

Научная статья

Разрушение хрупких балок при антисимметричном четырехточечном изгибе

В.Д. Кургузов, Д.А. Кузнецов

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

Возникновение трещин в элементах конструкций в течение срока службы обусловлено либо деградацией материала, либо наличием скрытых дефектов. Вследствие этого конструкция теряет свою первоначальную несущую способность и выходит из строя при более низких эксплуатационных нагрузках. Как правило, разрушение конструкции вследствие роста трещин происходит при смешанном нагружении. В работе рассматривается эксцентричная балка прямоугольного поперечного сечения с краевой трещиной, которая подвергается антисимметричному четырехточечному нагружению. При изменении положения трещины относительно центра балки удается установить весь диапазон смешанных мод разрушения: I+II, чистые I и II моды. Методом конечных элементов найдены коэффициенты интенсивности напряжений по I и II модам разрушения, а также T -напряжения при различных геометрических параметрах балки и разных условиях нагружения. Варьировались длина трещины, ее положение относительно центра балки и длина короткого пролета. Проанализированы известные способы вычисления T -напряжений. В ближайшем к вершине трещины элементе наблюдаются сильные осцилляции смещений, которые в литературе не упоминаются, поэтому для отыскания T -напряжений с максимально возможной точностью предложено вычислять их по смещениям при отсечении ближайших к вершине трещины 3–4 узлов. Проведены экспериментальные исследования вязкости разрушения эбонита в смешанном режиме. Для каждого типа нагружения и геометрии балки испытаны 3–5 одинаковых образцов. Опыты проводились при статической нагрузке до полного разрушения. Во всех экспериментах фиксировались угол инициации трещины и критическая нагрузка. Для прогнозирования направления разрушения и величины критической нагрузки использовались шесть критериев разрушения: обобщенный критерий максимальных окружных напряжений, расширенный критерий максимальных окружных деформаций, обобщенный критерий плотности энергии деформирования, обобщенный критерий максимальных окружных осредненных напряжений, критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии и обобщенный критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии. Полученные результаты демонстрируют хорошее совпадение экспериментальных значений критических нагрузок с данными численного расчета. Так, погрешность вычисленного угла инициации трещины не превышает 5%. Учитывая, что экспериментальные результаты согласуются с предсказаниями критериев разрушения балки при антисимметричном четырехточечном изгибе, образец такого вида может применяться при исследовании разрушения смешанного типа в элементах, изготовленных из технических материалов, например, таких, как оргстекло, эбонит, гетинакс.

Ключевые слова: механика разрушения, эксцентричный балочный образец, смешанное нагружение, четырехточечный изгиб, T -напряжение, метод конечных элементов

Получение: 13.05.2024 / *Публикация онлайн:* 30.12.2024

УДК 539.42

1. Введение

То, что разрушение элементов конструкций в основном случается по причине присутствующих в них трещин и скрытых дефектов, — хорошо известный факт. Наряду с этим есть понимание, что в процессе зарождения и роста трещин активно участвуют растягивающие и сдвиговые нагрузки, то есть разрушение происходит в условиях смешанного режима деформирования. Поэтому в инженерных задачах механики разрушения одним из главных направлений исследования является прогнозирование значения угла роста трещины и величины критической нагрузки, действие которой приводит к разрушению.

При изучении вязкости разрушения различных материалов с трещинами, таких как керамика [1–5], стекло [6, 7], полиметилметакрилат и другие полимеры [8–12], горные породы [13–16], графит [17, 18] и прочие, обычно в натурных опытах используются соответствующие образцы. Таким образом, возникает проблема выбора адекватного метода испытаний и подходящей геометрии образцов для экспериментов по определению трещиностойкости материала. При этом простота изготовления образцов и простота испытаний — два ключевых требования, которые следует учитывать при выборе метода испытаний на вязкое разрушение. В зависимости от вида материала находят применение образцы в форме прямоугольной балки, диска, полукруглого диска, треугольной пластины или другой геометрии, наиболее отвечающие как конкретному материалу, так и виду нагружения. Например, для испытаний горных пород часто используется метод бразильской пробы [5, 13, 14, 17, 19–22], для керамики и полимеров хорошо подходят балочные образцы [1–12, 23–26].

В данной работе рассматривается балочный образец, подвергаемый антисимметричному четырехточечному изгибу. Образец такой конфигурации позволяет в этих условиях получить чистую II моду, поэтому ранее к этим образцам часто прибегали при испытаниях на вязкое разрушение материалов в чистом II режиме (при поперечном сдвиге). В то же время, как показано в настоящей работе, путем изменения положения трещины относительно середины балочного образца, можно добиться широкого спектра смешивания режимов I и II. Вследствие этого образец–балка имеет особую важность для исследования трещиностойкости различных материалов.

Толщина образца выбиралась такой, чтобы обеспечивалось условие плоской деформации. Для расчета параметров разрушения в условиях различного смешения режимов нагружения (I+II) использовался метод конечных элементов. С целью определения практической пригодности балочного образца была проведена серия экспериментов по определению вязкости разрушения эбонита в смешанном режиме. Прогнозирование направления разрушения и критической нагрузки осуществлялось при помощи обобщенного критерия

максимальных окружных напряжений (Generalized Maximum Tangential Stress — GMTS), расширенного критерия максимальных окружных деформаций (Extended Maximum Tangential Strain — EMTSN), обобщенного критерия плотности энергии деформирования (Generalized Strain Energy Density — GSED), обобщенного критерия максимальных окружных осредненных напряжений (Generalized Maximum Averaged Stress — MATS), критерия максимальной скорости высвобождения упругой энергии (Maximum Elastic Energy Release Rate — MERR) и обобщенного критерия максимальной скорости высвобождения упругой энергии (Generalized Maximum Elastic Energy Release Rate — GMERR).

2. Конечно-элементный анализ

Схема испытания на антисимметричный четырехточечный изгиб эксцентричной балки прямоугольного сечения с краевой трещиной (Рис. 1) позволяет провести исследование материала на разрушение при смешанном режиме I+II. На рисунке показано: P — прикладываемая нагрузка, L — расстояние от опор до середины образца, d — расстояние от места приложения нагрузки до середины образца, S — сдвиг трещины относительно середины образца, a — длина трещины, W — высота образца, t — его толщина.

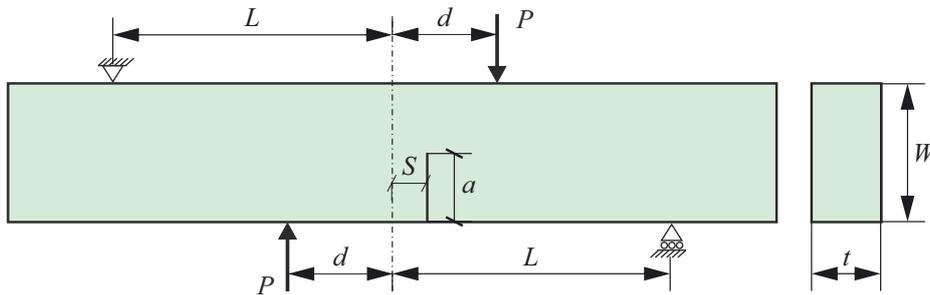


Рис. 1. Геометрия и схема нагружения образца

Варьируя сдвиг S , можно создать различные комбинации смешанных мод I+II, в том числе чистые виды деформации в вершине трещины: нормальный отрыв и поперечный сдвиг. Так, если S равно нулю, то в середине образца отсутствует изгибающий момент, но действуют перерезывающие силы и по этой причине в таком образце будет реализован чистый II режим нагружения. При сдвиге трещины получается смешанный I+II режим деформирования, а когда трещина достигает линии приложения нагрузки, возникает чистая I мода.

В случае смешанного I+II режима нагружения асимптотические разложения компонент поля напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном упругом материале, когда учитываются только два члена разложения в ряды Вильямса, имеют вид [27]:

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] + T \cos^2 \theta + O(r^{1/2}), \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3 K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + T \sin^2 \theta + O(r^{1/2}), \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] - T \sin \theta \cos \theta + O(r^{1/2}).\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь K_I , K_{II} — коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), T — так называемое T -напряжение, r и θ — координаты произвольной точки (расстояние от вершины трещины и полярный угол). Нулевое значение угла θ соответствует продолжению трещины. В настоящее время хорошо известно, что T -напряжение, как и K_I , K_{II} , играет существенную роль при смешанном нагружении [28]. Оно отражает степень стеснения материала перед фронтом трещины, действует в плоскости трещины в направлении ее возможного распространения и способно быть как растягивающим, так и сжимающим. Выражения для K_I , K_{II} и T в исследуемом образце представляются так

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} Y_I \left(\frac{a}{W}, \frac{S}{d} \right), \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} Y_{II} \left(\frac{a}{W}, \frac{S}{d} \right), \quad T = \sigma T_* \left(\frac{a}{W}, \frac{S}{d} \right).\quad (2)$$

Здесь $\sigma = P/(Wt)$; Y_I , Y_{II} — безразмерные КИН и T_* — безразмерное T -напряжение, которые являются функциями относительных величин — длины трещины a/W и сдвига трещины S/d .

Таким образом, для анализа разрушения образца при смешанном нагружении необходимо получить три параметра разрушения: Y_I , Y_{II} и T_* , для различных исследуемых конфигураций (геометрических форм области и видов нагружения). Для отыскания требуемых величин применялся конечно-элементный (КЭ) программный пакет MSC.Marc [29]. На рисунке 2 представлен пример КЭ модели балки, состоящей из ~ 49000 8-узловых квадратичных элементов. В области вершины трещины, для повышения точности расчетов, использовались сингулярные элементы, которые конструировались путем сдвига промежуточного узла к вершине трещины на четверть длины их ребра.

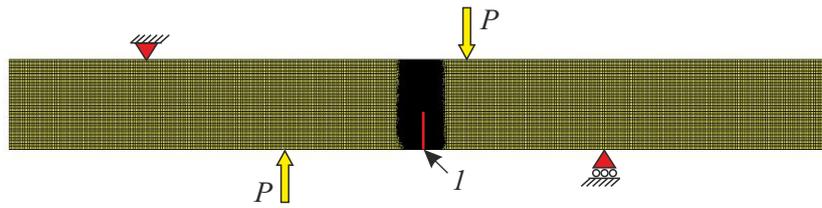


Рис. 2. Конечно-элементная модель балки, l – трещина

Коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} вычислялись с помощью инвариантного J -интеграла, который для случая плоского деформированного состояния связан с ними соотношением $JE' = K_I^2 + K_{II}^2$, где $E' = E/(1 - \nu^2)$. В процедуре численного интегрирования контурный J -интеграл преобразуется в интеграл по площади, интегрирование ведется по кольцу элементов, окружающих вершину трещины, напряжения вычисляются внутри элементов в точках гауссовых квадратур. В расчетах использовались четыре контура интегрирования, результаты для третьего и четвертого контуров отличались незначительно. Разделение J -интеграла на I и II моды в пакете MSC.Marc базируется на методе Ши–Асаро [30].

Конечно-элементное исследование разрушения проводилось на образцах с геометрическими параметрами: $W = 15.5$ мм, $t = 7$ мм, $L = 50$ мм, $d = 14 \div 22$ мм (шаг 2 мм), $a/W = 0.1 \div 0.8$ (шаг 0.1), $S/d = 0 \div 1$ (шаг 0.125). Их материал считался линейно-упругим изотропным со следующими механическими свойствами: $E = 2.9$ ГПа — модуль Юнга и $\nu = 0.35$ — коэффициент Пуассона. В результате выполнения статического расчета с приложением единичной нагрузки $P = 1$ Н и вычислением J -интеграла для каждого образца были определены соответствующие значения K_I , K_{II} и T .

Для анализа роли геометрии образца в формировании его напряженного состояния и для получения всего спектра смешивания I и II режимов смоделировано 360 геометрических форм. На рисунках 3 и 4 представлены зависимости Y_I и Y_{II} от отношения S/d для разных относительных длин трещины и от отношения a/W для различных S/d при $d = 22$ мм. Из рисунка 3а, б видно, что при нулевом сдвиге трещины относительно середины балки, как и ожидалось, наблюдается отсутствие влияния I режима нагружения при максимальном проявлении режима II. С ростом отношения S/d роль I моды возрастает при практически неизменном вкладе II моды. При приближении S/d к единице происходит резкое снижение воздействия II режима до минимальных значений, и при $S/d = 1$ главной становится I мода с незначительным вкладом II моды нагружения.

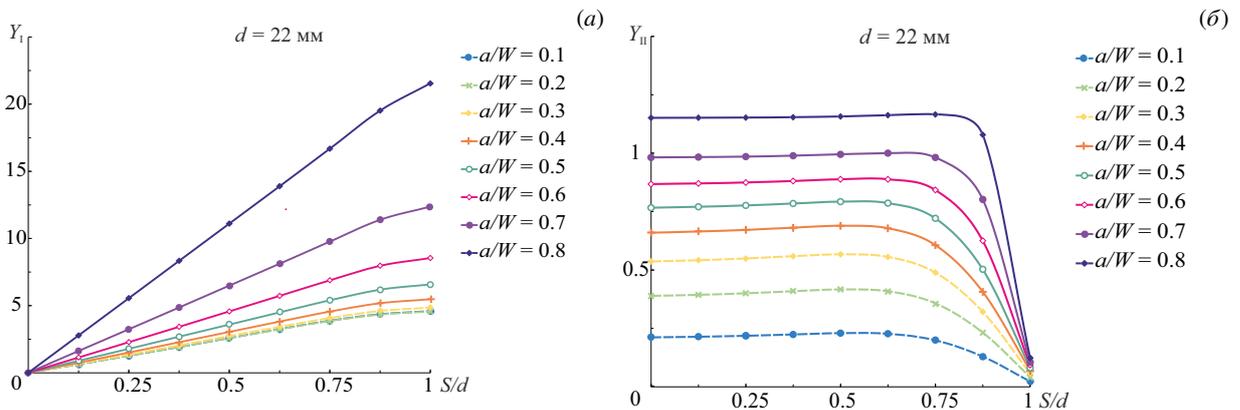


Рис. 3. Зависимости $Y_I(S/d)$ (а), $Y_{II}(S/d)$ (б) при различных относительных длинах трещины a/W

Рисунок 4а демонстрирует повышение влияния I режима нагружения с ростом длины трещины для разных отношений S/d , кроме нулевого, при котором I режим фактически отсутствует для всего заданного диапазона значений a/W . Наряду с этим безразмерный КИН Y_{II} растет с увеличением длины трещины (см. Рис. 4б), но с приближением отношения S/d к единице, подъем кривых становится менее выраженным.

Способам вычисления T -напряжения посвящена обширная литература, см., например, [31–33]. С этой целью удобно использовать представление компонент напряжений в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + T, \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

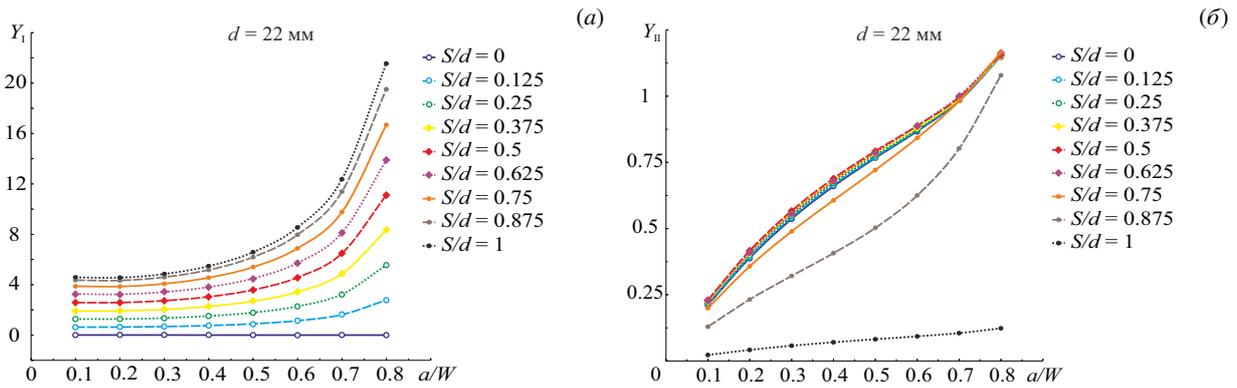


Рис. 4. Зависимости $Y_I(a/W)$ (а), $Y_{II}(a/W)$ (б) при различных отношениях S/d

При нагружении только по I моде из (3) очевидным образом получаются следующие формулы:

$$\theta = \pm\pi: T = \sigma_x; \quad \theta = 0: T = \sigma_x - \sigma_y, \tag{4}$$

то есть T -напряжение можно отыскивать по компонентам напряжений на берегах трещины ($\theta = \pm\pi$) или на ее продолжении ($\theta = 0$). Нужно отметить, что такой способ менее точен, чем вычисление T -напряжения по смещениям, так как компоненты напряжений определяются внутри элементов, а их значения в узлах находятся путем экстраполяции.

При расчете T -напряжения по смещениям важно, что берега трещины свободны от нагрузок, следовательно, закон Гука для малых деформаций дает выражение:

$$\sigma_x = E' \varepsilon_x = E' \frac{\partial u_x}{\partial x}, \tag{5}$$

где ε_x и u_x — параллельные трещине деформация и перемещение соответственно. На берегах трещины ($\theta = \pm\pi$) из (4) и (5) следует:

$$T = E' \frac{\partial u_x}{\partial x}. \tag{6}$$

С учетом того, что T — константа, после замены производной $\partial u_x / \partial x$ разностным отношением $(u_x(x) - u_x(0)) / x$, (6) переписывается в виде:

$$T = E' \frac{u_x(x) - u_x(0)}{x}, \tag{7}$$

где величина $u_x(0)$ — перемещение u_x в вершине трещины.

В случае смешанного нагружения (наличия I моды, либо II моды, либо одновременно обеих) в любом радиальном направлении от вершины трещины существует сингулярное слагаемое. Поэтому сингулярный член в σ_x никогда не исчезнет, и вышеописанный метод будет непригоден. Впрочем, T -напряжение может быть вычислено, если использовать свойство симметрии I моды и антисимметрии II моды при нахождении напряжений напрямую без расчета коэффициентов интенсивности напряжений. В результате сложения напряжений в одной половине образца с трещиной и напряжений в другой половине, напряжения II моды исчезнут, а напряжения I моды удвоятся. Тогда, подобно I моде нагружения, T -напряжение по любому направлению из вершины трещины может быть определено непосредственно путем конечно-элементного анализа. Наиболее удобным направлением является $\theta = \pm\pi$, поскольку в формулах (5)–(7) присутствует только одна компонента напряжений:

$$T = \frac{1}{2} [(\sigma_x)_{\theta=-\pi} + (\sigma_x)_{\theta=\pi}], \tag{8}$$

или

$$T = \frac{1}{2x} E' [u_x(x, -\pi) + u_x(x, +\pi) - 2u_x(0)]. \tag{9}$$

На рисунке 5а представлено типичное распределение смещений в малой окрестности вершины трещины на одном из ее берегов; по оси абсцисс отложено расстояние между произвольной точкой и вершиной трещины. Как видно из представленного графика, в ближайшем к вершине элементе наблюдаются сильные осцилляции решения. Поэтому три–четыре узла слева отбрасываются и во внимание принимаются только те смещения, которые «хорошо» ложатся на прямую линию. Ее уравнение находится методом наименьших квадратов. Аппроксимирующая прямая показана на рисунке 5б, темные кружки на ней — значения смещений в узлах КЭ сетки. Тангенс угла наклона аппроксимирующей прямой к оси абсцисс — это и есть разностное отношение из (7).

Зависимости безразмерного параметра T_* от величины относительного сдвига трещины S/d при фиксированном $d = 22$ мм и меняющейся в заданном диапазоне значений относительной длине трещины a/W

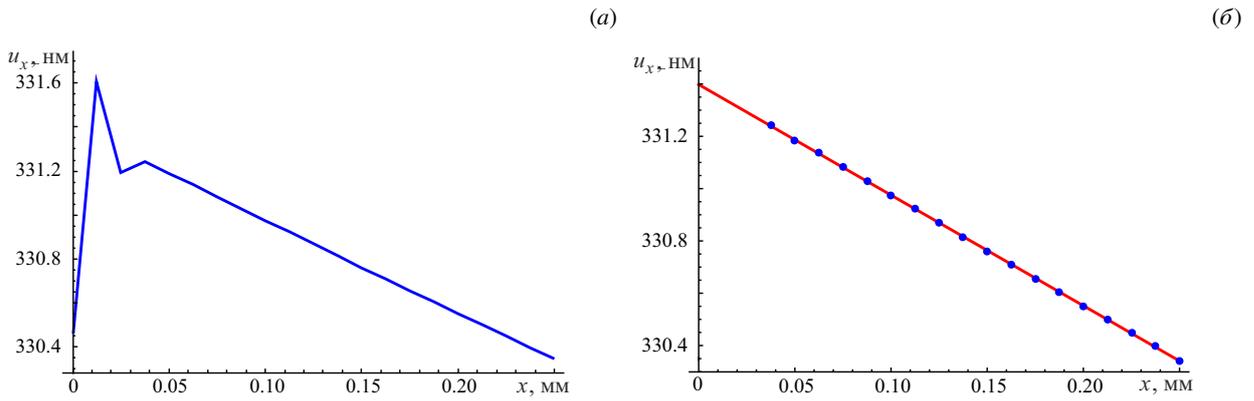


Рис. 5. Типичное распределение смещений на берегах трещины (а), аппроксимация методом наименьших квадратов (б)

представлены на рисунке 6а. Рисунок 6б иллюстрирует зависимость безразмерного параметра T_* от отношения a/W при фиксированном расстоянии $d = 22$ мм и меняющемся в заданном диапазоне отношении S/d .

Из рисунка 6 видно, что для нулевого относительного сдвига S/d значение безразмерного параметра T_* близко к нулю для всего диапазона длин трещины. Для коротких трещин значения T_* отрицательны и меняют знак на положительный в диапазоне относительных длин трещины $a/W = 0.3 \div 0.5$ в зависимости от величины отношения S/d . С увеличением сдвига трещины относительно середины образца значение параметра T_* растет. Все это указывает на важность учета влияния величины и знака T -напряжения на сопротивление разрушению хрупких и квазихрупких материалов в смешанном режиме (I+II).

Кроме этого, для анализа воздействия T -напряжения на процесс разрушения в смешанном режиме (I+II) возможно использование безразмерного параметра, часто называемого в литературе коэффициентом (параметром) двухосности B . Коэффициент двухосности является функцией геометрической формы образца, зависит от схемы нагружения и определяется как

$$B = T \sqrt{\pi a} / K_e, \tag{10}$$

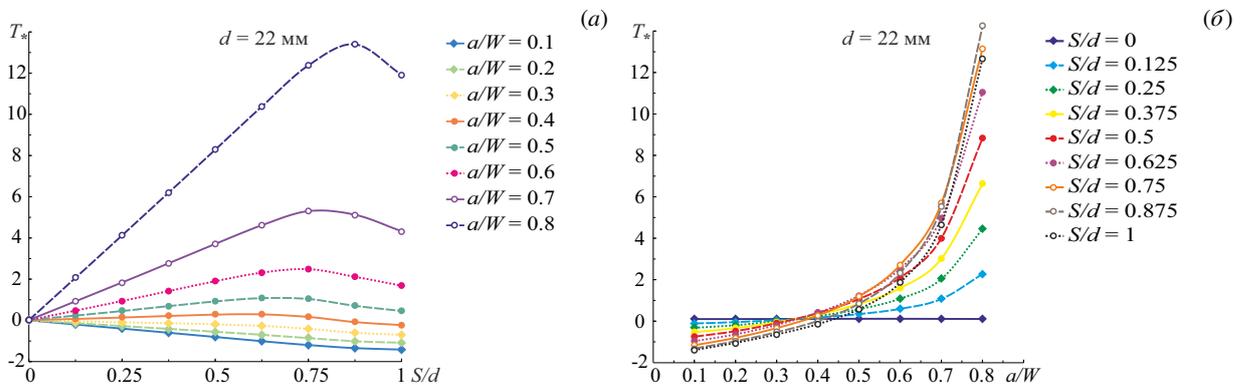


Рис. 6. Зависимости $T_*(S/d)$ (а) и $T_*(a/W)$ (б) для $d = 22$ мм

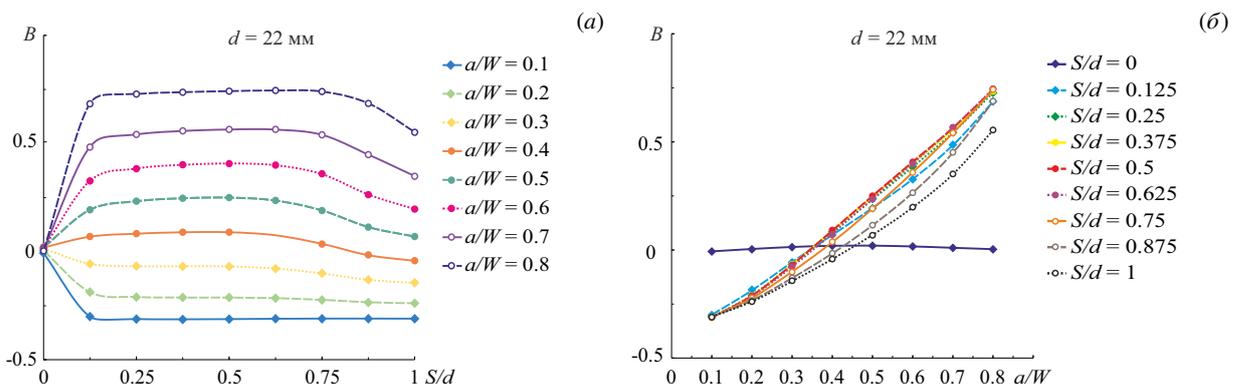


Рис. 7. Зависимости $B(S/d)$ (а) и $B(a/W)$ (б) для $d = 22$ мм

здесь $K_e = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$ — эффективный КИН.

Рисунок 7а, б иллюстрирует изменение параметра B в зависимости от расположения трещины в образце для заданного диапазона значений a/W и в зависимости от длины трещины для заданного диапазона отношений S/d при фиксированном $d = 22$ мм.

Видно, что коэффициент двухосности для $S/d = 0$ (режим II) при различных длинах трещины имеет значения, близкие к нулевым. С ростом отношения S/d коэффициент B достигает величины, которая остается практически постоянной во всем диапазоне длин трещин, что говорит о его нечувствительности к сдвигу трещины. Для коротких трещин коэффициент двухосности принимает отрицательные значения, для трещин с относительной длиной a/W , лежащей в диапазоне $0.4 \div 0.8$, он в основном положительный.

3. Экспериментальные исследования вязкости разрушения

В опытах по изучению вязкости разрушения при смешанном нагружении использовались балочные образцы, изготовленные из эбонита. Хорошо известно, что данный материал легок в обработке, имеет небольшую стоимость и разрушается по квазихрупкому типу. Образцы вырезались из пластины толщиной $6.8 \div 7$ мм. Эксперименты проводились при статической нагрузке и комнатной температуре со скоростью перемещения траверсы 1 мм/мин. Для каждого расположения трещины было изготовлено по 3–5 одинаковых образцов следующих размеров: $W = 15.5$ мм, $t = 7$ мм, $L = 50$ мм, $d = 20$ мм. Относительная длина трещины составляла $a/W = 0.5$, сдвиг трещины S варьировался от 0 до 20 мм с шагом 5 мм. Механические свойства эбонита приведены в таблице.

Таблица. Свойства материала

Материал	E , ГПа	ν	σ_t , МПа	K_{Ic} , МПа · м ^{1/2}
Эбонит	2.9	0.35	52	1.95

На рисунке 8 представлены разрушенные образцы с разным расположением исходных трещин. Видно, что разрушение начинается с вершины трещины. Максимальный угол отклонения траектории трещины наблюдается у образца с $S = 0$ мм; в данной конфигурации реализуется чистый II режим разрушения. В процессе увеличения сдвига трещины угол излома ее траектории постепенно уменьшается, что обусловлено возникновением смешанного режима I+II, в котором влияние II моды на процесс разрушения снижается и постепенно возрастает воздействие I моды. При максимально допустимом сдвиге трещины $S = 20$ мм ее траектория имеет практически



Рис. 8. Разрушенные образцы из эбонита

нулевой угол отклонения, а нулевой угол отклонения соответствует чистому режиму I. Таким образом, данный тип испытательного образца в условиях антисимметричного четырехточечного изгиба позволяет исследовать полный спектр смешиваемости режимов разрушения, в том числе чистые I и II режимы.

4. Критерии хрупкого разрушения

Предсказание направления распространения трещины является одной из проблем, перспективных для исследований в области механики разрушения. Ориентация трещины имеет большое значение для предотвращения ее дальнейшего распространения и ее установление должно осуществляться в условиях сложного напряженного состояния, обычно реализуемого в вершине трещины и приводящего к разрушению в смешанном режиме. В связи с этим в последнее время активно ведется работа по созданию критериев, позволяющих прогнозировать зарождение и направленность роста трещин, и одним из способов уточнения результатов применения этих критериев является введение в рассмотрение T -напряжения.

Для прогнозных вычислительных экспериментов в настоящей работе применено шесть критериев разрушения: обобщенный критерий максимальных окружных напряжений (GMTS), расширенный критерий максимальных окружных деформаций (EMTSN), обобщенный критерий плотности энергии деформирования (GSED), обобщенный критерий максимальных окружных осредненных напряжений (MATS), критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии (MERR) и обобщенный критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии (GMERR).

Критерии MTS (максимальных растягивающих напряжений) и GMTS наиболее часто используются при изучении хрупкого разрушения [5, 7, 8, 13, 17, 21–23]. Они подходят для оценки запасов прочности широкого круга хрупких и квазихрупких материалов, таких как горные породы, керамика, полиметилметакрилат, графит. Критерий GMTS представляет собой модификацию критерия MTS, учитывающую влияние T -напряжения.

Деформационный критерий MTSN (максимальных окружных деформаций) [34, 35] принимает во внимание значение коэффициента Пуассона и предполагает, что максимальная окружная деформация более важный фактор в прогнозировании результатов процесса разрушения, чем растягивающие напряжения. Особенностью критерия EMTSN, в сравнении с MTSN, является учет вклада первого несингулярного члена [18, 25, 26].

Критерий плотности энергии деформирования (SED) [36, 37] представляет собой локальный энергетический критерий. Энергетические критерии, в отличие от силовых, позволяют привлекать при анализе большее число компонент тензора напряжений. В основе этого критерия лежит предположение о том, что хрупкое разрушение происходит тогда, когда локальная плотность энергии деформирования S , оцениваемая в контрольном объеме, достигает критического значения, которое, как доказано, не зависит ни от геометрии области исследования, ни от условий нагружения [38–40]. Запись обобщенного критерия плотности энергии деформирования (GSED) включает T -напряжение [41–43].

Обобщенный критерий максимальных окружных осредненных напряжений (MATS) — нелокальный критерий, учитывающий характерный размер структуры материала d_0 и позволяющий решить проблему резко возрастающего напряжения перед вершиной трещины путем осреднения напряжений на расстоянии, соответствующем d_0 . Данный критерий подходит для оценки прочности хрупких и квазихрупких материалов, так как в них зона предразрушения d не превышает характерный размер структуры материала d_0 или сопоставима с ним, то есть для материалов, у которых неупругие пластические свойства перед вершиной трещины проявляются слабо. Суть критерия состоит в том, что трещина начинает свой рост тогда, когда максимальное среднее окружное напряжение в зоне предразрушения у вершины трещины достигает критического значения [44]. Применение этого критерия заложено в работах [45–47], а в [48–50] показана хорошая согласованность прогнозов на его основе с экспериментальными данными.

Критерий максимальной скорости высвобождения упругой энергии (MERR) базируется на принципе минимума потенциальной энергии деформации и является обобщением теории Гриффитса. Суть данного критерия заключается в том, что среди всех допустимых направлений роста трещины реально то, которое максимизирует скорость высвобождения упругой энергии деформации [25, 51, 52]. Обобщенный критерий GMERR включает в себя оценку критического состояния материала с использованием первого несингулярного члена в разложении Вильямса [53].

4.1. Критерий GMTS

В соответствии с критерием GMTS трещина зарождается в направлении θ_0 , где тангенциальное напряжение σ_θ имеет максимальное значение, а условие распространения трещины обеспечивается достижением этим напряжением критического значения σ_t на критическом расстоянии r_c от вершины трещины:

$$\left. \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0, \quad \sigma_\theta(r_c, \theta_0) = \sigma_t. \quad (11)$$

Окружное напряжение σ_θ для линейно-упругого материала в окрестности вершины трещины в общем случае смешанного режима I+II определено формулой (1). Члены более высокого порядка — $O(r^{1/2})$, вблизи вершины

трещины можно считать пренебрежимо малыми. Согласно определению, угол зарождения трещины θ_0 следует из решения уравнения:

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{16}{3} T \sqrt{2\pi r_c} \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0. \quad (12)$$

При использовании в формуле (12) для K_I , K_{II} и T представлений (3) получается уравнение для нахождения угла θ_0 :

$$Y_I \sin \theta_0 + Y_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{16}{3} T_* \alpha \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0, \quad (13)$$

здесь $\alpha = \sqrt{2r_c/a}$.

Подстановка найденного угла θ_0 в выражение для σ_θ в асимптотических формулах (1), приводит условие разрушения (11) к виду:

$$K_{If} \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - 3K_{IIf} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} + \sqrt{2\pi r_c} T_f \sin^2 \theta_0 = \sqrt{2\pi r_c} \sigma_t. \quad (14)$$

В этой формуле K_{If} и K_{IIf} — коэффициенты интенсивности напряжений в I и II режимах разрушения; T_f — T -напряжение при разрушении. Уравнение (14) справедливо для всех режимов смешивания нагрузок, в том числе для чистых режимов I и II. Для чистого режима I, когда $K_{IIf} = 0$, $K_{If} = K_{Ic}$, а $\theta_0 = 0$, выражение (14) принимает вид:

$$K_{Ic} = \sqrt{2\pi r_c} \sigma_t. \quad (15)$$

Подстановка (15) в (14) и учет представлений (2) дают:

$$\sigma_f \sqrt{\pi a} \left(Y_I \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - 3Y_{II} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} + T_* \alpha \sin^2 \theta_0 \right) = K_{Ic}, \quad (16)$$

где σ_f — критическое номинальное напряжение, эквивалентное $P_f/(Wt)$ (P_f — критическая нагрузка).

Предел прочности при одноосном растяжении — σ_t , и критический КИН при чистой моде I — K_{Ic} , являются константами материала и определяются из лабораторного эксперимента. Критическое расстояние r_c часто рассматривается как размер зоны предразрушения и обычно оценивается по формуле

$$r_c = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_t} \right)^2. \quad (17)$$

4.2. Критерий EMTSN

В соответствии с этим критерием трещина распространяется в направлении θ_0 при достижении окружной деформацией ε_θ своего критического значения ε_A на критическом расстоянии r_c от вершины трещины:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0, \quad \varepsilon_\theta(r_c, \theta_0) = \varepsilon_c. \quad (18)$$

Выражение для ε_θ имеет вид:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E'} (\sigma_\theta - \nu' \sigma_r). \quad (19)$$

Здесь $E' = E/(1 - \nu^2)$, $\nu' = \nu/(1 - \nu)$ отвечает условиям плоской деформации, $E' = E$, $\nu' = \nu$ — условиям плоского напряженного состояния.

После введения обозначений:

$$A_1(\theta) = (2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2}, \quad A_2(\theta) = (3 - 2\kappa) \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2}, \quad A_3(\theta) = \kappa + 1 - 4 \cos^2 \theta, \quad (20)$$

где κ — параметр вида напряженного состояния ($\kappa = 3 - 4\nu$ в условиях плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ в условиях плоского напряженного состояния), формула (19) с учетом (1) и (20) запишется как

$$\varepsilon_\theta = \frac{1 + \nu}{4E \sqrt{2\pi r}} \left[K_I A_1(\theta) + K_{II} A_2(\theta) + T \sqrt{2\pi r} A_3(\theta) \right]. \quad (21)$$

Согласно формулировке обобщенного критерия максимальных окружных деформаций, угол инициации трещины можно отыскать, решив уравнение:

$$K_I \left[(3 - 2\kappa) \sin \frac{\theta_0}{2} - 3 \sin \frac{3\theta_0}{2} \right] + K_{II} \left[(2\kappa - 3) \cos \frac{\theta_0}{2} + \cos \frac{3\theta_0}{2} \right] + 8T \sqrt{2\pi r_c} \sin 2\theta_0 = 0, \quad (22)$$

или с учетом (2):

$$Y_I \left[(3-2\kappa)\sin\frac{\theta_0}{2} - 3\sin\frac{3\theta_0}{2} \right] + Y_{II} \left[(2\kappa-3)\cos\frac{\theta_0}{2} + \cos\frac{3\theta_0}{2} \right] + 8T_*\alpha\sin 2\theta_0 = 0. \quad (23)$$

С использованием выражения (21) условие разрушения (18) может быть записано в виде:

$$\frac{1+\nu}{4E\sqrt{2\pi r_c}} [K_{If}A_1(\theta_0) + K_{IIf}A_2(\theta_0) + T_f\sqrt{2\pi r_c}A_3(\theta_0)] = \varepsilon_c. \quad (24)$$

Для чистого режима I ($K_{IIf} = 0, K_{If} = K_{Ic}, T_f = T_c, \theta_0 = 0$) получается:

$$\frac{1+\nu}{4E\sqrt{2\pi r_c}} K_{Ic} \left[2(\kappa-1) + (\kappa-3)\frac{T_c}{\sigma_t} \right] = \varepsilon_c. \quad (25)$$

Выражение (24) с учетом (2) принимает вид:

$$\sigma_f\sqrt{\pi a}[Y_I A_1(\theta_0) + Y_{II} A_2(\theta_0) + T_*\alpha A_3(\theta_0)] = K_{Ic}^*. \quad (26)$$

Параметр K_{Ic}^* называется обобщенной вязкостью разрушения и учитывает коэффициент Пуассона. Формула для его определения выглядит так:

$$K_{Ic}^* = K_{Ic} \left[2(\kappa-1) + (\kappa-3)\frac{T_c}{\sigma_t} \right]. \quad (27)$$

4.3. Критерий GSED

В соответствии с работами [25, 26, 41–43] выражение для плотности энергии деформирования D имеет вид:

$$D = \frac{1+\nu}{2\pi E} [K_I^2 B_1(\theta) + K_{II}^2 B_2(\theta) + K_I K_{II} B_3(\theta) + \sqrt{2\pi r} K_I T B_4(\theta) + \sqrt{2\pi r} K_{II} T B_5(\theta) + 2\pi r T^2 B_6(\theta)], \quad (28)$$

где

$$B_1(\theta) = \frac{2\kappa-1}{8} + \frac{\kappa-1}{4}\cos\theta - \frac{1}{8}\cos 2\theta, \quad B_2(\theta) = \frac{2\kappa+3}{8} - \frac{\kappa-1}{4}\cos\theta + \frac{3}{8}\cos 2\theta, \quad B_3(\theta) = \frac{1-\kappa}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta, \quad (29)$$

$$B_4(\theta) = \frac{2\kappa-3}{4}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\cos\frac{5\theta}{2}, \quad B_5(\theta) = -\frac{2\kappa+1}{4}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin\frac{5\theta}{2}, \quad B_6(\theta) = \frac{\kappa+1}{8}.$$

Согласно критерию GSED, трещина начинает свое распространение в направлении θ_0 , когда плотность энергии деформирования D достигает своего критического минимального значения D_A на критическом расстоянии r_c :

$$\frac{\partial D}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} > 0, \quad D(r_c, \theta_0) = D_c. \quad (30)$$

Угол θ_0 находится из решения уравнения:

$$K_I^2 C_1(\theta_0) + K_{II}^2 C_2(\theta_0) + K_I K_{II} C_3(\theta_0) + \sqrt{2\pi r_c} K_I T C_4(\theta_0) + \sqrt{2\pi r_c} K_{II} T C_5(\theta_0) + 2\pi r_c T^2 C_6(\theta_0) = 0, \quad (31)$$

или с учетом представления (2):

$$Y_I^2 C_1(\theta_0) + Y_{II}^2 C_2(\theta_0) + Y_I Y_{II} C_3(\theta_0) + Y_I T_* \alpha C_4(\theta_0) + Y_{II} T_* \alpha C_5(\theta_0) + (T_* \alpha)^2 C_6(\theta_0) = 0. \quad (32)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$C_1(\theta_0) = \frac{1-\kappa}{4}\sin\theta_0 + \frac{1}{4}\sin(2\theta_0), \quad C_2(\theta_0) = \frac{\kappa-1}{4}\sin\theta_0 - \frac{3}{4}\sin(2\theta_0), \quad C_3(\theta_0) = \frac{1-\kappa}{2}\cos\theta_0 + \cos(2\theta_0), \quad (33)$$

$$C_4(\theta_0) = \frac{3-2\kappa}{8}\sin\frac{\theta_0}{2} - \frac{5}{8}\sin\frac{5\theta_0}{2}, \quad C_5(\theta_0) = -\frac{2\kappa+1}{8}\cos\frac{\theta_0}{2} - \frac{5}{8}\cos\frac{5\theta_0}{2}, \quad C_6(\theta_0) = 0.$$

Критерий разрушения (30) с учетом записи (28) для плотности энергии деформирования D переписывается в виде:

$$\frac{1+\nu}{2\pi E} [K_{If}^2 B_1(\theta_0) + K_{IIf}^2 B_2(\theta_0) + K_{If} K_{IIf} B_3(\theta_0) + \sqrt{2\pi r_c} K_{If} T_f B_4(\theta_0) + \sqrt{2\pi r_c} K_{IIf} T_f B_5(\theta_0) + 2\pi r_c T_f^2 B_6(\theta_0)] = D_c. \quad (34)$$

Для условия чистой I моды ($K_{II}f = 0$, $K_{I}f = K_{Ic}$, $T_f = T_c$, $\theta_0 = 0$) получается:

$$D_c = \frac{1+\nu}{2\pi E} K_{Ic}^2 \left[\frac{\kappa-1}{2} \left(1 + \frac{T_c}{\sigma_t} \right) + \frac{\kappa+1}{8} \left(\frac{T_c}{\sigma_t} \right)^2 \right]. \quad (35)$$

Наконец, с использованием безразмерного представления параметров (2) и выражения (35) критерий разрушения (34) принимает вид:

$$(\sigma_f \sqrt{\pi a})^2 \left[Y_I^2 B_1(\theta_0) + Y_{II}^2 B_2(\theta_0) + Y_I Y_{II} B_3(\theta_0) + Y_I T_* \alpha B_4(\theta_0) + Y_{II} T_* \alpha B_5(\theta_0) + (T_* \alpha)^2 B_6(\theta_0) \right] = (K_{Ic}^*)^2, \quad (36)$$

где

$$K_{Ic}^* = K_{Ic} \sqrt{\frac{\kappa-1}{2} \left(1 + \frac{T_c}{\sigma_t} \right) + \frac{\kappa+1}{8} \left(\frac{T_c}{\sigma_t} \right)^2}. \quad (37)$$

4.4. Критерий MATS

Исходя из асимптотики компоненты $\sigma_\theta(r, \theta)$ поля напряжений в вершине трещины (см. (1)) выражение для окружных напряжений после осреднения по длине зоны предразрушения d становится следующим:

$$\bar{\sigma}_\theta(d, \theta) = \frac{1}{d} \int_0^d \sigma_\theta(r, \theta) dr = \sqrt{\frac{2}{\pi d}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) + T \sin^2 \theta. \quad (38)$$

Если предположить, что при достижении окружными напряжениями своего критического значения размер зоны предразрушения d будет сопоставим с критическим расстоянием r_c , то тогда условие распространения трещины, согласно критерию MATS, запишется в виде:

$$\left. \frac{\partial \bar{\sigma}_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \bar{\sigma}_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0, \quad \bar{\sigma}_\theta(r_c, \theta_0) = \sigma_t. \quad (39)$$

Таким образом, угол зарождения трещины θ_0 можно найти из условия (39) после решения уравнения:

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{8}{3} T \sqrt{2\pi r_c} \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0. \quad (40)$$

Принимая во внимание выражения (2) для K_I , K_{II} и T , в безразмерном виде, использующем параметры Y_I и Y_{II} , можно получить уравнение для нахождения угла θ_0 :

$$Y_I \sin \theta_0 + Y_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{8}{3} T_* \alpha \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0. \quad (41)$$

Подстановка вычисленного угла θ_0 в выражение для $\bar{\sigma}_\theta$ (38) и с учетом условия достижения осредненным по размеру зоны предразрушения окружным напряжением своего предельного значения, равного σ_t дают следующее:

$$K_{I}f \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - 3K_{II}f \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} + \sqrt{\frac{\pi r_c}{2}} T_f \sin^2 \theta_0 = \sqrt{\frac{\pi r_c}{2}} \sigma_t. \quad (42)$$

Здесь, в отличие от работы [44], расстояние r_c полагается константой материала и находится по формуле (17), которая, по сути, является формулой Ирвина для оценки размера зоны пластичности. Тогда, учитывая представление (2), можно записать выражение для нахождения критического номинального напряжения:

$$\sigma_f = \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi a}} \left(Y_I \cos \frac{\theta_0}{2} (1 + \cos \theta_0) - 3Y_{II} \cos \frac{\theta_0}{2} \sin \theta_0 + T_* \alpha \sin^2 \theta_0 \right). \quad (43)$$

4.5. Критерии MERR и GMERR

Высвобождаемая упругая энергия деформации G представляет собой энергию, необходимую для роста трещины. Критерии утверждают, что трещина начнет продвигаться на величину r_c в направлении θ_0 при достижении скоростью высвобождения упругой энергии деформации своего максимального значения в этом

направлении. Критерий GMERR, к тому же, позволяет учитывать влияние T -напряжения. Условие начала разрушения в этом случае записывается как

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} < 0, \quad G(r_c, \theta_0) = G_c. \quad (44)$$

В работе [53] принимается допущение, что в вершине ответвления трещины под углом инициации θ_0 , при условии стремления к нулю длины отрезка, коэффициенты интенсивности могут быть представлены в виде:

$$K_{I\theta} = \sqrt{2\pi r} \sigma_\theta(r, \theta), \quad K_{II\theta} = \sqrt{2\pi r} \tau_{r\theta}(r, \theta), \quad (45)$$

а скорость высвобождения упругой энергии запишется так:

$$G = \frac{1}{E'} (K_{I\theta}^2 + K_{II\theta}^2) = \frac{2\pi r}{E'} (\sigma_\theta^2(r, \theta) + \tau_{r\theta}^2(r, \theta)). \quad (46)$$

С учетом асимптотики поля напряжений (1) выражение (46) становится следующим:

$$G = \left[K_I^2 D_1(\theta) + K_{II}^2 D_2(\theta) + K_I K_{II} D_3(\theta) + \sqrt{2\pi r} K_I T D_4(\theta) + \sqrt{2\pi r} K_{II} T D_5(\theta) + \sqrt{2\pi r} T^2 D_6(\theta) \right] / E'. \quad (47)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} D_1(\theta) &= \cos^4 \frac{\theta}{2}, \quad D_2(\theta) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(3 \sin^2 \frac{\theta}{2} + 1 \right), \quad D_3(\theta) = -4 \cos^3 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\ D_4(\theta) &= \sin^2 \theta \cos \frac{\theta}{2}, \quad D_5(\theta) = 4 \left(\sin^5 \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad D_6(\theta) = \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (48)$$

Из условия (44) следует, что для нахождения угла иницирования трещины необходимо решить уравнение:

$$F_1(\theta_0) K_I^2 + F_2(\theta_0) K_{II}^2 + F_3(\theta_0) K_I K_{II} + \sqrt{2\pi r_c} F_4(\theta_0) K_I T + \sqrt{2\pi r_c} F_5(\theta_0) K_{II} T + 2\pi r_c F_6(\theta_0) T^2 = 0, \quad (49)$$

или с учетом (2):

$$Y_I^2 F_1(\theta_0) + Y_{II}^2 F_2(\theta_0) + Y_I Y_{II} F_3(\theta_0) + Y_I T_* \alpha F_4(\theta_0) + Y_{II} T_* \alpha F_5(\theta_0) + (T_* \alpha)^2 F_6(\theta_0) = 0. \quad (50)$$

В уравнениях (49), (50) приняты обозначения:

$$\begin{aligned} F_1(\theta_0) &= -\frac{1}{2} \sin \theta (\cos \theta + 1), \quad F_2(\theta_0) = \frac{1}{2} \sin \theta (3 \cos \theta - 1), \quad F_3(\theta_0) = 1 - \cos \theta - 2 \cos^2 \theta, \\ F_4(\theta_0) &= \frac{1}{8} \left(5 \sin \frac{5\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad F_5(\theta_0) = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(5 \sin^4 \frac{\theta}{2} - 1 \right), \quad F_6(\theta_0) = \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (51)$$

Так как, согласно критерию (46), трещина будет расти в направлении θ_0 при достижении G своего критического значения, то с учетом (47) можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E'} (K_{If}^2 D_1(\theta_0) + K_{IIf}^2 D_2(\theta_0) + K_{If} K_{IIf} D_3(\theta_0) + \sqrt{2\pi r_c} K_{If} T_f D_4(\theta_0) + \\ + \sqrt{2\pi r_c} K_{IIf} T_f D_5(\theta_0) + 2\pi r_c T_f^2 D_6(\theta_0)) = G_c. \end{aligned} \quad (52)$$

Для чистого режима I ($K_{IIf} = 0, K_{If} = K_{Ic}, T_f = T_c, \theta_0 = 0$) получается:

$$G_c = K_{Ic}^2 / E'. \quad (53)$$

С учетом (53) и представления (2) выражение (47) преобразуется к виду:

$$(\sigma_f \sqrt{\pi a})^2 \left(Y_I^2 D_1(\theta_0) + Y_{II}^2 D_2(\theta_0) + Y_I Y_{II} D_3(\theta_0) + Y_I T_* \alpha D_4(\theta_0) + Y_{II} T_* \alpha D_5(\theta_0) + (T_* \alpha)^2 D_6(\theta_0) \right) = K_{Ic}^2. \quad (54)$$

Здесь значение критического расстояния r_c оценивается по формуле (17).

Выражения для определения интенсивности высвобождения упругой энергии деформации G , угла инициации трещины θ_0 и критической нагрузки в критерии MERR легко получить, если исключить из формул для GMERR слагаемые, содержащие T -напряжения:

$$Y_I^2 F_1(\theta_0) + Y_{II}^2 F_2(\theta_0) + Y_I Y_{II} F_3(\theta_0) = 0, \quad (55)$$

$$(\sigma_f \sqrt{\pi a})^2 (Y_I^2 D_1(\theta_0) + Y_{II}^2 D_2(\theta_0) + Y_I Y_{II} D_3(\theta_0)) = K_{Ic}^2. \tag{56}$$

Shahani и Tabatabaei [25] представили для скорости высвобождения упругой энергии деформации в критерии максимальной скорости высвобождения упругой энергии (MERR) такую форму записи:

$$G = c_{11} K_I^2 + c_{12} K_I K_{II} + c_{22} K_{II}^2. \tag{57}$$

Здесь коэффициенты c_{ij} — полиномы вида:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 4,8678\beta^5 + 5,4844\beta^4 - 4,0616\beta^3 - 5,9047\beta^2 - 0,07633\beta + 0,99914, \\ c_{12} &= 21,115\beta^6 - 26,99\beta^5 + 18,332\beta^4 + 31,462\beta^3 + 0,67634\beta^2 - 6,2579\beta + 1,2617 \cdot 10^{-5}, \\ c_{22} &= 12,839\beta^5 - 8,6465\beta^4 + 14,686\beta^3 + 10,287\beta^2 + 0,27363\beta + 1,0031, \end{aligned} \tag{58}$$

где $\beta = \theta/\pi$.

Скорость высвобождения упругой энергии G может иметь и такое представление:

$$G = [K_I^2 (C_{11}^2(\theta) + C_{11}^2(\theta)) + 2K_I K_{II} (C_{11}(\theta)C_{12}(\theta) + C_{21}(\theta)C_{22}(\theta)) + K_{II}^2 (C_{11}^2(\theta) + C_{11}^2(\theta))] / E'. \tag{59}$$

Hussain и др. [51] определили входящие в (59) коэффициенты $C_{ij}(\theta)$ ($i, j = 1, 2$) при помощи комплексных потенциалов Колосова–Мухелишвили:

$$\begin{aligned} C_{11}(\theta) &= \left(\frac{\pi-\theta}{\pi+\theta}\right)^{\theta/2\pi} \left(\frac{4}{3+\cos^2\theta}\right) \cos\theta, & C_{12}(\theta) &= \left(\frac{\pi-\theta}{\pi+\theta}\right)^{\theta/2\pi} \left(\frac{4}{3+\cos^2\theta}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \sin\theta, \\ C_{21}(\theta) &= \left(\frac{\pi-\theta}{\pi+\theta}\right)^{\theta/2\pi} \left(\frac{4}{3+\cos^2\theta}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \sin\theta, & C_{22}(\theta) &= \left(\frac{\pi-\theta}{\pi+\theta}\right)^{\theta/2\pi} \left(\frac{4}{3+\cos^2\theta}\right) \cos\theta. \end{aligned} \tag{60}$$

Nuismer [52] получил выражения для $C_{ij}(\theta)$ в предположении идентичности поля напряжений в вершине трещины и на кончике ее отрезка при стремлении длины отрезка к нулю:

$$\begin{aligned} C_{11}(\theta) &= \frac{1}{2}(1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}, & C_{12}(\theta) &= -\frac{3}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}, \\ C_{21}(\theta) &= \frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}, & C_{22}(\theta) &= \frac{1}{2}(3\cos\theta-1)\cos\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{61}$$

Необходимо отметить, что формулы (57) и (59) не учитывают влияние T -напряжения и используются для оценки предельного состояния материала в критерии MERR. К тому же, величины разрушающей нагрузки, рассчитанные по формуле (56) и по выражению с $C_{ij}(\theta)$ (см. [52], формулы (61)), совпадают.

5. Сравнение результатов расчетов с лабораторным экспериментом

На рисунке 9а для сравнения показаны графики нагрузок, предсказанные вычислениями с использованием различных критериев хрупкого разрушения из предыдущего раздела, и результаты лабораторных испытаний образцов из эбонита. Рисунок позволяет оценить изменение критической нагрузки в зависимости от смешивания режимов нагружения (I-II), получаемого в данном образце путем сдвига трещины относительно его середины. На рисунке 9б представлены зависимости критической нагрузки от относительного сдвига трещины для критериев

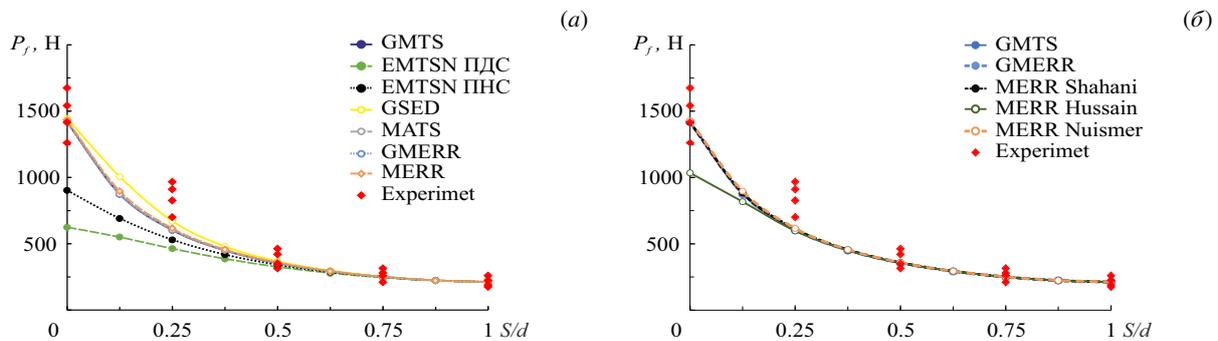


Рис. 9. К сравнению критических нагрузок, предсказанных вычислениями с использованием критериев хрупкого разрушения, с результатами лабораторных испытаний

GMERR и MERR. Данные расчетов по критерию MERR приведены в нескольких вариантах: с применением выражений (57)–(61).

Критерий GSED демонстрирует хорошее согласие между данными вычислительных и лабораторных экспериментов. Оценки разрушения по локальному силовому критерию GMTS, нелокальному силовому критерию MATS и энергетическим критериям GMERR, MERR являются очень близкими друг к другу и к экспериментальным результатам. Деформационный критерий EMTSN представлен в двух вариантах: найдена разрушающая нагрузка для условий плоской деформации и плоского напряженного состояния. Несмотря на то, что толщина испытательного образца соответствует плоской деформации ($t \geq t_{\min} = 2.5(K_{Ic}/\sigma_t)^2$), расчет по критерию EMTSN в условиях плоского напряженного состояния показывает лучший результат. При вычислениях по критерию EMTSN условие плоской деформации более консервативно.

Значения разрушающей нагрузки, отвечающие критерию MERR и условию смешанного нагружения (I+II), полученные из выражений (58) и (61), почти совпадают (Рис. 9б), к тому же, они близки и к величинам разрушающей нагрузки, рассчитанной по критериям GMERR и GMTS, учитывающим T -напряжения. Это говорит о небольшом влиянии первого несингулярного члена разложения в ряды Вильямса на разрушение испытательного образца данной конфигурации в условиях смешанного режима I+II. Оценка разрушающей нагрузки по критерию MERR с использованием выражений (60) в условиях чистого сдвига ($S/d = 0$) является более консервативной, увеличение относительного сдвига трещины, то есть переход в режим I+II и приближение к практически чистому режиму I ($S/d = 1$), приводит к хорошей согласованности с экспериментом.

6. Заключение

В статье предложен образец в виде эксцентричной балки прямоугольного поперечного сечения с краевой трещиной, подвергнутый антисимметричному четырехточечному нагружению. Смешанный режим разрушения I+II генерировался путем сдвига трещины относительно середины образца. Методом конечных элементов получены коэффициенты интенсивности напряжений для I и II режимов разрушения, а также T -напряжения для различных геометрических параметров образца. В процессе моделирования варьировались относительный сдвиг трещины S/d и относительная длина трещины a/W . Проведен анализ известных методов расчета T -напряжений. В ближайшем к вершине трещины элементе наблюдались сильные осцилляции перемещений, которые в литературе не упоминаются, поэтому для определения T -напряжений с максимальной возможной точностью предложено рассчитывать их по перемещениям при исключении из рассмотрения ближайших к вершине трещины 3–4 узлов.

Построены графики зависимостей безразмерного параметра T_* от относительного сдвига трещины и от относительной длины трещины для фиксированного значения $d = 22$ мм. Отмечено, что при $S/d = 0$ значение T_* близко к нулевому для всего диапазона длин трещины. Для трещин с $a/W \leq 0.3$ значения T_* отрицательны; смена знака на положительный происходит в диапазоне относительных длин трещины $0.3 \div 0.5$ и зависит от величины отношения S/d . С увеличением сдвига трещины относительно середины образца параметр T_* растет и, как следствие, увеличивается его влияние на сопротивление разрушению хрупких и квазихрупких материалов в смешанном режиме I+II. Помимо этого, для анализа роли T -напряжения в процессе разрушения при смешанном режиме (I+II) использован безразмерный параметр двухосности B , который является функцией геометрии образца и зависит от схемы нагружения. Отмечено, что коэффициент двухосности для $S/d = 0$ (чистый режим II) и различных длин трещины имеет значения, близкие к нулевым. С ростом S/d коэффициент B достигает величины, которая остается практически постоянной для всего диапазона длин трещин, что говорит о его нечувствительности к сдвигу трещины.

На предложенных образцах проведены экспериментальные исследования вязкости разрушения эбонита в смешанном режиме (I+II). Для каждого вида нагружения и геометрии испытано по 3–5 одинаковых образцов. Опыты проводились при статической нагрузке до полного разрушения образцов. Для прогнозирования как направления разрушения, так и величины критической нагрузки в вычислительных экспериментах использовались критерии разрушения GMTS, EMTSN, GSED, MATS, MERR и GMERR. Критерии GMTS, GSED, MATS, MERR и GMERR продемонстрировали хорошее соответствие данных численного расчета экспериментальным критическим нагрузкам. Наиболее консервативный прогноз по критической нагрузке дает критерий EMTSN для значений относительного сдвига трещины S/d в диапазоне от 0 до 0.5, что соответствует параметрам общепринятого инженерного подхода при оценке разрушения конструкций с запасом по прочности.

Учитывая хорошую согласованность полученных экспериментальных результатов и результатов, прогнозируемых при помощи расчетов по представленным здесь критериям разрушения, испытательный образец данной конфигурации может быть тестовым при исследовании разрушения хрупких и квазихрупких материалов в чистом II и смешанном I+II режимах. При значении $S/d = 1$ происходит приближение к чистому I режиму, но сохраняется незначительное влияние II режима, поэтому для изучения разрушения в чистом режиме I наиболее подходящей схемой нагружения является трехточечный изгиб.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 23-19-00514), <https://rscf.ru/project/23-19-00514/>.

Литература

1. Suresh S., Shih C.F., Morrone A., O'Dowd N.P. Mixed-mode fracture toughness of ceramic materials // Journal of the American Ceramic Society. 1990. Vol. 73, no. 5. P. 1257–1267. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1990.tb05189.x
2. Fett T., Gerteisen G., Hahnenberger S., Martin G., Munz D. Fracture tests for ceramics under mode-I, mode-II and mixed-mode loading // Journal of the European Ceramic Society. 1995. Vol. 15, no. 4. P. 307–312. DOI: 10.1016/0955-2219(95)90353-K
3. Tikare V., Choi S.R. Combined Mode I–Mode II Fracture of 12-mol%-Ceria-Doped Tetragonal Zirconia Polycrystalline Ceramic // Journal of the American Ceramic Society. 1997. Vol. 80, no. 6. P. 1624–1626. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1997.tb03030.x
4. Choi S.R., Zhu D., Miller R.A. Fracture behavior under mixed-mode loading of ceramic plasma-sprayed thermal barrier coatings at ambient and elevated temperatures // Engineering Fracture Mechanics. 2005. Vol. 72, no. 13. P. 2144–2158. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.01.010
5. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R. Analysis of fracture initiation angle in some cracked ceramics using the generalized maximum tangential stress criterion // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49. P. 1877–1883. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2012.03.029
6. Li M., Sakai M. Mixed-Mode Fracture of Ceramics in Asymmetric Four-Point Bending: Effect of Crack-Face Grain Interlocking/Bridging // Journal of the American Ceramic Society. 1996. Vol. 79, no. 10. P. 2718–2726. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1996.tb09037.x
7. Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. Mixed mode fracture in soda lime glass analyzed by using the generalized MTS criterion // International Journal of Solids and Structures. 2009. Vol. 46, no. 2. P. 311–321. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.08.035
8. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R. Geometry effects on fracture behaviour of polymethyl methacrylate // Materials Science and Engineering: A. 2010. Vol. 527, no. 3. P. 526–530. DOI: 10.1016/j.msea.2009.08.055
9. Araki W., Nemoto K., Adachi T., Yamaji A. Fracture toughness for mixed mode I/II of epoxy resin // Acta Materialia. 2005. Vol. 53, no. 3. P. 869–875. DOI: 10.1016/j.actamat.2004.10.035
10. He M.Y., Hutchinson J.W. Asymmetric Four-Point Crack Specimen // Journal of Applied Mechanics. 2000. Vol. 67, no. 1. P. 207–209. DOI: 10.1115/1.321168
11. Maccagno T.M., Knott J.F. The fracture behaviour of PMMA in mixed modes I and II // Engineering Fracture Mechanics. 1989. Vol. 34, no. 1. P. 65–86. DOI: 10.1016/0013-7944(89)90243-9
12. Ayatollahi M.R., Shadlou S., Shokrieh M.M. Mixed mode brittle fracture in epoxy/multi-walled carbon nanotube nanocomposites // Engineering Fracture Mechanics. 2011. Vol. 78, no. 14. P. 2620–2632. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2011.06.021
13. Aliha M.R., Ayatollahi M.R., Smith D.J., Pavier M.J. Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading // Engineering Fracture Mechanics. 2010. Vol. 77, no. 11. P. 2200–2212. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.03.009
14. Erarслан N., Williams D.J. Mixed-Mode Fracturing of Rocks Under Static and Cyclic Loading // Rock Mechanics and Rock Engineering. 2013. Vol. 46. P. 1035–1052. DOI: 10.1007/s00603-012-0303-5
15. Aliha M.R.M., Hosseinpour G.R., Ayatollahi M.R. Application of Cracked Triangular Specimen Subjected to Three-Point Bending for Investigating Fracture Behavior of Rock Materials // Rock Mechanics and Rock Engineering. 2013. Vol. 46. P. 1023–1034. DOI: 10.1007/s00603-012-0325-z
16. Wang C., Zhu Z.M., Liu H.J. On the I–II mixed mode fracture of granite using four-point bend specimen // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 2016. Vol. 39, no. 10. P. 1193–1203. DOI: 10.1111/ffe.12422
17. Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. Mixed mode fracture analysis of polycrystalline graphite – A modified MTS criterion // Carbon. 2008. Vol. 46, no. 10. P. 1302–1308. DOI: 10.1016/j.carbon.2008.05.008
18. Mirsayar M.M., Berto F., Aliha M.R.M., Park P. Strain-based criteria for mixed-mode fracture of polycrystalline graphite // Engineering Fracture Mechanics. 2016. Vol. 156. P. 114–123. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.02.011
19. Ефимов В.П. Измерение прочности на растяжение бразильским методом // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2021. № 6. С. 49–60. DOI: 10.15372/FTPRTI20210605
20. Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. Wide range data for crack tip parameters in two disc-type specimens under mixed mode loading // Computational Materials Science. 2007. Vol. 38. P. 660–670. DOI: 10.1016/j.commatsci.2006.04.008
21. Torabi A.R., Etesam S., Sapora A., Cornetti P. Size effects on brittle fracture of Brazilian disk samples containing a circular hole // Engineering Fracture Mechanics. 2017. Vol. 186. P. 496–503. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.11.008
22. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R., Pakzad R. Brittle Fracture Analysis Using a Ring-Shape Specimen Containing Two Angled Cracks // International Journal of Fracture. 2008. No. 1. P. 63–68. DOI: 10.1007/s10704-008-9280-9
23. Mirsayar M.M., Park P. The role of T-stress on kinking angle of interface cracks // Materials & Design. 2015. Vol. 80. P. 12–19. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.05.007
24. Lin Q., Bian X., Pan P.-Z., Gao Y., Lu Y. Criterion of local symmetry visualized in small eccentric single edge notched bend (E-SENB) rock specimens // Engineering Fracture Mechanics. 2021. Vol. 248. 107709. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107709
25. Shahani A.R., Tabatabaei S.A. Effect of T-stress on the fracture of a four point bend specimen // Materials & Design. 2009. Vol. 30, no. 7. P. 2630–2635. DOI: 10.1016/j.matdes.2008.10.031

26. Li Y., Dong S., Pavia M.J. Measurement of the mixed mode fracture strength of green sandstone using three-point bending specimens // *Geomechanics and Engineering*. 2020. Vol. 20, no. 1. P. 9–18. DOI: 10.12989/gae.2020.20.1.009
27. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // *Journal of Applied Mechanics*. 1957. Vol. 24. P. 109–114.
28. Кургузов В.Д., Демешкин А.Г., Кузнецов Д.А. Трехточечный изгиб образцов с эксцентричной краевой трещиной при смешанном нагружении // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2023. Т. 16, № 3. С. 345–357. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.3.29
29. MARC 2020. Volume A: Theory and User Information. Santa Ana (CA): MSC Software Corporation, 2020. 1061 p.
30. Shih C.F., Asaro R.J. Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part I—Small Scale Yielding // *Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55, no. 2. P. 299–316. DOI: 10.1115/1.3173676
31. Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 134. P. 218–241. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.10.013
32. Тырымов А.А. Численное моделирование T-напряжений и коэффициента биаксиальности напряжений для образца с центральной трещиной при смешанных граничных условиях // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020. Т. 13, № 4. С. 393–401. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.4.30
33. Степанова Л.В., Фролов К.В. Конечно-элементное исследование смешанного нагружения на примере полудиска с вертикальным и наклонным надрезами // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2018. № 3. С. 128–137. DOI: 10.15593/pern.mech/2018.3.12
34. Chang K.J. On the maximum strain criterion – a new approach to the angled crack problem // *Engineering Fracture Mechanics*. 1981. Vol. 14. P. 107–124. DOI: 10.1016/0013-7944(81)90021-7
35. Wu H.C. Dual failure criterion for plain concrete // *Journal of Engineering Mechanics—ASCE*. 1974. Vol. 100, no. 6. P. 1167–1181.
36. Lazzarin P., Zambardi R. A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches // *International Journal of Fracture*. 2001. P. 275–298. DOI: 10.1023/A:1013595930617
37. Lazzarin P., Livieri P., Berto F., Zappalorto M. Local strain energy density and fatigue strength of welded joints under uniaxial and multiaxial loading // *Engineering Fracture Mechanics*. 2008. Vol. 75. P. 1875–1889. DOI: 10.1016/J.ENGFRACMECH.2006.10.019
38. Foti P., Santonocito D., Risitano G., Berto F. Fatigue assessment of cruciform joints: Comparison between Strain Energy Density predictions and current standards and recommendations // *Engineering Structures*. 2021. Vol. 230. 111708. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.111708
39. Kusch A., Salamina S., Crivelli D., Berto F. Strain Energy Density as Failure Criterion for Quasi-Static Uni-axial Tensile Loading // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2021. Vol. 15. P. 331–349. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.57.24
40. Sajjadi S.H., Khorshidvand A.R., Jabbari M., Javadi M. Comparing Energy-Based Criterion with Strain-Based Criterion for Predicting Brittle Fracture in V-Shaped Notches under Mixed-Mode I/II Loading Conditions // *Physical Mesomechanics*. 2021. Vol. 24, no. 3. P. 291–302. DOI: 10.1134/S1029959921030073
41. Ayatollahi M.R., Rashidi Moghaddam M., Berto F. A generalized strain energy density criterion for mixed mode fracture analysis in brittle and quasi-brittle materials // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 79. P. 70–76. DOI: 10.1016/j.tafmec.2015.09.004
42. Ayatollahi M.R., Rashidi Moghaddam M., Razavi N., Berto F. Geometry effects on fracture trajectory of PMMA samples under pure mode-I loading // *Engineering Fracture Mechanics*. 2016. Vol. 163. P. 449–461. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.05.014
43. Kurгузов V., Kuznetsov D. Fracture analysis of Brazilian circular hole disk under mixed mode loading // *Engineering Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 297. 109875. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2024.109875
44. Matvienko Y.G. Maximum Average Tangential Stress Criterion for Prediction of the Crack Path // *International Journal of Fracture*. 2012. Vol. 176. P. 113–118. DOI: 10.1007/s10704-012-9715-1
45. Wieghardt K. Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper // *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. 1907. Vol. 55, no. 1/2. P. 60–103.
46. Neuber H. Kerbspannungslehre, Grundlagen für eine genaue Spannungsrechnung. Berlin: Springer-Verlag, 1937. 160 p.
47. Новожилов В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // *Прикладная математика и механика*. 1969. Т. 33, № 2. С. 212–222.
48. Dyskin A.V. Crack growth criteria incorporating non-singular stresses: size effect in apparent fracture toughness // *International Journal of Fracture*. 1997. Vol. 83. P. 191–206. DOI: 10.1023/A:1007304015524
49. Matvienko Y.G. Local fracture criterion to describe failure assessment diagrams for a body with a crack/notch // *International Journal of Fracture*. 2003. Vol. 124. P. 107–112. DOI: 10.1023/B:FRAC.0000018229.08344.96
50. Matvienko Y.G., Semenova M.M. The concept of the average stress in the fracture process zone for the search of the crack path // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2015. Vol. 9, no. 34. P. 255–260. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.34.27
51. Hussain M.A., Pu S.L., Underwood J. Strain Energy Release Rate for a Crack Under Combined Mode I and Mode II // *Fracture Analysis*. ASTM STP 560. 1974. P. 2–28. DOI: 10.1520/STP33130S
52. Nuismer R.J. An energy release rate criterion for mixed mode fracture // *International Journal of Fracture*. 1975. Vol. 11. P. 245–250. DOI: 10.1007/BF00038891

53. Hou C., Jin X., Fan X., Xu R., Wang Z. A generalized maximum energy release rate criterion for mixed mode fracture analysis of brittle and quasi-brittle materials // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2019. Vol. 100. P. 78–85. DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.12.015

Сведения об авторах:

Кургузов Владимир Дмитриевич, дфмн, проф., гнс, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (ИГиЛ СО РАН), 630090, г. Новосибирск, пр-т Лаврентьева, д. 15; e-mail: kurгузов@hydro.nsc.ru; ORCID: 0000-0002-9716-425X

Кузнецов Денис Александрович (корр.), асп., ИГиЛ СО РАН; e-mail: kuznecov.d.a@hydro.nsc.ru; ORCID: 0009-0008-3466-8566

Research article

Fracture of brittle beams under antisymmetrical four-point bending

V.D. Kurguzov, D.A. Kuznetsov

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

The nucleation of cracks in structural elements during their service life is due to the degradation of the material or the presence of hidden defects. The structure therefore loses its original load-bearing capacity and fails under significantly lower external loads. As a rule, the fracture of structures due to crack growth occurs under mixed loading. In this paper, an eccentric beam of rectangular cross-section with an edge crack subjected to antisymmetric four-point loading is considered. By changing the position of the crack relative to the center of the beam, it is possible to obtain the entire range of mixed fracture modes: I+II, pure I and pure II modes. Using the finite element method, stress intensity coefficients for modes I and II of failure, as well as T -stresses, were obtained for different geometric parameters of the beam and different loading conditions. The length of the crack, its position relative to the beam center, and the length of the short span were varied. The methods commonly used for calculating T -stresses were analyzed. In the element closest to the crack tip, strong displacement oscillations, not mentioned in the literature, are observed, therefore to determine T -stresses with the highest possible accuracy it is suggested to calculate them from displacements, cutting off the 3–4 nodes closest to the crack tip. Experimental studies of the fracture toughness of ebonite in a mixed mode were carried out. For each type of loading and geometry, 3–5 identical specimens were tested. The tests were carried out under static load until the specimens were completely destroyed. In all experiments, the crack initiation angle and critical load were recorded. Six failure criteria were used to predict both failure direction and critical load: the generalized maximum tangential stress criterion, the extended maximum tangential strain criterion, the generalized strain energy density criterion, the generalized maximum averaged stress criterion, the maximum elastic energy release rate criterion and the generalized maximum elastic energy release rate criterion. The results obtained demonstrate good agreement between the experimental values of critical loads and the numerical calculations. The error in determining the crack initiation angle does not exceed 5%. Considering that the experimental results agree with the predictions of failure criteria for the beam subjected to antisymmetric four-point bend loading, this type of a beam specimen can be used to study mixed-type fracture in the elements manufactured from engineering materials, such as, for example, plexiglass, ebonite, and getinax.

Keywords: fracture mechanics, beam specimen, mixed mode loading, four-point bend, T -stress, finite element analysis

Received: 13.05.2024 / **Published online:** 30.12.2024

References

1. Suresh S., Shih C.F., Morrone A., O'Dowd N.P. Mixed-mode fracture toughness of ceramic materials. Journal of the American Ceramic Society. 1990. Vol. 73, no. 5. P. 1257–1267. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1990.tb05189.x
2. Fett T., Gerteisen G., Hahnenberger S., Martin G., Munz D. Fracture tests for ceramics under mode-I, mode-II and mixed-mode loading. Journal of the European Ceramic Society. 1995. Vol. 15, no. 4. P. 307–312. DOI: 10.1016/0955-2219(95)90353-K
3. Tikare V., Choi S.R. Combined Mode I–Mode II Fracture of 12-mol%-Ceria-Doped Tetragonal Zirconia Polycrystalline Ceramic. Journal of the American Ceramic Society. 1997. Vol. 80, no. 6. P. 1624–1626. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1997.tb03030.x
4. Choi S.R., Zhu D., Miller R.A. Fracture behavior under mixed-mode loading of ceramic plasma-sprayed thermal barrier coatings at ambient and elevated temperatures. Engineering Fracture Mechanics. 2005. Vol. 72, no. 13. P. 2144–2158. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.01.010
5. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R. Analysis of fracture initiation angle in some cracked ceramics using the generalized maximum tangential stress criterion. International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49. P. 1877–1883. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2012.03.029
6. Li M., Sakai M. Mixed-Mode Fracture of Ceramics in Asymmetric Four-Point Bending: Effect of Crack-Face Grain Interlocking/Bridging. Journal of the American Ceramic Society. 1996. Vol. 79, no. 10. P. 2718–2726. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1996.tb09037.x
7. Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. Mixed mode fracture in soda lime glass analyzed by using the generalized MTS criterion. International Journal of Solids and Structures. 2009. Vol. 46, no. 2. P. 311–321. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2008.08.035
8. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R. Geometry effects on fracture behaviour of polymethyl methacrylate. Materials Science and Engineering: A. 2010. Vol. 527, no. 3. P. 526–530. DOI: 10.1016/j.msea.2009.08.055

9. Araki W., Nemoto K., Adachi T., Yamaji A. Fracture toughness for mixed mode I/II of epoxy resin. *Acta Materialia*. 2005. Vol. 53, no. 3. P. 869–875. DOI: 10.1016/j.actamat.2004.10.035
10. He M.Y., Hutchinson J.W. Asymmetric Four-Point Crack Specimen. *Journal of Applied Mechanics*. 2000. Vol. 67, no. 1. P. 207–209. DOI: 10.1115/1.321168
11. Maccagno T.M., Knott J.F. The fracture behaviour of PMMA in mixed modes I and II. *Engineering Fracture Mechanics*. 1989. Vol. 34, no. 1. P. 65–86. DOI: 10.1016/0013-7944(89)90243-9
12. Ayatollahi M.R., Shadlou S., Shokrieh M.M. Mixed mode brittle fracture in epoxy/multi-walled carbon nanotube nanocomposites. *Engineering Fracture Mechanics*. 2011. Vol. 78, no. 14. P. 2620–2632. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2011.06.021
13. Aliha M.R., Ayatollahi M.R., Smith D.J., Pavier M.J. Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics*. 2010. Vol. 77, no. 11. P. 2200–2212. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.03.009
14. Erarslan N., Williams D.J. Mixed-Mode Fracturing of Rocks Under Static and Cyclic Loading. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2013. Vol. 46. P. 1035–1052. DOI: 10.1007/s00603-012-0303-5
15. Aliha M.R.M., Hosseinpour G.R., Ayatollahi M.R. Application of Cracked Triangular Specimen Subjected to Three-Point Bending for Investigating Fracture Behavior of Rock Materials. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2013. Vol. 46. P. 1023–1034. DOI: 10.1007/s00603-012-0325-z
16. Wang C., Zhu Z.M., Liu H.J. On the I–II mixed mode fracture of granite using four-point bend specimen. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2016. Vol. 39, no. 10. P. 1193–1203. DOI: 10.1111/ffe.12422
17. Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. Mixed mode fracture analysis of polycrystalline graphite – A modified MTS criterion. *Carbon*. 2008. Vol. 46, no. 10. P. 1302–1308. DOI: 10.1016/j.carbon.2008.05.008
18. Mirsayar M.M., Berto F., Aliha M.R.M., Park P. Strain-based criteria for mixed-mode fracture of polycrystalline graphite. *Engineering Fracture Mechanics*. 2016. Vol. 156. P. 114–123. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.02.011
19. Efimov V. Brazilian tensile strength testing. *Journal of Mining Science*. 2021. Vol. 57, no. 6. P. 922–932. DOI: 10.1134/S1062739121060053
20. Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. Wide range data for crack tip parameters in two disc-type specimens under mixed mode loading. *Computational Materials Science*. 2007. Vol. 38. P. 660–670. DOI: 10.1016/j.commatsci.2006.04.008
21. Torabi A.R., Etesam S., Sapora A., Cornetti P. Size effects on brittle fracture of Brazilian disk samples containing a circular hole. *Engineering Fracture Mechanics*. 2017. Vol. 186. P. 496–503. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.11.008
22. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R., Pakzad R. Brittle Fracture Analysis Using a Ring-Shape Specimen Containing Two Angled Cracks. *International Journal of Fracture*. 2008. No. 1. P. 63–68. DOI: 10.1007/s10704-008-9280-9
23. Mirsayar M.M., Park P. The role of T-stress on kinking angle of interface cracks. *Materials & Design*. 2015. Vol. 80. P. 12–19. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.05.007
24. Lin Q., Bian X., Pan P.-Z., Gao Y., Lu Y. Criterion of local symmetry visualized in small eccentric single edge notched bend (E-SENB) rock specimens. *Engineering Fracture Mechanics*. 2021. Vol. 248. 107709. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107709
25. Shahani A.R., Tabatabaei S.A. Effect of T-stress on the fracture of a four point bend specimen. *Materials & Design*. 2009. Vol. 30, no. 7. P. 2630–2635. DOI: 10.1016/j.matdes.2008.10.031
26. Li Y., Dong S., Pavier M.J. Measurement of the mixed mode fracture strength of green sandstone using three-point bending specimens. *Geomechanics and Engineering*. 2020. Vol. 20, no. 1. P. 9–18. DOI: 10.12989/gae.2020.20.1.009
27. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*. 1957. Vol. 24. P. 109–114.
28. Kurguzov V., Demeshkin A., Kuznetsov D. Three-point bending of eccentric edge crack specimens under mixed mode loading. *Computational Continuum Mechanics*. 2023. Vol. 16, no. 3. P. 345–357. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.3.29
29. MARC 2020. Volume A: Theory and User Information. Santa Ana (CA): MSC Software Corporation, 2020. 1061 p.
30. Shih C.F., Asaro R.J. Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part I—Small Scale Yielding. *Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55, no. 2. P. 299–316. DOI: 10.1115/1.3173676
31. Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 134. P. 218–241. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2014.10.013
32. Tyrymov A. Numerical simulation of T-stresses and stress biaxiality factor for a centrally cracked specimen under mixed boundary conditions. *Computational continuum mechanics*. 2020. Vol. 13, no. 4. P. 393–401. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.4.30
33. Stepanova L., Frolov K. Finite element study of mixed mode loading of the cracked semicircular disc under bending. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2018. No. 3. P. 128–137. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.12
34. Chang K.J. On the maximum strain criterion – a new approach to the angled crack problem. *Engineering Fracture Mechanics*. 1981. Vol. 14. P. 107–124. DOI: 10.1016/0013-7944(81)90021-7
35. Wu H.C. Dual failure criterion for plain concrete. *Journal of Engineering Mechanics–ASCE*. 1974. Vol. 100, no. 6. P. 1167–1181.
36. Lazzarin P., Zambardi R. A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches. *International Journal of Fracture*. 2001. P. 275–298. DOI: 10.1023/A:1013595930617

37. *Lazzarin P., Livieri P., Berto F., Zappalorto M.* Local strain energy density and fatigue strength of welded joints under uniaxial and multiaxial loading. *Engineering Fracture Mechanics.* 2008. Vol. 75. P. 1875–1889. DOI: 10.1016/J.ENGFRACMECH.2006.10.019
38. *Foti P., Santonocito D., Risitano G., Berto F.* Fatigue assessment of cruciform joints: Comparison between Strain Energy Density predictions and current standards and recommendations. *Engineering Structures.* 2021. Vol. 230. 111708. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.111708
39. *Kusch A., Salamina S., Crivelli D., Berto F.* Strain Energy Density as Failure Criterion for Quasi-Static Uni-axial Tensile Loading. *Frattura ed Integrità Strutturale.* 2021. Vol. 15. P. 331–349. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.57.24
40. *Sajjadi S.H., Khorshidvand A.R., Jabbari M., Javadi M.* Comparing Energy-Based Criterion with Strain-Based Criterion for Predicting Brittle Fracture in V-Shaped Notches under Mixed-Mode I/II Loading Conditions. *Physical Mesomechanics.* 2021. Vol. 24, no. 3. P. 291–302. DOI: 10.1134/S1029959921030073
41. *Ayatollahi M.R., Rashidi Moghaddam M., Berto F.* A generalized strain energy density criterion for mixed mode fracture analysis in brittle and quasi-brittle materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* 2015. Vol. 79. P. 70–76. DOI: 10.1016/j.tafmec.2015.09.004
42. *Ayatollahi M.R., Rashidi Moghaddam M., Razavi N., Berto F.* Geometry effects on fracture trajectory of PMMA samples under pure mode-I loading. *Engineering Fracture Mechanics.* 2016. Vol. 163. P. 449–461. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2016.05.014
43. *Kurguzov V., Kuznetsov D.* Fracture analysis of Brazilian circular hole disk under mixed mode loading. *Engineering Fracture Mechanics.* 2024. Vol. 297. 109875. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2024.109875
44. *Matvienko Y.G.* Maximum Average Tangential Stress Criterion for Prediction of the Crack Path. *International Journal of Fracture.* 2012. Vol. 176. P. 113–118. DOI: 10.1007/s10704-012-9715-1
45. *Wieghardt K.* Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper. *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1907. Vol. 55, no. 1/2. P. 60–103.
46. *Neuber H.* Kerbspannungslehre, Grundlagen für eine genaue Spannungsrechnung. Berlin: Springer-Verlag, 1937. 160 p.
47. *Novozhilov V.V.* On a necessary and sufficient criterion for brittle strength. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1969. Vol. 33, no. 2. P. 201–210. DOI: 10.1016/0021-8928(69)90025-2
48. *Dyskin A.V.* Crack growth criteria incorporating non-singular stresses: size effect in apparent fracture toughness. *International Journal of Fracture.* 1997. Vol. 83. P. 191–206. DOI: 10.1023/A:1007304015524
49. *Matvienko Y.G.* Local fracture criterion to describe failure assessment diagrams for a body with a crack/notch. *International Journal of Fracture.* 2003. Vol. 124. P. 107–112. DOI: 10.1023/B:FRAC.0000018229.08344.96
50. *Matvienko Y.G., Semenova M.M.* The concept of the average stress in the fracture process zone for the search of the crack path. *Frattura ed Integrità Strutturale.* 2015. Vol. 9, no. 34. P. 255–260. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.34.27
51. *Hussain M.A., Pu S.L., Underwood J.* Strain Energy Release Rate for a Crack Under Combined Mode I and Mode II. *Fracture Analysis.* ASTM STP 560. 1974. P. 2–28. DOI: 10.1520/STP33130S
52. *Nuismer R.J.* An energy release rate criterion for mixed mode fracture. *International Journal of Fracture.* 1975. Vol. 11. P. 245–250. DOI: 10.1007/BF00038891
53. *Hou C., Jin X., Fan X., Xu R., Wang Z.* A generalized maximum energy release rate criterion for mixed mode fracture analysis of brittle and quasi-brittle materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* 2019. Vol. 100. P. 78–85. DOI: 10.1016/j.tafmec.2018.12.015