

Научная статья

## Аппроксиматоры для ускоренного вычисления параметров напряженного состояния в нестандартных образцах с трещинами

К.П. Уфимцев<sup>1,2</sup>, Д.А. Кузнецов<sup>1</sup>, А.В. Шутов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт гидродинамики имени М.А. Лаврентьева, Новосибирск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская Федерация

Актуальная тенденция в области экспериментальной механики деформируемого твердого тела состоит в расширении номенклатуры типов опытных образцов. В настоящей статье рассматривается эксперимент по мягкому нагружению так называемого бразильского диска с двумя наклонными трещинами. Испытания образцов указанного типа предоставляют важную информацию по хрупкому и квазихрупкому разрушению в режиме смешанного нагружения (I+II моды). При практическом использовании у образцов в окрестности вершины трещины необходимо знать значения параметров напряженного состояния, таких как коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $T$ -напряжение. К сожалению, по причине сложной геометрии образцов для нахождения этих параметров не существует аналитических выражений, и они вычисляются с помощью конечно-элементного моделирования с пост-процессорной обработкой решений. Описанная процедура наталкивается на значительные алгоритмические трудности, поэтому применимость новых образцов остается ограниченной. Для упрощения вычислительных экспериментов авторами предлагается подход, основанный на аппроксимации зависимости искомых параметров напряженного состояния от аргументов задачи, а именно, от размеров образца–диска, длины трещин и угла их наклона по отношению к оси нагрузки. Аппроксимация искомых параметров строится исходя из решения линейной задачи о наименьшем среднеквадратичном отклонении. Для точной аппроксимации могут потребоваться полиномы со слагаемыми больших степеней, но наличие избыточного числа мономов приводит к стремительному увеличению количества коэффициентов в аппроксиматоре и, как следствие, к быстрому ухудшению обусловленности задачи. В итоге существенно ухудшается точность и устойчивость аппроксимации. Во избежание избыточной параметризации рассматриваются три способа построения базисов в пространстве аппроксимируемых полиномов. Точность построенных аппроксиматоров оценивается путем сравнения с данными, полученными при численном моделировании и подтвержденными экспериментом. Как показали расчеты, погрешность аппроксиматоров составляет около 1% для каждого из отыскиваемых параметров напряженного состояния. Полученные аппроксиматоры доступны в виде скрипта для MATLAB, открытого для свободного доступа через облачную платформу GitHub.

**Ключевые слова:** хрупкое и квазихрупкое разрушение, разрушение в смешанном режиме,  $T$ -напряжения, коэффициенты интенсивности напряжений, модифицированный бразильский тест, быстрые вычисления

Получение: 14.03.2024 / Публикация онлайн: 15.10.2024

УДК 519.6, 539.42

### 1. Введение

В области экспериментальной механики разрушения наблюдается стабильный рост номенклатуры типов образцов с трещиновидными дефектами. Широкое распространение получили образцы в форме прямоугольных балок [1–5], дисков круглой и полукруглой формы [6–9], а также с применением других геометрических форм [10–13]. Расширение номенклатуры образцов способствует повышению информационного содержания экспериментальной программы, позволяет исследовать сценарии разрушения, приближенные к реализующимся в промышленных приложениях, а также более подробно анализировать необратимые процессы в зоне предразрушения. В последние годы предложены новые образцы нестандартной формы, например, бразильский диск с наклонными трещинами [14–16]. При анализе результатов испытаний на хрупкое и квазихрупкое разрушение, а также при аналитических построениях интерес представляют параметры напряженного состояния, такие как коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$ , а также  $T$ -напряжения. Эти параметры зависят от аргументов, описывающих геометрию образца и интенсивность нагружения. В бразильском диске к таким аргументам относятся его размеры, длина трещин и угол наклона трещин по отношению к оси нагружения. Трудность в опытах с новыми нестандартными образцами состоит в том, что зависимость параметров напряженного состояния от аргументов не табулирована, а простые формулы для ее вычисления отсутствуют. В настоящем исследовании предлагается методика построения алгоритма (аппроксиматора) для ускоренного нахождения параметров напряженного состояния на основе серии предварительно проведенных конечно-элементных (КЭ) вычислений. Представляемая методика является универсальной и может быть использована для образцов различных форм. Образец типа «бразильский диск с наклонными трещинами» применяется для демонстрации методики.

Идея методики состоит в том, что с помощью прямого КЭ моделирования предварительно вычисляются интересные параметры для некоторого числа точек в пространстве аргументов. Соответствующие точки

в пространстве аргументов — это точки коллокации. Далее, методом наименьших квадратов определяются полиномиальные функции аргументов, аппроксимирующие искомые параметры. Так как параметры напряженного состояния являются гладкими функциями аргументов, то при наращивании количества коэффициентов в интерполирующих функциях можно добиться любой заранее заданной точности аппроксимации. Однако на практике неограниченное увеличение числа мономов в интерполяционных полиномах вызывает ухудшение обусловленности задачи. В свою очередь это приводит к потере точности аппроксимации и утрате устойчивости к ошибкам предварительных расчетов. Поэтому в настоящей работе значительное внимание уделено методике, которая позволяет избежать излишней параметризации аппроксимирующей функции.

## 2. Геометрия образца и КЭ моделирование

На рисунке 1 показаны геометрия и схема нагружения образца при испытаниях на разрушение в условиях смешанного нагружения (I+II моды). Образец представляет собой бразильский диск с двумя внутренними радиальными трещинами. На рисунке приняты следующие обозначения:  $F$  — приложенная сила,  $R_1$  — радиус бразильского диска,  $R_2$  — радиус отверстия,  $t$  — толщина диска. Краевые трещины длиной  $a$  наклонены по отношению к направлению вертикальной сжимающей нагрузки на угол  $\beta$ . Изменяя угол ориентации трещин, можно получить различные комбинации режимов разрушения I и II.

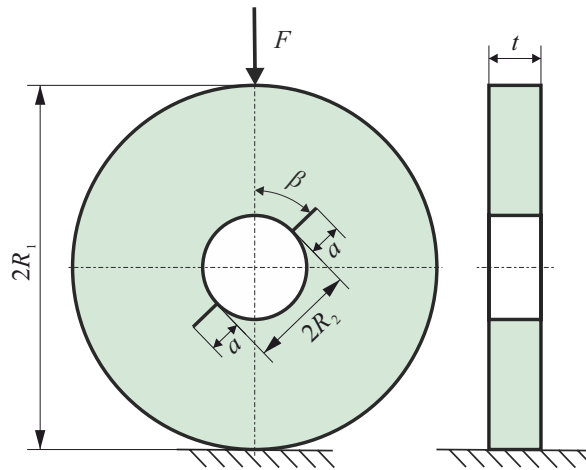


Рис. 1. Геометрия и схема нагружения образца

Для смешанного режима нагружения (I+II) компоненты напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном упругом материале, когда учитываются только два члена разложения в ряды Вильямса, могут быть представлены в виде [17]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + T + O(r^{1/2}), \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(r^{1/2}), \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + O(r^{1/2}),\end{aligned}\quad (1)$$

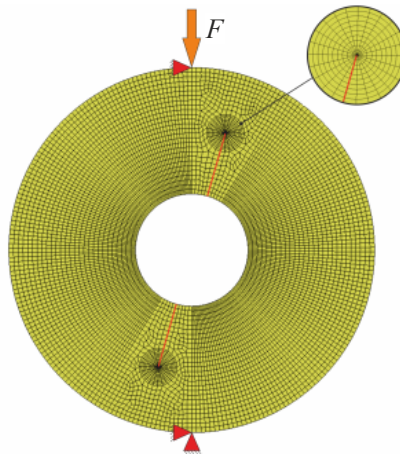
где  $K_I$ ,  $K_{II}$  — коэффициенты интенсивности напряжений,  $T$  — так называемое  $T$ -напряжение,  $r$  — текущее расстояние от вершины трещины,  $\theta$  — полярный угол (направление  $\theta = 0$  соответствует продолжению трещины). В настоящее время хорошо известно, что  $T$ -напряжение, как и  $K_I$ ,  $K_{II}$ , играет существенную роль при смешанном нагружении [16]. Оно отражает степень стеснения материала перед фронтом трещины, действует в плоскости трещины в направлении ее возможного распространения и может быть как растягивающим, так и сжимающим.

Вводя интенсивность нагрузки  $\sigma = F/(\pi ht)$ , где  $h = R_1 - R_2$ , можно записать выражения для коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I$ ,  $K_{II}$  и для  $T$ -напряжения в виде:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} Y_I \left( \frac{a}{h}, \frac{R_2}{R_1}, \beta \right), \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} Y_{II} \left( \frac{a}{h}, \frac{R_2}{R_1}, \beta \right), \quad T = \sigma T_* \left( \frac{a}{h}, \frac{R_2}{R_1}, \beta \right), \quad (2)$$

где  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  — безразмерные коэффициенты интенсивности напряжений, а  $T_*$  — безразмерное  $T$ -напряжение. Указанные величины зависят от относительной длины трещины  $a/h$ , относительного радиуса  $R_2/R_1$  и угла ориентации трещины  $\beta$ .

Таким образом, для исследования разрушения образца при смешанном нагружении необходимо получить три геометрических параметра напряженного состояния ( $Y_I$ ,  $Y_{II}$ ,  $T_*$ ) для различных геометрических конфигураций и условий нагружения. Для этой цели применяется КЭ программное обеспечение MSC.Marc [18]. Для каждой КЭ модели образца используется в среднем 90 000 изопараметрических 8-узловых элементов с квадратичной аппроксимацией геометрии и перемещений. На рисунке 2 представлена типичная КЭ модель бразильского диска с двумя трещинами. С целью повышения точности результатов область у вершины каждой трещины дискретизируется при помощи элементов сингулярного типа. Сингулярный элемент конструируется путем сдвига промежуточного узла на четверть длины ребра элемента к вершине трещины. Длина кромки элемента у вершины трещины равняется 0.025 мм, что составляет порядка  $1/500 \div 1/200$  длины трещины. Материал моделей принят линейно-упругим изотропным со следующими механическими свойствами: модуль Юнга  $E = 2.9$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.35$ .



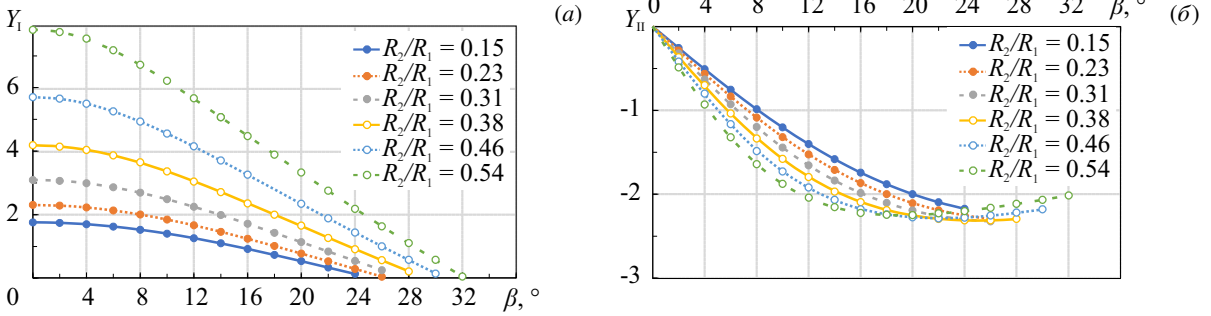
**Рис. 2.** Характерная КЭ модель бразильского диска (треугольниками со штриховкой показаны ограничения ее перемещений); на выноске область вершины трещины в увеличенном масштабе

Коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I$  и  $K_{II}$  вычисляются с помощью инвариантного  $J$ -интеграла, который для случая плоской деформации связан с ними соотношением:  $JE' = K_I^2 + K_{II}^2$ , где  $E' = E/(1-\nu^2)$ . В процедуре численного интегрирования контурный  $J$ -интеграл преобразуется в интеграл по площади, интегрирование ведется по кольцу элементов, окружающих вершину трещины. Механические напряжения вычисляются внутри элементов в точках гауссовых квадратур. В расчетах применяются четыре контура интегрирования, результаты для третьего и четвертого контуров отличаются незначительно. Разделение  $J$ -интеграла на I и II моды в КЭ коде MSC.Marc базируется на методе Ши–Асаро [19].

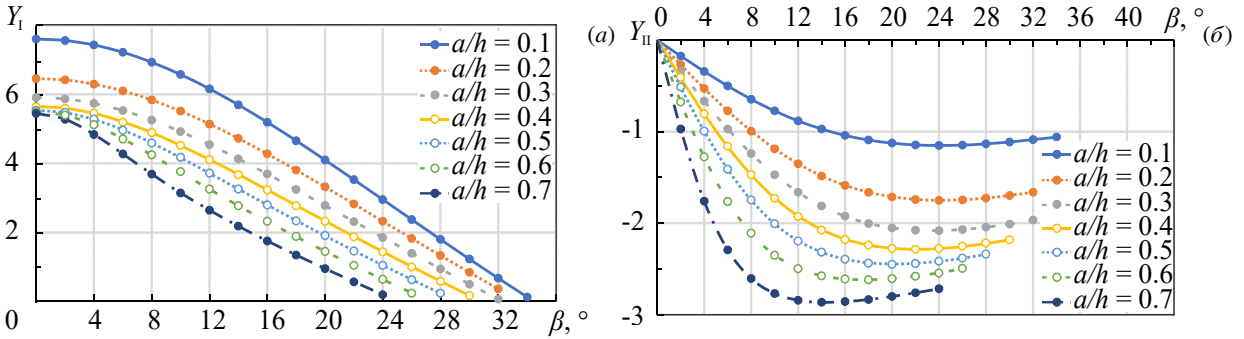
Для определения влияния геометрии образца на его напряженное состояние и получения всего спектра смещения I-го и II-го режимов проанализировано 615 КЭ моделей. Результаты расчетов приведены на рисунках 3 и 4, где представлены расчетные зависимости  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  от угла  $\beta$  для различных геометрических конфигураций модели. Видно, что параметр  $Y_I$  уменьшается с увеличением угла ориентации трещины. Чистый режим I имеет место, когда  $\beta = 0^\circ$ . Безразмерный параметр  $Y_{II}$  сначала растет вслед за углом  $\beta$ , а затем несколько уменьшается. На рисунке 3а можно заметить, что с увеличением внутреннего радиуса  $R_2$  модели при фиксированном отношении  $a/h = 0.4$  происходит значительный рост геометрического параметра  $Y_I$ , что свидетельствует об усилении влияния режима I на напряженное состояние в вершине трещины. Необходимо отметить, что чем больше  $R_2$ , тем больше и угол  $\beta$ , при котором достигается чистый режим II.

На рисунке 4б видно увеличение влияния поперечного сдвига на напряженное состояние в вершине трещины с ростом ее длины при фиксированном внутреннем радиусе модели. При этом наблюдается уменьшение значения угла ориентации трещины, при котором имеет место чистый режим II ( $Y_I = 0$ , Рис. 4а).

Из анализа рисунков 3а и 4а следует вывод, что безразмерный параметр  $Y_I$  становится равным нулю при достаточно большом угле наклона трещины  $\beta$ , что позволяет использовать этот тип образца для проведения серии испытаний на разрушение для всего диапазона смешивания мод I и II.



**Рис. 3.** Зависимости  $Y_I(\beta)$  (а),  $Y_{II}(\beta)$  (б) при постоянной относительной длине трещин  $a/h = 0.4$  и разном относительном радиусе  $R_2/R_1$



**Рис. 4.** Зависимости  $Y_I(\beta)$  (а),  $Y_{II}(\beta)$  (б) при постоянном относительном радиусе  $R_2/R_1 = 0.46$  и разной относительной длине трещин  $a/h$

Таким образом, для различных возможных комбинаций геометрии образца угол  $\beta$  принимает разные максимальные значения, что говорит о достижении чистого II-го режима нагружения, при котором  $Y_I = 0$ . Дальнейшее увеличение угла  $\beta$  нецелесообразно, поскольку значения параметра  $Y_I$  становятся отрицательными.

Воспользовавшись формулами (1), можно получить следующие выражения для  $T$ -напряжения:

$$\theta = \pm\pi: T = \sigma_x; \quad \theta = 0: T = \sigma_x - \sigma_y, \quad (3)$$

то есть его можно определить по компонентам напряжений на берегах трещины ( $\theta = \pm\pi$ ) или на продолжении трещины ( $\theta = 0$ ). Однако применение формул (3) для вычисления  $T$ -напряжения имеет недостаток, а именно: компоненты тензора напряжений рассчитываются внутри элементов, а их значения в узлах находятся путем экстраполяции, что приводит к дополнительной погрешности.

Перед вычислением  $T$ -напряжения по смещениям заметим, что берега трещины свободны от нагрузок, следовательно, закон Гука для малых деформаций дает:

$$\sigma_x = E' \varepsilon_x = E' \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_x$  и  $u_x$  — параллельные трещине деформация и перемещение. На берегах трещины, где  $\theta = \pm\pi$ , из (3) и (4) находим:

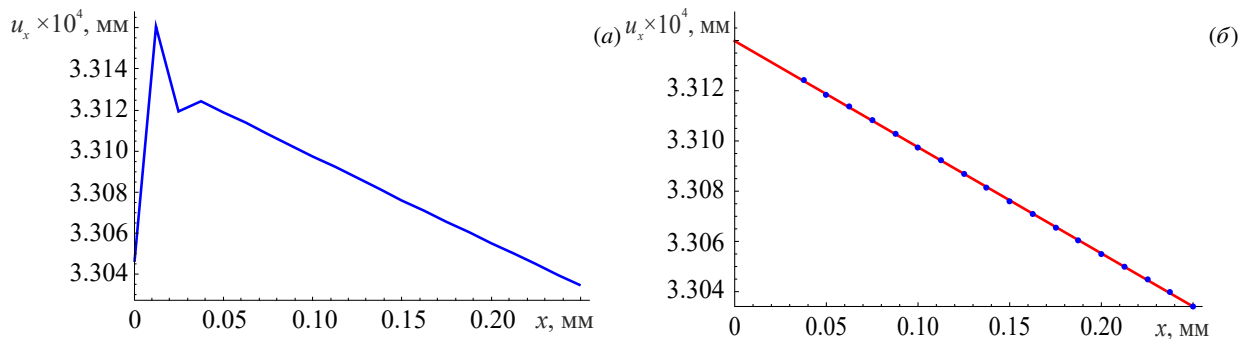
$$T = E' \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (5)$$

Учитывая, что  $T$  — константа, и заменяя производную  $\partial u_x / \partial x$  разностным отношением  $(u_x(x) - u_x(0))/x$ , перепишем (5) в виде:

$$T = E' \frac{u_x(x) - u_x(0)}{x}, \quad (6)$$

где величина  $u_x(0)$  соответствует перемещению  $u_x$  в вершине трещины.

В случае смешанного нагружения в любом радиальном направлении от вершины трещины в (1) существует сингулярное слагаемое вследствие наличия I-й либо II-й моды, либо обеих. Поэтому сингулярный член в  $\sigma_x$



**Рис. 5.** Типичное распределение смещений на берегах трещины (а) и их аппроксимация методом наименьших квадратов (б)

никогда не исчезнет и вышеописанный метод будет непригоден. Однако  $T$ -напряжение может быть вычислено, если использовать свойство симметрии I-й моды и антисимметрии II-й моды при нахождении напряжений напрямую, без вычисления коэффициентов интенсивности напряжений. Таким образом, при добавлении напряжений одной половины образца с трещиной к напряжениям в другой половине напряжения II-й моды исчезают, а напряжения I-й моды удваиваются. Следовательно, как и в режиме нагружения I,  $T$ -напряжение может быть определено по любому направлению из вершины трещины непосредственно по результатам КЭ анализа. Наиболее удобным направлением является  $\theta = \pm\pi$ , поскольку остается только одна компонента тензора напряжений:

$$T = \frac{1}{2} [(\sigma_x)_{\theta=-\pi} + (\sigma_x)_{\theta=\pi}]. \quad (7)$$

Исходя из выражений (5), (6), можно записать (7) в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2x} E' [u_x(x, -\pi) + u_x(x, +\pi) - 2u_x(0)]. \quad (8)$$

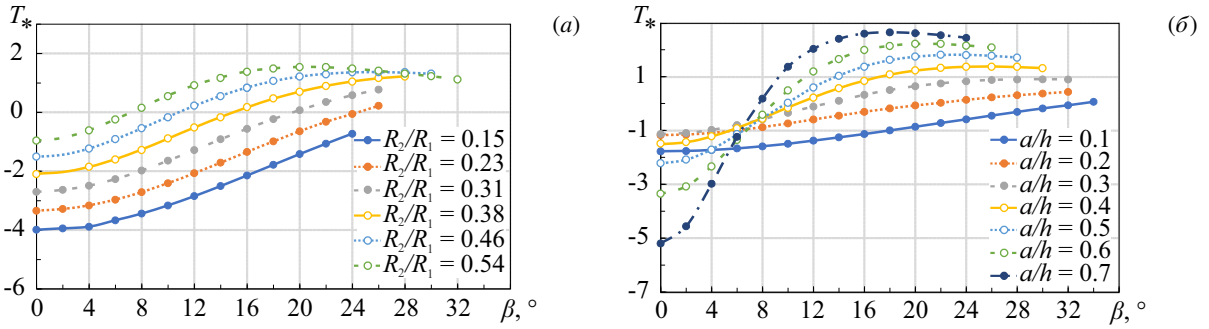
На рисунке 5а представлено типичное распределение смещений в малой окрестности вершины трещины на одном из ее берегов; по оси абсцисс отложено расстояние от вершины трещины. Как видно из представленного графика, в ближайшем к вершине элементе наблюдаются сильные осцилляции решения. Поэтому отбрасываем три узла слева, оставляя только те смещения, которые «хорошо» ложатся на прямую линию; ее уравнение находим методом наименьших квадратов. На рисунке 5б показана аппроксимирующая прямая, темные кружки — значения смещений в узлах КЭ сетки. Тангенс угла наклона аппроксимирующей прямой к оси абсцисс — это и есть разностное отношение в (6).

Результаты расчетов приведены на рисунке 6 в виде графиков зависимости  $T_*$  от угла ориентации трещины  $\beta$  для различных значений  $R_2/R_1$  и  $a/h$ . Как видно из рисунка 6а, при малых радиусах отверстия диска знак  $T$ -напряжения не меняется и является отрицательным. С увеличением внутреннего радиуса  $T$ -напряжения переходят в положительную область при меньших значениях угла ориентации трещины, приближаются к чистому режиму II и всегда имеют положительный знак. Из рисунка 6б легко увидеть, что с ростом величины отношения  $a/h$  при фиксированном значении  $R_2/R_1 = 0.46$  также наблюдается уменьшение угла ориентации трещины, при котором  $T$ -напряжения становятся положительными. Большее значение безразмерного параметра  $T_*$  в образце указывает, что  $T$ -напряжение в условиях смешанного разрушения начинает играть более важную роль. Следовательно, величина и знак  $T$ -напряжения могут оказывать существенное влияние на сопротивление разрушению хрупких или квазихрупких материалов в смешанном режиме (I+II).

### 3. Построение аппроксиматора

#### 3.1. Общий вид аппроксиматора

Задача поиска параметров сводится к задаче с фиксированным внешним радиусом диска ( $R_1 = D_1/2$ ). Таким образом, безразмерные параметры напряженного состояния  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  и  $T_*$  зависят только от трех физических аргументов: внутреннего диаметра  $D_2 = 2R_2$ , относительной длины трещины  $a/h$  и угла  $\beta$ , определяющего положение трещины относительно вертикали.



**Рис. 6.** Зависимости  $T_*(\beta)$ : относительная длина трещины постоянна ( $a/h=0.4$ ), а значения  $R_2/R_1$  изменяются (а); зафиксирован относительный радиус ( $R_2/R_1=0.46$ ), а величина  $a/h$  переменна (б)

Для улучшения обусловленности аппроксимации, а точнее для снижения числа обусловленности возникающих матриц, координаты вектора аргументов должны принимать значения на отрезке  $[-1, 1]$ . Этого можно добиться с помощью аффинного преобразования вида:

$$p_i = \frac{2p_i^* - p_{i\min}^* - p_{i\max}^*}{p_{i\max}^* - p_{i\min}^*} \quad (i=1,2,3), \tag{9}$$

где  $p_1^* = D_2, p_2^* = a/h, p_3^* = \beta$  — физические аргументы, а  $p_{i\min}^*$  и  $p_{i\max}^*$  — нижняя и верхняя границы интервала, в котором изменяется физический аргумент  $p_i^*$ . Таким образом,  $p_1, p_2, p_3$  — безразмерные аналоги физических аргументов  $D_2, a/h$  и  $\beta$ . Для краткости записи введем вектор  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ . Поскольку задачи аппроксимации искомых параметров  $Y_I, Y_{II}, T_*$  подобны друг другу, то далее, без ограничения общности, будем рассматривать аппроксимацию произвольной функции  $f \in \{Y_I, Y_{II}, T_*\}$ .

Существует множество постановок задачи построения аппроксиматора функции  $f$  в случае, когда известно значение функции в наборе точек. В представленной работе минимизируем усредненное отклонение аппроксиматора от функции  $f$  для некоторого набора точек (точек коллокации). Пусть  $\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3)$  — трехмерный мультииндекс. Тогда моном  $p_1^{I_1} \cdot p_2^{I_2} \cdot p_3^{I_3}$  может быть представлен в короткой записи как  $\mathbf{p}^{\mathbf{I}}$ . Пусть  $J$  — некоторое множество мультииндексов. В качестве аппроксиматора функции  $f$  применяем одно из простейших приближений произвольной достаточно гладкой функции — полином от трех переменных. Таким образом, ищем аппроксиматор функции  $f$  в виде:

$$f(\mathbf{p}) \approx \sum_{\mathbf{I} \in J} c_{\mathbf{I}} \mathbf{p}^{\mathbf{I}}. \tag{10}$$

Здесь  $c_{\mathbf{I}}$  — скалярные коэффициенты. Согласно (10), множество мультииндексов  $J$  задает множество базисных функций (базисных мономов), по которым раскладывается аппроксимируемая функция  $f$ . По этой причине множество мультииндексов  $J$  также будем называть множеством базисных функций. Количество элементов в  $J$  косвенно определяет точность аппроксиматора.

### 3.2. Построение аппроксиматора

Пусть множество точек в пространстве безразмерных аргументов  $\mathbf{p}$ , где известна аппроксимируемая функция, называется  $P$ . Разобьем множество  $P$  на два непересекающихся подмножества  $P_{opt}$  и  $P_{val}$ , которые представляют оптимизационную и валидационную выборки:

$$P = P_{opt} \cup P_{val}, \quad P_{opt} \cap P_{val} = \emptyset. \tag{11}$$

На множестве  $P_{opt}$  строятся аппроксиматоры, а дополнительные данные на множестве  $P_{val}$  применяются для последующей валидации. Валидация при новых данных требуется для контроля избыточной параметризации аппроксиматора (10).

Скалярные коэффициенты  $c_{\mathbf{I}}$ , фигурирующие в аппроксимации (10), являются решением следующей задачи минимизации:

$$\{c_{\mathbf{I}}\}_{\mathbf{I} \in J} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{p} \in P_{opt}} \sum_{\mathbf{I} \in J} \left( \sum_{\mathbf{I} \in J} c_{\mathbf{I}} \mathbf{p}^{\mathbf{I}} - f(\mathbf{p}) \right)^2. \tag{12}$$

То есть ищем полином вида (10), ближайший, в смысле формулы (12), к аппроксимируемой функции  $f$  на множестве точек  $P_{opt}$ . В рамках точной (без каких-либо ошибок округления) арифметики, если мощность множества точек коллокации (множества точек  $P_{opt}$ , где известно значение аппроксимируемой функции) превосходит число мономов в (10) (то есть число элементов во множестве мультииндексов  $J$ ), то существует ровно одно точное решение задачи (12).

Задачу (12) можно переписать в компактном матричном виде как

$$\mathbf{c} = \operatorname{argmin} \|\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{z}\|^2. \quad (13)$$

Здесь  $\mathbf{c}$  — вектор искомых коэффициентов  $\{c_{\mathbf{I}}\}_{\mathbf{I} \in J}$ ;  $\mathbf{z}$  — вектор известных значений аппроксимируемой функции  $\{f(\mathbf{p})\}_{\mathbf{p} \in P_{opt}}$ ;  $\mathbf{A}$  — прямоугольная матрица, строки которой содержат значения базисных мономов  $\mathbf{p}^{\mathbf{I}}$  в точках коллокации  $\mathbf{p} \in P_{opt}$ . Таким образом, каждая координата вектора  $\mathbf{A}\mathbf{c} - \mathbf{z}$  соответствует невязке в некоторой точке коллокации  $\mathbf{p} \in P_{opt}$ .

Задачу (13) можно решать с помощью прямых методов. Для этого применяем QRP-алгоритм, представляющий собой QR-разложение с перестановками по столбцам [20]. Выбор в пользу этого подхода сделан потому, что он позволяет работать с плохо обусловленными матрицами лучше, чем стандартный QR-алгоритм, предназначенный для отыскания всех собственных чисел и собственных векторов матрицы. Оба алгоритма дают точное решение при вычислениях в рамках абсолютно точной арифметики, однако на практике точность и устойчивость расчетов снижаются при ухудшении обусловленности задачи.

### 3.3. Определение оптимального набора базисных функций

Построение аппроксиматора функции часто сопровождается проблемой избыточной параметризации. Она проявляется следующим образом: при увеличении количества коэффициентов аппроксимирующей функции в (10) невязка решения оптимизационной задачи (12) убывает, но начиная с некоторого момента точность аппроксимации на валидационной выборке ухудшается. Поэтому для получения наиболее точного аппроксиматора во всей интересующей подобласти определения функции  $f$  требуется найти такой набор базисных функций  $J$ , который дает максимальную точность приближения в целом. Как уже описано выше, имеем два непересекающихся множества точек коллокации:  $P_{opt}$  и  $P_{val}$ , в каждом из которых известны значения функции  $f$ .

Пусть  $J_{max}$  — множество мультииндексов для всех базисных функций, отвечающее всем полиномам вплоть до  $N$ -й степени, то есть  $J_{max} = \{0, 1, 2, \dots, N\}^3$ . Это множество содержит  $(N+1)^3$  элементов. Этапы построения набора  $J$  следующие:

1. По специальной стратегии строим последовательность множеств базисных функций  $J$  и соответствующую последовательность аппроксиматоров типа (10). Для отыскания коэффициентов аппроксиматоров используем только точки из оптимизационной выборки  $P_{opt}$  и известные значения функции  $f$  в них (то есть для каждого  $J$  решаем задачу (12)).

2. Для каждого аппроксиматора из полученной последовательности находим его погрешность на валидационном множестве  $P_{val}$ .

3. Выбираем базис  $J$ , дающий искомую точность приближения аппроксимируемой функции на множестве  $P_{val}$ . Если такую точность на множестве  $P_{val}$  выдают сразу несколько базисов  $J$ , то выбираем из них базис с наименьшим количеством элементов.

Для конкретизации алгоритма, уточним способ построения последовательности множеств базисных функций  $J$ . А именно, рассмотрим три подхода к нахождению последовательности множеств  $J$ .

#### Расширение множества базисных функций:

1. Начинаем с пустого множества:  $J = \emptyset$ .
2. Последовательно перебираем все элементы  $g$  из  $J_{max} \setminus J$  и находим такой, что невязка решения задачи (12) с набором базисных функций  $J \cup \{g\}$  минимальна.
3. Добавляем элемент  $g$  во множество  $J$ .
4. Если  $J_{max} \setminus J$  непустое множество, то переходим к пункту 2.

При таком подходе на каждой итерации увеличиваем мощность множества  $J_{max} \setminus J$  на единицу, то есть максимальное число итераций составляет  $(N+1)^3$ .

#### Сужение множества используемых базисных функций:

1. Начинаем с полного набора всех базисных функций:  $J = J_{max}$ .
2. Перебираем все элементы  $g$  из  $J$  и находим такой  $g$ , что невязка решения задачи (12) с набором базисных

функций  $J \setminus g$  минимальна, то есть ищем такой элемент в  $J$ , удаление которого меньше всего скажется на точности аппроксимации на выборке  $P_{opt}$ .

3. Удаляем из множества  $J$  элемент  $g$ .

4. Если  $J$  непустое множество, то переходим к пункту 2.

При этом подходе потребуется ровно  $(N+1)^3$  итераций, чтобы во множестве  $J$  не осталось элементов.

Третий подход представляет собой комбинацию двух описанных выше.

Комбинированный подход:

1. Начинаем с пустого множества:  $J = \emptyset$ .

2. Совершаем  $L$  итераций первого алгоритма, тем самым увеличиваем множество  $J$  на  $L$  элементов. После этого удаляем из множества  $J$  один элемент по второй стратегии.

3. Переходим к пункту 2.

Алгоритм выполняется до тех пор, пока множество  $J$  не сравняется по числу элементов с  $J_{max}$ .

## 4. Тестирование

### 4.1. Условия вычислительного эксперимента

Рассмотрим аппроксимацию параметров  $Y_I, Y_{II}, T_*$  как функций от физических аргументов  $D_2, a/h, \beta$  при фиксированном внешнем диаметре  $D_1$ , равном 39 мм. В пространстве  $\mathbb{R}^3$  зададим параллелепипед, в котором будем строить аппроксимацию параметров напряженного состояния:  $D_2 \in [6; 21]$  мм,  $a/h \in [0.1; 0.7]$ ,  $\beta \in [0; 34]^\circ$ .

При интерпретации тестов по разрушению важны результаты только в тех точках пространства аргументов, где  $Y_I \geq 0$ , поэтому имеем дело не с полноценным, а с усеченным параллелепипедом в  $\mathbb{R}^3$ . Далее, выбираем равномерно по 10 значений в области определения каждого из аргументов в выбранной подобласти. Получаем 1000 точек коллокации во всем параллелепипеде и 615 в усеченном. При этом, вследствие дискретности разбиения, в некоторых точках  $Y_I < 0$ , но лишь в тех из них, которые лежат близко к поверхности усечения. Три четверти всей выборки используем в качестве оптимизационной выборки  $P_{opt}$ , равномерно распределенной во всем облаке точек коллокации. Из оставшихся точек создаем валидационную выборку  $P_{val}$ . Прочие параметры аппроксиматора задаем следующими:

1. максимальная степень аппроксимирующего полинома  $N = 6$ ;
2. параметр смешанной стратегии построения базиса  $L = 9$ .

### 4.2. Результаты вычислительного эксперимента

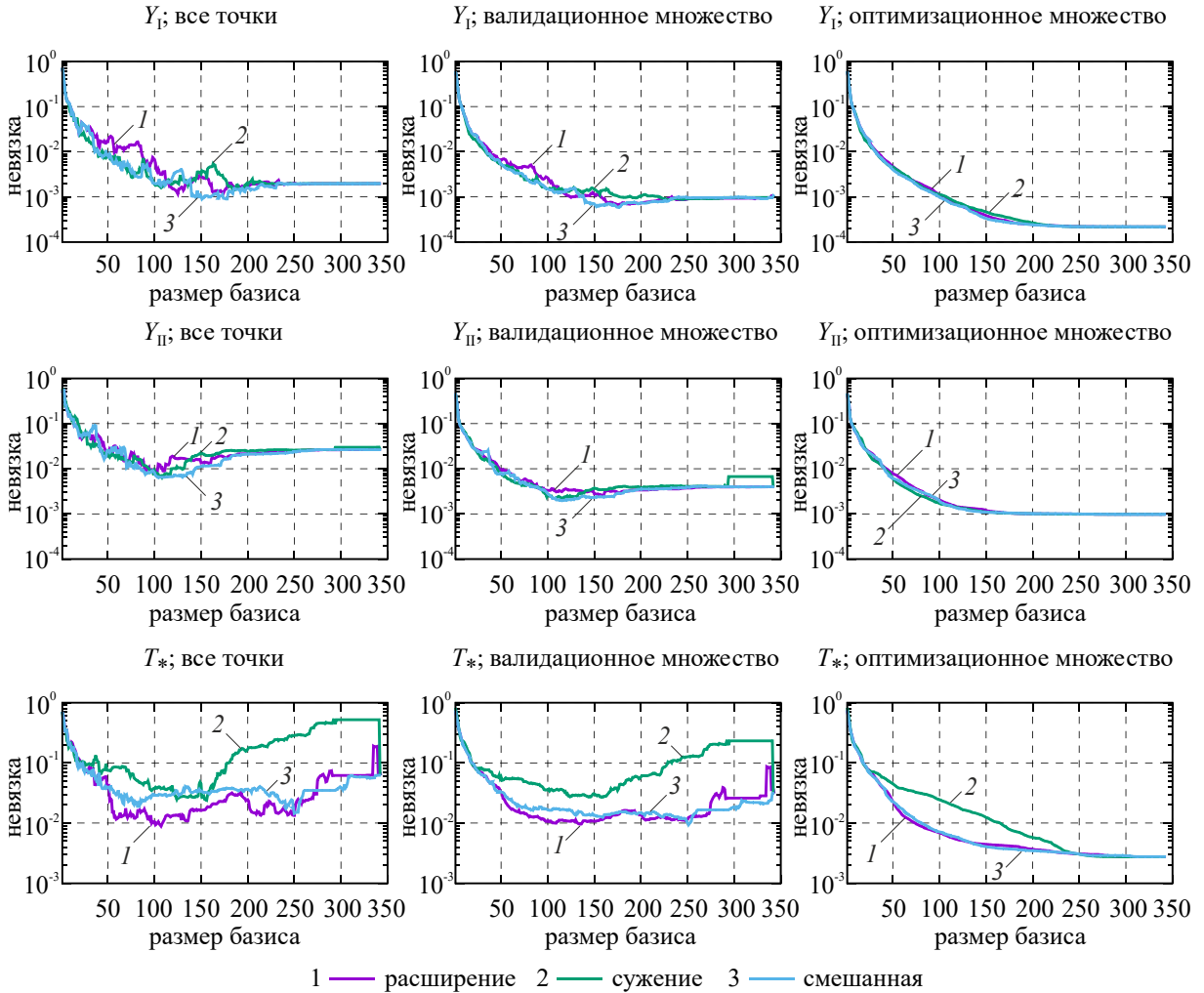
Для всех подходов построения множества  $J$  результаты расчетов представлены на рисунке 7. При этом на графиках по горизонтали откладывается число элементов во множестве  $J$  (то есть количество базисных функций, участвующих в аппроксимации), а по вертикали — относительная погрешность работы аппроксиматора (10). Оценка погрешности на всем множестве точек коллокации с применением  $l_\infty$ -нормы представлена на рисунке 7 слева. Зависимость погрешности только на валидационной выборке  $P_{val}$  по  $l_\infty$ -норме содержит центральный столбец рисунка 7, погрешность на оптимизационной выборке  $P_{opt}$  по  $l_2$ -норме — столбец справа. Напомним, что для произвольного вектора  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  его  $l_2$  и  $l_\infty$ -нормы определяются, соответственно, как

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Как и следовало ожидать, при увеличении числа элементов в  $J$  погрешность по  $l_2$ -норме на оптимизационной выборке монотонно уменьшается до некоторого предельного значения (см. Рис. 7, справа). При работе с  $l_\infty$ -нормой также наблюдается общая тенденция к снижению погрешности работы аппроксиматора, хотя зависимость погрешности от количества базисных функций и не является строго монотонной (см. Рис. 7, слева и по центру). Однако при большом числе элементов в  $J$  наблюдается рост погрешности на валидационной выборке по  $l_\infty$ -норме. Указанный рост происходит по причине избыточной параметризации аппроксиматора (10). Примечательно, что при аппроксимации функции  $T_*$  из всех стратегий поиска интерполяционного базиса  $J$  хуже всего показывает себя стратегия с уменьшением базиса, а две другие дают близкие результаты.

С точки зрения вычислительных затрат, рассмотренные стратегии поиска базиса проявляют себя следующим образом. Так, сужение множества  $J$  оказывается медленнее подхода с расширением, поскольку при сужении





**Рис. 7.** Точность определения параметров  $Y_I$ ,  $Y_{II}$  и  $T_*$  на всей выборке  $P_{opt} \cup P_{val}$  (левый столбец), на валидационной выборке  $P_{val}$  (центральный столбец) и на оптимизационной выборке  $P_{opt}$  (правый столбец) для трех стратегий построения базиса  $J$ ; по горизонтальным осям отложено число базисных функций в наборе  $J$ , по вертикальным – норма невязки, деленная на норму точных значений аппроксимируемой функции; в левом и центральном столбцах используется  $l_\infty$ -норма, в правом столбце –  $l_2$ -норма

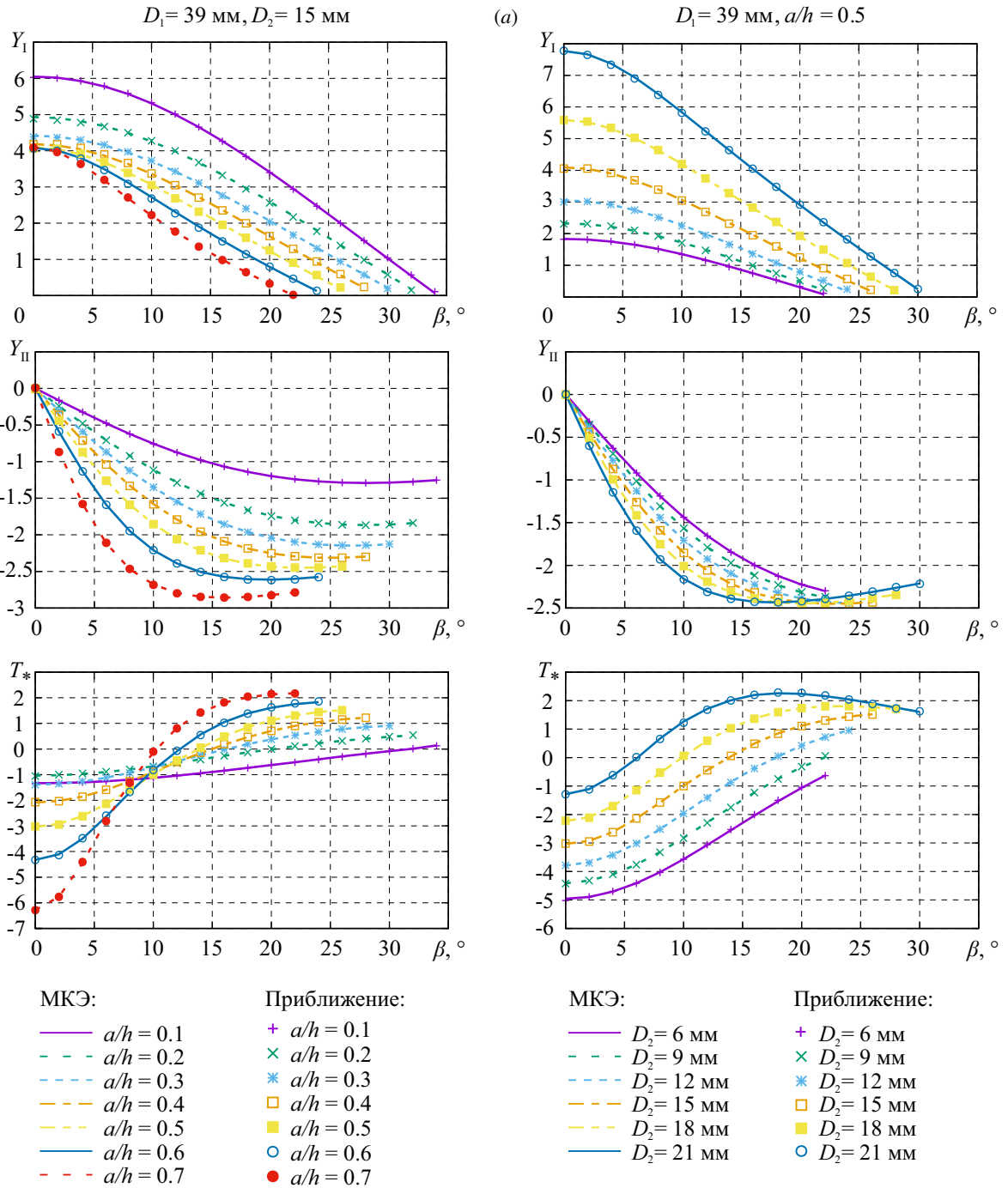
необходимо многократно решать задачу наименьших квадратов с более крупным базисом. В свою очередь комбинированный подход требует больше чем  $(N+1)^3$  итераций, но на практике его время счета лишь немного продолжительнее расчетного времени в подходе расширения базиса.

Анализ погрешностей аппроксимации (Рис. 7) показал, что приемлемой точности в 1% можно добиться с применением 40 базисных функций для аппроксимации  $Y_I$  и 100 базисных функций для  $Y_{II}$  и  $T_*$ . Использование большего количества базисных функций нецелесообразно по причине достижения желаемой точности на оптимизационной выборке  $P_{opt}$  или падения точности на валидационной выборке  $P_{val}$ .

В качестве иллюстрации точности построенного аппроксиматора на рисунке 8 для сравнения представлены предварительно рассчитанные с помощью МКЭ параметры  $Y_I$ ,  $Y_{II}$ ,  $T_*$  и их аппроксиматоры. Во всех случаях аппроксиматоры получены по стратегии расширения базиса. Для функции  $Y_I$  используется аппроксиматор из 40 базисных функций, для прочих параметров — из 100 базисных функций. Как видно из рисунка 8, аппроксиматор позволяет вычислить параметры  $Y_I$ ,  $Y_{II}$ ,  $T_*$  с достаточно высокой точностью.

## 5. Обсуждение и заключение

В представленной работе рассмотрена задача определения параметров напряженного состояния в окрестности



**Рис. 8.** К сравнению результатов пост-процессорной обработки КЭ решения задачи сланными, полученными путем их аппроксимации по формуле (10), для диска с внешним диаметром  $D_1 = 39 \text{ мм}$ : при зафиксированном внутреннем диаметре ( $D_2 = 15 \text{ мм}$ ) и разной относительной длине трещины ( $a$ ); при зафиксированной относительной длине трещины ( $a/h = 0.5$ ) и переменном диаметре внутреннего отверстия  $D_2$  (б)

вершины трещины в бразильском диске с наклонными трещинами при двустороннем сжатии диска. Сложность задачи состоит в том, что искомые параметры  $Y_I, Y_{II}, T_*$  являются функциями трех аргументов, а сами функции вычисляются по алгоритмически сложной процедуре, требующей трудоемкой подготовки и пост-процессорной обработки найденного КЭ-решения.

Для устранения проблем в работе применен альтернативный подход ускоренного вычисления параметров  $Y_I$ ,  $Y_{II}$ ,  $T_*$ . На начальном этапе искомые параметры отыскиваются с помощью численного моделирования на некотором конечном множестве точек коллокации в пространстве аргументов. Далее, на основе полученных решений строится аппроксиматор. Рассмотрены три подхода к построению аппроксимационных базисов и сделан выбор оптимального из них. Разработанные подходы позволяют находить базис, при котором точность аппроксимации наилучшая при соблюдении ограничений на размер базиса.

Построенные аппроксиматоры для каждого из параметров представлены в виде MATLAB скрипта, расположенного в облачном хранилище GitHub по адресу <https://github.com/bE554357/2024-approx-of-stress-state>. Доступность быстрого аппроксиматора представляет ценность при интерпретации результатов лабораторных экспериментов на хрупкое и квазихрупкое разрушение. В частности, благодаря построенному аппроксиматору, работа с новым типом образца стала доступна для максимально широкого круга исследователей. Кроме того, разработанный аппроксиматор может применяться для построения инженерных теорий трещин при смешанных режимах разрушения, когда требуется аналитическая или полуаналитическая зависимость параметров  $Y_I$ ,  $Y_{II}$ ,  $T_*$  от геометрии расчетной области [21–23].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-19-00514), <https://rscf.ru/project/23-19-00514/>.

## Литература

1. *Lin Q., Bian X., Pan P.-Z., Gao Y., Lu Y.* Criterion of local symmetry visualized in small eccentric single edge notched bend (E-SENB) rock specimens // *Engineering Fracture Mechanics*. 2021. Vol. 248. 107709. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2021.107709
2. *Shahani A.R., Tabatabaei S.A.* Effect of T-stress on the fracture of a four point bend specimen // *Materials & Design*. 2009. Vol. 30, no. 7. P. 2630–2635. DOI: 10.1016/j.matdes.2008.10.031
3. *Li Y., Dong S., Pavier M.J.* Measurement of the mixed mode fracture strength of green sandstone using three-point bending specimens // *Geomech. Eng.* 2020. Vol. 20, no. 1. P. 9–18. DOI: 10.12989/gae.2020.20.1.009
4. *Wang C., Zhu Z.M., Liu H.J.* On the I–II mixed mode fracture of granite using four-point bend specimen // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2016. Vol. 39, no. 10. P. 1193–1203. DOI: 10.1111/ffe.12422
5. *Кургузов В.Д., Демешкин А.Г., Кузнецов Д.А.* Трехточечный изгиб образцов с эксцентричной краевой трещиной при смешанном нагружении // *Вычислительная механика сплошных*. 2023. Т. 16, № 3. С. 345–357. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.3.29
6. *Aliha M.R., Ayatollahi M.R.* Geometry effects on fracture behaviour of polymethyl methacrylate // *Materials Science and Engineering: A*. 2010. Vol. 527, no. 3. P. 526–530. DOI: 10.1016/j.msea.2009.08.055
7. *Aliha M.R., Ayatollahi M.R., Smith D.J., Pavier M.J.* Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading // *Engineering Fracture Mechanics*. 2010. Vol. 77, no. 11. P. 2200–2212. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.03.009
8. *Erarslan N., Williams D.J.* Mixed-Mode Fracturing of Rocks Under Static and Cyclic Loading // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2012. Vol. 46. P. 1035–1052. DOI: 10.1007/s00603-012-0303-5
9. *Ayatollahi M.R., Aliha M.R.* Mixed mode fracture analysis of polycrystalline graphite – A modified MTS criterion // *Carbon*. 2008. Vol. 46, no. 10. P. 1302–1308. DOI: 10.1016/j.carbon.2008.05.008
10. *Saghafi H., Monemian S.* A New Fracture Toughness Test Covering Mixed-Mode Conditions and Positive and Negative T-Stresses // *International Journal of Fracture*. 2010. Vol. 165, no. 1. P. 135–138. DOI: 10.1007/s10704-010-9499-0
11. *Aliha M.R.M., Hosseinpour G.R., Ayatollahi M.R.* Application of Cracked Triangular Specimen Subjected to Three-Point Bending for Investigating Fracture Behavior of Rock Materials // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2013. Vol. 46. P. 1023–1034. DOI: 10.1007/s00603-012-0325-z
12. *Li Y., Pavier M.J., Coules H.* A new specimen for mixed mode I/II fracture of brittle and quasi-brittle materials // *Procedia Structural Integrity*. 2020. Vol. 28. P. 1140–1147. DOI: 10.1016/j.prostr.2020.11.129
13. *Li Y., Pavier M.J., Coules H.* Mixed-mode brittle fracture test of polymethylmethacrylate with a new specimen // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2021. Vol. 44. P. 1027–1040. DOI: 10.1111/ffe.13411
14. *Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R., Pakzad R.* Brittle Fracture Analysis Using a Ring-Shape Specimen Containing Two Angled Cracks // *International Journal of Fracture*. 2008. Vol. 153. P. 63–68. DOI: 10.1007/s10704-008-9280-9

15. *Karimi H.R., Khedri E., Aliha M.R., Mousavi A.* A comprehensive study on ring shape specimens under compressive and tensile loadings for covering the full range of I+II fracture modes of gypsum material // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2022. Vol. 160. 105265. DOI: 10.1016/j.ijrmmms.2022.105265
16. *Kurguzov V., Kuznetsov D.* Fracture analysis of Brazilian circular hole disk under mixed mode loading // *Engineering Fracture Mechanics*. 2024. 109875. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2024.109875
17. *Williams M.L.* On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack // *Journal of Applied Mechanics*. 1957. Vol. 24. P. 109–114. DOI: 10.1115/1.4011454
18. *Williams M.L.* Volume A: Theory and User Information. Santa Ana (CA): MSC Software Corporation, 2020. 1061 p.
19. *Shih C.F., Asaro R.J.* Elastic-Plastic Analysis of Cracks on Bimaterial Interfaces: Part I—Small Scale Yielding // *Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55, no. 2. P. 299–316. DOI: 10.1115/1.3173676
20. *Golub G.H., Van Loan C.F.* Matrix computations. JHU press, 2013. 756 p.
21. *Kornev V.M., Kurguzov V.D.* Sufficient criterion of fracture in the case with a complex stress state and non-proportional deformation of the material in the pre-fracture zone // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2010. Vol. 51. P. 904–912. DOI: 10.1007/s10808-010-0112-0
22. *Kurguzov V.D., Shutov A.V.* Elasto-plastic fracture criterion for structural components with sharp V-shaped notches // *International Journal of Fracture*. 2021. Vol. 228. P. 179–197. DOI: 10.1007/s10704-021-00530-1
23. *Ключанцев В.С., Кургузов В.Д., Шутов А.В.* Уточненная инженерная теория трещин с применением двухпараметрического критерия прочности // *Физическая мезомеханика*. 2023. Т. 26, № 3. С. 72–88. DOI: 10.55652/1683-805X\_2023\_26\_3\_72

### Сведения об авторах:

*Уфимцев Кирилл Павлович*, б/с, мнс, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (ИГиЛ СО РАН), 630090, г. Новосибирск, пр-т Лаврентьева, д. 15; e-mail: kirill.ufimtzev@yandex.ru; ORCID: 0009-0004-9887-6517

*Кузнецов Денис Александрович (корр.)*, б/с, мнс, ИГиЛ СО РАН; e-mail: kuznetsova81@yandex.ru; ORCID: 0009-0008-3466-8566

*Шутов Алексей Валерьевич*, Dr. habil., гнс, ИГиЛ СО РАН; e-mail: alexey.v.shutov@gmail.com; ORCID: 0000-0002-5624-9732