследования и теплофизические свойства жидкости оказывают значительное влияние на структуру течения. Так, при параметрах $Gr = 10^4$, $Pr = 1$, $R_i = 0.5$, $\lambda_{sl} = 0$, $\rho_{sl} = 1$, $\alpha_h = \alpha_c = \pi/5$, $\gamma = \pi/2$ течение имеет одноячеечную структуру, линии тока близки к концентрическим окружностям. При уменьшении внутреннего радиуса цилиндра вблизи его поверхности появляются вторичные вихри, направление вращения которых совпадает с направлением основного вихря. При увеличении внутреннего радиуса форма линий тока начинает совпадать с концентрическими окружностями.

С ростом числа Грасгофа течение в кольцевой области становится интенсивнее, начинают образовываться вторичные вихри при меньших значениях внутреннего радиуса. Скорость течения достигает максимума при больших значениях внутреннего радиуса, монотонно растет абсолютное значение Ω^{opt} .

Увеличение числа Прандтля обуславливает снижение интенсивности течения основного вихря и активизирует течения вторичных вихрей. Максимальная скорость реализуется при меньших значениях внутреннего радиуса, а абсолютная величина скорости Ω^{opt} монотонно убывает.

Рост коэффициента теплопроводности внутреннего цилиндра влечет за собой подъем интенсивности вращения основного вихря. Скорость оказывается максимальной при меньших значениях внутреннего радиуса, а абсолютное значение Ω^{opt} монотонно растет.

Структура течения оказывает существенное влияние на угловую скорость внутреннего цилиндра. Максимальная угловая скорость наблюдается при одноячеечной структуре течения. При образовании вторичных вихрей происходит снижение угловой скорости. Для достижения максимальной угловой скорости необходимо использовать минимальный радиус, для которого линии тока являются концентрическими окружностями.

Устройство, содержащее горизонтальный кольцевой канал, образованный двумя концентрическими окружностями и заполненный жидкостью, можно применять для совершения работы за счет механической энергии вращения внутреннего цилиндра. Для генерации энергии необходим перепад температуры между разными участками внешней границы кольцевого канала, который может быть получен путем повторного использования вторичной энергии технологических процессов.

Литература

1. Кузнецов Г.В., Максимов В.И., Шеремет М.А. Естественная конвекция в замкнутом параллелепипеде при наличии локального источника энергии // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 4. С. 86–95.
2. Сорокин А.П., Кузина Ю.А., Иванов Е.Ф. Особенности теплообмена при кипении жидкого металла в ТВС быстрых реакторов в аварийных режимах // Атомная энергия. 2019. Т. 126, № 2. С. 69–75.
3. Кокорев Л.С., Харитонов В.В., Большаков В.И., Сысоев Ю.М., Плаксеев А.А. Естественная конвекция в волокнистой теплоизоляции // Теплофизика высоких температур. 1980. Т. 18, № 2. С. 341–346.
4. Гореликов А.В., Ряховский А.В., Фокин А.С. Численное исследование некоторых нестационарных режимов естественной конвекции во вращающемся сферическом слое // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5, № 2. С. 184–192. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.2.22
5. Гончарова О.Н. Моделирование микроконвекции в жидкости, заключенной между теплопроводными массивами // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 1. С. 84–91.
6. Баутин С.П., Обухов А.Г., Баранникова Д.Д. Численное моделирование огненных вихрей при учете сил тяжести и Кориолиса // Теплофизика высоких температур. 2018. Т. 56, № 2. С. 241–246. DOI: 10.7868/S0040364418020114
7. Kuehn T.H., Goldstein R.J. An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders // Journal of Fluid Mechanics. 1976. Vol. 74. P. 695–719. DOI: 10.1017/S0022112076002012
8. Черкасов С.Г. Теоретический анализ баланса энергии при стационарной тепловой гравитационной конвекции // Труды Четвертой Российской национальной конференции по теплообмену: Москва, 23-27 октября 2006 г. Т. 3. Свободная конвекция. Тепломассообмен при химических превращениях. М.: Издательский дом МЭИ, 2006. С. 168–171.
9. Fallah K., Ghaderi A., Sedaghatizadeh N., Borghei M. Simulation of natural convection heat transfer using nanofluid in a concentric annulus // Thermal Science. 2017. Vol. 21, no. 3. P. 1275–1286. DOI: 10.2298/TSCI150118078F
10. Shaija A., Narasimham G.S.V.L. Effect of surface radiation on conjugate natural convection in a horizontal annulus driven by inner heat generating solid cylinder // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2009. Vol. 52. P. 5759–5769. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.05.033
11. Al-Ansary H., Zeitoun O. Numerical study of conduction and convection heat losses from a half-insulated air-filled annulus of the receiver of a parabolic trough collector // Solar Energy. 2011. Vol. 85, no. 11. P. 3036–3045. DOI: 10.1016/j.solener.2011.09.002
12. Нарыгин Э.И., Зубков П.Т. Модель естественной конвекции в кольцевом канале с подвижной внутренней границей // Вестник Башкирского университета. 2023. Т. 28, № 2. С. 131–136. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.2.1
13. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
14. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. М.: МЭИ, 2003. 312 с.

Сведения об авторах:

Нарыгин Эдуард Игоревич (корр.), гл. спец., Тюменский нефтяной научный центр (ТННЦ), 625002, г. Тюмень, ул. Осипенко, д. 79; e-mail: e.i.narygin@yandex.ru; ORCID: 0000-0003-0296-2038

Зубков Павел Тихонович, дфмн, проф., Тюменский государственный университет (ТюмГУ);

Research article

Numerical study of natural convection in a horizontal annular channel with a rotating inner cylinder

E.I. Narygin¹, P.T. Zubkov²

¹ Tyumen Oil Research Center, Tyumen, Russian Federation

² Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation

This paper presents a numerical study of the natural convection of a viscous incompressible fluid that completely fills a horizontal annular channel. The temperature difference at the outer boundary produces convection, which can cause the rotation of the inner cylinder around its axis. The cylinder is assumed to rotate without friction. The Boussinesq approximation is used as a mathematical model. The problem is solved numerically by the algorithm SIMPLER. The equation of motion of the inner cylinder is derived from the law of conservation of angular momentum. The choice of a numerical integration method for the equation of motion of the inner cylinder does not affect the result. The influence of the dimensionless parameters on the flow structure and the angular velocity of the inner cylinder was studied. Dimensionless parameters vary within the ranges: Grashof number $10^3 \dots 2 \cdot 10^5$, Prandtl number 0.5...15, the dimensionless thermal conductivity of the cylinder 0... ∞ , and the cylinder inner radius 0.05...0.9. Numerical simulations have shown that the flow structure affects the angular velocity of the inner cylinder, which reaches its maximum in the case of a single-cell flow and at a minimum internal radius. As the Grashof number increases, the maximum possible angular velocity of the inner cylinder increases monotonically and is realized at large inner radius values. The Prandtl number has an opposite effect on the cylinder rotation velocity. If it decreases, then the angular velocity becomes extremely high at smaller inner radius values. An increase in the dimensionless thermal conductivity leads to the growth of the angular velocity, but it reaches a maximum at a smaller inner radius. The influence of the considered parameters on the angular velocity is determined by the change in the structure of the flow in the annular channel. The research results may be useful in the development of technical devices with an annular channel and a rotating inner cylinder.

Keywords: natural convection, annular channel, numerical modeling, rotation, Boussinesq approximation, Grashof number, Prandtl number, SIMPLER algorithm, finite volume method

Received: 24.04.2024 / Published online: 30.12.2024

References

1. Kuznetsov G.V., Maksimov V.I., Sheremet M.A. Natural convection in a closed parallelepiped with a local energy source. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2013. Vol. 54. P. 588–595. DOI: 10.1134/S0021894413040093
2. Sorokin A.P., Kuzina Y.A., Ivanov E.F. Characteristics of heat transfer during boiling of liquid metal in the fuel assemblies of fast reactors in emergency regimes. *Atomic Energy*. 2019. Vol. 126, no. 2. P. 73–82. DOI: 10.1007/s10512-019-00518-0
3. Kokorev L.S., Kharitonov V.V., Bol'shakov V.I., Sysoev Y.M., Plakseev A.A. Natural Convection in Fibrous Thermal Insulation. *High Temperature*. 1980. Vol. 18, no. 2. P. 341–346.
4. Gorelikov A.V., Ryakhovsky A.V., Fokin A.S. Numerical investigation of some unsteady regimes of natural convection in a rotating spherical shell. *Computational Continuum Mechanics*. 2012. Vol. 5, no. 2. P. 184–192. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.2.22
5. Goncharova O.N. Modeling of microconvection in a fluid between heat conducting solids. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2011. Vol. 52. P. 67–73. DOI: 10.1134/S002189441101010X
6. Bautin S.P., Obukhov A.G., Barannikova D.D. Numerical simulation of fire vortices with consideration of gravity and Coriolis forces. *High Temperature*. 2018. Vol. 56. P. 229–233. DOI: 10.1134/S0018151X18020025
7. Kuehn T.H., Goldstein R.J. An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders. *Journal of Fluid Mechanics*. 1976. Vol. 74. P. 695–719. DOI: 10.1017/S0022112076002012
8. Cherkasov S.G. Teoreticheskiy analiz balansa energii pri stacionarnoy teplovoy gravitatsionnoy konveksii. 4th Russian National Conference on Heat Transfer. Vol. 3. Moscow, 23-27 October/2006. P. 168–171.
9. Fallah K., Ghaderi A., Sedaghatizadeh N., Borghei M. Simulation of natural convection heat transfer using nanofluid in a concentric annulus. *Thermal Science*. 2017. Vol. 21, no. 3. P. 1275–1286. DOI: 10.2298/TSCI150118078F
10. Shaija A., Narasimham G.S.V.L. Effect of surface radiation on conjugate natural convection in a horizontal annulus driven by inner heat generating solid cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2009. Vol. 52. P. 5759–5769. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.05.033
11. Al-Ansary H., Zeitoun O. Numerical study of conduction and convection heat losses from a half-insulated air-filled annulus of the receiver of a parabolic trough collector. *Solar Energy*. 2011. Vol. 85, no. 11. P. 3036–3045. DOI: 10.1016/j.solener.2011.09.002
12. Narygin E.I., Zubkov P.T. A model of natural convection in an annular channel with movable internal border. *Vestnik Bashkirskogo universiteta*. 2023. Vol. 28, no. 2. P. 131–136. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.2.1
13. Patankar S.V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, 1980. 197 p.
14. Patankar S.V. *Computation of conduction and duct flow heat transfer*. CRC press, 2017. 370 p.