

Научная статья

Математическое моделирование волнового поля методом конечных разностей

А.Е. Чистяков, Е.О. Рахимбаева, В.Н. Литвинов, А.В. Никитина

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Система уравнений гидродинамики, записанная в дифференциальной форме, приведена к неоднородному волновому уравнению, для которого построена дискретная модель. Исследуемая область, представляющая собой прямоугольник, покрывается двумерной равномерной расчетной сеткой. Разработаны дискретные аналоги волнового уравнения при граничных условиях Дирихле и Неймана. Описан выбор вида и параметров расчетных сеток. Получены аналитические выражения, для определения погрешности аппроксимации по пространственным координатным направлениям для оператора второй производной на основе схем 2-го и 4-го порядков точности и в этом диапазоне погрешности оценены размеры сеток. Вычислительные эксперименты показали, что для удержания погрешности в пределах от 0.1 до 1%, необходимо применять сетки с приходящимися на половину длины волны числом узлов в диапазоне от 9 до 30 при схеме 2-го порядка точности, и от 4 до 6 при схеме 4-го порядка точности. Важным является выбор значений шага по времени и весового параметра. Так, при весовом параметре $\sigma = 1/12$ относительная погрешность существенно меньше, чем при $\sigma = 0$, соответствующем явной схеме, и при $\sigma = 1/4$, соответствующем симметричному заданию коэффициентов в схеме с весами. Рассчитаны оптимальные значения весового параметра с точки зрения сохранения частоты распространения колебательных процессов. При анализе дискретной модели получено условие устойчивости разностной схемы и выражение, описывающее погрешность аппроксимации по временной переменной, зависящее от величин шагов по времени и пространственным координатным направлениям. Установлено, что аппроксимация начальных условий вносит в суммарную погрешность меньший вклад, чем аппроксимация уравнения для последующих временных слоев. На основе предложенных алгоритмов и подходов создан программный комплекс, предназначенный для моделирования процесса распространения колебаний в двумерной области. Проведен ряд вычислительных экспериментов, в частности, рассмотрены процессы: распространение акустических волн от антенн с отличающимися характеристиками направленности; рассеяние волн на препятствиях разных типов. Для отыскания дальних полей акустической антенны предлагается расчетное окно делать подвижным и находить его местоположение в пространстве. Это позволяет существенно сократить время оценки распространения звуковых волн на большие расстояния.

Ключевые слова: акустическое зондирование, математическая модель, гидродинамика, волновое уравнение, дискретная модель, погрешность аппроксимации, авторский программный комплекс

Получение: 11.12.2023 / *Публикация онлайн:* 22.07.2024

УДК 532.5

1. Введение

Наиболее актуальной и ресурсоемкой задачей акустического зондирования и планирования сейсморазведочных работ является оптимизация системы наблюдений и методики проводимых исследований. Решить данную проблему можно только с помощью современных компьютерных алгоритмов математического моделирования волновых полей [1]. Эти методы и реализующие их алгоритмы относятся к решению класса прямых динамических задач акустики [2, 3]. Все методы подразделяются на три группы: асимптотические или лучевые; интегральные, в основе которых положен принцип Гюйгенса; прямые численные методы. В первую группу отнесем не только метод нулевого лучевого приближения, но и матричные методы, методы обобщенного луча, так как, в отличие от прямых численных методов решения волнового уравнения, когда рассчитывается полное волновое поле, ко всем перечисленным «лучевым» методам прибегают, если речь идет об ограниченной части волнового поля [4, 5].

В лучевой теории волновое поле представляется как сумма волн, распространяющихся с локальной скоростью вдоль лучевых траекторий, определяемых законом Снеллиуса [6], при этом амплитуда этих волн зависит от геометрического расхождения лучей на пути от источника к приемнику [7].

В матричном методе, предложенном Томсоном [8], уточненном Хаскеллом [9], и получившим развитие в дальнейшем (см, например, [10]), решение волнового уравнения проводится в частотной области. Для некоторого набора частот решается система уравнений Гельмгольца и затем совершается переход во временную область.

Работа авторов Переселкова С.А., Кузнецова Г.Н. и других [11] посвящена изучению помехоустойчивости интерферометрического метода оценки скорости источника звука в мелком море. Якововский М.В. с соавторами в публикации [12] описывают созданную авторским коллективом технологию предсказания акустических возмущений в одноименном поле, в основе которой лежит вычисление поверхностного интеграла с запаздыванием. Отличительная черта технологии состоит в расчете пульсаций дальнего поля в процессе моделирования ближнего поля течения. Технология применена для решения задачи излучения монополюсного источника акустических волн. Целью работы [13] Петрова И.Б., Фаворской А.В. являлась создание гибридного численного метода,

объединяющего сеточно-характеристический метод на структурированных регулярных сетках с разрывным методом Галеркина на неструктурированных тетраэдральных сетках. Предложенный метод позволяет описывать сложную форму границ физических областей и контактных границ области интегрирования, в том числе выполнять расчет сейсмических полей с учетом топографии поверхности Земли и экономить при этом вычислительные ресурсы. Предложенный авторами численный метод может применяться не только для задач сейсмической разведки, но и для изучения волновых явлений в других объектах сложной формы. Четверушкиным Б.Н. с соавторами в [14] предложен метод численного решения нелинейного уравнения диффузионного переноса энергии излучения. Метод основан на введении в параболическое уравнение второй производной по времени с малым параметром. Явная аппроксимация исходного уравнения позволяет реализовать алгоритм, эффективно адаптируемый к архитектуре различных супервычислительных систем. Моделирование волнового поля методом конечных разностей [15] происходит путем решения дифференциальных уравнений движения волн. Расчет параметров поля осуществляется в близкорасположенных узлах сетки путем аппроксимации производных конечными разностями и решения полученного дискретного аналога дифференциального уравнения [16].

2. Постановка задачи распространения волновых процессов

Запишем исходную систему уравнений гидродинамики (уравнения Эйлера и неразрывности) в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \nabla p, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (x, y) \in G, \quad (1)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости движения водной среды, ρ — плотность жидкости, p — давление, G — расчетная область за исключением границы. Примем в (1) следующие допущения: пренебрежем нелинейным слагаемым $((\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0)$; положим, что градиент плотности имеет малые значения компонент; при малых амплитудах колебаний $\partial p / \partial \rho = c^2$, где c — скорость звука в воде.

Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho^{-1} \nabla p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} (\rho c^2)^{-1} + \nabla \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

После применения к первому уравнению системы (2) оператора div , а ко второму — оператора $\partial / \partial t$ и вычитания из преобразованного первого уравнения полученное второе, приходим к уравнению звука в неподвижной неоднородной и нестационарной среде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = \nabla(\rho^{-1} \nabla p). \quad (3)$$

Простейшим случаем уравнения (3) является уравнение распространения волны в однородной неподвижной среде:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p + f, \quad (4)$$

где f — функция-источник.

Требуется найти решение неоднородного волнового уравнения (4), удовлетворяющего начальным

$$p(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial p(x, y, 0)}{\partial t} = \xi(x, y) \quad (5)$$

и граничным условиям:

– на твердой границе

$$p(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \gamma, \quad \gamma = \bar{G} / G; \quad (6)$$

– на мягкой границе

$$\partial p(x, y, t) / \partial n = 0, \quad (x, y) \in \gamma; \quad (7)$$

– на свободной границе

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}, \quad (x, y) \in \gamma, \quad (8)$$

где γ — кусочно-гладкая граница расчетной области \bar{G} , $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}$ — нормаль к поверхности γ .

3. Дискретная модель

Для получения дискретного аналога непрерывной модели, описанной системой (4)–(8), расчетную область с границей G впишем в прямоугольник размерами $l_x \times l_y$, который покроем равномерной прямоугольной координатно-временной сеткой $\omega = \omega_t \times \omega_x \times \omega_y$:

$$\omega_t = \{t^n = n\tau, 0 \leq n \leq N_t - 1, t_t = \tau N_t\},$$

$$\omega_x = \{x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N_x - 1, l_x = h_x N_x\},$$

$$\omega_y = \{y_j = jh_y, 0 \leq j \leq N_y - 1, l_y = h_y N_y\},$$

где i, j, n — индексы узлов по временной координате t и по пространственным координатным направлениям Ox, Oy соответственно, τ, h_x, h_y — шаги по времени и по координатам, N_t, N_x, N_y — число узлов по времени и по координатам.

Учитывая, что не все ячейки сетки полностью приходятся на расчетную область, обратимся к методу частичной заполненности ячеек [17]. Коэффициенты заполненности контрольных областей $q_m, m = \overline{0,4}$ вычислим по формулам:

$$(q_m)_{i,j} = \frac{S\Omega_m}{SD_m}, \quad (q_0)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{4},$$

$$(q_1)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1}}{2}, \quad (q_2)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i,j+1}}{2}, \quad (q_3)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{2}, \quad (q_4)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j}}{2},$$

где $o_{i,j}$ — коэффициент заполненности ячейки (i,j) , S — площадь части области в соответствующей ячейке, Ω_m — заполненная часть области $D_m, m = \overline{0,4}$.

Аппроксимация оператора второй производной в случае граничного условия третьего рода $\partial u(x,y,t)/\partial \mathbf{n} = \alpha_n u + \beta_n$ (где α_n, β_n — коэффициенты, описывающие граничные условия) приводит к выражению:

$$q_{0,i,j} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right)_{i,j} \approx q_{1,i,j} k_{i+1/2,j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h_x^2} - q_{2,i,j} k_{i-1/2,j} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{h_x^2} - |q_{1,i,j} - q_{2,i,j}| k_{i,j} \frac{\alpha_x p_{i,j} + \beta_x}{h_x}.$$

Разностная схема, аппроксимирующая волновое уравнение для внутренних узлов расчетной сетки, будет иметь вид:

$$\frac{p_{i,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^n + p_{i,j}^{n-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{\bar{p}_{i+1,j} - 2\bar{p}_{i,j} + \bar{p}_{i-1,j}}{h_x^2} + c^2 \frac{\bar{p}_{i,j+1} - 2\bar{p}_{i,j} + \bar{p}_{i,j-1}}{h_y^2} + f_{i,j}^n, \quad n \geq 1,$$

где $\bar{p}_{i,j} = \sigma_1 p_{i,j}^{n+1} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) p_{i,j}^n + \sigma_2 p_{i,j}^{n-1}$, σ_1, σ_2 — веса схемы.

При непосредственной аппроксимации начального условия учет распределения колебательного процесса на первом шаге по времени отсутствует: $p_{i,j}^1 = \varphi_{i,j} + \tau \xi_{i,j}$. Поэтому во внутренних узлах расчетной сетки для аппроксимации начального условия ($n = 0$) используем следующую схему:

$$\frac{p_{i,j}^1 - \varphi_{i,j}}{\tau^2} - \frac{\xi_{i,j}}{\tau} = c^2 \frac{\tilde{p}_{i+1,j} - 2\tilde{p}_{i,j} + \tilde{p}_{i-1,j}}{h_x^2} + c^2 \frac{\tilde{p}_{i,j+1} - 2\tilde{p}_{i,j} + \tilde{p}_{i,j-1}}{h_y^2} + f_{i,j}^0, \quad \tilde{p}_{i,j} = \sigma_1 p_{i,j}^1 + (1/2 - \sigma_1) \varphi_{i,j}.$$

В рассматриваемой задаче возможна ситуация, когда внешний контур расчетной области может проходить между узлами расчетной сетки. Тогда дискретный аналог волнового уравнения примет вид: – при граничных условиях в форме Дирихле ($p = 0$)

$$\frac{p_{i,j}^{n+1}}{\tau^2} + q_{0,i,j} \frac{-2p_{i,j}^n + p_{i,j}^{n-1}}{\tau^2} = c^2 \min(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}) \frac{\bar{p}_{i+1,j} - 2\bar{p}_{i,j} + \bar{p}_{i-1,j}}{h_x^2} + c^2 \min(q_{3,i,j}, q_{4,i,j}) \frac{\bar{p}_{i,j+1} - 2\bar{p}_{i,j} + \bar{p}_{i,j-1}}{h_y^2} + q_{0,i,j} f_{i,j}^n, \quad n \geq 1,$$

$$\frac{p_{i,j}^{n+1}}{\tau^2} - q_{0,i,j} \left(\frac{\varphi_{i,j}}{\tau^2} + \frac{\xi_{i,j}}{\tau} \right) = c^2 \min(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}) \frac{\tilde{p}_{i+1,j} - 2\tilde{p}_{i,j} + \tilde{p}_{i-1,j}}{h_x^2} +$$

$$+c^2 \min(q_{3,i,j}, q_{4,i,j}) \frac{\tilde{p}_{i,j+1} - 2\tilde{p}_{i,j} + \tilde{p}_{i,j-1}}{h_y^2} + q_{0,i,j} f_{i,j}^n, \quad n=0;$$

– при граничных условиях в форме Неймана ($\partial p / \partial \mathbf{n} = 0$)

$$q_{0,i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^n + p_{i,j}^{n-1}}{\tau^2} = c^2 q_{1,i,j} \frac{\bar{p}_{i+1,j} - \bar{p}_{i,j}}{h_x^2} - c^2 q_{2,i,j} \frac{\bar{p}_{i,j} - \bar{p}_{i-1,j}}{h_x^2} +$$

$$+ c^2 q_{3,i,j} \frac{\bar{p}_{i,j+1} - \bar{p}_{i,j}}{h_y^2} - c^2 q_{4,i,j} \frac{\bar{p}_{i,j} - \bar{p}_{i,j-1}}{h_y^2} + q_{0,i,j} f_{i,j}^n, \quad n \geq 1,$$

$$q_{0,i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}}{\tau^2} - q_{0,i,j} \frac{\xi_{i,j}}{\tau} = c^2 q_{1,i,j} \frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i,j}}{h_x^2} - c^2 q_{2,i,j} \frac{\tilde{p}_{i,j} - \tilde{p}_{i-1,j}}{h_x^2} +$$

$$+ c^2 q_{3,i,j} \frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j}}{h_y^2} - c^2 q_{4,i,j} \frac{\tilde{p}_{i,j} - \tilde{p}_{i,j-1}}{h_y^2} + q_{0,i,j} f_{i,j}^n, \quad n=0.$$

4. Погрешность аппроксимации оператора второй производной на основе схем 2-го и 4-го порядков точности

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + f, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (9)$$

$$p(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial p(x,0)}{\partial t} = \xi(x), \quad p(0,t) = p(l,t) = 0. \quad (10)$$

Пусть функции $p(x,t)$ и $f(x,t)$ представимы как ряды Фурье:

$$p(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(p)}(t) \sin(\omega m x), \quad f(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(f)}(t) \sin(\omega m x), \quad (11)$$

где $\omega = \pi/l$, $C_m^{(p)} = (2/l) \int_0^l p(x) \sin(\omega m x) dx$, $C_m^{(f)} = (2/l) \int_0^l f(x) \sin(\omega m x) dx$.

Для начальных условий воспользуемся разложениями в ряд Фурье вида

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(\varphi)} \sin(\omega m x), \quad \xi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(\xi)} \sin(\omega m x). \quad (12)$$

Подставим (11) в (9), в результате придем к уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(p)} \sin(\omega m x) \right) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(p)} \sin(\omega m x) \right) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(f)} \sin(\omega m x).$$

Поменяв очередность операций дифференцирования и суммирования ряда, получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 C_m^{(p)}}{\partial t^2} \sin(\omega m x) \right) = -\omega^2 c^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(p)} m^2 \sin(\omega m x) \right) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(f)} \sin(\omega m x).$$

Приняв во внимание линейную независимость функций $\sin(\omega m x)$, решение исходной задачи сведем к решению задачи Коши, представленной уравнением гармонического осциллятора с соответствующими начальными условиями:

$$\frac{d^2 C_m^{(p)}}{dt^2} = -(c\omega m)^2 C_m^{(p)} + C_m^{(f)}, \quad C_m^{(p)}(0) = C_m^{(\varphi)}, \quad \frac{dC_m^{(p)}(0)}{dt} = C_m^{(\xi)}. \quad (13)$$

Задачу (13) можно разрешить методом Лагранжа. Тогда

$$C_m^{(p)}(t) = C_m^{(\varphi)} \cos(c\omega mt) + \frac{1}{c\omega m} \left(C_m^{(\xi)} \sin(c\omega mt) + \int_0^t \sin(c\omega m\tau) C_m^{(f)}(t-\tau) dt \right).$$

Для численного решения задачи, представляемой уравнением (9), покроем расчетную область равномерной сеткой $\omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N, l = hN\}$, где h — шаг сетки по координате, N — число узлов по координате.

Аппроксимация уравнения (9) по пространственной переменной на основе схемы 2-го порядка точности дает выражение [18]:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)_i = c^2 \frac{p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}}{h^2} + f_i. \tag{14}$$

При исследовании точности решения задачи (14) запишем функции p и f в виде (11):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 C_m^{(p)}}{\partial t^2} \sin(\omega m x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} c^2 \frac{\sin(\omega m x_{i+1}) - 2\sin(\omega m x_i) + \sin(\omega m x_{i-1}))}{h^2} C_m^{(p)} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(f)} \sin(\omega m x_i)$$

или

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 C_m^{(p)}}{\partial t^2} \sin(\omega m x_i) = \sum_{m=1}^{\infty} 2c^2 \frac{(\cos(\omega m h) - 1)}{h^2} C_m^{(p)} \sin(\omega m x_i) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(f)} \sin(\omega m x_i).$$

В результате получим уравнение, описывающее поведение спектра $C_m^{(p)}(t)$ волновой задачи (9) при решении разностным методом:

$$\frac{\partial^2 C_m^{(p)}}{\partial t^2} = - \frac{2c^2(1 - \cos(\omega m h))}{h^2} C_m^{(p)} + C_m^{(f)}. \tag{15}$$

Из равенства (15) следует, что решение задачи (9) на основе схемы (14) соответствует решению волновой задачи с «возмущенными» фазовыми скоростями, представляемой уравнением:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \bar{c}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + f, \quad \bar{A}^2 = A^2(1 - \alpha_1), \quad \alpha_1 = 1 - 2(1 - \cos(\omega m h))/(\omega m h)^2. \tag{16}$$

Рассмотрим аппроксимацию уравнения (9) по пространственной переменной на основе схемы повышенного (4-го) порядка точности. Для этого построим в разностном виде оператор второй производной по пространственному направлению 4-го порядка точности:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right)_i = c^2 \frac{-p_{i+2} + 16p_{i+1} - 30p_i + 16p_{i-1} - p_{i-2}}{12h^2} + f_i. \tag{17}$$

Подставив функции p и f (11) в задачу (17), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 C_m^{(p)}}{\partial t^2} \sin(\omega m x_i) &= \frac{c^2}{12h^2} \sum_{m=1}^{\infty} [-\sin(\omega m x_{i+2}) + 16\sin(\omega m x_{i+1}) - 30\sin(\omega m x_i)] C_m^{(p)} + \\ &+ \frac{c^2}{12h^2} \sum_{m=1}^{\infty} [16\sin(\omega m x_{i-1}) - \sin(\omega m x_{i-2})] C_m^{(p)} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(f)} \sin(\omega m x_i). \end{aligned}$$

Приняв во внимание линейную независимость функций $\sin(\omega m x)$, приходим к уравнению, с повышенной точностью изображающему поведение спектра $C_m^{(p)}(t)$ волновой задачи при решении разностным методом :

$$\frac{\partial^2 C_m^{(p)}}{\partial t^2} = -c^2 \frac{15 - 16\cos(\omega m h) + \cos(2\omega m h)}{6h^2} C_m^{(p)} + C_m^{(f)}. \tag{18}$$

Из сравнения первых слагаемых в правых частях уравнений (15) и (18) с соответствующим слагаемым (13), следует, что функции, описывающие зависимость относительной погрешности аппроксимации оператора второй производной разностными схемами 2-го и 4-го порядков точности от числа, записываются так:

$$\alpha_1(r) = 1 - 2(1 - \cos(\pi/r))/(\pi/r)^2,$$

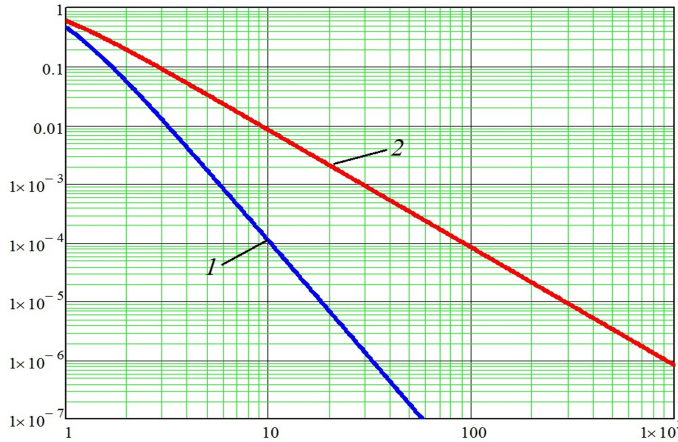


Рис. 1. Зависимости относительной погрешности аппроксимации оператора второй производной от r при использовании схем разного порядка точности: 4-й порядок (линия 1), 2-й порядок (линия 2)

$$\alpha_2(r) = 1 - \frac{15 - 16\cos(\pi/r) + \cos(2\pi/r)}{6(\pi/r)^2}.$$

Здесь r — это число узлов, приходящихся на половину периода волны. Исходя из этих оценок нетрудно найти числовые значения выигрышей во времени при расчете. На рисунке 1 представлены графики относительной погрешности аппроксимации оператора второй производной как функции r . Из рисунка видно, что для получения погрешности в диапазоне от 0.1 до 1% необходимо выполнять вычисления на сетках с числом узлов, приходящихся на половину длины волны, в диапазоне от 9 до 30 при использовании схемы 2-го порядка точности, и от 4 до 6 при схеме 4-го порядка.

5. Исследование зависимости погрешности аппроксимации от шага по времени

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \operatorname{div}(c^2 \operatorname{grad}(p)) \quad (19)$$

с начальными условиями: $p|_{t=0} = \varphi$ и $(\partial p / \partial t)|_{t=0} = \xi$. Аппроксимация (19) по пространственным переменным задачи может быть записана в виде:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \sum_{l=1}^R (c^2 p_{\bar{x}_l})_{x_l}$$

или

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\Lambda p,$$

где R — размерность пространства, \bar{x}_l — левая разностная производная по пространственной координате l , Λ — дифференциальный оператор. Аналитическое решение в базе, составленном из собственных векторов

$$p = \sum_i \alpha_i X_i, \quad \Lambda X_i = \lambda_i X_i, \quad \text{будет следующим: } \alpha_i(t) = \alpha_i^{(\varphi)} \cos(\sqrt{\lambda_i} t) + \frac{\alpha_i^{(\xi)}}{\sqrt{\lambda_i}} \sin(\sqrt{\lambda_i} t).$$

Симметричная разностная схема 2-го порядка точности в этом случае выглядит так:

$$\frac{\alpha_i^{n+1} - 2\alpha_i^n + \alpha_i^{n-1}}{\tau^2} = -\lambda_i \sigma \alpha_i^{n+1} - \lambda_i (1 - 2\sigma) \alpha_i^n - \lambda_i \sigma \alpha_i^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

$$\frac{\alpha_i^{n+1} - \alpha_i^{(\varphi)}}{\tau^2} - \frac{\alpha_i^{(\xi)}}{\tau} = -\lambda_i \sigma \alpha_i^{n+1} - \lambda_i (1/2 - \sigma) \alpha_i^{(\varphi)}, \quad n = 0.$$

Первое выражение можно преобразовать к виду:

$$\alpha_i^{n+1} = k \alpha_i^n - \alpha_i^{n-1}, \quad k = 2 - \lambda_i \tau^2 / (1 + \lambda_i \sigma \tau^2).$$

Его численное решение будет таким: $\alpha_i^n = A \cos(n\omega) + B \sin(n\omega)$, где $\cos\omega = k/2$, $k = 2 - \lambda_i\tau^2 / (1 + \lambda_i\sigma\tau^2)$. С учетом максимального числа обусловленности $\lambda_{\max} \leq 4Rc^2/h^2$ и неравенства $|k| \leq 2$ получено условие устойчивости разностной схемы: $\tau < \frac{h}{c\sqrt{(1-4\sigma)R}}$.

С учетом начальных условий численное решение можно записать в виде:

$$\alpha_i^n = \alpha_i^{(\varphi)} \cos((\omega/\tau)t^n) + \frac{\alpha_i^{(\xi)}}{\sqrt{\lambda_i(1+\lambda_i(\sigma-1/4)\tau^2)}} \sin((\omega/\tau)t^n), \quad \omega = \arccos\left(1 - \frac{\lambda_i\tau^2/2}{1+\lambda_i\sigma\tau^2}\right).$$

5.1. Порядок погрешности аппроксимации

Оценить относительную погрешность аппроксимации частоты колебательного процесса можно по формуле: $\delta v = |\tilde{v} - v|/v$, где v и \tilde{v} — частота колебаний. Преобразуем выражение: $(\tilde{v} - v)/v = (\tilde{v}/v) - 1$, и рассмотрим отношение частот волновой задачи (19):

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v}}{v} &= \frac{\omega}{\tau\sqrt{\lambda_i}} = \frac{\arccos\left(1 - \frac{\lambda_i\tau^2/2}{1+\lambda_i\sigma\tau^2}\right)}{\tau\sqrt{\lambda_i}} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda_i\tau^2}{1+\lambda_i\sigma\tau^2} + \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{\lambda_i\tau^2/2}{1+\lambda_i\sigma\tau^2}\right)^3}} + O(\tau^5)}{\tau\sqrt{\lambda_i}} = \\ &= 1 + \frac{1-12\sigma}{24}\lambda_i\tau^2 + O(\tau^4). \end{aligned} \tag{20}$$

Тогда $\frac{\tilde{v}}{v} - 1 = \frac{1-12\sigma}{24}\lambda_i\tau^2 + O(\tau^4)$. Отсюда следует, что при расчете распространения колебательных процессов разностным методом значения частоты колебаний отличаются от реальных значений и зависят от параметров: шага по времени, отнесенного к периоду волны, и веса.

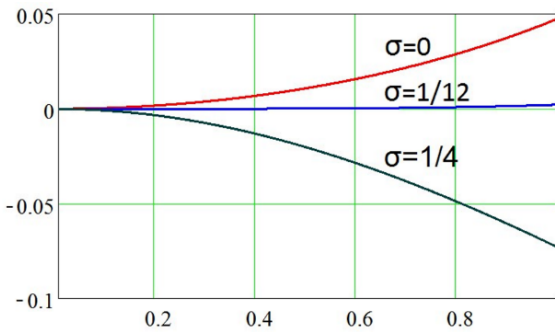


Рис. 2. График зависимости от $\tau\sqrt{\lambda_i}$ относительной погрешности аппроксимации на основе схемы 2-го порядка точности

На рисунке 2 представлены зависимости относительной погрешности аппроксимации частоты колебаний $(\omega/(\tau\sqrt{\lambda_i}) - 1)$ от $\tau\sqrt{\lambda_i}$ — шага по времени, отнесенного к периоду волны, при разном весе симметричной разностной схемы 2-го порядка точности. Из анализа графиков можно сделать вывод, что при значении весового параметра $\sigma = 1/12$ относительная погрешность существенно меньше, чем при $\sigma = 0$ (это значение весового параметра соответствует явной схеме) и при $\sigma = 1/4$ (это значение весового параметра соответствует симметричному заданию коэффициентов в схеме с весами).

3.2. Оптимизация веса схемы

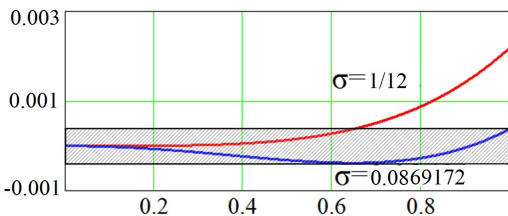


Рис. 3. Зависимость функции f от y

Рассмотрим функцию

$$f(y, \sigma) = \frac{1}{y} \arccos\left(1 - \frac{y^2/2}{1 + \sigma y^2}\right) - 1,$$

где $y = \tau\sqrt{\lambda_i} \leq 1$. Требуется найти значение веса σ , при котором $\max_{y \in [0, l]} |f(y, \sigma)| \rightarrow \min$. При весе схемы $\sigma = 1/12$ функция $f(y, \sigma)$ будет иметь точку минимума ζ . Для того чтобы ширина полосы $-\varepsilon \leq f(y, \sigma) \leq \varepsilon$, в пределах которой располагается функция f , была минимальной, необходимо выполнение условий: $0 < \zeta < l$ и $|f(\zeta, \sigma)| = |f(l, \sigma)|$. Данная задача решена численно. На рисунке 3 приведены графики функции $f(y, \sigma)$ для схемы 4-го порядка точности при значениях веса схемы $\sigma = 1/12$ и $\sigma = 0.0869172$ (оптимальное значение веса при $l = 1$), а таблица содержит оптимальные значения отклонения частоты колебаний от реальных значений $\max_{y \in [0, l]} |f(y, \sigma)|$.

Таблица. Отклонение частоты колебаний от реальных значений в зависимости от веса схемы

Номер расчета	Вес σ	Величина ограничения на y	Отклонение частоты, %
1	0.08375	0.34667	0.0005198
2	0.084	0.43794	0.001329
3	0.0842042	0.5	0.002266
4	0.0845	0.57782	0.004061
5	0.085	0.68882	0.008268
6	0.08531575	0.75	0.01168
7	0.0855	0.78332	0.01394
8	0.086	0.86674	0.02107
9	0.0865	0.94204	0.02964
10	0.0869172	1	0.0379

5.3. Оценка погрешности аппроксимации

Обозначим как $\psi_i^n = \alpha_i^n - \alpha_i(t^n)$ разность между приближенным (численным) и точным решениями волновой задачи в базисе, составленном из собственных векторов. Для ψ_i^n имеет место формула:

$$\psi_i^{n+1} = k\psi_i^n - \psi_i^{n-1} + \beta_i^n, \quad \beta_i^n = -\alpha_i(t^{n+1}) + k\alpha_i(t^n) - \alpha_i(t^{n-1}).$$

Выражение, описывающее погрешность аппроксимации решения, примет вид:

$$\psi_i^{n+1} = C^n \psi_i^1 + \sum_{r=0}^{n-1} C^r \beta_i^{n-r}, \quad \beta_i^n = \left(k - 2\cos\left(\sqrt{\lambda_i}\tau\right)\right)\alpha_i(t^n), \quad C^n = \cos(n\omega) + k/\sqrt{4-k^2}\sin(n\omega), \quad \cos\omega = k/2.$$

Здесь слагаемое, отвечающее накопленной при переходах между временными слоями погрешности, представляется так:

$$\sum_{r=0}^{n-1} C^r \beta_i^{n-r} = \frac{2}{\sqrt{4-k^2}} \left(k - 2\cos\left(\sqrt{\lambda_i}\tau\right)\right) \sqrt{\left(\alpha_i^{(\varphi)}\right)^2 + \frac{\left(\alpha_i^{(\xi)}\right)^2}{\lambda_i}} \sum_{r=0}^{n-1} \cos(r\omega - \omega_1) \cos\left(\tau\sqrt{\lambda_i}r - \sqrt{\lambda_i}t^n + \omega_2\right),$$

$$\text{где } \omega_1 = \arccos\sqrt{1-k^2}/2, \quad \omega_2 = \arccos\left(\alpha_i^{(\varphi)}/\sqrt{\left(\alpha_i^{(\varphi)}\right)^2 + \left(\alpha_i^{(\xi)}\right)^2/\lambda_i}\right).$$

Выражение для оценки слагаемого $\sum_{r=0}^{n-1} C^r \beta_i^{n-r}$ запишется в следующем виде:

$$\left|\sum_{r=0}^{n-1} C^r \beta_i^{n-r}\right| \leq 2\sqrt{\lambda_i}t^n \left|\frac{(\sigma-1/12)y^2/2 + O(y^4)}{\sqrt{1+y^2(\sigma-1/4)}}\right| \sqrt{\left(\alpha_i^{(\varphi)}\right)^2 + \left(\alpha_i^{(\xi)}\right)^2/\lambda_i}, \quad y = \sqrt{\lambda_i}\tau.$$

Слагаемое $C^n \psi_i^1$ описывает погрешность аппроксимации начальных условий согласно формуле:

$$\left|C^n \psi_i^1\right| \leq \alpha_{i,0} \left|(\sigma-1/12)\lambda_i^{3/2}\tau^3/2 + O\left(\lambda_i^{5/2}\tau^5\right)\right| + \frac{\alpha_{i,1}}{\sqrt{\lambda_i}} \left|(1/6-\sigma)\lambda_i\tau^2 + O\left(\lambda_i^2\tau^4\right)\right|.$$

Из полученной оценки следует, что аппроксимация начальных условий вносит меньший вклад в суммарную погрешность, чем аппроксимация уравнения для временных слоев $n > 0$.

6. Результаты вычислительных экспериментов

Авторский программный комплекс для вычисления поля излучения акустических волн включает в себя следующие блоки: ввод исходных данных; построение расчетной геометрии задачи; установление коэффициентов сеточных уравнений; нахождение функций правых частей сеточных уравнений; переход на более грубую сетку; решение сеточных уравнений на основе модифицированного попеременно-треугольного метода; определение положения расчетного окна; учет граничных условий; вычисление давления; построение спектра; расчет фазы;

определение градиента фазы; установление направленности. При вычислениях использовалась аппроксимационная формула (17).

На рисунке 4 представлены картины колебаний давления. За единицу принята максимальная величина амплитуды колебаний поля давления.

Рисунок 5 демонстрирует качественное и количественное влияние препятствия (неоднородностей) на поле акустической волны.

Анализ отраженных сигналов удобнее осуществлять, если они короткоимпульсные. На рисунке 6 показаны картины распространения одиночного акустического сигнала и его отражения от препятствия (неоднородности) в разные моменты времени.

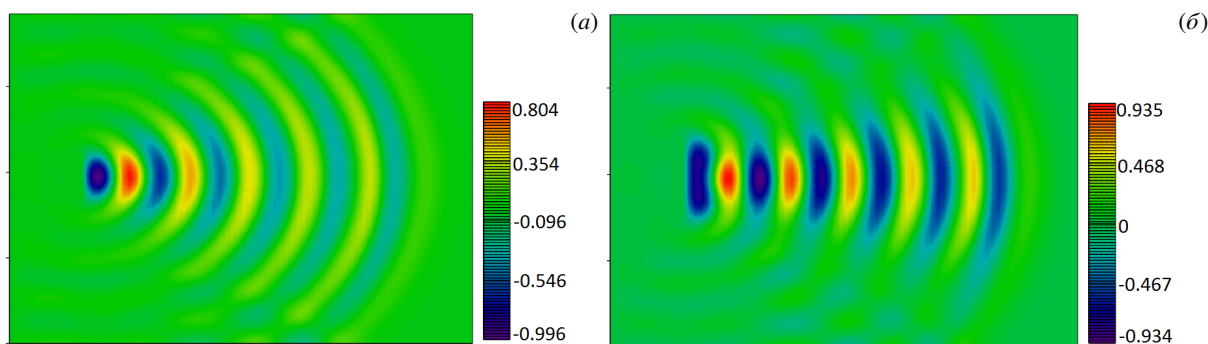


Рис. 4. Распространение акустических волн от антенн с различными характеристиками направленности

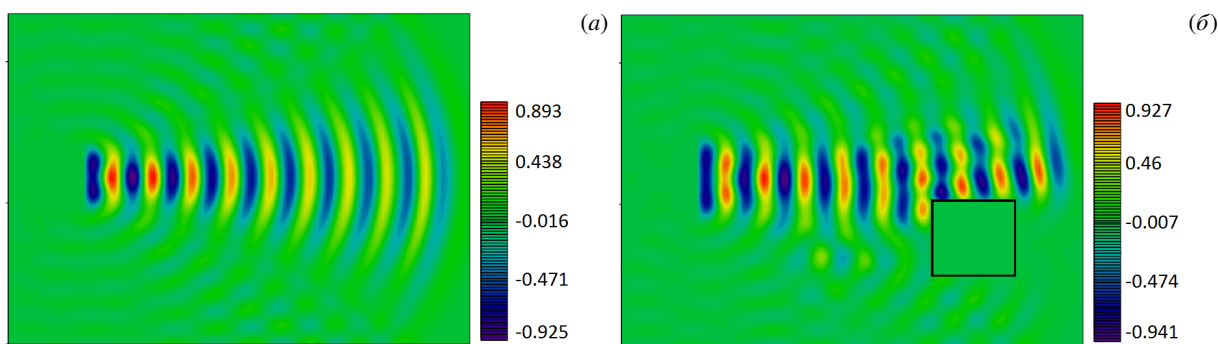


Рис. 5. Рассеяние акустических волн на препятствии

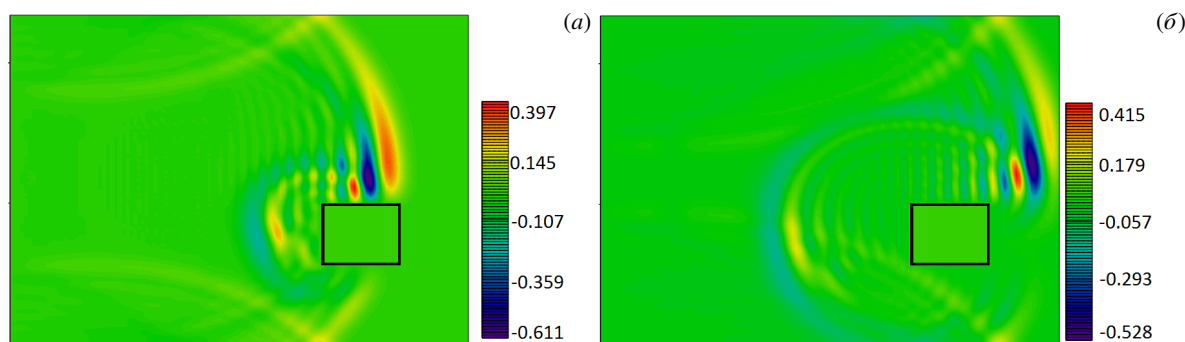


Рис. 6. Отраженный акустический сигнал

В проведенных с использованием авторского программного комплекса численных экспериментах рассчитывались акустические поля антенны при рабочих частотах, [кГц]: 1.5, 2.0, 2.5, 3.0. Приведенное давление составляло, [кПа]: 10, 20, 50, 100. Рабочие поверхности антенны состояли из пьезокерамики ЦТС-19 и были поляризованы радиально; электроды находились на боковых поверхностях. На рисунке 7 приведено схематическое изображение и линейные размеры (в мм) излучающей акустической антенны.

Рисунок 8 содержит результаты расчета распространения колебательных процессов от антенны, излучающей различные сигналы при рабочей частоте 3.0 кГц. Размер окна моделирования составлял 5×12 м. Временной интервал длился 3 мс.

На рисунке 9 приведены результаты расчета интенсивности и направления распространения колебательного процесса в ближнем поле антенны и около элементов антенны в случае непрерывного сигнала.

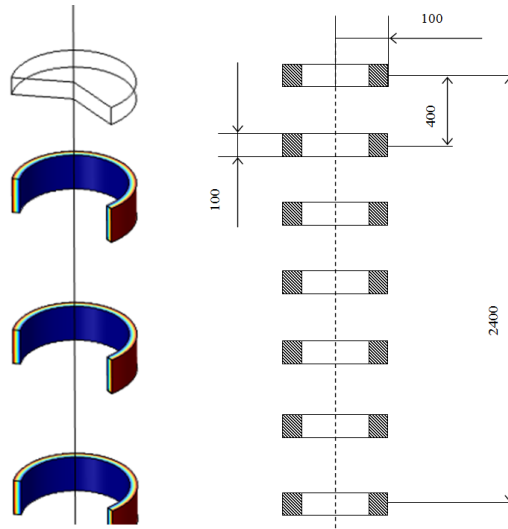


Рис. 7. Геометрия излучающей антенны

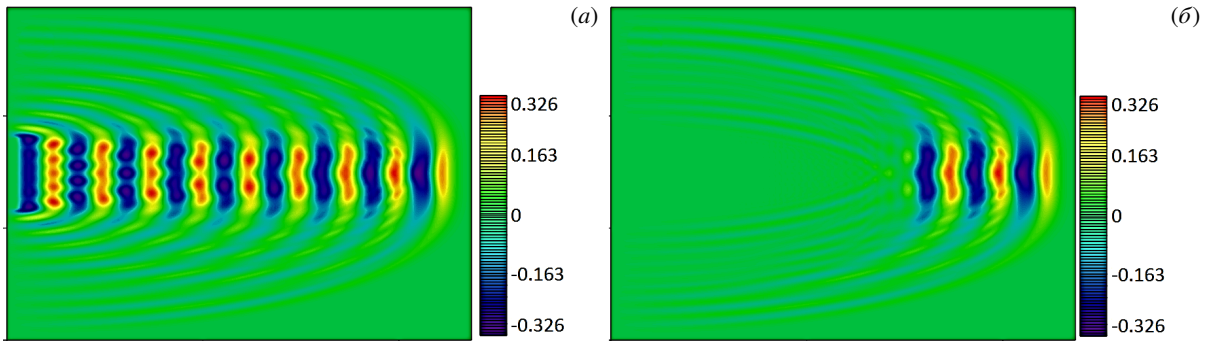


Рис. 8. Распространение колебательных процессов от антенны при непрерывном сигнале (а) и коротком импульсе (б); рабочая частота 3 кГц

При определении акустических полей в дальнем поле антенны для ускорения работы используемого программного комплекса осуществлен переход на более грубую расчетную сетку. На рисунке 10а показаны картины акустического сигнала в ближнем поле антенны. Временной интервал составлял 3 мс. Затем осуществлен переход на сетку с шагами, по пространственным координатам в 4 раза большими. На рисунке 10б демонстрируются картины поля звуковой волны через 12 мс после начала излучения. Размер окна моделирования составлял 5×12 м на подробной сетке и 20×48 м на грубой сетке, что оказалось вполне достаточным для установления интенсивности и направления распространения колебательных процессов в ближнем поле и на элементах конструкции антенны.

При расчете дальних полей акустической антенны предлагается расчетное окно сделано подвижным и вычислялось его местоположение в пространстве. Данный подход позволил существенно сократить время получения оценки распространения звуковых волн на большие расстояния.

7. Заключение

Исследование посвящено изучению процесса распространения акустических волн с помощью авторского комплекса программ, предназначенного для математического моделирования волновых полей. В основе предложенной математической модели лежит неоднородное волновое уравнение с соответствующими начальными и граничными условиями.

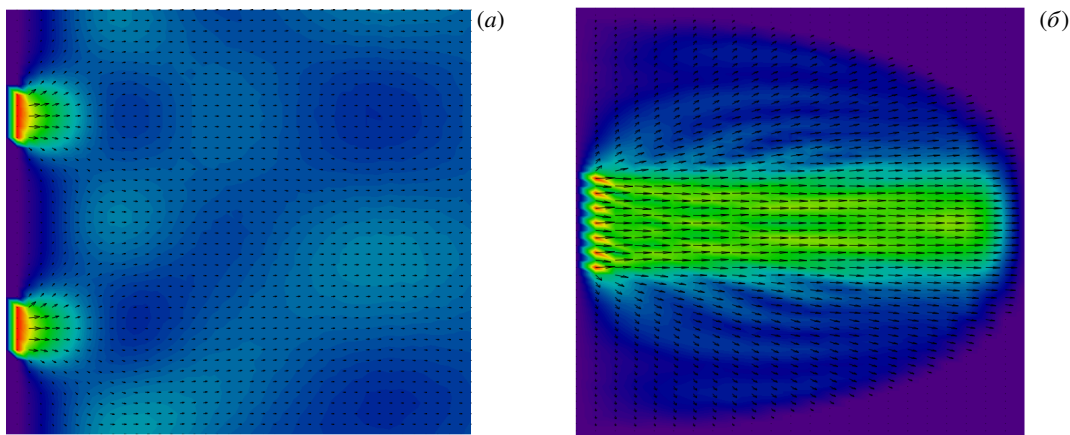


Рис. 9. Результаты расчета направления распространения и интенсивности колебательных процессов вблизи элементов антенны (а) и в ближнем поле антенны (б)

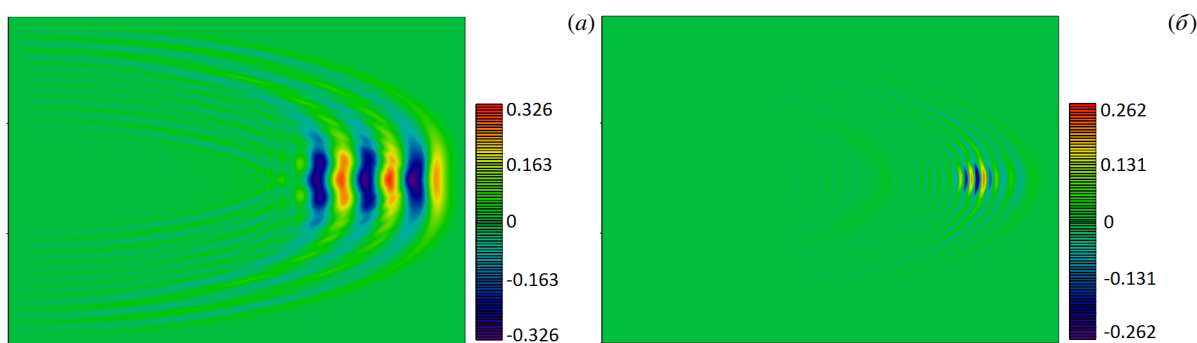


Рис. 10. Результаты расчета распространения колебательных процессов от антенны: временной интервал 3 мс (а) и 12 мс (б)

Описана математическая модель и рассмотрена ее численная аппроксимация. Для решения выбран метод сеток. Дискретная модель построена при помощи интегро-интерполяционного метода, при этом осуществляется учет заполненности расчетных ячеек, что гарантирует выполнение основных законов сохранения потока для электрического поля и циркуляции для магнитного поля на дискретном уровне.

Проведена оценка зависимости погрешности аппроксимации от шага по временной координате. Найдено аналитическое решение волновой задачи в ортонормированном базисе, составленном из собственных векторов оператора второй разностной производной по пространственным переменным. Вычислены погрешности аппроксимации волновой задачи разностными схемами 2-го и 4-го порядка точности и получены условия их устойчивости.

Установлено, что при расчете распространения колебательных процессов на основе разностных методов значения частоты колебаний незначительно отличаются от реальных значений. Построены зависимости точности схемы от ее веса и шага по временной переменной. Рассчитаны оптимальные значения весового параметра. Выведены зависимости погрешности аппроксимации оператора второй производной для схем 2-го и 4-го порядка точности и выяснено, что для достижения погрешности вычислений в диапазоне от 0.1 до 1%, необходимо применять сетки с числом узлов, приходящихся на половину длины волны, от 9 до 30 при использовании схемы 2-го порядка точности, и от 4 до 6 при и схеме 4-го порядка.

Проведенные исследования показали, что при значении весового параметра $\sigma = 1/12$ относительная погрешность существенно меньше, чем при $\sigma = 0$ (это значение весового параметра соответствует явной схеме) и при $\sigma = 1/4$ (это значение весового параметра соответствует симметричному заданию коэффициентов в схеме с весами).

Представлены результаты численного моделирования процессов распространения акустических волн от антенн с различными характеристиками направленности и рассеяния акустических волн на препятствии. Представлены

картины распространения одиночного акустического сигнала и его отражения от препятствия (неоднородности) в разные моменты времени. С помощью программного комплекса выполнены вычислительные эксперименты при разных рабочих частотах. Для сокращения времени счета при определении акустических полей в дальнем поле антенны осуществлен переход на более грубую расчетную сетку.

При исследовании дальних полей акустической антенны существенно сократить время вычислений распространения звуковых волн на большие расстояния позволил следующий подход: расчетное окно полагалось подвижным и вычислялось его местоположение в пространстве.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 21-71-20050).

Литература

1. *Осипов А.А., Реент К.С.* Математическое моделирование распространения звука в проточном канале с импедансными стенками // *Акустический журнал*. 2012. Т. 58, № 4. С. 509–524.
2. *Евстигнеев Р.О., Медведик М.Ю., Шмелев А.А.* Итерационный метод решения прямых и обратных двумерных задач акустики с применением параллельных алгоритмов // *Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления*. 2015. Т. 2, № 1. С. 71–81.
3. *Седитков А.А.* Прямая и обратная задачи акустического зондирования в слоистой среде с разрывными параметрами // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2014. Т. 17, № 1. С. 120–134.
4. *Ватульян А.О., Юров В.О.* Волновые процессы в полом цилиндре в поле неоднородных предварительных напряжений // *Прикладная механика и техническая физика*. 2016. Т. 57, № 4. С. 182–191. DOI: 10.15372/PMTF20160418.
5. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* Учет особенностей аналитического продолжения волнового поля при использовании методов нулевого поля и Т-матриц // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2008. Т. 13, № 8. С. 78–86.
6. *Ландсберг Г.С.* Оптика. Москва: Физматлит, 2003. 848 с.
7. *Агарьшев А.И., Жанг Н.М.* Применение закона Снеллиуса для расчета траекторий радиоволн в регулярной рассеивающей ионосфере // *Вестник Иркутского государственного технического университета*. 2013. № 4. С. 131–137.
8. *Thomson W.T.* Transmission of Elastic Waves through a Stratified Solid Medium // *Journal of Applied Physics*. 1950. Vol. 21. P. 89–93. DOI: 10.1063/1.1699629.
9. *Haskell N.A.* The dispersion of surface waves in multilayered media // *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1953. Vol. 43. P. 17–34. DOI: 10.1785/BSSA0430010017.
10. *Романов В.Г.* Обратная задача для волнового уравнения с нелинейным поглощением // *Сибирский математический журнал*. 2023. Т. 64, № 3. С. 635–652. DOI: 10.33048/smzh.2023.64.314.
11. *Кузнецов Г.Н., Кузькин В.М., Переселков С.А., Просовецкий Д.Ю.* Помехоустойчивость интерферометрического метода оценки скорости источника звука в мелком море // *Акустический журнал*. 2016. Т. 62, № 5. С. 556–572. DOI: 10.7868/S0320791916050105.
12. *Бахвалов П.А., Козубская Т.К., Корнилина Е.Д., Морозов А.В., Якововский М.В.* Технология расчета акустических возмущений в дальнем поле течения // *Математическое моделирование*. 2011. Т. 23, № 11. С. 33–47.
13. *Петров И.Б., Фаворская А.В.* О совместном моделировании волновых явлений сеточно-характеристическим методом и разрывным методом Галеркина // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. 2022. Т. 506, № 1. С. 62–67. DOI: 10.31857/S2686954322050150.
14. *Четверушкин Б.Н., Ольховская О.Г., Гасилов В.А.* Трехслойная схема для решения уравнения диффузии излучения // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. 2023. Т. 512, № 1. С. 89–95. DOI: 10.31857/S2686954323600295.
15. *Драчев К.А., Римлянд В.И.* Применение метода конечных разностей во временной области для моделирования распространения ультразвука // *Вестник Тихоокеанского государственного университета*. 2018. № 1. С. 15–22.
16. *Филимонов С.А., Гаврилов А.А., Дектерев А.А., Литвинцев К.Ю.* Математическое моделирование взаимодействия свободно-конвективного течения и подвижного тела // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2023. Т. 16, № 1. С. 89–100. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.1.7.
17. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., Сидорякина В.В., Проценко С.В.* Метод учета заполненности ячеек для решения задач гидродинамики со сложной геометрией расчетной области // *Математическое моделирование*. 2019. Т. 31, № 8. С. 79–100. DOI: 10.1134/S0234087919080057.

18. *Сушинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Проценко Е.А.* Экономичные явно-неявные схемы решения многомерных задач диффузии-конвекции//Вычислительная механика сплошных сред. 2019. Т. 12, №4. С. 435–445. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.4.37.

Сведения об авторах:

Чистяков Александр Евгеньевич, дфмн, проф., Донской государственный технический университет (ДГТУ), 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; e-mail: cheese_05@mail.ru; ORCID: 0000-0002-8323-6005

Рахимбаева Елена Олеговна, асп., ДГТУ; e-mail: lena_rahimbaeva@mail.ru; ORCID: 0000-0002-3194-6144

Литвинов Владимир Николаевич (корр.), ктн, доц., ДГТУ; e-mail: litvinovvn@rambler.ru; ORCID: 0000-0001-8234-3194

Никитина Алла Валерьевна, дтн, проф., ДГТУ; e-mail: nikitina.vm@gmail.com; ORCID: 0000-0001-7257-962X