

Научная статья

Моделирование течения воздуха в упруго-деформируемой пористой среде, аппроксимирующей легкие человека: структура модели, ее основные уравнения и разрешающие соотношения

П.В. Трусов^{1,2}, Н.В. Зайцева^{2,3}, М.Ю. Цинкер^{1,2}, В.В. Нурисламов^{1,2}

¹ Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

² Федеральный научный центр медико-профилактических технологий управления рисками здоровью населения, Пермь, Российская Федерация

³ Российская академия наук, Отделение медицинских наук, Москва, Российская Федерация

Работа посвящена развитию создаваемой авторами математической модели дыхательной системы человека. Модель предназначена для прогнозирования возникновения в органах дыхания патологий, обусловленных негативным воздействием загрязняющих веществ атмосферного воздуха. В легких человека, состоящих из мелких дыхательных путей, альвеол с содержащимся в них воздухом, сложно выделить отдельные воздухоносные каналы. В связи с этим легкие человека представляются как двухфазная упруго-деформируемая насыщенная пористая среда, одна из фаз которой – деформируемый скелет (легочная ткань), полагается деформируемым твердым телом, вторая фаза – газ, заполняющий поровое пространство. Строится модель течения воздуха в легких человека, состоящая из подмодели упругого деформирования пористой среды легких, испытывающей большие градиенты перемещений, и подмодели фильтрации воздуха через деформируемую пористую среду. В модели учитывается взаимосвязь между подмоделями дыхательной системы, то есть задачи деформирования и фильтрации в дифференциальной форме являются связанными. Поскольку решение поставленной существенно нелинейной задачи в настоящее время не реализуемо, сформулирована постановка задачи в обобщенной (слабой) форме для последующего применения численных методов с использованием метода Галеркина. Для численного решения нелинейной подзадачи деформирования двухфазной среды легких предполагается применить метод конечных элементов, для подзадачи фильтрации – метод конечных объемов. Построены соответствующие разрешающие соотношения. Для решения связанной нелинейной задачи авторами разработаны алгоритмы и комплекс программ, описание которых, а также анализ полученных на их основе результатов остались за рамками данной публикации.

Ключевые слова: легкие человека, двухфазная упруго-деформируемая насыщенная пористая среда, геометрическая нелинейность, фильтрация воздуха, обобщенное решение, конечно-элементные соотношения

Получение: 14.05.2024 / *Публикация онлайн:* 22.07.2024

УДК 539.3; 532.546; 51-76; 519.6

1. Введение

К настоящему времени многочисленными исследованиями доказано негативное влияние загрязнения атмосферного воздуха химическими веществами в различном агрегатном состоянии на здоровье человека, в том числе на его дыхательную систему [1–3]. Существующие лабораторные и инструментальные методы позволяют выполнить комплексное обследование пациента, получить объективную картину текущего состояния его здоровья, корректно поставить диагноз и наметить схему лечения. Несмотря на высокую информативность медицинских методов диагностики и их неопределимую пользу для решения широкого круга задач, они не предназначены для прогнозирования изменения показателей здоровья, в том числе с учетом влияния вредных факторов. Для количественной оценки поступления загрязняющих химических веществ и их влияния на организм человека (в том числе на органы дыхания), а также для исследования процесса дыхания как в норме, так и при наличии патологии авторами предлагается математическая модель дыхательной системы человека [4].

Дыхательный аппарат человека представляет собой сложную биомеханическую систему, состоящую из разветвленной сети каналов, заканчивающихся альвеолами. За счет циклических упругих деформаций легких человека по системе движется воздух [5, 6]. Для изучения движения воздуха в верхних и крупных нижних дыхательных путях традиционно используются методы газовой динамики [4, 7–9], которые показали свою эффективность.

Моделирование движения воздуха по всей системе каналов вплоть до альвеол затруднено из-за сложности учета геометрии каждого отдельного канала (в легких взрослого человека содержится около $600 \div 700$ млн альвеол, а также соединяющих их каналов (диаметр каналов составляет $0.2 \div 0.6$ мм, альвеол — $0.2 \div 0.3$ мм [5, 10, 11]). Прямое исследование движения воздуха в такой системе потребовало бы чрезвычайно больших вычислительных ресурсов. Для преодоления указанных трудностей в разрабатываемой математической модели дыхательной системы верхние и крупные нижние воздухоносные пути рассматриваются детально, а легкие

человека, образуемые мелкими дыхательными путями и альвеолами с содержащимся в них воздухом, считаются сплошной двухфазной циклически упруго-деформируемой насыщенной пористой средой [4, 12]. У легких, как пористой среды, довольно сложная внутренняя геометрия, поэтому для оценки характерного размера пор возможно использование отношения объема пор к площади их поверхности [13]. Относительное движение воздушной фазы в пористой среде легких описывается с привлечением теории фильтрации. Представление легких в виде пористой среды использовалось ранее в [14, 15], но при этом не учитывалось взаимодействие легочной ткани и воздуха, содержащегося в легких; совместное решение задач деформирования легочной ткани и фильтрации не выполнялось. Иначе говоря, в цитируемых работах легкие полагались недеформируемой («пассивной») средой, через которую под действием перепада давления просачивается воздух. В настоящей работе предлагается рассматривать пористую среду как неоднородно деформируемую под воздействием движения грудной клетки и диафрагмы, создающих градиенты давления, обеспечивающие просачивание воздуха.

Фильтрация жидкостей и газов в пористых средах хорошо изучена в задачах подземной гидромеханики. Исследованиям в этой области посвящены, в частности, работы М.А. Био [16, 17], Л.С. Лейбензона [18], Г.И. Баренблата [19]. В задачах подземной гидродинамики обычно принимается гипотеза о слабой сжимаемости жидкости и недеформируемости скелета среды. В последние годы количество работ по данной тематике непрерывно возрастает [20], что в значительной мере связано с потребностями нефтегазовой промышленности. В ряде работ приводятся постановки, в которых учитываются изменение пористости и проницаемости среды, обусловленные деформированием твердой фазы [21, 22].

Легкие человека испытывают большие обратимые деформации (в процессе спокойного дыхания изменение объема составляет порядка 15%, в процессе глубокого — порядка 55%), в связи с чем для описания процесса деформации легких необходимо использовать соотношения нелинейной теории упругости. Предварительные исследования показали, что компоненты градиента перемещений в некоторых подобластях (особенно в примыкающих к диафрагме и грудной клетке) достигают 0.9 даже при спокойном дыхании, вследствие чего анализируемая в данной работе задача относится к классу геометрически нелинейных.

Общая структура математической модели дыхательной системы, состоящей из подмодели течения воздуха в воздухоносных путях, подмодели течения воздуха в деформируемой пористой среде легких, подмодели газообмена и подмодели регуляции дыхания с учетом взаимосвязей между подмоделями рассмотрена в [4]. Конститутивные соотношения, используемые для описания движения воздуха в пористой среде легких, приведены авторами в [12]. В связи с нелинейностью задачи ее аналитическое решение на настоящий момент представляется недостижимым; для решения предлагается применение численных методов и пошаговой процедуры с малыми шагами по времени. Для реализации алгоритма решения задачи требуется разработка комплекса программ. В настоящей работе в рамках построения общей математической модели дыхательной системы человека рассматривается только задача течения воздуха в легких человека, то есть совместная задача упругого деформирования пористой среды легких и фильтрации воздуха через деформируемую пористую среду. Приводятся необходимые разрешающие соотношения. Разработанный авторами алгоритм реализации и результаты, полученные с помощью представленной модели, остались за рамками данной публикации.

2. Постановка задачи в дифференциальной форме

Дыхательная система человека (см. Рис. 1а) моделируется совокупностью недеформируемой воздухопроводящей зоны, включающей носовую полость, глотку, гортань, трахею, пять генераций бронхов (указатель 1) и упруго-деформируемой респираторной зоны, включающей легкие, содержащие мелкие дыхательные пути и альвеолы (указатель 2)). В легких человека сложно выделить отдельные каналы и альвеолы (Рис. 1б); легкие человека, состоящие из мелких дыхательных путей, альвеол и воздуха в них, представляются двухфазной упруго-деформируемой насыщенной пористой средой, одна из фаз которой — деформируемый скелет среды (легочная ткань), моделируется как деформируемое твердое тело, вторая фаза — заполняющий поровое пространство газ.

Выделим представительный объем двухфазной среды (материальный объем двухфазной среды легких, в котором содержится достаточное для статистического описания число «носителей» дыхательного процесса), и возьмем его содержащим не менее 10^3 альвеол.

Движение воздуха в воздухоносных путях в терминах газодинамики подробно изложено в предыдущих работах авторов [4, 9, 24] и в данной статье не обсуждается. Входами в легкие служат выходы из системы бронхов ($\Gamma_{AW/L}$). Связь между подмоделями воздухопроводящей и респираторной зон осуществим за счет задания условий на границе $\Gamma_{AW/L}$. При рассмотрении задачи движения воздуха в деформируемой пористой среде легких на границах, являющихся выходами из системы бронхов/входами ($\Gamma_{AW/L}$), через которые воздух попадает в

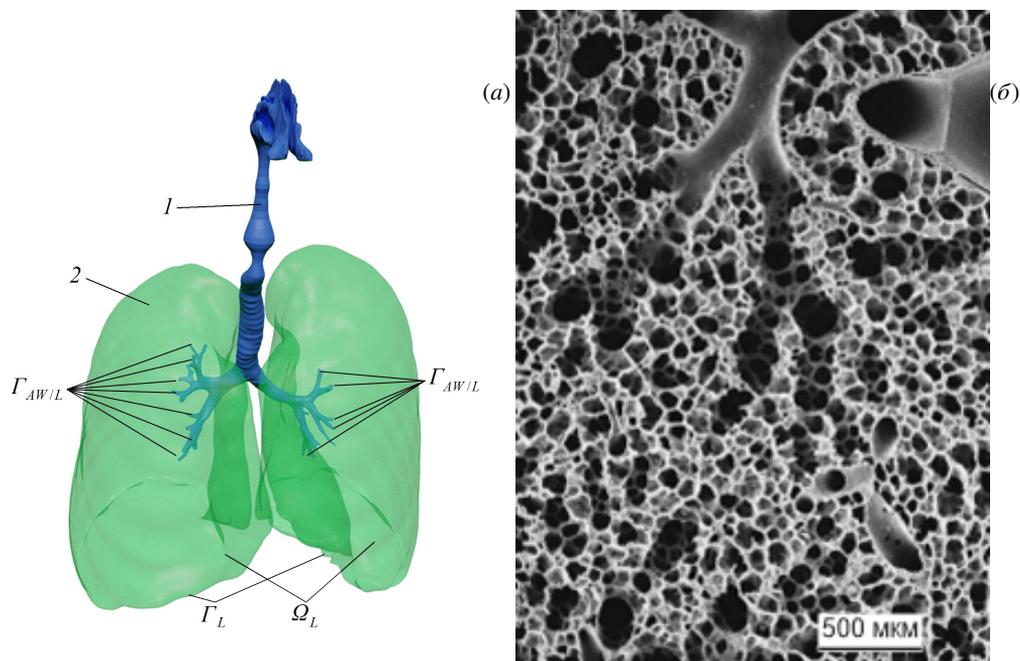


Рис. 1. Модель дыхательной системы (а), состоящая из воздухопроводящей зоны (указатель 1) и легких, аппроксимированных пористой средой (указатель 2); увеличенный фрагмент терминальных бронхиол, заканчивающихся альвеолами [23] (б)

легкие, зададим силовые граничные условия, на стенках легких (Γ_L) — граничные условия кинематического типа (перемещения точек каркаса и условия непроницаемости для газовой фазы).

В качестве начального отсчетного состояния дыхательного цикла выберем момент «конец выдоха — переход к вдоху»; при обычном дыхании инерцией потока воздуха можно пренебречь. Скорости движения частиц воздуха в начальный момент времени приравняем нулю. В силу низких скоростей движения воздуха в воздухоносных путях и его малой вязкости на входах в легкие можно принять давление равным атмосферному. Данное состояние полагается естественным ненапряженным, компоненты шаровой и девиаторной частей тензора напряжений твердой фазы равны нулю. Отсчетная конфигурация (форма легких) восстановлена на основе томографических снимков и представлена на Рис. 1а. Начальные значения параметров зададим исходя из известных экспериментальных данных [10, 25–27]: долю газовой фазы (пористости) примем равной 0.85; проницаемость — $1.58 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2$ [15]. В алгоритме реализации модели перед началом расчетов с указанными начальными значениями параметров отдельных фаз следует определить начальные характеристики двухфазной среды.

Дыхание — процесс нестационарный, в общем случае связь между подмоделями должна осуществляться в каждый момент времени в течение всего дыхательного цикла. Из решения задачи деформирования двухфазной среды легких определим поля скорости частиц газа в сечениях входов в легкие. Данное поле используем в качестве граничного условия для задачи газовой динамики в воздухоносных путях. В результате решения задачи для воздухоносных путей получим полное решение для скоростей движения воздуха и давления.

В первом приближении для компактного рассмотрения модели легких, не затрагивая задачу течения воздуха в верхних дыхательных путях, в силу малой вязкости воздуха (то есть близости к идеальному газу, для которого в состоянии покоя в каждой точке сообщающихся сосудов давление одинаково), в подмодели движения воздуха в легких примем давление на границах выходов из системы бронхов ($\Gamma_{AW/L}$) равным атмосферному (касательные компоненты вектора напряжений будут нулевыми) на протяжении всего дыхательного цикла. В ходе решения задачи исследования течения воздуха в пористой среде легких человека определим законы изменения массовых расходов воздуха в течение дыхательного цикла, которые используем в качестве граничных условий для подмодели течения воздуха в проводящей зоне. При этом информацию о составе вдыхаемого воздуха для подмодели легких найдем из подмодели проводящей зоны.

Описание функционирования легких в процессе дыхания сводится к решению совместной задачи упругого деформирования двухфазного континуума (насыщенной пористой среды), состоящего из легочной ткани и воздуха, и фильтрации (относительного движения) воздуха через деформируемую пористую среду. Поведение

первой фазы (легочной ткани) при деформировании зависит от ее упругих свойств, объема, плотности; в соотношения для описания фильтрации второй (газовой) фазы входят плотность, объем, давление, вязкость, температура, молярная масса, а также проницаемость легочной ткани. При расчетах по значениям параметров отдельных фаз определяются характеристики двухфазной среды. Все параметры напряженно-деформированного состояния и конфигурации легких, заполненных воздухом, а также параметры, учитывающие взаимодействие газа (воздуха) и легочной ткани, используются в подзадаче деформирования двухфазной среды, параметры газовой фазы — в подзадаче фильтрации.

Опишем фильтрацию законом Дарси; при этом естественно возникает вопрос о его применимости для рассматриваемого процесса. Объем легких человека может варьироваться от 3.5 до 7 л (от 0.0035 до 0,007 м³), площадь газообменной поверхности — от 80 до 130 м². Размер пор (d), определенный как отношение объема пор к площади их поверхности, можно оценить в диапазоне от $2.69 \cdot 10^{-5}$ до $8.75 \cdot 10^{-5}$ м. При указанном размере пор, плотности воздуха $\rho_f = 1.1455$ кг/м³ (при температуре, близкой к температуре человеческого тела, $t = 35^\circ\text{C}$), вязкости $\mu_f = 18,6 \cdot 10^{-6}$ Па·с, скорости газовой фазы от 0 до $15.5 \cdot 10^{-3}$ м/с характеризующие фильтрационное течение числа Рейнольдса ($Re = \rho_f \mathbf{u}_f d / \mu_f$) находятся в диапазоне от 0 до 0.08, что значительно меньше единицы [13]. В связи с этим применение закона Дарси для моделирования процесса фильтрации воздуха в пористой среде легких правомерно.

Для решения совместной задачи введем жесткую подвижную систему отсчета и свяжем ее с человеком. Будем рассматривать движение материальных объектов (частиц твердой и газовой фаз) только во введенной подвижной системе отсчета, считая ее инерциальной лабораторной системой координат (ЛСК). Воспользуемся лагранжевым подходом к моделированию: перед началом каждого временного шага будем переопределять у частиц лагранжевы координаты и отождествлять их с координатами в декартовой ортогональной ЛСК. Воздух в процессе дыхания перемещается в двух случаях: во-первых, вместе с двухфазной средой легких и, во-вторых, внутри пористой среды за счет перепада давления, обусловленного изменением объема легких.

Задача деформирования двухфазного континуума является существенно нелинейной за счет больших градиентов перемещений, поэтому ее постановка включает нелинейные уравнения движения (равновесия) и определяющие соотношения для расчетной области, занимаемой исследуемым континуумом и непрерывно изменяющейся. Решение подобных нелинейных задач осуществляется обычно или в скоростях, или в приращениях [28]. Общая постановка краевой задачи течения воздуха в упруго-деформируемой пористой среде, аппроксимирующей легкие человека, содержит следующие соотношения [12]:

– уравнение равновесия в скоростях (в предположении отсутствия внутренних массовых сил)

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_L; \quad (1)$$

– соотношение для скорости изменения взвешенного тензора напряжений Кирхгоффа (в предположении изотропии упругих свойств твердой фазы и пренебрежении сдвиговыми напряжениями в газовой фазе)

$$\dot{\hat{\Sigma}} = \dot{\hat{\Sigma}}_{av} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{d} \hat{\gamma}_s + \Omega_{\log} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \Omega_{\log}; \quad (2)$$

– соотношение для тензоров деформации скорости и вихря

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T), \quad (3)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T - \hat{\nabla} \mathbf{v}); \quad (4)$$

– соотношение для дивергента тензора деформации скорости

$$\mathbf{d} = \mathbf{D} - \frac{1}{3} I_1(\mathbf{D}) \mathbf{I}; \quad (5)$$

– соотношения, связывающие взвешенный тензор напряжения Кирхгоффа $\hat{\Sigma}$ и тензор напряжения Коши $\boldsymbol{\sigma}$ двухфазной среды [29, 30]:

$$\hat{\Sigma} = (\hat{\rho} / \hat{\rho}) \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} = (\hat{\rho} / \hat{\rho}) \hat{\Sigma}; \quad (6)$$

– соотношение для скорости изменения среднего напряжения в терминах тензора напряжений Кирхгоффа двухфазной среды, учитывающее взаимодействие газа и легочной ткани, полученное аналитически на основе решения вспомогательной задачи о всестороннем сжатии/растяжении представительного объема двухфазной

среды в форме шара, заполненного воздухом, для геометрически линейного случая (и впоследствии проверенное численно в геометрически нелинейной постановке при умеренно больших изменениях объема) [12, 31]

$$\dot{\Sigma}_{av} = I_1(\mathbf{D})Z, \quad (7)$$

$$Z = (\dot{\rho}/\rho)[A\hat{\gamma}_f + B]^{-1}[AB(1-\hat{\gamma}_f)(1-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\dot{\rho}/\rho}-Cp_f(\hat{\gamma}_f+1)] - \\ - (\dot{\rho}/\rho)[A\hat{\gamma}_f + B]^{-2}[A+B][AB(1-\hat{\gamma}_f)(1-\sqrt[3]{\dot{\rho}/\rho})-C\hat{\gamma}_fp_f] + (\dot{\rho}/\rho)^2[A\hat{\gamma}_f + B]^{-1}Cp_f; \quad (8)$$

– соотношение для логарифмической коротационной производной логарифмической меры деформации [32–34]

$$\hat{\mathbf{H}}^{\Omega_{\log}} = \dot{\hat{\mathbf{H}}} - \Omega_{\log} \cdot \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{H}} \cdot \Omega_{\log} = \mathbf{D}; \quad (9)$$

– соотношение для компонент логарифмического спина в базе главных векторов $\hat{\mathbf{p}}_i$ (осей) меры Генки (\mathbf{H})

$$\begin{cases} \Omega_{\log ij} = W_{ij} + \left(\frac{1}{\ln(\lambda_i/\lambda_j)} - \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \right) D_{ij}, & \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j, \\ \Omega_{\log ij} = W_{ij}, & \lambda_i = \lambda_j, \quad i \neq j; \end{cases} \quad (10)$$

– соотношение для определения тензора логарифмических деформаций через тензор Альманси

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^3 H_i \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \ln(1-2A_i) \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i, \quad (11)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{u} + \hat{\nabla} \mathbf{u}^T - \hat{\nabla} \mathbf{u} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{u}^T) = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i, \quad (12)$$

где поле перемещений находится интегрированием поля скоростей перемещений;

– соотношение для скорости изменения тензора деформации Альманси [28]

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) - (\hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T); \quad (13)$$

– соотношение для определения собственных значений правого тензора искажений $\mathbf{V} = (\hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T)^{1/2}$ через собственные значения тензора Альманси

$$\lambda_i = (1-2A_i)^{-1/2}; \quad (14)$$

– закон сохранения массы газовой фазы

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma_f \rho_f) + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u}_f) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_L, \quad t \in (0; T]; \quad (15)$$

– соотношение для скорости фильтрации газовой фазы, полученное из закона Дарси,

$$\mathbf{u}_f = -\frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \hat{\nabla}(p_f), \quad \mathbf{r} \in \Omega_L, \quad t \in (0; T]; \quad (16)$$

– уравнение состояния для давления

$$\dot{p}_f = \frac{\dot{\rho}_f}{M_f} R \theta_f, \quad \mathbf{r} \in \Omega_L, \quad t \in (0; T]; \quad (17)$$

– начальные условия

$$\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_L, \quad t = 0; \quad (18)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} = p^{AW} = p^{Atm}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{AW/L}, \quad t = 0; \quad (19)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_L, \quad t = 0; \quad (20)$$

$$p_f^0 = p^{Atm}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_L, \quad t = 0; \quad (21)$$

– граничные условия для двухфазной среды

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}_{\Gamma_L}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_L, \quad t \in [0; T]; \quad (22)$$

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} - (\hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{T}}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{AW/L}, \quad t \in [0; T]; \quad (23)$$

– граничные условия для газовой фазы в подзадаче фильтрации

$$p_f|_{\Gamma_{AW/L}} = p^{Atm}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{AW/L}, \quad t \in [0; T]; \quad (24)$$

$$v_{fn}|_{\Gamma_L} = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_L, \quad t \in [0; T]. \quad (25)$$

В выражениях (1)–(25) приняты обозначения: $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши двухфазной среды; \mathbf{v} — скорость частиц двухфазной среды; $\hat{\nabla}$ — оператор Гамильтона, определенный в актуальной конфигурации; $\boldsymbol{\Sigma}$ — взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа двухфазной среды; $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_{av}$ — скорость изменения среднего напряжения Кирхгоффа двухфазной среды; \mathbf{I} — единичный тензор второго ранга; μ — второй параметр Ламе твердой фазы; \mathbf{d} — девиатор тензора деформации скорости; $\hat{\gamma}_s$ — объемная доля твердой фазы; Ω_{\log} — логарифмический спин; \mathbf{S} — девиатор тензора напряжений Кирхгоффа твердой фазы; \mathbf{D} — тензор деформации скорости; \mathbf{W} — тензор вихря; $\hat{\rho}, \hat{\rho}$ — плотность двухфазной среды в отсчетной и текущей конфигурациях; $A = (2\mu + 3\alpha)$, $B = 4\mu$, $C = (6\mu + 3\alpha)$, α, μ — параметры Ламе твердой фазы; $\hat{\gamma}_f$ — объемная доля газовой фазы; p_f — давление газовой фазы, [Па]; \mathbf{H} — тензор деформации Генки, определенный в актуальной конфигурации; верхний индекс Ω_{\log} — обозначение логарифмической коротационной производной; λ_i — собственные значения тензора искажений, H_i — главные значения тензора логарифмических деформаций \mathbf{H} ; A_i — главные значения тензора деформации Альманси; $\hat{\mathbf{r}}_i$ — главные векторы меры \mathbf{V} ; ρ_f — плотность газовой фазы; \mathbf{u}_f — скорость фильтрации газовой фазы в пористой среде ($\mathbf{u}_f = \gamma_f \mathbf{v}_f$); \mathbf{v}_f — относительная скорость движения газовой фазы в пористой среде; $\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})$ — тензор проницаемости (второго ранга) пористой среды, [м²]; μ_f — динамическая вязкость, [Па·с]; R — универсальная газовая постоянная; θ_f — температура газовой фазы; M_f — молярная масса газа; p^{AW} — давление на входе в легкие; p^{Atm} — атмосферное давление; $\bar{\Omega}_L$ — замкнутая область двухфазной насыщенной пористой среды легких человека, Ω_L — внутренность области легких, Γ_L — граница области легких ($\bar{\Omega}_L = \Omega_L \cup \Gamma_L \cup \Gamma_{AW/L}$); $\Gamma_{AW/L}$ — границы выходы из воздухоносных путей, являющиеся одновременно входами в легкие человека (граница между областями воздухоносных путей и двухфазной пористой средой легких $\Gamma_{AW/L} = \bar{\Omega}_{AW} \cap \bar{\Omega}_L$).

Скорость частиц двухфазной среды находится через скорости движения частиц каждой из фаз как среднemasовая скорость смеси. В силу того, что масса газа, содержащегося в рассматриваемом представительном объеме двухфазной среды легких, пренебрежимо мала по сравнению с массой частиц в нем твердого каркаса, скорость двухфазной среды можно считать совпадающей со скоростью твердой фазы ($\mathbf{v} = \mathbf{v}_s$). Скорость движения частиц воздуха можно выразить в виде суммы скорости «переносного» движения — движения вместе с деформируемой твердой фазой относительно введенной лабораторной системы координат в рассматриваемой точке, и скорости «относительного» движения, обусловленного просачиванием газа относительно твердого каркаса. Таким образом, во всех определяющих и кинематических соотношениях скорость и перемещение частиц двухфазной среды полагаются совпадающими со скоростью и перемещениями частиц твердой фазы.

3. Постановка задачи в обобщенной (слабой) форме

Ввиду того, что аналитическое решение нелинейной системы уравнений (1)–(25) в настоящее время не представляется возможным, для исследования процесса течения воздуха в пористой среде легких применяются численные подходы с использованием пошаговой процедуры. При решении нелинейных задач численными методами обычно осуществляется переход к обобщенной (слабой) форме, позволяющей понизить порядок дифференциальных операторов исходной (классической) постановки, ослабить требования к гладкости искомых переменных (перейти от пространства непрерывно дифференцируемых функций к пространству кусочно-дифференцируемых функций). Для получения обобщенного решения в механике сплошной среды широкое распространение нашли вариационные принципы [29, 35–37]. Обзор вариационных формулировок геометрически нелинейных задач содержится в [38, 39]. Применение вариационных принципов для решения геометрически нелинейных упругопластических задач рассмотрено в [40]. Другим широко распространенным подходом к формулировке обобщенных решений краевых задач является метод Галеркина [41–44], не требующий наличия вариационного принципа.

Для численного решения нелинейной подзадачи деформации двухфазной среды легких используется метод конечных элементов (МКЭ). Выполняется пошаговая процедура, то есть весь интервал нагружения разбивается на ряд малых шагов по времени. На каждом временном шаге последовательно рассматриваются две подзадачи: деформирование легких и фильтрация (относительное движение) воздуха через пористую среду. Ниже приведены разрешающие соотношения этих подзадач.

Умножим скалярно соотношения (1) и (23) на вектор-функцию $\mathbf{h} \in H_1$ ($H_1 = \{h \in H^1(\bar{\Omega}^t)\}$) — пространство Соболева), проинтегрируем по Ω и $\Gamma_{AW/L}$ соответственно:

$$\int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot [\hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \boldsymbol{\sigma})] d\Omega = 0, \quad (26)$$

$$\int_{\Gamma_{AW/L}} \mathbf{h} \cdot [\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} - (\hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \hat{\mathbf{T}}] d\Gamma_{AW/L} = 0. \quad (27)$$

Опустив часть выкладок (они приведены в [45]), из соотношений (26) и (27) получим следующий итоговый вид обобщенного решения для двухфазной среды легких [45]:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T \cdot \left[(\hat{\rho}/\hat{\rho}) \left[I_1 \left(\frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) \right) Z \mathbf{I} - I_1 \left(\frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) \right) \boldsymbol{\Sigma} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2\mu \left(\frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) - \frac{1}{3} I_1 \left(\frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) \right) \mathbf{I} \right) \hat{\gamma}_s \right] \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T \cdot \left[(\hat{\rho}/\hat{\rho}) \left[\frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{S} - \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T + \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}) - \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma} + (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T \cdot \left[(\hat{\rho}/\hat{\rho}) \left[\mathbf{Q} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \right] \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{AW/L}} \mathbf{h} \cdot \left[-\hat{\mathbf{T}} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{T}} \right] d\Gamma_{AW/L} = \\ & = \int_{\Gamma_{AW/L}} \mathbf{h} \cdot \left[\hat{\mathbf{T}} \right] d\Gamma_{AW/L}. \quad (28) \end{aligned}$$

Здесь тензор четвертого ранга \mathbf{Q} имеет вид:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i,j,m,n,q,k} \left[\left(\frac{1}{\ln(\lambda_q/\lambda_k)} - \frac{\lambda_q^2 + \lambda_k^2}{\lambda_q^2 - \lambda_k^2} \right) l_i^q l_j^k \mathbf{k}^i \mathbf{k}^j \frac{l_{qm} l_{kn} + l_{km} l_{qn}}{2} \mathbf{k}^m \mathbf{k}^n \right],$$

где l_{ij}, l_j^i — соответствующие компоненты матрицы косинусов углов между базисными векторами \mathbf{k}_i ЛСК и главными векторами $\hat{\mathbf{p}}_j$ меры тензоров искажения \mathbf{V} (совпадающими с главными векторами тензоров Альманси и Генки) определяются согласно соотношению: $l_{ij} = l_j^i = \mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_j$. Переменная Z в (28) учитывает влияние давления воздуха, находящегося в пористой среде легких, на скелет среды (легочную ткань), и вычисляется из (8) по давлению газовой фазы, пористости двухфазной среды и упругим свойствам легочной ткани.

Соотношение (28) представляет собой обобщенное решение исходной задачи, из которого устанавливаются скорости движения двухфазной среды легких и параметров деформирования двухфазной среды. Численное решение подзадачи деформирования двухфазной среды легких осуществляется на основе соотношения (28) с использованием МКЭ [46]. Прежде чем перейти к разрешающему соотношению в терминах КЭ, запишем (28)

в компонентной форме:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} h_{j,i} \left[(\hat{\rho}/\bar{\rho}) \left[\frac{1}{3} Z v_{k,k} \delta_{ij} + \mu (v_{j,i} + v_{i,j}) \hat{\gamma}_s - \frac{2}{9} \mu v_{k,k} \hat{\gamma}_s \delta_{ij} - \frac{1}{3} v_{k,k} \hat{S}_{ij} \right] \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} h_{j,i} \left[(\hat{\rho}/\bar{\rho}) \left[\frac{1}{2} (v_{i,l} \hat{S}_{lj} - v_{l,i} \hat{S}_{lj} - \hat{S}_{ik} v_{k,j} + \hat{S}_{ik} v_{j,k}) - v_{i,l} \hat{S}_{lj} + v_{k,k} \hat{S}_{ij} \right] \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} h_{j,i} \left[(\hat{\rho}/\bar{\rho}) \left[\hat{Q}_{islk} \hat{S}_{sj} v_{l,k} - \hat{Q}_{pjlk} \hat{S}_{ip} v_{l,k} \right] \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{AW/L}} \hat{h}_i \left[-\hat{T}_i v_{k,k} + v_{l,k} n_k n_l \hat{T}_i \right] d\Gamma_{AW/L} = \\ & = \int_{\Gamma_{AW/L}} \hat{h}_i \left[\hat{T}_i \right] d\Gamma_{AW/L}. \end{aligned}$$

Рассматриваемая область представляется совокупностью M тетраэдральных конечных элементов. С использованием функций формы запишем итоговый вид разрешающего соотношения в подзадаче деформирования двухфазной пористой среды легких человека для КЭ с номером m ($m = \overline{1, M}$):

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{\Omega^{(m)}} (\hat{\rho}/\bar{\rho}) \left[B_{jj\alpha}^{(m)r} \frac{1}{3} Z B_{kk\beta}^{(m)q} + B_{j\alpha}^{(m)r} \mu \hat{\gamma}_s B_{ji\beta}^{(m)q} + B_{j\alpha}^{(m)r} \mu \hat{\gamma}_s B_{ij\beta}^{(m)q} - B_{jj\alpha}^{(m)r} \frac{2}{9} \mu \hat{\gamma}_s B_{kk\beta}^{(m)q} \right. \right. \\ & \left. \left. + B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{2}{3} \hat{S}_{ij} B_{kk\beta}^{(m)q} \right] d\Omega^{(m)} \right\} \hat{v}_q^{(m)\beta} + \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{\Omega^{(m)}} (\hat{\rho}/\bar{\rho}) \left[B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{1}{2} \hat{S}_{kj} B_{ik\beta}^{(m)q} - B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{1}{2} \hat{S}_{kj} B_{ki\beta}^{(m)q} \right. \right. \\ & \left. \left. - B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{1}{2} \hat{S}_{ik} B_{kj\beta}^{(m)q} + B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{1}{2} \hat{S}_{ik} B_{jk\beta}^{(m)q} - B_{j\alpha}^{(m)r} \hat{S}_{kj} B_{ik\beta}^{(m)q} \right] d\Omega^{(m)} \right\} \hat{v}_q^{(m)\beta} + \\ & + \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{\Omega^{(m)}} (\hat{\rho}/\bar{\rho}) \left[B_{j\alpha}^{(m)r} \hat{Q}_{iplk} \hat{S}_{pj} B_{lk\beta}^{(m)q} - B_{j\alpha}^{(m)r} \hat{Q}_{pjlk} \hat{S}_{ip} B_{lk\beta}^{(m)q} \right] d\Omega^{(m)} \right\} \hat{v}_q^{(m)\beta} + \\ & + \left\{ \sum_{m=1}^{M_\Gamma} \int_{\Gamma_{AW/L}^{(m)}} N_{i\alpha}^{(m)r} \left[-\hat{T}_i B_{kk\beta}^{(m)q} + B_{lk\beta}^{(m)q} n_k n_l \hat{T}_i \right] d\Gamma_{AW/L}^{(m)} \right\} \hat{v}_q^{(m)\beta} = \left\{ \sum_{m=1}^{M_\Gamma} \int_{\Gamma_{AW/L}^{(m)}} N_{i\alpha}^{(m)r} \left[\hat{T}_i \right] d\Gamma_{AW/L}^{(m)} \right\}, \quad (29) \end{aligned}$$

где приняты обозначения: индексы в виде греческих букв α и β — номера узлов, в виде латинских букв — координатные оси; $N_{i\alpha}^{(m)j}$ — функции формы ($N_{i\alpha}^{(m)j}(\mathbf{r}_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $N_{i\alpha}^{(m)j}(\mathbf{r}_\beta) = \delta_i^j$, $i, j = \overline{1, 3}$); $B_{ji\beta}^{(m)l}(\mathbf{r}) = \partial N_{j\beta}^{(m)l}(\mathbf{r}) / \partial x^i$ — производные функций формы; $\hat{v}_q^{(m)\beta}$ — вектор узловых скоростей. Связь компонент скоростей перемещений внутри элемента, компонент градиента вектора скорости со скоростями перемещений в узлах с учетом функций формы имеет вид:

$$\hat{v}_i^{(m)} = N_{i\beta}^{(m)q}(\mathbf{r}) \hat{v}_q^{(m)\beta}, \quad \hat{v}_i^{(m)} = N_{i\beta}^{(m)q}(\mathbf{r}) \hat{v}_q^{(m)\beta}.$$

Ненулевые диагональные элементы функции формы $N_{i\beta}^{(m)q}$ определяются через координаты узлов из соотношений [41]:

$$N_{i\beta}^{(m)q} = \frac{a_\beta^{(m)} + b_\beta^{(m)} x_{i=q=1}^{(m)} + c_\beta^{(m)} x_{i=q=2}^{(m)} + d_\beta^{(m)} x_{i=q=3}^{(m)}}{6V^{(m)}}.$$

Здесь β есть I, J, K, L — номера узлов рассматриваемого тетраэдрального четырехузлового элемента; $x_1^{(m)}$, $x_2^{(m)}$, $x_3^{(m)}$ — координатные оси; $V^{(m)}$ — объем КЭ; $a_\beta^{(m)}$, $b_\beta^{(m)}$, $c_\beta^{(m)}$, $d_\beta^{(m)}$ — коэффициенты.

Объем тетраэдрального КЭ (он же объем содержащейся в нем двухфазной среды) и коэффициенты a, b, c ,

d (например, для узла I) находятся как определители матриц (индекс элемента (m) опущен):

$$V = \frac{1}{6} \det \begin{vmatrix} 1 & x_{1I} & x_{2I} & x_{3I} \\ 1 & x_{1J} & x_{2J} & x_{3J} \\ 1 & x_{1K} & x_{2K} & x_{3K} \\ 1 & x_{1L} & x_{2L} & x_{3L} \end{vmatrix},$$

$$a_I = \det \begin{vmatrix} x_{1J} & x_{2J} & x_{3J} \\ x_{1K} & x_{2K} & x_{3K} \\ x_{1L} & x_{2L} & x_{3L} \end{vmatrix}, \quad b_I = -\det \begin{vmatrix} 1 & x_{2J} & x_{3J} \\ 1 & x_{2K} & x_{3K} \\ 1 & x_{2L} & x_{3L} \end{vmatrix},$$

$$c_I = -\det \begin{vmatrix} x_{1J} & 1 & x_{3J} \\ x_{1K} & 1 & x_{3K} \\ x_{1L} & 1 & x_{3L} \end{vmatrix}, \quad d_I = -\det \begin{vmatrix} x_{1J} & x_{2J} & 1 \\ x_{1K} & x_{2K} & 1 \\ x_{1L} & x_{2L} & 1 \end{vmatrix},$$

где $x_{q\beta}$ — координаты узлов; коэффициенты для остальных узлов получаются циклической перестановкой индексов I, J, K, L .

На основе соотношения (29) с помощью процедуры ансамблирования формируется матрица жесткости и вектор правой части; формируется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), из решения которой устанавливаются векторы скоростей узлов сетки, аппроксимирующей область двухфазной пористой среды.

Для моделирования относительного движения воздуха в пористой среде легких применяется метод конечных (контрольных) объемов (МКО), который хорошо зарекомендовал себя при решении задач механики жидкости и газа [47, 48]. В качестве контрольных объемов (КО) будем использовать те же элементы, что и при решении подзадачи деформирования. Давление газовой фазы, найденное через изменение объема, привяжем к центрам КО; значения вычисляемых переменных (средние значения по КО) в подзадаче фильтрации будем определять в центрах КО.

Подставим соотношение (16) в (15) и проинтегрируем по m -му контрольному объему $\Omega^{(m)}$:

$$\int_{\Omega^{(m)}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\gamma_f \rho_f) + \nabla \cdot \left(-\rho_f \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \hat{\nabla}(p_f) \right) \right] d\Omega^{(m)} = 0.$$

С помощью теоремы Остроградского–Гаусса преобразуем соотношение к виду:

$$\int_{\Omega^{(m)}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\gamma_f \rho_f) \right] d\Omega^{(m)} + \int_{S^{(m)}} \left[\left(-\rho_f \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \hat{\nabla}(p_f) \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS^{(m)} = 0, \quad (30)$$

где $S^{(m)}$ — ограничивающая КО поверхность, \mathbf{n} — внешняя нормаль к ней.

Для численной реализации разрешающего соотношения (30) выполним аппроксимацию по времени и пространству:

$$\gamma_f^{(n-1)} \frac{\rho_f^{(n)} - \rho_f^{(n-1)}}{\Delta t} V^{(n-1)} + \sum_{(a)} \left[\left(-\rho_f^{(n-1)} \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \frac{p_{fA(a)}^{(n-1)} - p_{fC}^{(n-1)}}{\left| \mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)} \right| \left| \mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)} \right|} \right) \cdot \mathbf{n}_{(a)}^{(n-1)} S_{(a)}^{(n-1)} \right] = 0. \quad (31)$$

При этом Δt — шаг по времени подзадачи фильтрации; (n) — индекс, указывающий на текущий момент времени t_n ; индексы C и A обозначают, соответственно, центры рассматриваемого и соседнего элементов, имеющих общую грань (a) ; $\mathbf{e}_{CA(a)}$ — вектор, соединяющий центры текущего и соседнего элементов; $\mathbf{n}_{(a)}$ — единичный вектор внешней нормали к грани (a) контрольного объема; $S_{(a)}$ — площадь грани (a) контрольного объема (при этом учитываем, что тетраэдральный элемент имеет четыре грани).

Из соотношения (31) получим выражение для определения плотности газовой фазы в КО:

$$\rho_f^{(n)} = \sum_{(a)} \left[\left(-\rho_f^{(n-1)} \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \frac{p_{fA(a)}^{(n-1)} - p_{fC}^{(n-1)}}{\left| \mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)} \right| \left| \mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)} \right|} \right) \cdot \mathbf{n}_{(a)}^{(n-1)} S_{(a)}^{(n-1)} \right] \frac{\Delta t}{\gamma_f^{(n-1)} V^{(n-1)}} + \rho_f^{(n-1)}. \quad (32)$$

На основе соотношения (32) устанавливается изменение плотности газовой фазы в КО пористой среды легких за счет изменения их объема, поступления/оттока массы (между соседними элементами или через границы (грани) $\Gamma_{AW/L}$, являющиеся выходами из воздухоносных путей и одновременно входами в легкие), обусловленного градиентом давления газовой фазы.

Таким образом, движение воздуха в легких человека в процессе дыхания описывается в виде связанной задачи упругого деформирования двухфазной насыщенной пористой среды (см. разрешающие соотношения (28)) и фильтрации воздуха в пористой среде (см. соотношение (32), при этом входящие в него переменные, зависят от решения подзадачи деформирования двухфазной среды легких). В результате деформирования изменяются координаты узлов, объем элемента (V), площади граней (S), нормаль к граням (n), координаты центров элементов и расстояния между ними. В зависимости от объема другой становится пористость (доля газовой фазы) и давление газовой фазы в элементе. Давление воздушной фазы зависит от двух составляющих: от изменения объема на каждом шаге деформирования (определяется из подзадачи деформирования) и от изменения плотности воздушной фазы (при этом производная давления прямо пропорциональна производной плотности (см. соотношение (17)), находимой из решения подзадачи фильтрации. Результаты, получаемые из подзадачи фильтрации, в свою очередь, оказывают влияние на решение подзадачи деформирования: давление газовой фазы, которое зависит от результатов решения подзадачи фильтрации, входит в соотношение для скорости изменения среднего напряжения двухфазной среды легких (см. соотношения (7), (8)).

В связи с нелинейностью задачи ее решение осуществляется пошагово. Для реализации связанной задачи деформирования пористой среды и фильтрации воздуха в ней возможны два варианта построения алгоритма: либо объединить подзадачи деформации и фильтрации в одну систему уравнений [49, 50], которую решать на каждом временном шаге, либо на каждом временном шаге последовательно решать каждую из подзадач [51–54]. Авторами выбран второй вариант: сначала будем решать подзадачу деформирования двухфазной среды в скоростях (с использованием МКЭ), при этом все характеристики газовой фазы (включая поровое давление и пористость) принимаются постоянными и соответствующими началу текущего шага по времени; далее будем решать подзадачу фильтрации (с использованием МКО). По найденным скоростям изменения искомых параметров интегрированием вычислим значения параметров (компонент тензоров напряжений и деформаций, векторов перемещений узловых точек, переопределим конфигурацию области) и примем их за исходную информацию для решения на следующем временном шаге.

4. Заключение

В работе предложена модель для исследования течения воздуха в легких человека, в которой последние моделируются как упруго-деформируемая насыщенная двухфазная пористая среда. Представлена общая структура модели с учетом за счет граничных условий взаимосвязи подмоделей воздухоносных путей и легких. Сформулирована математическая постановка нелинейной задачи. Решение задачи предполагает рассмотрение подзадач деформирования пористой среды легких и относительного движения воздушной фазы в пористой среде, связанных через искомые переменные. Решение подзадачи деформирования осуществляется методом конечных элементов, подзадачи фильтрации — методом конечных объемов; получены разрешающие соотношения МКЭ и МКО. В связи с нелинейностью задачи ее решение предполагается осуществить с помощью пошаговой процедуры. Для численной реализации решения требуется разработка алгоритма и комплекса программ, описание которых и анализ результатов остаются за рамками данной публикации.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0003).

Литература

1. Ракитский В.Н., Авалиани С.Л., Новиков С.М., Шашина Т.А., Додина Н.С., Кислицин В.А. Анализ риска здоровью при воздействии атмосферных загрязнений как составная часть стратегии уменьшения глобальной эпидемии неинфекционных заболеваний // Анализ риска здоровью. 2019. № 4. С. 30–36. DOI: 10.21668/health.risk/2019.4.03.
2. Grzywa-Celińska A., Krusiński A., Milanowski J. ‘Smoking kills’ – Effects of air pollution on human respiratory system // Annals of Agricultural and Environmental Medicine. 2020. Vol. 27. P. 1–5. DOI: 10.26444/aaem/110477.
3. WHO global air quality guidelines: Particulate matter (PM_{2.5} and PM₁₀), ozone, nitrogen dioxide, sulfur dioxide and carbon monoxide. 2021. URL: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/34662007/> (дата обращения: 1.7.2024) PMID: 34662007.
4. Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю. Моделирование процесса дыхания человека: концептуальная и математическая постановки // Математическая биология и биоинформатика. 2016. Т. 11, № 1. С. 64–80. DOI: 10.17537/2016.11.64.
5. Анатомия человека. Т. 1 / под ред. М. Сапина. М.: Медицина, 1993. 544 с.
6. Синельников Р.Д., Синельников Я.Р. Атлас анатомии человека. Т. 2. М.: Медицина, 1996. 264 с.

7. *Rahimi-Gorji M., Pourmehran O., Gorji-Bandpy M., Gorji T.B.* CFD simulation of airflow behavior and particle transport and deposition in different breathing conditions through the realistic model of human airways // *Journal of Molecular Liquids*. 2015. Vol. 209. P. 121–133. DOI: 10.1016/j.molliq.2015.05.031.
8. *Rahman M., Zhao M., Islam M.S., Dong K., Saha S.C.* Numerical study of nano and micro pollutant particle transport and deposition in realistic human lung airways // *Powder Technology*. 2022. Vol. 402. 117364. DOI: 10.1016/j.powtec.2022.117364.
9. *Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю., Кучуков А.И.* Численное исследование нестационарного течения запыленного воздуха и оседания пылевых частиц различных размеров в нижних дыхательных путях человека // *Математическая биология и биоинформатика*. 2023. Т. 18, № 2. С. 347–366. DOI: 10.17537/2023.18.347.
10. *Weibel E.R.* *Morphometry of the Human Lung*. New York: Springer Berlin Heidelberg, 1963. DOI: 10.1007/978-3-642-87553-3.
11. *Horsfield K., Dart G., Olson D.E., Filley G.F., Cumming G.* Models of the human bronchial tree // *Journal of Applied Physiology*. 1971. Vol. 31. P. 207–217. DOI: 10.1152/jappl.1971.31.2.207.
12. *Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю.* О моделировании течения воздуха в легких человека: конститутивные соотношения для описания деформирования пористой среды // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2020. № 4. С. 165–174. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.14.
13. *Леонтьев Н.Е.* *Основы теории фильтрации*. М.: МАКС Пресс, 2017. 88 с.
14. *DeGroot C.T.* *Numerical Modelling of Transport in Complex Porous Media: Metal Foams to the Human Lung*: дис. ... канд. / DeGroot C. T. University of Western Ontario, 2012. URL: <https://ir.lib.uwo.ca/etd/655> (дата обращения: 1.7.2024).
15. *DeGroot C.T., Straatman A.G.* A Conjugate Fluid–Porous Approach for Simulating Airflow in Realistic Geometric Representations of the Human Respiratory System // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2016. Vol. 138, no. 3. 034501. DOI: 10.1115/1.4032113.
16. *Biot M.A.* General Theory of Three-Dimensional Consolidation // *Journal of Applied Physics*. 1941. Vol. 12, no. 2. P. 155–164. DOI: 10.1063/1.1712886.
17. *Biot M.A.* General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material // *Journal of Applied Mechanics*. 1956. Vol. 23. P. 91–96.
18. *Лейбензон Л.С.* *Движение жидкостей и газов в пористой среде*. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 244 с.
19. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* *Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа*. М.: Недра, 1972. 288 с.
20. *Сираев Р.Р.* Фильтрация жидкости в пористой среде Форцгеймера с пространственно неоднородными пористостью и проницаемостью // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2019. Т. 12, № 3. С. 281–292. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.3.24.
21. *Шешенин С.В., Артамонова Н.Б.* Моделирование нелинейной консолидации пористых сред // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2022. № 1. С. 167–176. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.1.13.
22. *Artamonova N.B., Sheshenin S.V.* Finite element implementation of a geometrically and physically nonlinear consolidation model // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2023. Vol. 35, no. 4. P. 1291–1308. DOI: 10.1007/s00161-022-01124-5.
23. *Weibel E.R.* What makes a good lung? // *Swiss Medical Weekly*. 2009. Vol. 139, no. 27/28. P. 375–386. DOI: 10.4414/smw.2009.12270.
24. *Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю., Некрасова А.В.* Математическая модель течения воздуха с твердыми частицами в носовой полости человека // *Математическая биология и биоинформатика*. 2021. Т. 16, № 2. С. 349–366. DOI: 10.17537/2021.16.349.
25. *Gehr P., Bachofen M., Weibel E.R.* The normal human lung: ultrastructure and morphometric estimation of diffusion capacity // *Respiration Physiology*. 1978. Vol. 32. P. 121–140. DOI: 10.1016/0034-5687(78)90104-4.
26. *Armstrong J.D., Gluck E.H., Crapo R.O., Jones H.A., Hughes J.M.* Lung tissue volume estimated by simultaneous radiographic and helium dilution methods. // *Thorax*. 1982. Vol. 37. P. 676–679. DOI: 10.1136/thx.37.9.676.
27. *Kamschulte M., Schneider C.R., Litzbauer H.D., Tscholl D., Schneider C., Zeiner C., Krombach G.A., Ritman E.L., Bohle R.M., Langheinrich A.C.* Quantitative 3D Micro-CT Imaging of Human Lung Tissue // *Fortschr Röntgenstr.* 2013. Vol. 185. P. 869–876. DOI: 10.1055/s-0033-1350105.
28. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* *Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения*. М.: Наука, 1986. 232 с.
29. *Лурье А.И.* *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512 с.

30. *Atluri S.N.* On Some New General and Complementary Energy Theorems for the Rate Problems in Finite Strain, Classical Elastoplasticity // *Journal of Structural Mechanics: An International Journal*. 1980. Vol. 8, no. 1. P. 61–92. DOI: 10.1080/03601218008907353.
31. *Trusov P.V., Zaitseva N.V., Tsinker M.Y.* A mathematical model of the human respiratory system considering environmental influence // *AIP Conference Proceedings*. 2020. Vol. 2216. 060007. DOI: 10.1063/5.0003562.
32. *Hencky H.* Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen // *Zeitschrift für technische Physik*. 1928. Vol. 6. P. 215–220.
33. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate // *Acta Mechanica*. 1997. Vol. 124. P. 89–105. DOI: 10.1007/bf01213020.
34. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate // *Journal of Elasticity*. 1997. Vol. 47. P. 51–68. DOI: 10.1023/A:1007356925912.
35. *Sandhu R.S., Pister K.S.* Variational methods in continuum mechanics // *Variational Methods in Engineering*. Vol. 1 / ed. by C. Brebbia, H. Tottenham. Southampton University Press, 1973. P. 1/13–1/25.
36. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
37. *Васицку К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
38. *Oden J.T.* Variational principles in nonlinear continuum mechanics // *Var. meth. Eng.* Southampton. Vol. 1. 1973. P. 2/1–2/20, 2/105–2/108.
39. *Одэн Д.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
40. *Neale K.W.* On the Application of a Variational Principle for Large-Displacement Elastic-Plastic Problems // *Variational Methods in the Mechanics of Solids*. Elsevier, 1980. P. 374–377. DOI: 10.1016/B978-0-08-024728-1.50066-5.
41. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
42. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.–Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
43. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.
44. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 536 с.
45. *Trusov P.V., Tsinker M.Y.* Generalized solution for the boundary value problem of airflow in a deformable porous medium approximating human lungs // *AIP Conference Proceedings*. 2023. Vol. 2627. 050012. DOI: 10.1063/5.0117384.
46. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/ek21-22.
47. *Jasak H.* Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows: Thesis submitted for the Degree of Doctor of Philosophy of the University of London and Diploma of Imperial College: PhD thesis / Jasak H. London: Department of Mechanical Engineering Imperial College of Science, Technology, Medicine, 1996. P. 396.
48. *Moraes A., Lage P., Cunha G., da Silva L.F.R.* Analysis of the non-orthogonality correction of finite volume discretization on unstructured meshes // *Proc. of the 22nd International Congress of Mechanical Engineering. COBEM 2013, Ribeirão Preto, SP, Brazil, November 3-7, 2013*. P. 3519–3530.
49. *Dean R.H., Gai X., Stone C.M., Minkoff S.E.* A Comparison of Techniques for Coupling Porous Flow and Geomechanics // *SPE Journal*. 2006. Vol. 11, no. 1. P. 132–140. DOI: 10.2118/79709-PA.
50. *Jeannin L., Mainguy M., Masson R., Vidal-Gilbert S.* Accelerating the convergence of coupled geomechanical-reservoir simulations // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2006. Vol. 31, no. 10. P. 1163–1181. DOI: 10.1002/nag.576.
51. *Settari A., Mounts F.M.* A Coupled Reservoir and Geomechanical Simulation System // *SPE Journal*. 1998. Vol. 3, no. 3. P. 219–226. DOI: 10.2118/50939-PA.
52. *Settari A., Walters D.A.* Advances in Coupled Geomechanical and Reservoir Modeling With Applications to Reservoir Compaction // *SPE Journal*. 2001. Vol. 6, no. 3. P. 334–342. DOI: 10.2118/74142-PA.
53. *Wheeler M.F., Gai X.* Iteratively coupled mixed and Galerkin finite element methods for poro-elasticity // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2007. Vol. 23, no. 4. P. 785–797. DOI: 10.1002/num.20258.
54. *Kim J., Tchelep H.A.A., Juanes R.* Stability, Accuracy, and Efficiency of Sequential Methods for Coupled Flow and Geomechanics // *SPE Journal*. 2011. Vol. 16. P. 249–262. DOI: 10.2118/119084-PA.

Сведения об авторах:

Трусов Петр Валентинович, дфмн, проф., зав.каф., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, ул. Комсомольский пр-т, д. 29; e-mail: tpv@matmod.pstu.ac.ru; ORCID: 0000-0001-8997-5493

Зайцева Нина Владимировна, акад. РАН, д.м.н., проф., научн. рук., Федеральное бюджетное учреждение науки «Федеральный научный центр медико-профилактических технологий управления рисками здоровью населения» (ФБУН ФНЦ МПТ УРЗН); e-mail: znv@fcrisk.ru; ORCID: 0000-0003-2356-1145

Цинкер Михаил Юрьевич (корр.), б/с, мнс, ФБУН ФНЦ МПТ УРЗН; e-mail: cinker@fcrisk.ru; ORCID: 0000-0002-2639-5368

Нурисламов Владислав Владимирович, программист, ФБУН ФНЦ МПТ УРЗН; e-mail: maixrock3@gmail.com; ORCID: 0009-0009-6206-8047