

Научная статья

Энергетический анализ осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки, нагруженной периодическими сосредоточенными массами

Г.В. Филиппенко

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация

Цилиндрические периодические оболочки широко применяются при сооружении различных строительных конструкций, трубопроводов, опор морских буровых установок, ветряных электростанций и другого. Актуален вопрос повышения их износостойкости и предупреждения сопряженных с риском условий эксплуатации. В работе обсуждается один из потенциально опасных режимов, возникающий при осесимметричных колебаниях круговой цилиндрической оболочки типа Кирхгофа–Лява, обладающей дополнительной инерцией в виде периодических «массовых поясков» нулевой ширины. Оболочка предполагается бесконечной, анализируются ее свободные гармонические колебания на базе точного аналитического решения вида Флоке. Исследуется зависимость полос пропускания и запираения оболочки от массы сосредоточенных нагрузок. При определенном сочетании параметров возможно совпадение точки пересечения и квазипересечения границ этих полос. Рассматривается окрестность такой особой точки с учетом того обстоятельства, что границы полос пропускания бесконечной периодической оболочки можно получить и изучить на примере свободных колебаний ее выделенного симметричного сегмента периодичности. Это позволяет не только существенно уменьшить объем вычислений, упростить нахождение координат особой точки, но и облегчает оценку вибрационного поля, интегрального потока энергии и его компонент. При этом принятие во внимание потока энергии и его компонент не только существенно дополняет картину вибрационных полей, но и дает возможность трактовать физические эффекты в случае периодической оболочки, более адекватно оценивать характер ее колебаний. Показано, что в окрестности особой точки происходит резкая смена параметров колебаний, что может приводить к опасным режимам работы реальных конструкций.

Ключевые слова: распространение волн, цилиндрическая оболочка, колебания оболочек, поток энергии

Получение: 02.02.2024 / *Публикация онлайн:* 15.10.2024

УДК 539.3:534.1

1. Введение

Цилиндрические оболочки давно исследуются в связи с разнообразными приложениями в технике и строительстве. Это один из важнейших элементов при моделировании акустических волноводов, различных трубопроводов, опор морских буровых установок и других гидротехнических сооружений [1–5].

В работе использован вариант классической теории оболочек Кирхгофа–Лява, построенный на основе аналитической механики Лагранжа [6–9]. Эта теория, в частности, применялась в работах [10–12] для проведения расчетов статики оболочек вращения, а в работах [13, 14] для исследования волновых процессов и колебаний оболочек вращения с произвольным меридианом. На ее основе изучались оболочки с различной нагрузкой: в виде акустической жидкости в [15–17], несжимаемой жидкости в [17–19], нагрузкой типа винклеровского основания в [20–22], а также на оболочки действовали инерционные силы, порожденные массивными «поясками» [22, 23]. Среди откликов оболочечных конструкций на приложенные нагрузки особый интерес представляют осесимметричные волновые процессы [17, 21–23] ввиду их частого возникновения и удобства аналитического анализа. Такие процессы имеют место при осесимметричном возбуждении волн источником колебаний или же они становятся доминирующими за счет демпфирования других типов колебаний, например, самой оболочкой или контактирующей с ней средой.

Отдельный класс задач — это оболочки, параметры или нагружение которых периодически меняются [18, 24–35]. Такими объектами можно аппроксимировать различные магистральные трубопроводы, опоры и другие аналогичные конструкции.

Данное исследование продолжает циклы работ с периодически нагруженными оболочками на основе модели из [6], но здесь дополненной анализом компонент потока энергии в оболочках. Представлен случай периодических сосредоточенных масс в виде кольцевых «поясков» на цилиндрической оболочке и ее особые режимы свободных осесимметричных колебаний.

2. Постановка задачи

Рассмотрим свободные колебания бесконечной круговой цилиндрической оболочки типа Кирхгофа–Лява [6]. Введем цилиндрические координаты (r, φ, z) , где ось z совпадает с осью цилиндра, и локальные координаты

($\mathbf{t}, \mathbf{k}, \mathbf{n}$), где векторы \mathbf{t} , \mathbf{n} есть, соответственно, касательный и нормальный единичные векторы к поверхности оболочки, а вектор \mathbf{k} — единичный вектор, сонаправленный с осью z .

Примем следующие обозначения: $c_s = \sqrt{Eh/((1-\nu^2)\rho)}$ — скорость распространения волн деформации срединной поверхности цилиндрической оболочки; E, ν и ρ_s — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и объемная плотность материала оболочки; h — толщина оболочки; $\rho = \rho_s h$ — ее поверхностная плотность; R — радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки.

Как отмечено выше, рассматриваются осесимметричные движения оболочки, не зависящие от угла φ . В дальнейшем ограничимся анализом продольных — u_z , и изгибных — u_n , колебаний, которые в обсуждаемой задаче отделяются от вращательных колебаний u_t . Поэтому в качестве переменных, описывающих вибрационное поле системы, вектор смещений оболочки выберем в виде: $\mathbf{u} = (u_z, u_n)^T$ (T — знак операции транспонирования).

На сечениях оболочки $z = jl_0, j \in \mathbb{Z}$ расположены сосредоточенные нагрузки в виде «массовых поясков» нулевой ширины (расположение поясков вдоль оси z характеризуется функцией $\delta(z - jl_0)$). Тем самым оболочка становится периодической с ячейкой периодичности длиной l_0 . «Массовый пояс» характеризуется поверхностными плотностями μ_z, μ_n , выступающими в качестве сосредоточенных инерционных масс (каждая из масс равна соответствующей инерционной массе всего «пояска», деленной на длину окружности). Плотности предполагаются постоянными, не зависящими от координат.

В этих терминах второй закон Ньютона — баланс сил, действующих на цилиндрическую оболочку в осесимметричном случае, можно записать в виде уравнения:

$$\mathbf{L}\mathbf{u}(z,t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(z,t)}{\partial t^2} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(z - jl_0) \begin{pmatrix} \mu_z & 0 \\ 0 & \mu_n \end{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(z,t)}{\partial t^2}, \quad -\infty < z < \infty. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{L} — матричный дифференциальный оператор оболочки Кирхгофа–Лява [6]. Слева в (1) стоят упругие силы, вызванные деформациями оболочки, а справа — инерционные силы, при этом второе слагаемое есть инерционная сила, порожденная системой массовых поясков, а первое слагаемое — инерционная сила, порожденная оболочкой без этих поясков. В дальнейшем зависимость всех процессов от времени предполагаем гармонической с частотой ω , а временной фактор $\exp\{-i\omega t\}$ условимся всюду опускать. Дополнительно установим безразмерные параметры: безразмерную частоту — $w = \omega R/c_s$, и характеристику относительной толщины оболочки — $\alpha^2 = (1/12)(h/R)^2$. Введем матрицу сосредоточенных масс:

$$\mathbf{M} = \text{diag}\{M_z, M_n\}, \quad M_{z,n} = \frac{2\pi R \mu_{z,n}}{2\pi R \rho l_0}, \quad (2)$$

где безразмерные сосредоточенные массы $M_{z,n}$ равны отношению соответствующей инерционной массы «пояска» к массе ячейки периодичности оболочки без него, а также безразмерное расстояние между поясками — $l = l_0/R$. Координату z и вектор смещения \mathbf{u} сделаем безразмерными путем их нормирования на радиус оболочки R и сохраним прежние обозначения. В безразмерных терминах баланс сил, действующих на цилиндрическую оболочку в осесимметричном случае (1), приобретает вид:

$$\mathbf{L}_0 \mathbf{u}(z) + w^2 \left(\mathbf{u}(z) + l \mathbf{M} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(z - jl) \mathbf{u}(z) \right) = \mathbf{0}, \quad -\infty < z < \infty, \quad (3)$$

$$\mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} w^2 + \partial_z^2 & \nu \partial_z \\ -\nu \partial_z & w^2 - \alpha^2 (1 - 2\nu \partial_z^2 + \partial_z^4) - 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_z = R \frac{\partial}{\partial z}.$$

3. Определение общего представления для вибрационного поля и потоков энергии в оболочке

Построение решения Флоке данной задачи аналогично рассмотренному в [26] и строится методом сшивания. Возьмем, например, сегмент оболочки $-l < z < l$, состоящий из двух ячеек периодичности $-l < z < 0$ и $0 < z < l$. Решение уравнения (2) для ячейки $-l < z < 0$ ищем в виде сумм волн:

$$\mathbf{u}_0(z) = \mathbf{U}(z)\mathbf{s}, \quad (4)$$

где $\mathbf{U}(z) = \left(e^{i\lambda_1 z} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} | \dots | e^{i\lambda_6 z} \begin{pmatrix} \xi_6 \\ \gamma_6 \end{pmatrix} \right)$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_6)^T$. Здесь $\lambda_j = \lambda_j(w), j = \overline{1,6}$ — волновые числа (обезразмеренные на радиус оболочки R), полученные в результате решения дисперсионного уравнения для

ненагруженной оболочки, s_j — искомые (с точностью до нормирования вектора \mathbf{s}) амплитуды волн с волновым числом λ_j . Константы ξ_j, γ_j — компоненты нормированных собственных векторов, отвечающих волне с волновым числом λ_j . Решение Флоке на всем сегменте $-l < z < l$ ищем в виде:

$$\mathbf{u}(z) = \begin{pmatrix} u_z(z) \\ u_n(z) \end{pmatrix} = \begin{cases} \mathbf{u}_0(z), & -l < z < 0, \\ \mathbf{u}_0(z-l)e^{i\beta}, & 0 < z < l, \end{cases} \quad (5)$$

где β — параметр Флоке, который предстоит найти. Введем векторы обобщенного смещения — \mathbf{u}^3 , и обобщенной силы — \mathbf{f}^3 :

$$\mathbf{u}^3 = \begin{pmatrix} u_z \\ u_n \\ u_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^3 = \begin{pmatrix} f_z \\ f_n \\ f_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_z & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2(\partial_z^2 - \nu) \\ 0 & -R\alpha^2\nu & -R\alpha^2\partial_z \end{pmatrix} \mathbf{u}^3. \quad (6)$$

Здесь индексами z и n обозначены продольная и нормальная компоненты обобщенных смещений и сил. Компонента $u_p = -\partial_z u_n$ связана с поворотом элемента оболочки, а компонента f_p — с моментом. Условия сшивания для данной задачи — это задание скачка соответствующей обобщенной силы \mathbf{f}^3 и непрерывность обобщенного смещения \mathbf{u}^3 (4)–(6) на сечении оболочки $z = 0$. В результате приходим к уравнению, связывающему параметры M , w и множитель Флоке β . Задавая значения M и требуя вещественности β (условие для распространяющихся волн Флоке), решаем это уравнение относительно w . В итоге получаем бесконечный набор частот, служащих границами зон пропускания и запираания.

В дальнейшем, при вычислениях, будут рассматриваться три типа матрицы сосредоточенных масс $\mathbf{M} = \text{diag}\{M_z, M_n\}$ (2). В первом случае полагаем $M_z = 0$, а ненулевая компонента M_n будет параметром, который обозначим как M . При этом оболочка взаимодействует с «массовыми поясками» за счет своей нормальной компоненты смещений. А ее продольная компонента зависит от «поясков» только за счет «перевязки» с нормальными колебаниями посредством коэффициента Пуассона (имеет место обмен энергии между продольными и изгибными движениями оболочки). Соответствующую нагрузку назовем нагрузкой N -типа, а отвечающие ей колебания оболочки N -колебаниями. Во втором случае положим $M_n = 0$, и уже компонента M_z будет параметром, который обозначим как M . Теперь оболочка взаимодействует с массовыми поясками только за счет своей продольной компоненты смещений. Соответствующие колебания обозначим как Z -колебания. В третьем случае присутствуют оба типа инерционных масс. Соответствующие колебания назовем как ZN -колебания и проведем вычисления для равных между собой масс: $M_z = M_n \equiv M$.

Заметим, что в применяемой модели «массовый пояс» играет роль конструктивного элемента, влиянием которого на упругие свойства системы, по сравнению с вкладом его инерционной массы в волновой процесс в оболочке, можно пренебречь. К таким элементам отнесем: накладки из относительно мягких смол, находящиеся на стыках оболочек для улучшения их изоляции, демпферные накладки и другие. При этом различие в значениях масс M_z и M_n (вдоль оболочки и по нормали к ней) может, в известной степени, моделировать как сам тип крепления (например, комбинацию демпфирующей прослойки и подшипника скольжения), так и эффекты локального взаимодействия внешних конструктивных элементов оболочки с присоединенной массой окружающего ее грунта. Так, при выступающем ребре на трубе в виде узкого кольца окружающий грунт будет влиять на оболочку вдоль нее в большей степени, чем по нормали к ней.

Все описанные выше типы матрицы масс \mathbf{M} можно параметризовать с помощью одного параметра M : $\mathbf{M} = \mathbf{M}(M)$. Перебирая значения $M \in (0, +\infty)$, получаем набор кривых на плоскости (M, w) , выделяющих полосы пропускания (на Рис. 1а, 2а, 3 промаркированы римскими цифрами) и дополнительные к ним области — полосы запираания. Сами кривые для краткости будем называть частотно-массовыми кривыми (ЧМ-кривыми).

Для фиксированных M и w получаем решение задачи в виде обобщенных смещений \mathbf{u}^3 и сил \mathbf{f}^3 , которые можно использовать для нахождения усредненного за период колебания $T = 2\pi/\omega$ потока энергии S в оболочке вдоль оси z . Этот интегральный поток энергии по сечению оболочки $z = z_0$ представим в виде суммы [21]:

$$S = \frac{\omega}{2} \int_0^{2\pi} \text{Im}(\mathbf{u}^3, \mathbf{f}^3)_{\mathbb{C}^3} R d\varphi = S_z + S_n + S_p, \quad (7)$$

где $(\mathbf{u}^3, \mathbf{f}^3)_{\mathbb{C}^3}$ — скалярное произведение векторов \mathbf{u}^3 и \mathbf{f}^3 в пространстве \mathbb{C}^3 . Слагаемые S_z, S_n, S_p будем называть продольной, изгибной и моментной компонентами потока энергии. Они имеют смысл средней за период колебания $(2\pi/\omega)$ работы компонент обобщенных сил \mathbf{f}^3 на соответствующих компонентах обобщенных

смещений u^3 в сечении оболочки $z = z_0$ за единицу времени. Заметим, что интегральный поток энергии не зависит от координаты z вследствие отсутствия в оболочке потерь энергии.

В частном случае чисто продольных ($\nu = 0$) волновых ($u_z = Ae^{i\lambda z}$) движений оболочки без поясков интегральный поток энергии S^0 состоит из одной компоненты: $S_z^0 = 2\pi\rho c_s^2 \frac{\omega}{2} |A|^2 \frac{\omega R}{c_s} = \pi R\rho c_s \omega^2 |A|^2$. Именно на него при вычислениях будет нормироваться интегральный поток (7) и его компоненты с сохранением для получающегося безразмерного потока и его компонент прежних обозначений.

Заметим, что границы полос пропускания и запираия для всех типов нагрузок (N , Z и ZN) можно определить не только из решения задачи для бесконечной периодической оболочки, но и независимо. Для этого рассматривается вспомогательная задача о собственных колебаниях изолированной симметричной ячейки периодичности данной бесконечной периодической оболочки (здесь — это ячейка $-l/2 < z < l/2$). На торцах ячейки задаются либо оба условия шарнирного опирания (ЧМ-кривые промаркированы буквой H на Рис. 1а, 2а, 3, 4а), либо оба условия скользящего закрепления (кривые с буквой S там же) [25–27]. Для изолированной ячейки ЧМ-кривые являются границами зон пропускания и запираия бесконечной периодической системы. Такой альтернативный способ нахождения границ полос пропускания и запираия позволяет контролировать вычисления и существенно уменьшать их объем и, как будет видно в дальнейшем, облегчает анализ физических эффектов.

Рассмотрим пример отсутствия взаимодействия между продольными и изгибными движениями оболочки, то есть полагаем, что коэффициент Пуассона $\nu = 0$ (предельная, но полезная для интерпретации дальнейших выкладок ситуация). Тогда система (3) распадается на два независимых дифференциальных уравнения, первое из них моделирует чисто продольные колебания оболочки

$$\left(\partial_z^2 + w^2 \left(1 + lM_z \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(z - jl) \right) \right) u_z(z) = 0, \quad M_z = \frac{\mu_z}{\rho l_0}, \tag{8}$$

второе — ее чисто изгибные колебания

$$\left(-\alpha^2 \partial_z^4 - \alpha^2 - 1 + w^2 \left(1 + lM_n \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(z - jl) \right) \right) u_n(z) = 0, \quad M_n = \frac{\mu_n}{\rho l_0}. \tag{9}$$

Уравнение (8) совпадает по форме с уравнением продольных колебаний стержня при наличии периодических точечных масс M , расположенных с периодом l_0 [24]. В безразмерном виде оно имеет вид:

$$\left(\partial^2 + w_r^2 \left(1 + m \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(z - j) \right) \right) u(z) = 0, \quad m = \frac{M}{\mu l_0}, \quad w_r^2 = \frac{\mu \omega^2 l_0^2}{ES}. \tag{10}$$

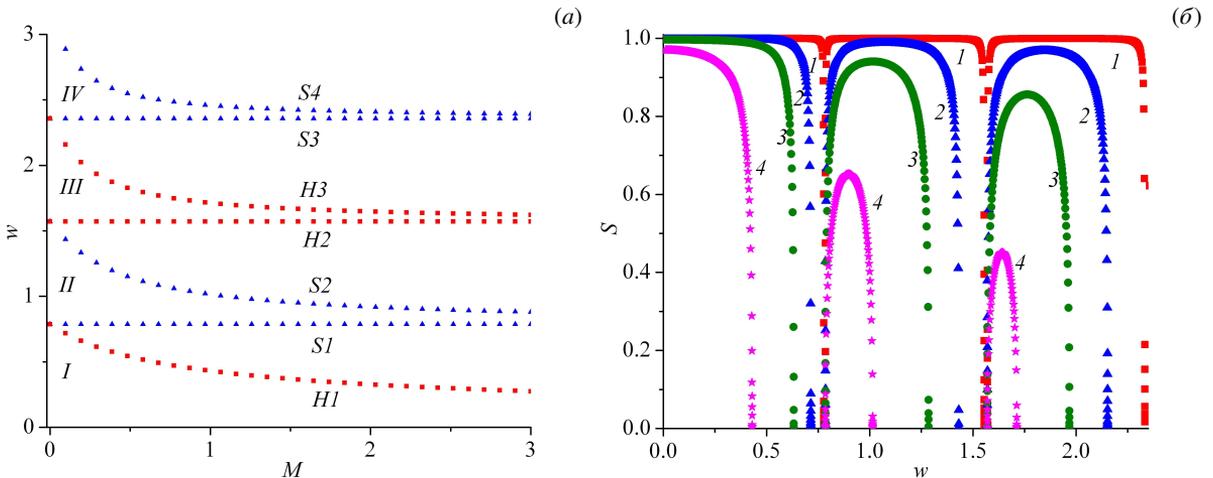


Рис. 1. Чисто продольные колебания оболочки ($\nu = 0$): ЧМ-кривые (а) и интегральный поток энергии в первых трех полосах пропускания для сосредоточенных масс $M = 0.01; 0.1; 0.25; 1.0$ (кривые 1, 2, 3, 4) (б)

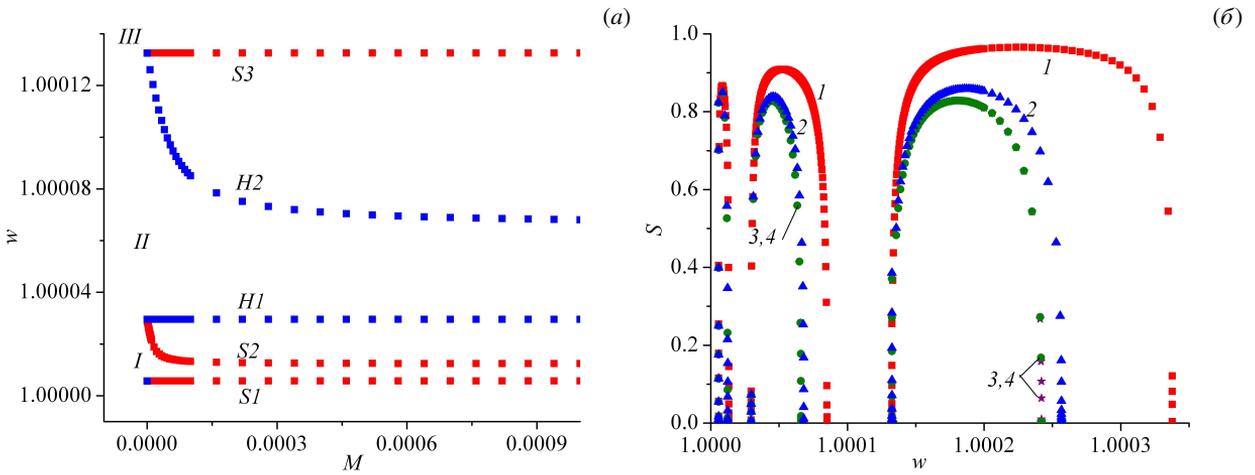


Рис. 2. Чисто изгибные колебания оболочки ($\nu = 0$): ЧМ-кривые (а) и интегральный поток энергии в первых трех полосах пропускания для сосредоточенных масс $M = 0.0001; 0.001; 0.25; 1.0$ (кривые 1, 2, 3, 4) (б)

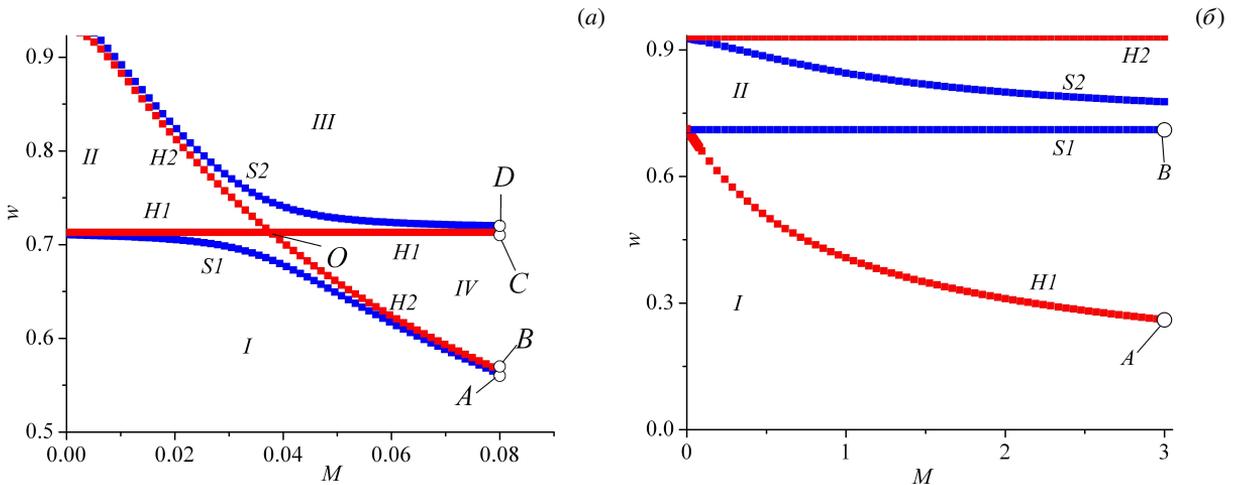


Рис. 3. ЧМ-кривые для оболочек, колеблющихся по типу N (а) и Z (б)

Здесь w_r — безразмерная частота, μ — масса стержня на единицу длины, E — модуль Юнга, S — площадь поперечного сечения стержня.

А уравнение (9), с точностью до коэффициентов, совпадает по форме с уравнением для изгибных колебаний балки на упругом основании [20, 28] при наличии периодических точечных масс M , расположенных с периодом l_0 :

$$\left(-\partial^4 + w_b^4 \left(1 + m \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(z-j) \right) - K^4 \right) u(z) = 0, \quad m = \frac{M}{\mu l_0}, \quad w_b^4 = \frac{\mu \omega^2 l_0^4}{D}. \quad (11)$$

Здесь w_b — безразмерная частота; μ — масса балки на единицу длины; D — цилиндрическая жесткость балки. В роли безразмерной относительной жесткости K упругого основания фигурирует выражение: $(l_0/R)(1+1/\alpha^2)^{1/4}$. Заметим, что в уравнениях (10), (11) обезразмеривание величин, имеющих размерность длины, произведено на длину ячейки периодичности l_0 , в отличие от уравнений оболочки (8), (9), где величины отнесены к радиусу оболочки R .

4. Численные результаты

Для расчета всех представленных графических зависимостей в Фортране [36], взяты следующие безразмерные параметры цилиндрической оболочки: $h/R = 0.01$, $l \equiv l_0/R = 4.0$. Графики ЧМ-кривых изображены на

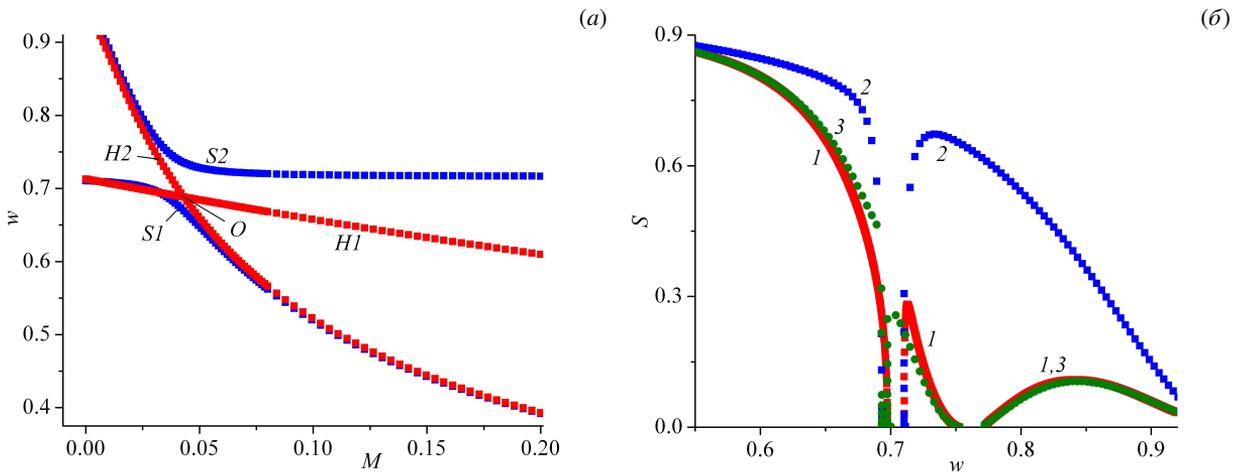


Рис. 4. ЧМ-кривые оболочки, колеблющейся по ZN-типу (а); интегральный поток энергии колебаний оболочки по типу N, Z, ZN (кривые 1, 2, 3) при $M=3.0$ (б)

рисунках 1а, 2а, 3, 4а. Профили интегрального потока энергии, нормальной компоненты потока энергии (7) и отношений компонент энергии в сечении оболочки $z=0$, на уровне которого находится пояс, как функций частоты w , изображены на рисунках 1б, 2б, 5–8. Профили нормированных модулей комплексных компонент векторов $\mathbf{u} = (u_z, u_n)$ и $\mathbf{f} = (f_z, f_n)$, как функций координаты z , изображены на рисунках 9–12. Нормирование внутри каждой пары (u_z, u_n) и (f_z, f_n) производится на значение модуля той компоненты пары, которая максимальна на всем промежутке: изолированному сегменту периодической оболочки отвечает отрезок $z \in [-2, 2]$, а всей периодической оболочке либо $z \in [-2, 6]$ (Рис. 9б, 11а, 12), либо $z \in [-2, 2]$ (Рис. 11б).

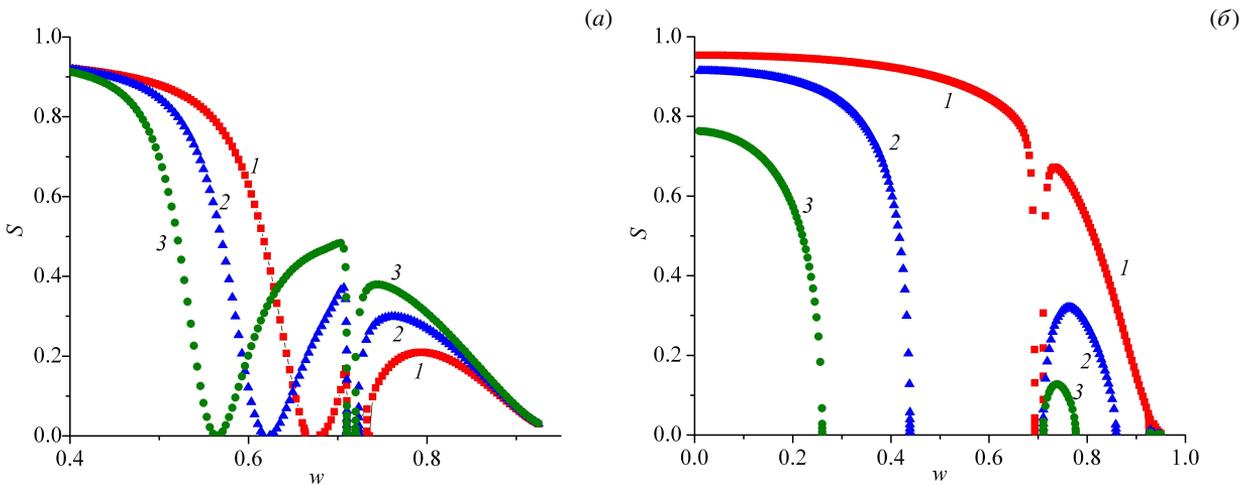


Рис. 5. Интегральный поток энергии колебаний оболочки по N-типу при $M=0.045; 0.06; 0.08$ (кривые 1, 2, 3) (а) и по Z-типу при $M=0.03; 0.8; 3.0$ (кривые 1, 2, 3) (б)

4.1. Частный случай: коэффициент Пуассона равен нулю ($\nu=0$)

Сначала рассмотрим чисто продольные ($\nu=0$) колебания оболочки (8) (Рис. 1). В этом случае в выражении (2) $M_n=0$. Обозначим буквой M величину компоненты M_z . Как отмечено выше, такие колебания оболочки вполне описываются уравнением продольных колебаний стержня (10) [24]. ЧМ-кривые (Рис. 1а), а также поток энергии (Рис. 1б) пересчитываем с учетом масштабного эффекта, обусловленного другим нормированием длины ячейки периодичности применительно к оболочке.

Отдельно рассмотрим и чисто изгибные ($\nu=0$) волны в оболочке (9). Тогда $M_z=0$ в (2), а буквой M будем

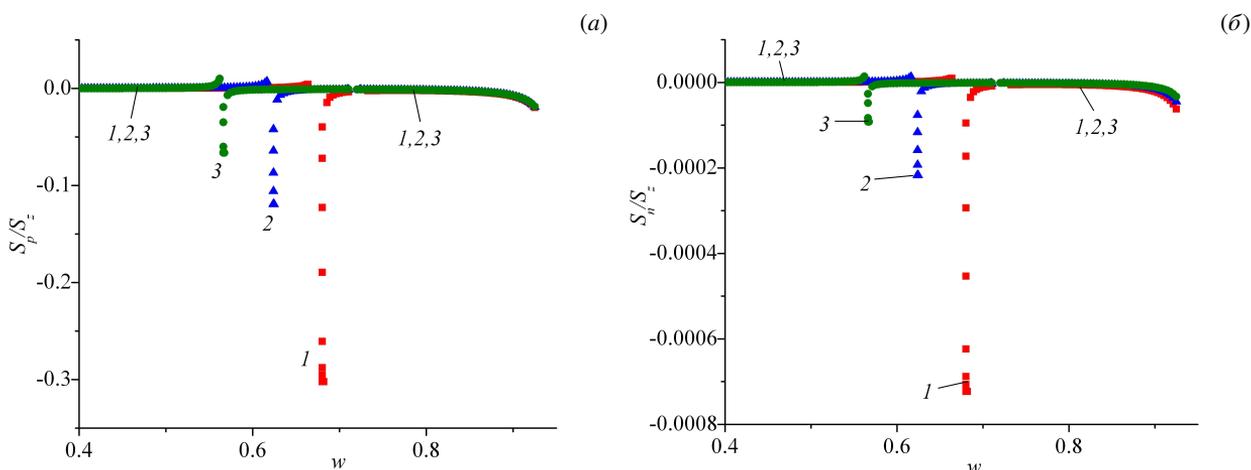


Рис. 6. Отношение компонент потока энергии при нагрузке N -типа и $M = 0,045; 0,06; 0,08$ (кривые 1, 2, 3): S_p/S_z (а) и S_n/S_z (б)

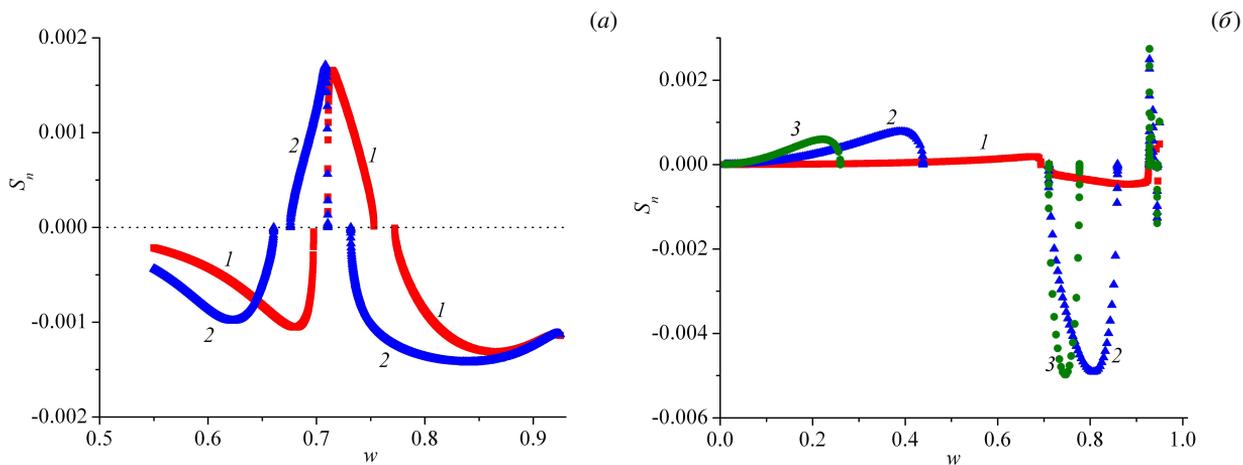


Рис. 7. Нормальная компонента потока энергии оболочки при колебаниях N -типа при $M = 0.03; 0.046$ (кривые 1, 2) (а) и Z -типа при $M = 0.03; 0.8; 3.0$ (кривые 1, 2, 3) (б)

обозначать величину компоненты M_n . При этом возникает частота отсечки $w_c = \sqrt{1 + \alpha^2} \approx 1.0000042$, при частотах ниже которой такие волны распространяться не могут (Рис. 2а, 2б).

Как при чисто продольных, так и при чисто изгибных колебаниях рост массы поясков приводит к уменьшению как ширины полос пропускания, так и относительного потока энергии в них (Рис. 1, 2) [24, 26, 28]. Однако, по сравнению с чисто продольными колебаниями оболочки (8) (Рис. 1а) и изгибными колебаниями балки (11) (при $K = 0$) [25], при чисто изгибных колебаниях оболочки (9) наблюдается сгущение границ полос пропускания в окрестности w_c (Рис. 2а, 2б).

Отметим, что при рассмотрении изолированного сегмента периодичности горизонтальные ветки ЧМ-кривых на рисунках 1а, 2а отвечают случаю, когда поясок находится в узле стоячей волны. Нисходящие ветки ЧМ-кривых соотносятся с ситуацией, когда поясок находится в пучности стоячей волны. А в периодической оболочке в полосах пропускания вблизи таких веток, поясок находится в псевдоузле и в псевдопучности бегущей волны Флоке. Приставка «псевдо» в термине оправдана тем, что у бегущей волны Флоке нет как таковых узлов и пучностей волн смещений $\mathbf{u}^3(z)$ и сил $\mathbf{f}^3(z)$, но есть точки, где модуль их комплексной амплитуды минимален (но не равен нулю) или максимален на периоде длины оболочки. Такой эффект связан с общефизическим принципом — стремлением системы уменьшить внешнее воздействие на нее, то есть оболочка пытается нивелировать влияние растущих присоединенных масс поясков Mw^2 , за счет уменьшения частоты колебаний w и расположения поясков

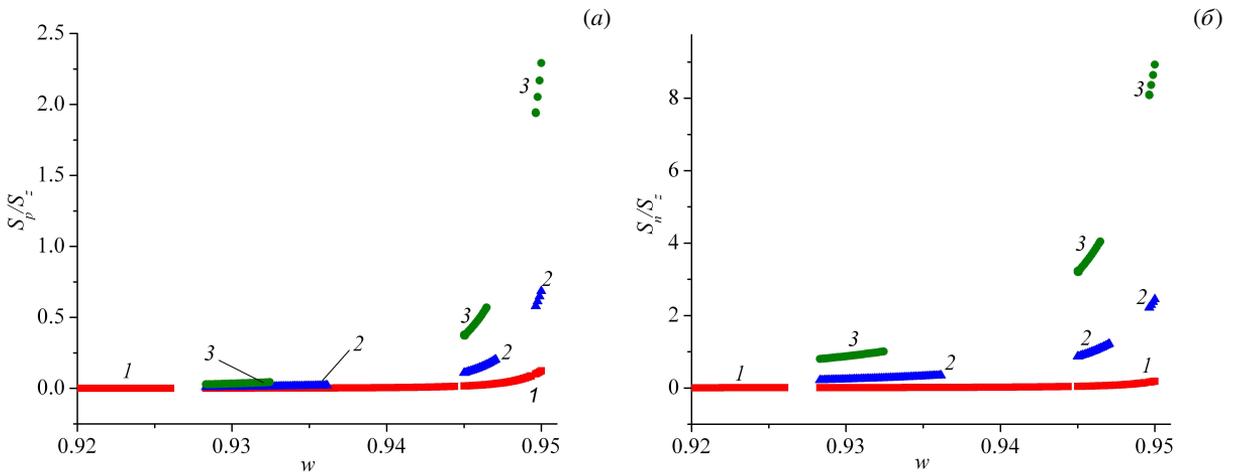


Рис. 8. Отношение компонент потока энергии при сосредоточенных массах $M = 0.03; 0.8; 3.0$ и колебаниях Z -типа (кривые 1, 2, 3): S_p/S_z (а), S_n/S_z (б)

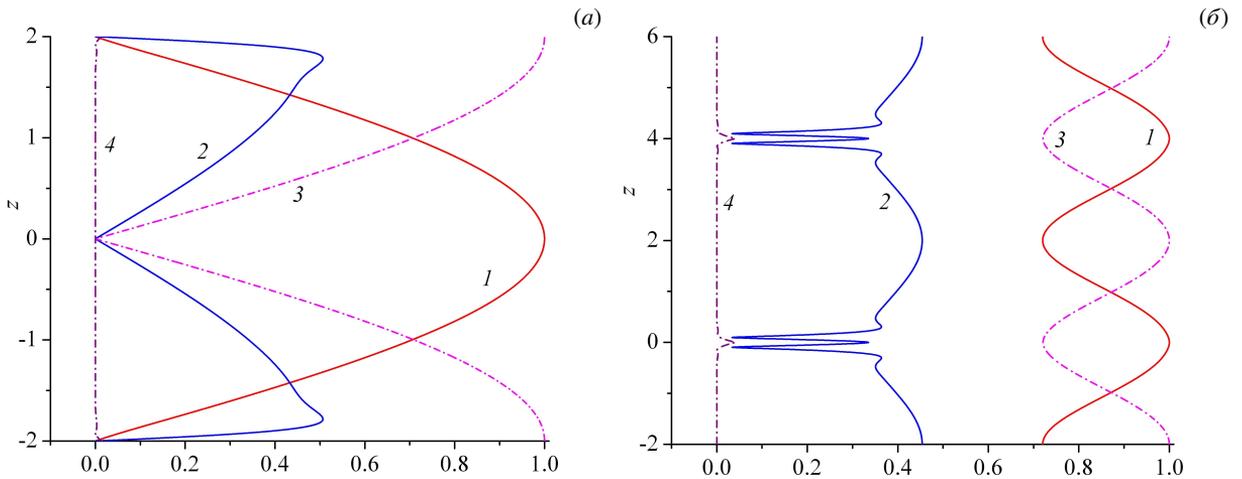


Рис. 9. Профили нормированных модулей комплексных компонент (продольной и нормальной) вектора смещений (кривые 1 и 2) и вектора сил (кривые 3 и 4) сегмента периодической оболочки при $w = 0.713, M = 0.08$ (точка C на Рис. 3а) (а) и периодической оболочки при $w = 0.70, M = 0.08$ (точка C') (б); колебания N -типа

в узлах или псевдоузлах соответствующих волн.

Тем не менее в поведении этих моделей наблюдается и различие. Так, при чисто изгибных колебаниях оболочки ввиду ее меньшей, по сравнению с чисто продольными колебаниями, жесткости влияние массы пояска на поток энергии больше, и уже сравнительно небольшие массы поясков приводят к уменьшению как частоты, так и потока энергии (сравним Рис. 1 и 2). При этом с ростом массы происходит относительная стабилизация потока энергии (кривые интегрального потока для $M = 0.25$ и $M = 1.0$ в масштабах рисунка 2б практически совпадают). Это связано с тем, что в при чисто продольных колебаниях перенос энергии осуществляется по единственному каналу, связанному с продольными смещениями оболочки и продольной силой. При чисто изгибных колебаниях энергия передается по двум каналам: один канал связан с нормальными смещениями элементов оболочки и перерезывающей силой, а другой — с поворотами элементов оболочки и моментом. Поэтому, несмотря на небольшие амплитуды колебаний в псевдоузлах, при изгибных колебаниях остается канал распространения энергии, связанный с поворотами сечения оболочки, который и берет на себя основную роль переносчика энергии.

4.2. N-тип колебаний ($\nu \neq 0, M_z = 0$)

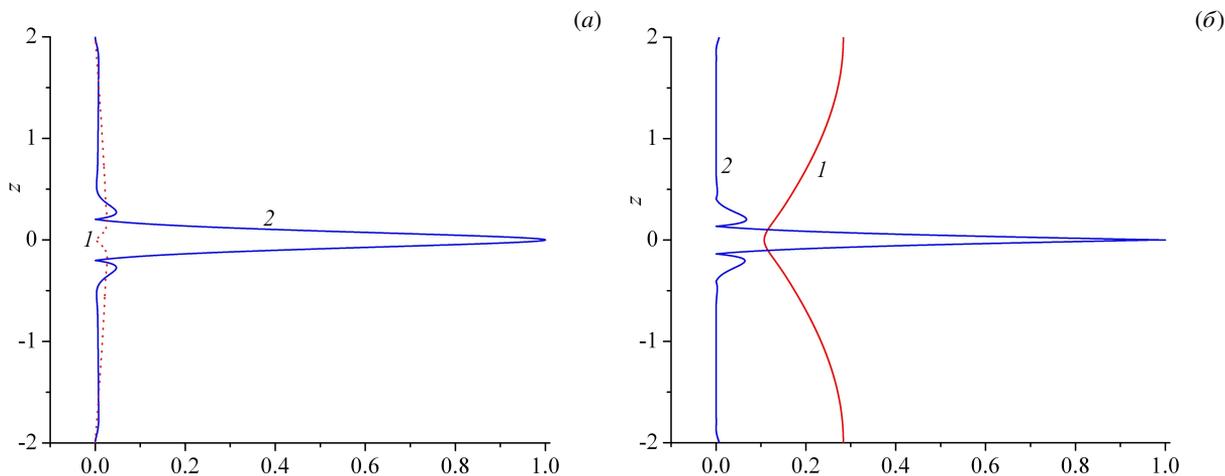


Рис. 10. Сегмент периодической оболочки при колебаниях N -типа: профили нормированных модулей компонент u_z и u_n (кривые 1, 2) (а) и компонент f_z и f_n (кривые 1, 2) (б) при $w = 0.566$, $M = 0.08$ (точка B на Рис. 3а)

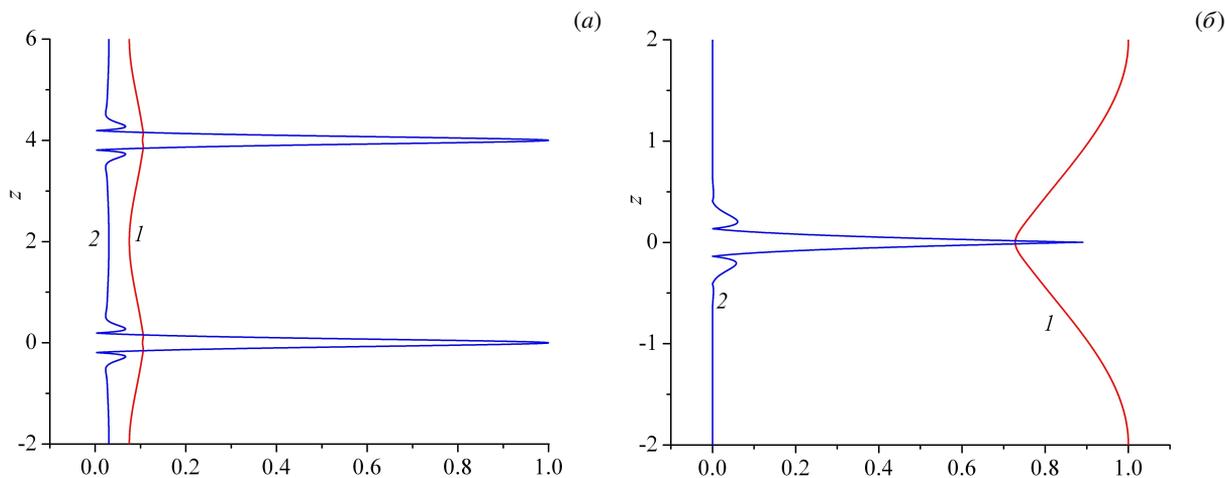


Рис. 11. Периодическая оболочка при колебаниях N -типа: профили нормированных модулей компонент u_z и u_n (кривые 1, 2) (а) и компонент f_z и f_n (кривые 1, 2) (б) при $w = 0.57$, $M = 0.08$ (точка B')

В этом и последующих разделах рассматривается модель оболочки (3) в случае, когда $\nu \neq 0$ (для численных расчетов положим $\nu = 0.3$). При наличии нормальной компоненты $M_n \neq 0$ в матрице сосредоточенных масс (2), при определенном сочетании параметров, возможно появление точек пересечения и квазипересечения (виринга) соответствующих ЧМ-кривых. Такая ситуация рассмотрена в работе [22] для изолированной ячейки периодичности. Этот же эффект наследуется и бесконечной периодической оболочкой, см., например, низкочастотную область (при частотах до частоты отсечки чисто изгибных колебаний) на рисунке 3а при колебаниях N -типа.

Особый интерес вызывает совпадение точек пересечения и виринга в точке O (Рис. 3а), которой отвечают масса $M \approx 0.038$ и частота $w \approx 0.71$ (массу M_O и частоту w_O в этой точке будем называть критическими). Здесь, с одной стороны, наблюдается пересечение ЧМ-кривых $H1$ и $H2$, при этом характер колебаний не меняется по ходу движения вдоль каждой из них. Это означает ортогональность процессов на данных кривых в точке O . Соответствующие моды колебаний изолированной ячейки периодичности не взаимодействуют. С другой стороны, в этой же точке наблюдается квазипересечение (виринг) ЧМ-кривых $S1$ и $S2$. При этом происходит интенсивный обмен энергией между модами, отвечающими этим кривым, и такой, что после прохождения точки O моды меняются ролями.

Проанализируем вибрационное поле в окрестности точки пересечения O . Для этого на примере изолированной

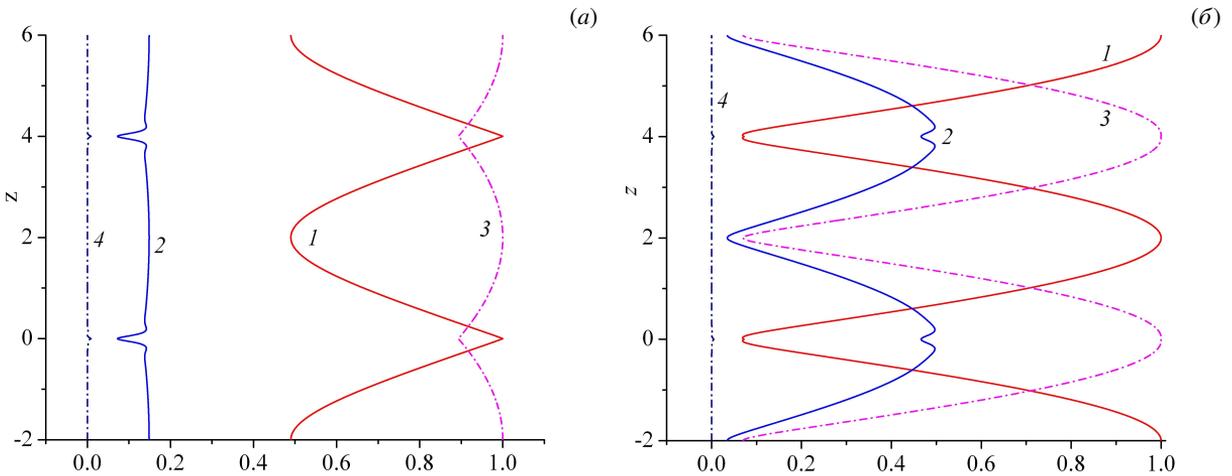


Рис. 12. Профили нормированных модулей комплексных компонент (продольной и нормальной) вектора смещений (кривые 1 и 2) и вектора сил (кривые 3 и 4) периодической оболочки при колебаниях Z-типа: $w = 0.23$; $M = 3.0$ (точка A') (a) и $w = 0.72$; $M = 3.0$ (точка B') (б)

ячейки периодичности рассмотрим стоячие волны при собственных частотах, лежащих на первых четырех ЧМ-кривых при $M = 0.08$. С этими значениям параметров связаны точки A, B, C, D на рисунке 3a. В случае периодической оболочки исследуем вибрационное поле в четырех точках A', B', C', D' также при $M = 0.08$, однако сместим их с границ полос пропускания (с кривых $S1, S2, H1, H2$) вовнутрь этих полос, где им соответствуют уже распространяющиеся волны Флоке. Заметим, что в масштабе рисунка точки A и A', B и B', C и C', D и D' не различимы.

Независимость ЧМ-кривой $H1$ от массы M и нисходящий характер ЧМ-кривой $H2$ (Рис. 3a) объясняется аналогично тому, как это сделано для чисто изгибных и чисто продольных колебаний оболочки в подразделе 4.1. Единственное отличие состоит в том, что теперь речь идет об узлах (Рис. 9a, 10) или псевдоузлах (Рис. 9б, 11, 12) компоненты вектора смещения, взаимодействующей с пояском. При колебаниях N-типа— это нормальная компонента вектора смещения, а при колебаниях Z-типа, которые будут рассмотрены в подразделе 4.3, — это продольная компонента вектора смещения.

Отметим асимптотическое стремление кривых $S1$ и $S2$ к кривым $H1$ и $H2$ (Рис. 3a). Вычисления показывают похожее поведение колебаний по мере сближения этих кривых. При этом из кривых $S1$ и $S2$ формируются две квазикривые (одна горизонтальная, а другая нисходящая), состоящие из соответствующих участков кривых $S1$ и $S2$, при движении вдоль которых характер колебаний сохраняется. Это объясняется тем, что при движении вдоль кривой $S2$ (с ростом массы M) происходит постепенное перемещение пояса из пучности нормальной компоненты (при $M < M_0$) в узел нормальной компоненты (при $M > M_0$), а при таком же движении вдоль кривой $S1$ имеет место обратный процесс.

Проанализируем взаимодействие между каналами распространения энергии (компонентами потока энергии) для значений масс M в окрестности рассматриваемой точки O (Рис. 3a). Указанная окрестность лежит в диапазоне частот чисто продольных колебаний оболочки (Рис. 1a) ниже частоты отсечки ее чисто изгибных колебаний (Рис. 2a). Поэтому, хотя в случае $\nu \neq 0$ и будут реализовываться изгибные колебания за счет «перевязки» за счет коэффициента Пуассона с продольными колебаниями, но в целом доминировать будут продольные колебания (Рис. 9–11, 12). Однако, при определенном сочетании параметров, может наблюдаться и обратная картина. Например, в точке B в сечениях, отвечающих поясам, отмечается одновременное доминирование нормальных компонент и смещений, и сил (Рис. 10, 11) [37]. Тем не менее, вследствие их частичной ортогональности, нормальная компонента потока энергии (7), значительно меньше, чем поток продольной компоненты. Это можно наблюдать при сравнении нормальной (Рис. 7a) и продольной компонент потока энергии, график которой, практически не отличим от графика интегрального потока на рисунке 5a в масштабе этого рисунка. И в целом вычисления показывают, что для компонент потока энергии эффект доминирования продольной компоненты выражен более ярко, чем у вибрационных полей.

Следует отметить, что смена знака компонент потока энергии при смене полос пропускания (см. Рис. 7) объясняется особенностью примененного алгоритма вычислений.

Проведенный выше анализ и подтверждающие его результаты вычислений показывают, что качественно вибрационные поля совпадают в точках A' и B' , а также в C' и D' . Соответствующие графики вибрационных полей, отвечающих точкам A' и D' , не приводятся для краткости изложения.

Обратим внимание на различный характер поведения потока энергии в окрестности разных границ полос пропускания. Так, локальный максимум (по частоте ω) как интегрального потока энергии (Рис. 5а), так и его компонент (Рис. 7а) внутри полос пропускания II и IV локализован в окрестности горизонтальной прямой $H1$, а локальный минимум — в окрестности кривой $H2$ (Рис. 3а). Это вызвано тем, что в первом случае пояски находятся в псевдоузлах нормальной компоненты смещения и в пучностях продольной компоненты, которая слабо взаимодействует с поясками (только через коэффициент Пуассона), а во втором случае пояски размещаются в псевдопучностях нормальной компоненты смещения (взаимодействующей с поясками) и значительно ослабляют и нормальную компоненту потока энергии, и сам интегральный поток.

Отметим, что доля продольной компоненты потока энергии, как главного переносчика энергии, уменьшается быстрее долей остальных компонент при приближении к границам полос пропускания II и III , I и IV . Причем более ярко это выражено внутри полос пропускания II и IV , а также у моментной компоненты потока энергии (Рис. 6а), по сравнению с ее нормальной компонентой (Рис. 6б). Это связано с тем, что вследствие уменьшения нормальной компоненты смещения поясков в псевдоузлах возрастает роль поворотов элементов оболочки и, соответственно, моментов в них, что и приводит к относительному увеличению роли моментной компоненты потока энергии. Этот эффект усиливается при приближении массы M к критической величине M_0 (Рис. 6).

4.3. Z -тип колебаний ($M_n = 0$)

На рисунке 3б изображены две первые полосы пропускания (I и II) бесконечной периодической оболочки для этого случая. Здесь массовый поясок взаимодействует с оболочкой только вдоль оси z ($M_n = 0$ в (2)). В отличие от исследованных в подразделе 4.2 N -колебаний, эти кривые не пересекаются, что в [23] наблюдалось и в изолированной симметричной ячейке периодичности.

Рассмотрим характер вибрационного поля в точках A и B на ЧМ-кривых $H1$ и $S1$, (для такой ячейки периодичности) или вблизи этих кривых в точках A' и B' внутри полос пропускания (для периодической оболочки). В масштабе рисунка 3б эти точки (A и A' , B и B') неразличимы. Как и ранее, в подразделе 4.2, такой характер вполне объясняется расположением локализованных масс в узлах (псевдоузлах) или пучностях (псевдопучностях) соответствующих компонент вектора смещения. Вибрационное поле в периодической оболочке иллюстрируют кривые на рисунке 12, полученные для масс и частот, отвечающих точкам A' и B' на рисунке 3б.

Обсудим отличия двух имеющихся типов колебаний (N и Z). Для Z -типа с увеличением присоединенной массы поясков $M\omega^2$ монотонно возрастает относительная роль моментной и изгибной компонент потока энергии (Рис. 7б, 8). В случае же N -типа колебаний возрастание наблюдается только на границах полос пропускания (Рис. 6). Это вызвано тем, что при колебаниях Z -типа ослабевает доминирующая в этой полосе продольная компонента потока энергии. Также при этом становятся сопоставимыми с продольными компонентами нормальные компоненты вектора смещения (Рис. 12б) на всем сегменте периодичности частоты ω и массы пояска M , соответствующих окрестности точки B на рисунке 3б. В окрестность этой частоты смещен и локальный максимум интегрального потока энергии (Рис. 5б), и его нормальной компоненты (Рис. 7б), так как поясок находится в псевдопучности нормальной компоненты (не взаимодействующей с ним) и во псевдоузле продольной компоненты. Относительное возрастание роли нормальной компоненты потока энергии (Рис. 8б), по сравнению с моментной (Рис. 8а), связано с уменьшением относительной роли поворотов оболочки при ее продольных смещениях по сравнению с изгибными смещениями.

4.4. ZN -тип колебаний ($M_n = 0$)

Случай ZN -колебаний изображен на рисунке 4а. Наличие ненулевой продольной компоненты массы M_z приводит к возмущению картины колебаний N -типа (Рис. 3а). Пересечение ЧМ-кривых по-прежнему имеет место (точка O), но его координаты несколько изменились, как и в изолированной ячейке [23]. При этом характер вибрационного поля и потоков энергии при ZN -колебаниях определяется (качественно) нормальной компонентой M_n . Это видно и из анализа кривых потоков энергии (Рис. 4б). Кривые интегрального потока для колебаний типов N (кривая 1) и ZN (кривая 3) близки друг к другу и заметно отличаются от колебаний Z -типа (кривая 2).

5. Заключение

Исследован характер колебаний бесконечной периодической цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява с дополнительной инерцией в виде «массовых поясков». Показано, что при ненулевой нормальной компоненте сосредоточенной массы и определенном сочетании параметров возможно совпадение точки пересечения и квазипересечения границ полос пропускания такой периодической системы. Исследование такой особой точки в низкочастотной области показало, что в окрестности точки происходит существенная перестройка вибрационного и энергетического полей. Следствием того, что возле этой точки наблюдается различный характер колебательных процессов вблизи границ полос пропускания, является резкая смена режима колебаний оболочки даже при небольших возмущениях параметров задачи, например, при наличии внешнего источника колебаний и изменении его частоты, сопровождающегося проходом через критическую частоту. В реальных конструкциях это может привести к опасным режимам колебаний. С другой стороны, варьируя массовые характеристики сосредоточенного груза, можно добиваться более устойчивого режима работы конструкции в заданном диапазоне параметров.

Анализ выделенной симметричной ячейки периодичности оболочки, ЧМ-кривые которой совпадают с границами полос пропускания периодической оболочки, позволил не только значительно уменьшить объем вычислений и упростить нахождение координат особой точки, но и дал возможность облегчить трактовку физических эффектов, наблюдаемых в периодической оболочке. Независимое рассмотрение ячейки периодичности также дало возможность верифицировать полученные в статье результаты определения границ полос пропускания периодической оболочки результатами, рассчитанными с помощью конечно-элементного пакета ANSYS в [23].

Показано, что включенный в моделирование поток энергии существенно дополняет картину вибрационных полей, а также позволяет и более адекватно оценивать характер колебаний в окрестности особой точки, так как поток энергии учитывает не только величины обобщенных смещений и сил, но и сдвиг фазы между ними.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации. Регистрационный номер госбюджетного задания: 124040800009-8.

Литература

1. *Cremer L., Heckl M., Petersson B.A.* Structure-Borne Sound. Springer Berlin Heidelberg, 2005. 607 p. DOI: 10.1007/b137728
2. *Novak P., Moffat A.I., Nalluri C., Narayanan R.* Hydraulic Structures. CRC Press, 2007. 736 p. DOI: 10.1201/9781315274898
3. *El-Reedy M.* Offshore Structures: Design, Construction and Maintenance. Gulf Professional Publishing, 2012. 664 p.
4. *Palmer A.C., King R.A.* Subsea Pipeline Engineering. PennWell Corp., 2008. 624 p.
5. *Gerwick Jr. B.C.* Construction of Marine and Offshore Structures. CRC Press, 2007. 840 p. DOI: 10.1201/9780849330520
6. *Елусеев В.В.* Механика упругих тел. Изд-во СПбГПУ, 2003. 336 с.
7. *Eliseev V.V., Vetyukov Y.M.* Finite deformation of thin shells in the context of analytical mechanics of material surfaces // *Acta Mechanica*. 2010. Vol. 209, no. 1/2. P. 43–57. DOI: 10.1007/s00707-009-0154-7
8. *Eliseev V., Vetyukov Y.* Theory of shells as a product of analytical technologies in elastic body mechanics // *Shell Structures: Theory and Applications*. 2014. Vol. 3. P. 81–85. DOI: 10.1201/b15684-18
9. *Eliseev V.V., Zinovieva T.V.* Lagrangian mechanics of classical shells: Theory and calculation of shells of revolution // *Shell Structures: Theory and Applications Volume 4* / ed. by W. Pietraszkiewicz, W. Witkowski. CRC Press, 2018. P. 73–76.
10. *Зиновьева Т.В.* Вычислительная механика упругих оболочек вращения в машиностроительных расчетах // *Современное машиностроение*. Наука и образование. 2012. С. 335–343.
11. *Zinovieva T.V.* Calculation of Equivalent Stiffness of Corrugated Thin-Walled Tube // *Advances in Mechanical Engineering, Lecture Notes in Mechanical Engineering* / ed. by A.N. Evgrafov. Cham: Springer International Publishing, 2019. P. 211–220.
12. *Zinovieva T.V., Smirnov K.K., Belyaev A.K.* Stability of corrugated expansion bellows: shell and rod models // *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230. P. 4125–4135. DOI: 10.1007/s00707-019-02497-6
13. *Зиновьева Т.В.* Дисперсия волн в цилиндрической оболочке // *Научно-технические ведомости СПбГПУ*. 2007. № 4–1. С. 53–58.
14. *Zinovieva T.V.* Calculation of Shells of Revolution with Arbitrary Meridian Oscillations // *Advances in Mechanical Engineering, Lecture Notes in Mechanical Engineering* / ed. by A.N. Evgrafov. Cham: Springer International Publishing, 2017. P. 165–176. DOI: 10.1007/978-3-319-53363-6_17
15. *Filippenko G.V., Wilde M.V.* Backwards waves in a fluid-filled cylindrical shell: comparison of 2D shell theories with 3D theory of elasticity // *Proc. of the Int. Conf. "Days on Diffraction 2018"*. 2018. P. 112–117. DOI: 10.1109/DD.2018.8553487

16. *Filippenko G.V.* Waves with the Negative Group Velocity in the Cylindrical Shell, Filled with Compressible Liquid // *Advances in Mechanical Engineering* / ed. by A.N. Evgrafov. Cham: Springer International Publishing, 2018. P. 93–104. DOI: 10.1007/978-3-319-72929-9_11
17. *Тер-Акопянц Г.Л.* Осесимметричные волновые процессы в цилиндрических оболочках, заполненных жидкостью // *Естественные и технические науки*. 2015. № 7. С. 10–14.
18. *Sorokin S.V., Ershova O.A.* Analysis of the energy transmission in compound cylindrical shells with and without internal heavy fluid loading by boundary integral equations and by Floquet theory // *Journal of Sound and Vibration*. 2006. Vol. 291, no. 1/2. P. 81–99. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.05.031
19. *Sorokin S.V., Nielsen J.B., Olhoff N.* Green's matrix and the boundary integral equation method for the analysis of vibration and energy flow in cylindrical shells with and without internal fluid loading // *Journal of Sound and Vibration*. 2004. Vol. 271, no. 3–5. P. 815–847. DOI: 10.1016/S0022-460X(03)00755-7
20. *Ерофеев В.И., Ленин А.О., Лусенкова Е.Е., Царев И.С.* Дисперсионные зависимости и особенности переноса энергии изгибными волнами в балке, лежащей на обобщенном упругом основании // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2023. № 2. С. 118–125. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.2.11
21. *Filippenko G.V.* Energy Flux Analysis of Axisymmetric Vibrations of Circular Cylindrical Shell on an Elastic Foundation // *Advances in Mechanical Engineering* / ed. by A.N. Evgrafov. Cham: Springer International Publishing, 2020. P. 83–91. DOI: 10.1007/978-3-030-39500-1_9
22. *Filippenko G.V., Zinovieva T.V.* Axially Symmetric Oscillations of Circular Cylindrical Shell with Localized Mass on Winkler Foundation // *Advanced Problem in Mechanics II* / ed. by D.A. Indeitsev, A. Krivtsov. Springer International Publishing, 2022. P. 245–257. DOI: 10.1007/978-3-030-92144-6_19
23. *Filippenko G.V., Zinovieva T.V.* Axisymmetric Vibrations of the Cylindrical Shell Loaded with Pointed Masses // *Advances in Mechanical Engineering* / ed. by A.N. Evgrafov. Cham: Springer International Publishing, 2021. P. 80–91. DOI: 10.1007/978-3-030-62062-2_9
24. *Filippenko G.* The location of pass and stop bands of an infinite periodic structure versus the eigenfrequencies of its finite segment consisting of several 'periodicity cells' // *Proceedings of the 4th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPdyn 2013)*. 2013. P. 2220–2231. DOI: 10.7712/120113.4660.C1690
25. *Филиппенко Г.В.* Изгибные волны в балке с периодически расположенными точечными массами // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2015. Т. 8, № 2. С. 153–163. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.2.13
26. *Filippenko G.V.* Wave Processes in the Periodically Loaded Infinite Shell // *Advances in Mechanical Engineering* / ed. by A.N. Evgrafov. Cham: Springer International Publishing, 2019. P. 11–20. DOI: 10.1007/978-3-030-11981-2_2
27. *Hvatov A., Sorokin S.* Assessment of reduced-order models in analysis of Floquet modes in an infinite periodic elastic layer // *Journal of Sound and Vibration*. 2019. Vol. 440, no. 3. P. 332–345. DOI: 10.1016/j.jsv.2018.10.034
28. *Filippenko G.V.* Harmonic Vibrations of the Simplest Shell Models Loaded with a Periodic System of Localised Masses // *Advances in Mechanical Engineering* / ed. by A. Evgrafov. Springer Nature Switzerland, 2024. P. 93–102. DOI: 10.1007/978-3-031-48851-1_9
29. *Hvatov A., Sorokin S.* Free vibrations of finite periodic structures in pass- and stop-bands of the counterpart infinite waveguides // *Journal of Sound and Vibration*. 2015. Vol. 347. P. 200–217. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.03.003
30. *Tomczyk B., Bagdasaryan V., Gołabczak M., Litawska A.* On the modelling of stability problems for thin cylindrical shells with two-directional micro-periodic structure // *Composite Structures*. 2021. Vol. 275. 114495. DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.114495
31. *Kumar A., Das S.L., Wahi P., Żur K.K.* On the stability of thin-walled circular cylindrical shells under static and periodic radial loading // *Journal of Sound and Vibration*. 2022. Vol. 527. 116872. DOI: 10.1016/j.jsv.2022.116872
32. *Zheng D., Du J., Liu Y.* Bandgap mechanism analysis of elastically restrained periodic cylindrical shells with arbitrary periodic thickness // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2023. Vol. 237. 107803. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2022.107803
33. *Deng J., Guasch O., Maxit L., Zheng L.* Reduction of Bloch-Floquet bending waves via annular acoustic black holes in periodically supported cylindrical shell structures // *Applied Acoustics*. 2020. Vol. 169. 107424. DOI: 10.1016/j.apacoust.2020.107424
34. *Tian K., Lai P., Sun Y., Sun W., Cheng Z., Wang B.* Efficient buckling analysis and optimization method for rotationally periodic stiffened shells accelerated by Bloch wave method // *Engineering Structures*. 2023. Vol. 276. 115395. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.115395
35. *Sorokin S.V.* On propagation of plane symmetric waves in a periodically corrugated straight elastic layer // *Journal of Sound and Vibration*. 2015. Vol. 349. P. 348–360. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.03047
36. *Chapra S.C., Canale R.P.* Numerical Methods for Engineers. McGraw-Hill Education, 2015. 970 p.

37. *Михасев Г.И., Товстик П.Е.* Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. Физматлит, 2009. 290 с.

Сведения об авторах:

Филиппенко Георгий Викторович (корр.), кфмн, снс, Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш), 199178, г. Санкт-Петербург, ВО, Большой пр., д. 61; e-mail: g.filippenko@gmail.com, fgv@ipme.ru; ORCID: 0000-0003-2066-2469