

Научная статья

## Об идентификации характеристик неоднородных вязкоупругих тел в рамках модели дробного порядка

И.В. Богачев<sup>1</sup>, А.О. Ватulyян<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

<sup>2</sup> Южный математический институт – филиал ВЦ РАН, Владикавказ, Российская Федерация

Построение моделей вязкоупругих материалов со сложной неоднородной структурой является в настоящее время актуальной задачей механики сплошных сред. Наряду с классическими моделями все большее распространение получают дробно-дифференциальные модели вязкоупругости. В работе представлена модель установившихся колебаний неоднородных вязкоупругих тел с использованием дифференциальных операторов дробного порядка, и с учетом дробности порядка операторов приведен соответствующий вид комплексного модуля, описывающего свойства материала. Модуль включает четыре характеристики: мгновенный и длительный модули упругости (в случае неоднородного материала являющиеся функциями координат), время релаксации и параметр дробности. Исследованы свойства комплексного модуля, выяснены диапазоны значений параметров модели, при которых наиболее выпукло проявляются реологические свойства. Сформулирована общая постановка обратной задачи идентификации функций-параметров модели по данным акустического зондирования. В рамках этой постановки решены обратные задачи для конкретных объектов, а именно для вязкоупругих неоднородных стержня и круглой пластины. В обеих модельных задачах проанализирована связь параметра дробности с амплитудно-частотными характеристиками. Выявлено, что наиболее существенно параметр дробности влияет на параметры колебательного процесса в окрестности вязкоупругих резонансов. Для построения решения рассматриваемых нелинейных обратных задач применен метод линеаризации. На его основе предложены итерационные процессы, дополненные элементами проекционного подхода, позволяющего определять поправки к искомым функциям в заданных классах функций с помощью регуляризации. Для обеих обратных задач проведены серии вычислительных экспериментов, исходя из результатов которых сформулированы рекомендации по выбору оптимальных режимов зондирования.

*Ключевые слова:* вязкоупругость, дробно-дифференциальные модели, неоднородные материалы, акустический метод, обратные задачи, идентификация, регуляризация

*Получение:* 31.01.2024 / *Публикация онлайн:* 22.07.2024

УДК 539.3

### 1. Введение

Активное использование новых неоднородных материалов, обладающих реологическими свойствами, таких как функционально-градиентные полимеры (ФГП) и полимер-композиты, влечет за собой необходимость построения адекватных моделей их деформирования. Свойства данных материалов зависят от пространственных координат, а под воздействием нагрузок в них протекают процессы ползучести и релаксации, характер которых зависит от внутренней структуры материалов и объемного распределения их свойств. Для учета фактора затухания в материалах со сложной структурой прибегают в том числе к дробно-дифференциальным обобщениям моделей вязкоупругости [1], которые при меньшем числе параметров являются более точными, по сравнению со стандартными моделями.

Важно заметить, что при изготовлении объектов и конструкций из современных ФГП необходимо оценивать соответствие реальных законов изменения их характеристик относительно изначально спроектированных [2, 3]. Для этого могут эффективно применяться неразрушающие подходы на основе акустического зондирования в режиме установившихся колебаний. Для их реализации требуется разработка адекватных моделей колебаний (в том числе при помощи дифференциальных операторов дробного порядка), описывающих рассматриваемые вязкоупругие объекты с учетом неоднородности их свойств, а также методов решения обратных задач идентификации их функций-параметров [4].

Развитие моделей вязкоупругих материалов, содержащих производные дробного порядка, берет начало в первой половине XX века в посвященных наследственной упругости работах В. Вольтерра, Х. Больцмана, Ю.Н. Работнова, А.Н. Герасимова и других как отечественных, так и зарубежных ученых. Достаточно подробно история развития моделей дробного порядка и их классификация изложены, например, в работах Ю.В. Россихина [5], М.В. Шитиковой [1], в книге Ф. Маинарди [6] и обзорной статье [7]. Построение новых дробно-дифференциальных моделей, обобщение имеющихся классических моделей, приложение их к моделированию различных вязкоупругих материалов, сравнение с экспериментальными данными, идентификация параметров моделей отражены в

значительном числе работ, причем многие из них опубликованы в последние годы. Особо стоит отметить активное развитие дробных аналогов классических моделей вязкоупругости [1, 5, 8, 9], в частности, моделей Максвелла, Фойгта, Кельвина, а также модели Зинера (или модели стандартного вязкоупругого тела), которая применяется в данной статье. Работы [8] и [9] посвящены моделированию процессов ползучести с использованием дробно-дифференциальных обобщений перечисленных выше моделей. Показаны способы построения решений задач ползучести в виде специальных функций, предложены методики идентификации параметров моделей исходя из экспериментальных данных по одноосному растяжению образцов при различных постоянных уровнях нагрузки. В результате поэтапно определяются параметры-константы рассматриваемых моделей.

Применимость дробного аналога модели Зинера для описания поведения вязкоупругих материалов, в частности, демпфирующих полимеров, выявлена достаточно давно; соответствующие результаты представлены, например, в работах [10–12]. Так, в статьях [11] и [12] исследовано влияние параметров модели на комплексный модуль, а также местоположение и форму так называемого «пика потерь», характеризующего частотный диапазон, в котором наиболее сильно проявляется затухание. Для таких материалов проведено сравнение расчетных данных с экспериментальными. В статье [13] дробная модель Зинера используется для оценки вязкоупругих параметров полимеров, армированных углеродным волокном. Подход к идентификации свойств материала, основанный на наноиндентировании, содержится в [14]. Подчеркивается преимущество дробной модели Зинера относительно классических моделей целочисленного порядка, требующих значительно большего числа параметров для соответствия экспериментальным данным. Представлена методика одновременного отыскания модулей релаксации и податливости в одном эксперименте по индентированию. В работах [15, 16] подобные исследования проводились при учете влияния температуры: в [15] одноосное растяжение с разными постоянными скоростями деформации, в [16] — вибрационное воздействие на различных частотах. В результате по экспериментальным данным удалось определить характеристики вязкоупругого материала.

Дробно-дифференциальные модели также успешно применяются для описания поведения биологических тканей. Например, в работе [17] излагается методика предсказания образования злокачественных опухолей в молочных железах человека. Выделены преимущества дробного аналога модели Зинера по сравнению с классическими моделями для процессов релаксации, где эта модель показала наилучшее соответствие экспериментальным данным. Статья [18] посвящена моделированию процесса релаксации напряжений в легочной ткани свиньи. Выявлено, что дробный аналог модели Зинера лучше аппроксимирует кривые релаксации, по сравнению с дробным аналогом модели Максвелла. Разработанная модель позволяет выявить корреляцию изменения эластичности легочной ткани и признаки некоторых сопутствующих заболеваний.

Наряду с четырехпараметрическим обобщением модели Зинера достаточно широко применяется пятипараметрическая модель Бэгли–Торвика, содержащая уже два параметра порядка дробной производной. Параметрическая идентификация этой модели по имеющимся экспериментальным данным для полимербетона представлена в [19].

Что касается идентификации характеристик новых неоднородных вязкоупругих материалов, здесь стоит отметить подходы, основанные на акустическом методе, разработанные ранее авторами данной статьи. С их использованием решен ряд обратных задач определения неоднородных механических свойств вязкоупругих материалов [20–23] и биологических тканей [24, 25] на основе классической модели стандартного вязкоупругого тела (модели Зинера). Данная работа нацелена на развитие проведенных исследований и предложенных подходов для дробно-дифференциального обобщения модели стандартного вязкоупругого тела и на решение соответствующих обратных задач идентификации ее функций-параметров.

## 2. Общая постановка задачи

Для постановки задачи о колебаниях неоднородного вязкоупругого тела рассмотрим установившиеся колебания с частотой  $\omega$  упругого тела плотностью  $\rho$ . Тело ограничено поверхностью  $S = S_u \cup S_\sigma$ , при этом на части  $S_u$  оно жестко зашпелено, а на части  $S_\sigma$  нагружено периодически меняющейся во времени нагрузкой  $P_i e^{i\omega t}$ . Уравнения и граничные условия после отделения временного множителя имеют вид [26]:

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,j} - \rho\omega^2 u_i = 0, \tag{1}$$

$$u_i|_{S_u} = 0, C_{ijkl}u_{k,l}n_j|_{S_\sigma} = P_i, \tag{2}$$

где  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих модулей,  $u_i$  — компоненты вектора амплитуды перемещений,  $n_j$  — компоненты единичного вектора внешней нормали к поверхности тела. С использованием принципа соответствия [27] на основе уравнений (1), (2) можно сформулировать постановку задачи об установившихся

колебаниях вязкоупругого тела, если заменить компоненты тензора упругих модулей  $C_{ijkl}$  компонентами тензора комплексных модулей  $G_{ijkl}$ , представляющими собой комплексные функции частоты колебаний и координат.

Для формирования структуры комплексных модулей воспользуемся одномерным определяющим соотношением, записанным при помощи дифференциальных операторов дробного порядка, являющимся обобщением модели стандартного вязкоупругого тела (модели Зинера) [1, 5–7]:

$$nD^\alpha \sigma + \sigma = EnD^\alpha \varepsilon + H\varepsilon. \quad (3)$$

В (3) входят производные дробного порядка  $\alpha$  по времени, введенные согласно определению Римана–Лиувилля [1]:

$$D^\alpha \sigma = \frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sigma(\zeta)}{\Gamma(1-\alpha)(t-\zeta)^\alpha} d\zeta, \quad (4)$$

где  $\Gamma(1-\alpha)$  — гамма-функция Эйлера.

Модель (3) является четырехпараметрической, в ее состав входят длительный модуль  $H$ , мгновенный модуль  $E$  (причем  $E > H > 0$ ), время релаксации  $n > 0$  и параметр дробности  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ . Если имеет место установившийся режим колебаний  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ ,  $\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t}$ , то из соотношения (3) можно получить комплексный модуль:

$$G(i\omega) = \frac{En(i\omega)^\alpha + H}{n(i\omega)^\alpha + 1}, \quad (5)$$

который определяет связь между амплитудами напряжений и деформаций как  $\sigma_0 = G(i\omega) \cdot \varepsilon_0$ . Соотношение

(5) будем использовать как базовое для введения комплексного модуля общего вида  $G_{ijkl} = \frac{E_{ijkl}n(i\omega)^\alpha + H_{ijkl}}{n(i\omega)^\alpha + 1}$

в постановку задачи об установившихся колебаниях вязкоупругого тела.

При рассмотрении материалов вида ФГП компоненты тензоров мгновенных ( $E_{ijkl}$ ) и длительных ( $H_{ijkl}$ ) модулей являются функциями пространственных координат. Обратная задача заключается в идентификации функций-параметров модели по дополнительной информации о полях смещений, измеренных на некоторой части границы поверхности  $S_\sigma$  в заданном частотном диапазоне:

$$u_i|_{S_\sigma} = f_i(\omega) \quad (i = 1, 2, 3), \quad \omega \in [\omega_-, \omega_+]. \quad (6)$$

Сформулированная задача представляет собой нелинейную коэффициентную обратную задачу, решение которой требует применения специальных методов [4].

**З а м е ч а н и е.** В данной работе для рассматриваемых объектов из ФГП предлагается методика определения законов изменения мгновенных и длительных модулей из решения соответствующих обратных задач вида (6). При этом параметры времени релаксации  $n$  и дробности  $\alpha$  считаются постоянными, и в качестве их могут выступать значения, найденные в эксперименте на ползучесть (см., например, работы [8, 9]).

### 3. Исследование комплексного модуля дробно-дифференциального обобщения модели стандартного вязкоупругого тела

Отметим ряд свойств комплексного модуля (5). Как и для классической модели стандартного вязкоупругого тела, при высоких и низких частотах поведение вязкоупругого материала в рамках модели (3) соответствует упругим материалам, имеющим вещественные модули:  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G(i\omega) = H$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(i\omega) = E$ . Для решения прямых задач расчета установившихся колебаний объектов, вязкоупругое поведение которых описывается моделью (3), ввиду их нелинейности применяются различные численные подходы. При этом удобным является разделение вещественных и мнимых частей краевых задач, что позволяет решать их относительно вещественных функций при удвоении числа уравнений и граничных условий.

Итак, отделим вещественную и мнимую часть в комплексном модуле (5), воспользовавшись формулой Муавра [28]:

$$(i)^\alpha = \cos(\alpha\pi/2) + i\sin(\alpha\pi/2).$$

Тогда комплексный модуль примет вид:

$$G(i\omega) = G^{Re}(i\omega) + iG^{Im}(i\omega) = \frac{J_1 H + J_2 E}{J_1 + J_2} + i \frac{J_3 (E - H)}{J_1 + J_2}, \quad (7)$$

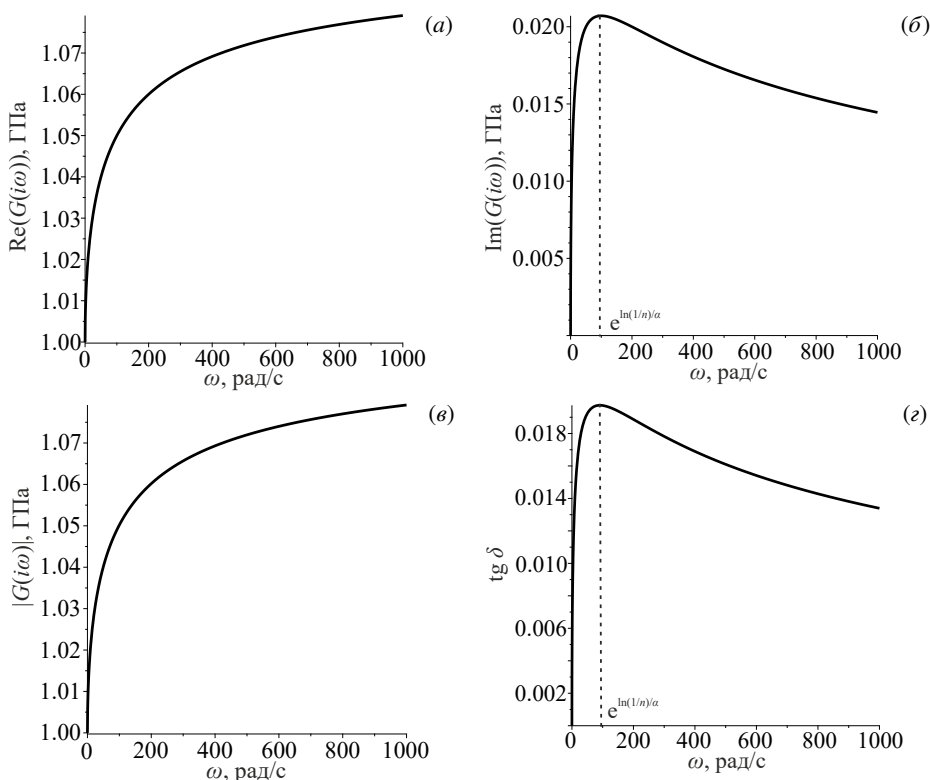
$$J_1 = 1 + n\omega^\alpha \cos(\alpha\pi/2), \quad J_2 = n\omega^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + n^2 \omega^{2\alpha}, \quad J_3 = n\omega^\alpha \sin(\alpha\pi/2).$$

При  $\alpha = 1$  выражение комплексного модуля (7) соответствует модели стандартного вязкоупругого тела:

$$G(i\omega) = \frac{H + n^2\omega^2 E}{1 + n^2\omega^2} + i \frac{n\omega(E - H)}{1 + n^2\omega^2}.$$

Функции  $G^{Re}(i\omega)$  и  $G^{Im}(i\omega)$  обладают рядом свойств. Так, вещественная часть  $G^{Re}(i\omega)$  положительна и монотонно возрастает, а мнимая  $G^{Im}(i\omega)$  положительна и имеет экстремум при  $\omega = e^{\ln(1/n)/\alpha}$ . Аналогичные свойства, соответственно, имеют и модуль, и тангенс угла механических потерь  $\text{tg}\delta$  (определяемый отношением мнимой части комплексного модуля к вещественной части). Мнимая часть характеризует затухание в среде, вследствие этого на частотах, находящихя в окрестности значения  $\omega = e^{\ln(1/n)/\alpha}$ , затухание колебаний наиболее значительно, то есть сильнее всего проявляются вязкоупругие свойства материала. На рисунке 1 представлены графики вещественной и мнимой частей комплексного модуля (7), а также его абсолютной величины и тангенса угла механических потерь для следующих значений параметров: длительный модуль  $H = 1.0$  ГПа, мгновенный модуль  $E = 1.1$  ГПа, время релаксации  $n = 0.1$  с, параметр дробности  $\alpha = 0.5$ .

На рисунке 2 приведены графики тангенса угла механических потерь  $\text{tg}\delta$ , характеризующего затухание в вязкоупругом материале, для нескольких значений параметра  $\alpha$ . Видно, что с его уменьшением затухание в материале существенно уменьшается, и материал практически ведет себя как упругий.

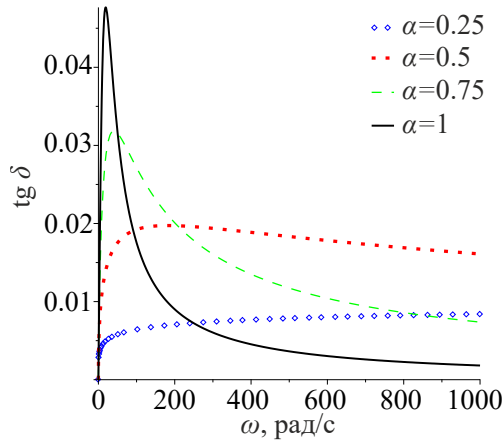


**Рис. 1.** Графики вещественной (а), мнимой (б) частей комплексного модуля (7), а также его абсолютной величины (г) и тангенса угла механических потерь (з)

#### 4. Модельные задачи

**Задача 1.** Для иллюстрации применения предложенной выше модели рассмотрена задача о продольных колебаниях жестко заземленного на одном конце неоднородного по длине стержня из ФГП под воздействием нагрузки  $q$ , приложенной к свободному концу (см. Рис. 3а). Запишем уравнение колебаний и граничные условия в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} (G(\xi, i\kappa)w'(\xi, \kappa))' - \kappa^2 w(\xi, \kappa) &= 0, \\ w(0, \kappa) &= 0, \quad G(1, i\kappa)w'(1, \kappa) = -q. \end{aligned} \tag{8}$$



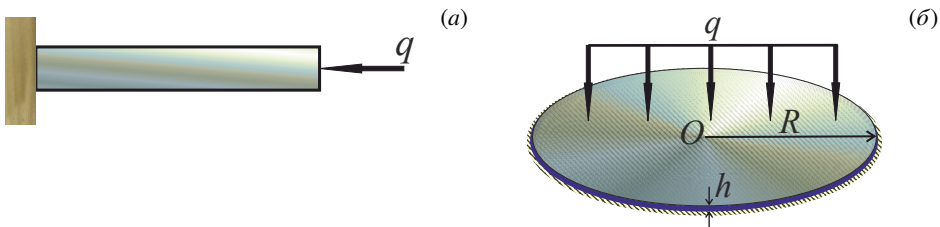
**Рис. 2.** Графики тангенса угла механических потерь комплексного модуля для различных значений параметра дробности  $\alpha$

Здесь  $\kappa = \omega \sqrt{\rho l^2 / H_0}$  — безразмерная частота колебаний, где  $l$  — длина стержня,  $H_0$  — характерное значение длительного модуля;  $w$  — функция смещения;  $\xi$  — безразмерная продольная координата; штрих обозначает производную по  $\xi$ .

**Задача 2.** В другой модельной задаче рассматриваются установившиеся изгибные осесимметричные колебания круглой неоднородной по радиальной координате вязкоупругой пластины в рамках модели Кирхгофа (см. Рис. 3б). Пластина считается жестко защемленной по контуру. Постановка задачи в безразмерном виде в цилиндрической системе координат записывается так:

$$\begin{aligned} (G(\xi, i\kappa)\xi w''(\xi, \kappa))'' - \left( \frac{G(\xi, i\kappa)w'(\xi, \kappa)}{\xi} \right)' - \nu(G(\xi, i\kappa)w''(\xi, \kappa))' + \\ + \nu(G(\xi, i\kappa)w'(\xi, \kappa))'' - \kappa^4 \xi w(\xi, \kappa) - kq\xi = 0, \\ w(1, \kappa) = w'(1, \kappa) = 0, \quad w'(0, \kappa) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь безразмерная частота колебаний  $\kappa$  имеет вид:  $\kappa = \omega \sqrt{\rho h R / H_0}$  (в выражение входят радиус пластины  $R$  и ее толщина  $h$ );  $\xi$  — безразмерная радиальная координата;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

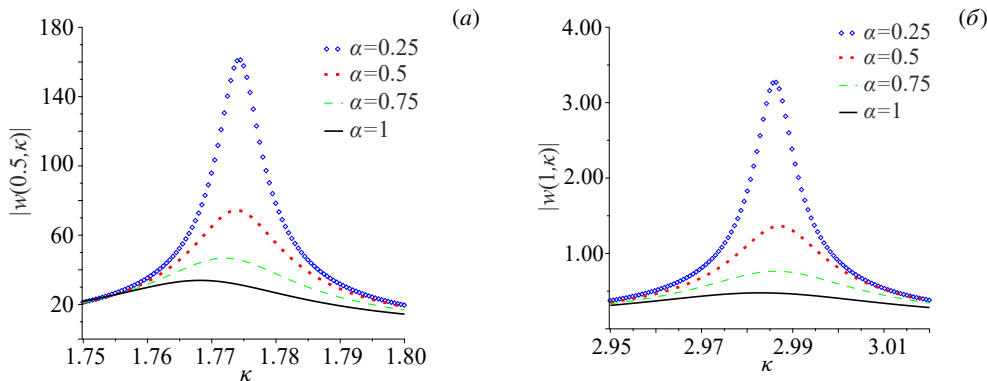


**Рис. 3.** Схемы закрепления и нагружения в модельных задачах: стержня (а), круглой пластины (б)

Расчет колебаний обоих объектов производился численными методами [29]. Для стержня применялся метод пристрелки, для пластины — проекционный метод Галеркина. Вычислительные схемы решения прямых задач подробно описаны в работах [20–25].

В обеих модельных задачах проведен анализ влияния параметра дробности  $\alpha$  на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), использующиеся в качестве дополнительной информации при решении обратных задач, и на значения вязкоупругих резонансов. Результаты расчета АЧХ при  $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75, 1$  для обоих рассматриваемых объектов приведены на рисунке 4. Анализ показал, что при увеличении параметра  $\alpha$  от 0.1 до 1 значения резонансов и графики АЧХ сдвигаются влево. Также заметно существенное влияние параметра  $\alpha$  на затухание (амплитуду в окрестности вязкоупругих резонансов). Видно, что чем меньше  $\alpha$ , тем ближе поведение объектов к упругому случаю и тем больше значение амплитуды в околорезонансной области.

Для рассмотренных объектов, согласно постановке (б), сформулированы обратные задачи идентификации функций мгновенного ( $E(\xi)$ ) и длительного ( $H(\xi)$ ) модулей, входящих в состав комплексного модуля (5),



**Рис. 4.** Анализ влияния величины параметра дробности  $\alpha$  на АЧХ в окрестности первого резонанса для стержня (а) и круглой пластины (б)

по данным акустического зондирования в выбранной точке  $\xi = \xi_0$ . Для стержня в качестве дополнительной информации в обратной задаче выступает измеренная на свободном конце ( $\xi_0 = 1$ ) функция смещения, для пластины — значения функции прогиба пластины в некоторой точке внутри пластины (в статье принято  $\xi_0 = 0.5$ ), при заданном наборе частот. В постановках обратных задач считается, что безразмерные параметры времени релаксации ( $\tau$ ) и дробности ( $\alpha$ ) являются постоянными. Для них удобно использовать значения, найденные, например, в эксперименте по исследованию ползучести [8, 9].

Для построения методики решения обратных задач применен метод линеаризации, построены итерационные процессы. Приведем их общую схему.

**Начальное приближение.** Для искомых функций  $H(\xi)$  и  $E(\xi)$  выбираются начальные приближения  $H^0(\xi)$  и  $E^0(\xi)$  на основе априорной информации об их положительности и ограниченности. Начальными приближениями могут служить значения (константы), полученные экспериментально (см., например, [8, 9]).

**Этап 1.** Для текущих приближений  $H^n(\xi)$  и  $E^n(\xi)$  с помощью численных методов рассчитываются функции смещения  $w_n(\xi, \kappa)$ . Здесь  $n$  — номер текущей итерации.

**Этап 2.** Поправки  $\delta H(\xi)$ ,  $\delta E(\xi)$  определяются из решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$\int_0^1 \frac{\delta H(\xi) + \tau(i\kappa)^\alpha \delta E(\xi)}{1 + \tau(i\kappa)^\alpha} K(\xi, \kappa) d\xi = f(\kappa) - w_n(\xi_0, \kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \tag{10}$$

Ядро интегрального уравнения (10) имеет вид: для стержня  $K(\xi, \kappa) = (w'_n(\xi, \kappa))^2$ ; для пластины  $K(\xi, \kappa) = \xi(w''_n(\xi, \kappa))^2 + (1/\xi)(w'_n(\xi, \kappa))^2 + 2\nu w''_n(\xi, \kappa)w'_n(\xi, \kappa)$ . В правой части для стержня  $\xi_0 = 1$ .

Решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода (10) с регулярным ядром является некорректной задачей и требует использования регуляризационных методов [30]. В уравнении (10) производится разделение на вещественную и мнимую части вида (7), и тогда становится возможной его запись относительно поправок  $\delta H(\xi)$ ,  $\delta E(\xi)$  в виде системы интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода:

$$\begin{cases} \int_0^1 (\delta H(\xi)z_1(\xi, \kappa) + \delta E(\xi)z_2(\xi, \kappa))d\xi = f^{Re}(\kappa) - w_n^{Re}(\xi_0, \kappa), \\ \int_0^1 (\delta H(\xi)z_3(\xi, \kappa) + \delta E(\xi)z_4(\xi, \kappa))d\xi = f^{Im}(\kappa) - w_n^{Im}(\xi_0, \kappa), \end{cases} \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2], \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} z_1(\xi, \kappa) &= \frac{J_1(\kappa)K^{Re}(\xi, \kappa) + J_3(\kappa)K^{Im}(\xi, \kappa)}{J_1(\kappa) + J_2(\kappa)}, & z_2(\xi, \kappa) &= \frac{J_2(\kappa)K^{Re}(\xi, \kappa) - J_3(\kappa)K^{Im}(\xi, \kappa)}{J_1(\kappa) + J_2(\kappa)}, \\ z_3(\xi, \kappa) &= \frac{J_1(\kappa)K^{Im}(\xi, \kappa) - J_3(\kappa)K^{Re}(\xi, \kappa)}{J_1(\kappa) + J_2(\kappa)}, & z_4(\xi, \kappa) &= \frac{J_2(\kappa)K^{Im}(\xi, \kappa) + J_3(\kappa)K^{Re}(\xi, \kappa)}{J_1(\kappa) + J_2(\kappa)}, \\ K(\xi, \kappa) &= K^{Re}(\xi, \kappa) + iK^{Im}(\xi, \kappa), & w_n(\xi, \kappa) &= w_n^{Re}(\xi, \kappa) + iw_n^{Im}(\xi, \kappa), & f(\kappa) &= f^{Re}(\kappa) + if^{Im}(\kappa), \\ J_1(\kappa) &= 1 + \tau\kappa^\alpha \cos(\alpha\pi/2), & J_2(\kappa) &= \tau\kappa^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + \tau^2\kappa^{2\alpha}, & J_3(\kappa) &= \tau\kappa^\alpha \sin(\alpha\pi/2). \end{aligned}$$

**Этап 3.** Поправки, найденные на Этапе 2, используются для вычисления следующих приближений искомым функций:

$$H^{n+1}(\xi) = H^n(\xi) + \delta H(\xi), \quad E^{n+1}(\xi) = E^n(\xi) + \delta E(\xi). \quad (12)$$

Затем проверяются условия выхода из итерационного процесса: либо величина функционала невязки вида  $\Phi = \max_{\kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]} |f(\kappa) - w_n(\xi_0, \kappa)|$  становится меньше некоторого заданного малого числа  $\varepsilon_0$ , либо число итераций превышает заданное значение  $N$ , либо величина поправок незначительна. Повторение Этапов 1–3 продолжается до выполнения одного из этих условий.

В данной работе произведена доработка Этапа 2 за счет дополнения итерационного процесса проекционным подходом, позволяющим определять поправки к искомым функциям в заданных простых классах функций. В рамках проекционного подхода функции поправок представляются в виде разложений по системам линейно независимых функций вида:

$$\delta H(\xi) = \sum_{m=1}^M C_H^m \psi_m(\xi), \quad \delta E(\xi) = \sum_{m=1}^M C_E^m \psi_m(\xi). \quad (13)$$

Далее, подставив разложения (13) в систему (11), последнюю можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^M C_H^m \int_0^1 \psi_m(\xi) z_1(\xi, \kappa) d\xi + \sum_{m=1}^M C_E^m \int_0^1 \psi_m(\xi) z_2(\xi, \kappa) d\xi = f^{Re}(\kappa) - w_n^{Re}(\xi_0, \kappa), \\ \sum_{m=1}^M C_H^m \int_0^1 \psi_m(\xi) z_3(\xi, \kappa) d\xi + \sum_{m=1}^M C_E^m \int_0^1 \psi_m(\xi) z_4(\xi, \kappa) d\xi = f^{Im}(\kappa) - w_n^{Im}(\xi_0, \kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2], \end{cases} \quad (14)$$

Затем выбирается набор из  $K$  безразмерных частот  $\kappa_i$ , в которых производится зондирование. В итоге Этап 2 итерационного процесса сводится к решению системы из  $2K$  линейных алгебраических уравнений относительно  $2M$  коэффициентов  $C_H^m, C_E^m$  разложений (13), которую можно записать так:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^M (C_H^m Z_1^m + C_E^m Z_2^m) = F_i^{Re}, \\ \sum_{m=1}^M (C_H^m Z_3^m + C_E^m Z_4^m) = F_i^{Im}, \quad i = \overline{1, K}, \\ Z_j^m = \int_0^1 \psi_m(\xi) z_j(\xi, \kappa) d\xi, \quad j = \overline{1, 4}, \\ F_i^{Re} = f^{Re}(\kappa_i) - w_n^{Re}(\xi_0, \kappa_i), \quad F_i^{Im} = f^{Im}(\kappa_i) - w_n^{Im}(\xi_0, \kappa_i). \end{cases} \quad (15)$$

Полученная СЛАУ (15) решается с использованием метода регуляризации А.Н. Тихонова [30], после этого по формулам (13) определяются искомые поправки к функциям мгновенного и длительного модулей.

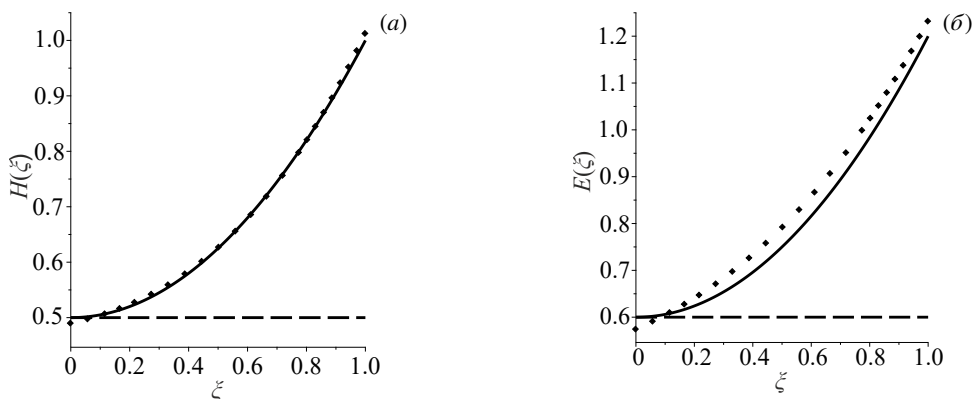
## 5. Вычислительные эксперименты

Для представленных выше подходов проведены вычислительные эксперименты по восстановлению безразмерных функций  $H(\xi)$  и  $E(\xi)$  для обоих рассматриваемых объектов. Параметр, характеризующий время

релаксации, полагался равным  $\tau = 0.1$ . Поиск поправок на Этапе 2 производился в классе полиномиальных функций  $\psi_j(\xi) = \xi^{j-1}$ ; применялось  $M = 7$  базисных функций в разложении (13). Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижению величиной невязки значения, меньшего  $\varepsilon = 10^{-4}$ , или после  $N = 20$  итераций. Вычислительные эксперименты показали, что для идентификации наиболее эффективен выбор частотного диапазона либо в окрестности первого вязкоупругого резонанса, либо между первым и вторым резонансами. Далее на всех рисунках сплошной линией показаны графики искомых функций, пунктиром — начальных приближений, точками — восстановленных функций.

В двух первых примерах производится тестирование разработанного итерационно-проеекционного подхода при  $\alpha = 1$ .

**Пример 1.** Рассмотрен случай восстановления монотонно возрастающих функций  $H(\xi) = 0.5 + 0.5\xi^2$ ,  $E(\xi) = 0.6 + 0.6\xi^2$  в частотном диапазоне  $[1.45, 1.6]$  в обратной задаче для стержня. Начальные приближения были следующими:  $H^0(\xi) = 0.5$ ,  $E^0(\xi) = 0.6$ . Потребовалось 6 итераций, при этом относительная погрешность реконструкции не превосходит 3%. На рисунке 5 представлены результаты восстановления.



**Рис. 5.** Результат восстановления монотонно возрастающих функций  $H(\xi)$  (а) и  $E(\xi)$  (б) в задаче для стержня в примере 1 при  $\alpha = 1$

**Пример 2.** В обратной задаче для пластины восстанавливались монотонно возрастающие функции, такие же как в Примере 1:  $H(\xi) = 0.5 + 0.5\xi^2$ ,  $E(\xi) = 0.6 + 0.6\xi^2$ . Начальные приближения имели вид:  $H^0(\xi) = 0.8$ ,  $E^0(\xi) = 0.9$ , частота изменялась в диапазоне  $[3.5, 5.7]$ . Потребовалось 14 итераций, погрешность восстановления не превосходит 4%. Результат реконструкции приведен на рисунке 6.

В следующих примерах производится восстановление мгновенного и длительного модулей для разных дробных значений параметра  $\alpha$  и при различном виде восстанавливаемых функций.

**Пример 3.** Рассматриваются монотонно убывающие экспоненциальные функции  $H(\xi) = 0.5 + 0.5e^{-\xi}$ ,  $E(\xi) = 0.6 + 0.5e^{-\xi}$  в задаче о стержне при  $\alpha = 0.5$ . Обратная задача решается при начальных приближениях  $H^0(\xi) = 0.85$ ,  $E^0(\xi) = 0.95$  в частотном диапазоне  $[1.9, 3.6]$ . Для восстановления потребовалось 11 итераций (Рис. 7); погрешность не превосходила 1.5%.

**Пример 4.** Рассмотрены монотонно убывающие экспоненциальные функции  $H(\xi) = 1.3 - 0.3e^{\xi}$ ,  $E(\xi) = 1.5 - 0.35e^{\xi}$  в задаче для пластины при  $\alpha = 0.5$ . Начальные приближения имели вид:  $H^0(\xi) = 0.75$ ,  $E^0(\xi) = 0.85$ , частота изменялась в диапазоне  $[3.4, 5.6]$ . Потребовалось 8 итераций (Рис. 8). Погрешность не превосходит 3%.

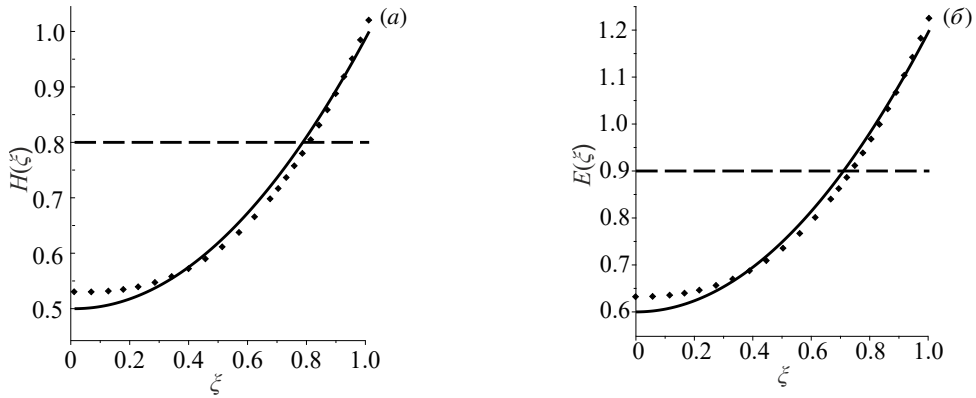
**Пример 5.** Рассматриваются немонотонные функции  $H(\xi) = 1.2 - 0.5\sin(3\xi)$ ,  $E(\xi) = 1.3 + 0.5\sin(3\xi - 3)$  в задаче о стержне при  $\alpha = 0.25$ . Обратная задача решается при начальных приближениях  $H^0(\xi) = 0.9$ ,  $E^0(\xi) = 1.0$  в частотном диапазоне  $[1.75, 3.95]$ . Потребовалось 11 итераций (Рис. 9), погрешность не превосходила 4%.

**Пример 6.** Рассмотрены немонотонные функции  $H(\xi) = 1 - 3(\xi - 1)^4$ ,  $E(\xi) = 1.1 - 2.5(\xi - 1)^4$  в задаче для пластины при  $\alpha = 0.75$ . Начальные приближения имели вид:  $H^0(\xi) = 0.9$ ,  $E^0(\xi) = 1.0$ , частота изменялась в диапазоне  $[3.3, 6.0]$ . Потребовалось 8 итераций (Рис. 10). Погрешность не превосходит 4%.

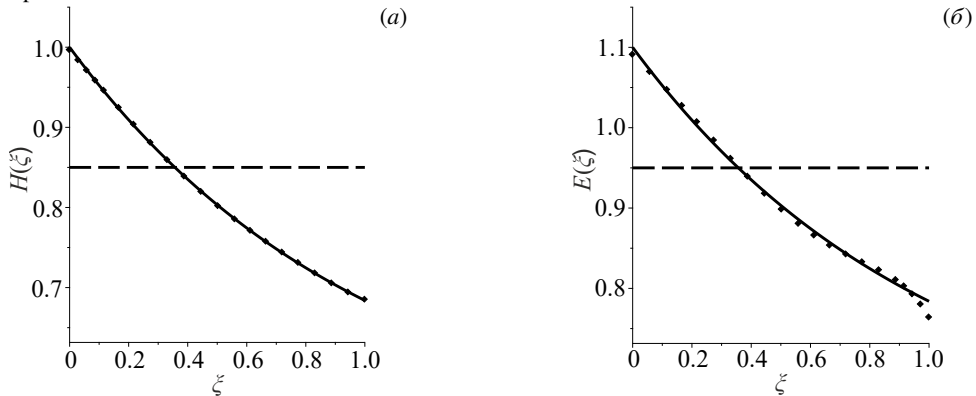
## 6. Выводы

Для исследования задач об установившихся колебаниях неоднородных вязкоупругих тел, применяемых при акустическом зондировании, представлена модель колебаний, основанная на дробно-дифференциальном обобщении модели стандартного вязкоупругого тела. Изучены свойства модели, проанализировано влияние

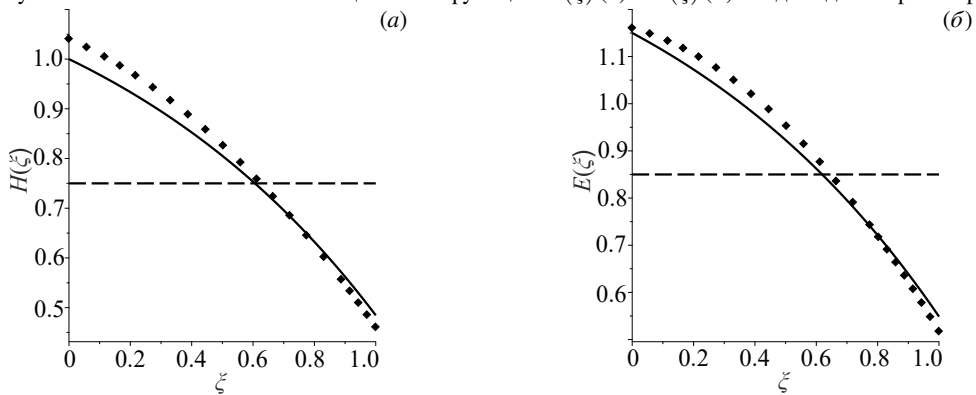




**Рис. 6.** Результат восстановления монотонно возрастающих функций  $H(\xi)$  (а) и  $E(\xi)$  (б) в задаче для пластины в примере 2 при  $\alpha = 1$



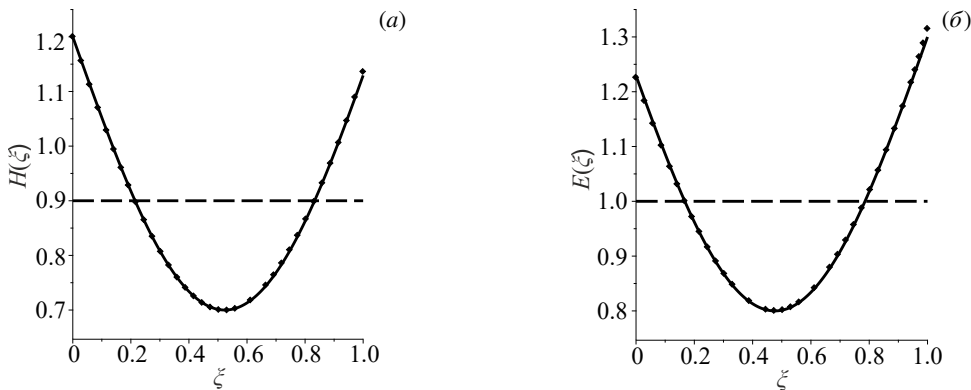
**Рис. 7.** Результат восстановления экспоненциальных функций  $H(\xi)$  (а) и  $E(\xi)$  (б) в задаче для стержня при  $\alpha = 0.5$



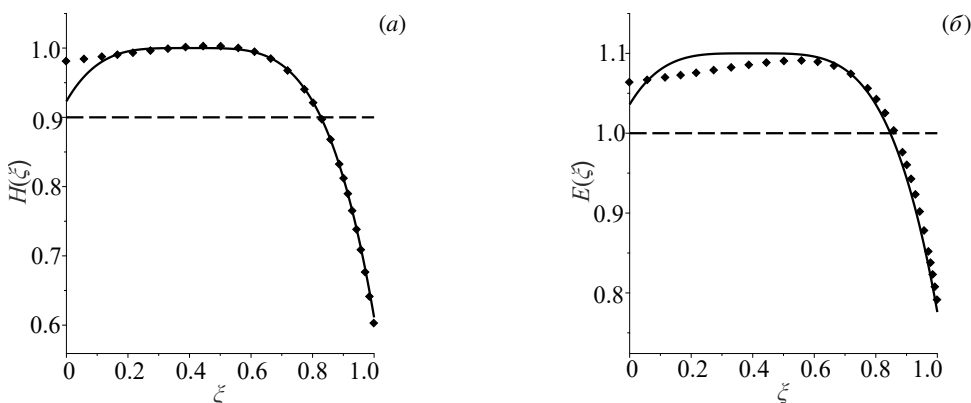
**Рис. 8.** Результат восстановления экспоненциальных функций  $H(\xi)$  (а) и  $E(\xi)$  (б) в задаче для пластины в примере 4 при  $\alpha = 0.5$

ее параметров на комплексный модуль (при использовании дробной производной). Сформулированы общая и частные (модельные) постановки обратных задач идентификации функций-параметров модели для неоднородных материалов типа ФГП для объектов вида стержня и пластины. К решению обратных задач адаптированы разработанные ранее итерационные процессы, дополнительно предложен проекционный подход для определения поправок к искомым функциям.

Проведен представительный набор вычислительных экспериментов по восстановлению законов изменения мгновенного и длительного модулей различного вида — монотонных и немонотонных, характеризующих распределение фаз материалов в структуре ФГП. Восстановление одинаково качественно происходило для различных значений параметра дробности, относительная погрешность при этом не превышала 3–4%. Результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют об эффективности предложенного комбинированного подхода, основанного на акустическом методе.



**Рис. 9.** Результат восстановления немонотонных функций  $H(\xi)$  (а) и  $E(\xi)$  (б) в задаче для стержня в примере 5 при  $\alpha = 0.25$



**Рис. 10.** Результат восстановления немонотонных функций  $H(\xi)$  (а) и  $E(\xi)$  (б) в задаче для пластины в примере 6 при  $\alpha = 0.75$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, Государственное задание в области научной деятельности, научный проект № FENW-2023-0012 (Богачев И.В.), и Южного математического института — филиала ВЦ РАН в г. Владикавказ (Ватульян А.О.).

**Литература**

1. Шитикова М.В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 1. С. 3–40. DOI: 10.31857/S0572329921060118.
2. Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials // Materials Science and Engineering: A. 2003. Vol. 362. P. 81–106. DOI: 10.1016/S0921-5093(03)00578-1.
3. Кербер М.Л., Виноградов В.М., Головкин Г.С. Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология / под ред. А. Берлина. СПб.: Профессия, 2008. 560 с.
4. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
5. Rossikhin Y.A. Reflections on Two Parallel Ways in the Progress of Fractional Calculus in Mechanics of Solids // Applied Mechanics Reviews. 2010. Vol. 63, no. 1. 010701. DOI: 10.1115/1.4000246.
6. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
7. Bonfanti A., Kaplan J.L., Charras G., Kabla A. Fractional viscoelastic models for power-law materials // Soft Matter. 2020. Vol. 16, no. 26. P. 6002–6020. DOI: 10.1039/d0sm00354a.

8. *Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г.* Математические модели нелинейной вязкоупругости с операторами дробного интегро-дифференцирования // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2018. № 2. С. 147–161. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.13.
9. *Унгарова Л.Г.* Применение линейных дробных аналогов реологических моделей в задаче аппроксимации экспериментальных данных по растяжению поливинилхлоридного пластика // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2016. Т. 20, № 4. С. 691–706. DOI: 10.14498/vsgtu1523.
10. *Nonnenmacher T.F., Glöckle W.G.* A fractional model for mechanical stress relaxation // Philosophical Magazine Letters. 1991. Vol. 64, no. 2. P. 89–93. DOI: 10.1080/09500839108214672.
11. *Pritz T.* Analysis of Four-Parameter Fractional Derivative Model of Real Solid Materials // Journal of Sound and Vibration. 1996. Vol. 195. P. 103–115. DOI: 10.1006/jsvi.1996.0406.
12. *Pritz T.* Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials // Journal of Sound and Vibration. 2003. Vol. 265, no. 5. P. 935–952. DOI: 10.1016/S0022-460X(02)01530-4.
13. *Costa M.F.P., Ribeiro C.* A modified fractional Zener model to describe the behaviour of a carbon fibre reinforced polymer // AIP Conference Proceedings. 2013. Vol. 1558. P. 606–609. DOI: 10.1063/1.4825564.
14. *Wei L.F., Li W., Feng Z.Q., Liu J.T.* Applying the fractional derivative Zener model to fitting the time-dependent material viscoelasticity tested by nanoindentation // Biosurface and Biotribology. 2018. Vol. 4. P. 58–67. DOI: 10.1049/bsbt.2018.0011.
15. *Ciniello A.P.D., Bavastrì C.A., Pereira J.T.* Identifying Mechanical Properties of Viscoelastic Materials in Time Domain Using the Fractional Zener Model // Latin American Journal of Solids and Structures. 2017. Vol. 14. P. 131–152. DOI: 10.1590/1679-78252814.
16. *Pawlak Z.M., Denisiewicz A.* Identification of the Fractional Zener Model Parameters for a Viscoelastic Material over a Wide Range of Frequencies and Temperatures // Materials. 2021. Vol. 14, no. 22. 7024. DOI: 10.3390/ma14227024.
17. *Carmichael B., Babahosseini H., Mahmoodi S.N., Agah M.* The fractional viscoelastic response of human breast tissue cells // Physical Biology. 2015. Vol. 12, no. 4. 046001. DOI: 10.1088/1478-3975/12/4/046001.
18. *Dai Z., Peng Y., Mansy H.A., Sandler R.H., Royston T.J.* A model of lung parenchyma stress relaxation using fractional viscoelasticity // Medical Engineering & Physics. 2015. Vol. 37. P. 752–758. DOI: 10.1016/j.medengphy.2015.05.003.
19. *Алероев Т.С., Ерохин С.В.* Параметрическая идентификация порядка дробной производной в модели Бегли–Торвика // Математическое моделирование. 2018. Т. 30, № 7. С. 93–102. DOI: 10.31857/S023408790000578-9.
20. *Vatulyan A.O., Yavruyan O.V., Bogachev I.V.* Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51, no. 11/12. P. 2238–2243. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.02.032.
21. *Аникина Т.А., Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В.* Идентификация неоднородных свойств вязкоупругой круглой пластины // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 2. С. 10–18.
22. *Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д.* Исследование влияния предварительного состояния на механические свойства вязкоупругих тел // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 2. С. 15–24. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.02.
23. *Ватульян А.О., Варченко А.А., Юров В.О.* Исследование коэффициентных обратных задач с учетом реологии для функционально-градиентных стержней // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2023. № 3. С. 4–12. DOI: 10.18522/1026-2237-2023-3-4-12.
24. *Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В.* Об одном методе идентификации свойств многослойных мягких биологических тканей // Российский журнал биомеханики. 2013. Т. 13, № 3. С. 37–48.
25. *Богачев И.В., Недин Р.Д.* Идентификация характеристик предварительно напряженного кожного покрова // Российский журнал биомеханики. 2021. Т. 25, № 3. С. 331–342. DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2021.3.08.
26. *Трусделл К.А.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
27. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
28. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М.: Наука, 1979. 832 с.*
29. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
30. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.

**Сведения об авторах:**

*Богачев Иван Викторович (корр.)*, кфмн, нс, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (ИММиКН ЮФУ), 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а; e-mail: bogachev89@yandex.ru; ORCID: 0000-0002-4725-5102

*Ватуляян Александр Ованесович*, дфмн, проф., зав. каф., ИММиКН ЮФУ, зав. отд., Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, д. 53; e-mail: aovatulyan@sfsedu.ru; ORCID: 0000-0003-0444-4496