

Научная статья

О возмущениях горизонтального стратифицированного течения, обусловленных неоднородным объемным тепловыделением

Л.Х. Ингель

НПО «Тайфун», Обнинск, Российская Федерация

Институт физики атмосферы имени А.М. Обухова РАН, Москва, Российская Федерация

Аналитически исследованы линейные стационарные возмущения горизонтальных стратифицированных течений идеальной среды, вызываемые горизонтально-неоднородными объемными источниками тепла/плавучести. Такие задачи имеют много приложений, в частности, геофизических. Один из примеров – взаимодействие ветра в тропосфере с областью влажной конвекции, в которой существенно тепловыделение в результате фазовых переходов. В отличие от ряда других работ, в настоящей статье основное внимание уделяется захваченным нижним слоем среды возмущениям, существующим при малых и, наоборот, при достаточно больших горизонтальных масштабах неоднородностей. При решении подобных задач нередко используется представление неперидической функции в виде интеграла Фурье, то есть как разложение на гармонические компоненты, и рассматривается суперпозиция горизонтальных гармоник. Свойства гармоник, в зависимости от их горизонтальных масштабов, качественно различаются. При этом известный интервал масштабов отвечает, прежде всего, генерации внутренних гравитационных волн, в то время как на других масштабах возникают захваченные возмущения. Суперпозиция этих возмущений сложна и обычно мало доступна для аналитического исследования, поэтому целесообразно подробно изучить решение для отдельной гармоники. На этом и сконцентрирована настоящая работа. Данный подход позволил получить и проанализировать решения в явном и прозрачном аналитическом виде. Помимо полей скорости, температуры и давления, получены выражения для завихренности и спиральности возникающих возмущений. Показана возможность резонансного усиления амплитуд возмущений и глубины их проникновения в среду при совпадении времени прохождения источника горизонтальным потоком с характерным периодом плавучести или инерционным периодом.

Ключевые слова: стратифицированные течения, объемное тепловыделение, горизонтальные неоднородности, захваченные возмущения, линейные возмущения, спиральность, аналитическая модель

Получение: 10.10.2023 / *Публикация онлайн:* 22.07.2024

УДК 532.5:536.25:551.511

1. Введение

Большое число теоретических исследований посвящено изучению возмущений, вызываемых горизонтально-неоднородным объемным тепловыделением в горизонтальных стратифицированных течениях (см., например, [1–11] и библиографию в этих публикациях). Внимание уделяется упрощенным моделям, описывающим отклик горизонтальных течений идеальной среды на заданное распределение источника тепла/плавучести. Подобные модели имеют, в частности, много геофизических приложений. Сюда относится взаимодействие ветра в тропосфере с областью влажной конвекции [1]. Но и без учета тепловыделения фазовых переходов области интенсивной конвекции можно грубо представлять посредством задания объемных источников плавучести. Например, вероятным механизмом зарождения полярных циклонов может служить интенсивная конвекция в холодном воздухе над относительно теплой морской поверхностью [12, 13]. Источник тепла в таких случаях формально может быть не объемным, а сосредоточенным на нижней границе, и в уравнении переноса тепла нагрев среды должен, строго говоря, описываться с помощью диффузионных слагаемых типа $\text{div}(K \text{grad}\theta)$, где K — коэффициент обмена, θ — отклонение температуры. Но расчет поля эффективного коэффициента переноса K при интенсивной конвекции весьма сложен и ненадежен. Поэтому в некоторых ситуациях более уместно заменить упомянутое диффузионное слагаемое эффективным источником/стоком тепла (полем тепловыделения Q , [K/c]). Подобные модели применяются, в частности, при изучении «городских островов тепла» [9].

Но и при таком упрощении даже стационарная задача в линейном приближении и идеальной среде достаточно сложна для аналитического исследования, так что имеющиеся результаты в определенном смысле ограничены. Настоящая работа отличается от других прежде всего геометрией задачи: принято такое распределение источника тепла/плавучести, которое позволяет получить прозрачное аналитическое решение даже для трехмерной задачи. Кроме того, рассматриваются области значений параметров, отвечающие «захваченным» возмущениям, а не внутренним гравитационным волнам. Дополнительно рассчитана генерация завихренности и спиральности, обусловленная неоднородным тепловыделением.

2. Постановка задачи

Рассматривается полуограниченная устойчиво стратифицированная идеальная среда в области $z > 0$ (ось z перпендикулярна координатной плоскости (x, y) и направлена вертикально вверх). Изучаются линейные стационарные возмущения фонового горизонтального течения с постоянной скоростью U , направленной вдоль оси x , вызываемые распределенным источником тепла $Q(x, y, z)$.

Линеаризованная по возмущениям система уравнений динамики, неразрывности и переноса тепла в приближении Буссинеска с учетом вращения имеет вид:

$$\begin{aligned} U \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + f v, & U \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial y} - f u, \\ U \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \alpha g \theta, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ U \frac{\partial \theta}{\partial x} + \gamma w &= Q(x, y, z). \end{aligned} \quad (1)$$

В системе (1) приняты обозначения: u, v, w — составляющие отклонения (возмущения) скорости в направлении осей x, y, z соответственно; P — возмущение давления, отнесенное к средней плотности среды ρ_0 ; θ — возмущение температуры (в атмосфере — это возмущения потенциальной температуры [14]); $\gamma > 0$ — фоновый вертикальный градиент потенциальной температуры (предполагается устойчивая фоновая стратификация плотности); α — коэффициент теплового расширения среды; f — параметр Кориолиса; g — ускорение силы тяжести.

На нижней границе $z = 0$ предполагается выполнение условия непротекания:

$$w = 0. \quad (2)$$

Считается также, что источник плавучести распределен в некоторой области вблизи нижней границы; при $z \rightarrow \infty$ возмущения затухают.

3. Решение

После исключения из системы всех неизвестных кроме одной, приходим к уравнению:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta w + \left(\frac{f}{U}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\frac{N}{U}\right)^2 \Delta_h w = \frac{\alpha g}{U^2} \Delta_h Q.$$

Здесь $N = (\alpha g \gamma)^{1/2}$ — частота плавучести; Δ — трехмерный лапласиан; $\Delta_h = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$.

При решении подобных задач нередко используется интеграл Фурье, который равен суперпозиции горизонтальных гармоник. Свойства таких гармоник зависят от их горизонтальных масштабов и потому качественно различаются. Известный интервал масштабов отвечает генерации внутренних гравитационных волн. Но одновременно с последними на других масштабах образуются так называемые захваченные возмущения. Поэтому суперпозиция таких возмущений представляет собой сложный объект, обычно недоступный для аналитического исследования. Вследствие этого целесообразно подробно изучить решение для отдельной гармоники. Это и осуществлено в настоящей работе, причем только на масштабах, отвечающих захваченным возмущениям. Отметим, что в задачах без фонового течения подобный анализ отдельных гармоник оказался полезным и эффективным (см., например, [15–17] и библиографию в этих работах).

Согласно вышесказанному, рассматриваем заданное распределение источника тепла/плавучести в виде:

$$Q(x, y, z) = q(z) \cos(k_x x) \cos(k_y y).$$

Для обсуждаемой полуограниченной устойчиво стратифицированной идеальной среды имеет смысл искать решение, гармоническое по горизонтали:

$$w(x, y, z) = W(z) \cos(k_x x) \cos(k_y y), \quad \theta(x, y, z) = T(z) \sin(k_x x) \cos(k_y y), \dots$$

Для амплитудной функции $W(z)$ получаем уравнение:

$$\frac{d^2 W}{dz^2} - k^2 \frac{\sigma - 1}{\xi - 1} W = -\frac{\alpha g k^2}{(\xi - 1) U^2 k_x^2} q(z), \quad (3)$$

где $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$, безразмерные параметры $\sigma = (N/Uk_x)^2$, $\xi = (f/Uk_x)^2$.

Прозрачное аналитическое решение задачи получается при экспоненциальном убывании амплитуды источника с высотой: $q(z) = q_0 \exp(-z/h)$, где q_0 и h — параметры, смысл которых очевиден. Такое вертикальное распределение тепловыделения принято в ряде работ, например, в [2, 9]. Уравнение (3) в этом случае имеет частное решение $W_n(z) = -W_0 \exp(-z/h)$, где W_0 — масштаб вертикальной скорости:

$$W_0 = \frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma \delta}{(\xi - 1)(1 - \psi^2)},$$

и введены безразмерные параметры: $\psi = [\delta(\sigma - 1)/(\xi - 1)]^{1/2}$ и $\delta = (hk)^2$ (последнее есть квадрат аспектного отношения для источника). В зависимости от знака безразмерного параметра ψ^2 общее решение однородного уравнения может быть экспоненциальным либо синусоидальным. В настоящей работе ограничиваемся случаем $\psi^2 > 0$, то есть оба параметра σ , ξ меньше/больше единицы. Такая ситуация отвечает захваченным возмущениям, возникающим при достаточно малых и, наоборот, достаточно больших горизонтальных масштабах источника возмущений. Тогда в общее решение входит линейная комбинация двух экспонент. С учетом затухания возмущений вдали от нижней границы коэффициент при возрастающей в зависимости от z экспоненте должен равняться нулю, и решение уравнения (3) можно представить в виде:

$$W(z) = C \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - W_0 \exp(-z/h),$$

где C — постоянная интегрирования, которая при условии непротекания есть W_0 .

Далее из исходной системы уравнений нетрудно последовательно выразить возмущение температуры θ , возмущения давления и составляющих скорости u и v . В итоге решение принимает вид:

$$\begin{aligned} w &= W_0 \left[\exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right] \cos(k_x x) \cos(k_y y), \\ \theta &= -\frac{q_0}{N} \frac{1}{(\xi - 1)(1 - \psi^2)} \left[\sigma \delta \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) + (1 - \xi - \delta) \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right] \sin(k_x x) \cos(k_y y), \\ P &= U \frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma \delta^{1/2}}{1 - \psi^2} \frac{k_x}{k} \left[\psi \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right] \sin(k_x x) \cos(k_y y), \\ u &= \frac{W_0}{\delta^{1/2}} \frac{k_x}{k} \left[\psi \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right] \left[\cos(k_y y) + \frac{k_y}{k_x} \xi^{1/2} \sin(k_y y) \right] \sin(k_x x), \\ v &= \frac{W_0}{\delta^{1/2}} \frac{k_y}{k} \left[\psi \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right] \left[\xi^{1/2} \frac{k_x}{k_y} \cos(k_y y) + \sin(k_y y) \right] \cos(k_x x), \end{aligned} \quad (4)$$

и получаем выражение для вертикальной завихренности:

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = kW_0 \left(\frac{\xi}{\delta} \right)^{1/2} \left[\exp\left(-\frac{z}{h}\right) - \psi \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) \right] \sin(k_x x) \cos(k_y y).$$

Спиральность $H = \mathbf{V} \cdot \text{rot} \mathbf{V}$ (здесь \mathbf{V} — вектор скорости) в линейном приближении принимает вид:

$$\begin{aligned} H &\approx U \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = UW_0 \frac{k_y}{\delta} \left\{ \left[-\delta \left(\exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right) + \psi^2 \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right] \sin(k_y y) + \right. \\ &\quad \left. + \xi^{1/2} \frac{k_x}{k_y} \left(\psi^2 \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right) \cos(k_y y) \right\} \cos(k_x x). \end{aligned}$$

В условиях земной атмосферы характерные значения частоты плавучести N и параметра Кориолиса f различаются примерно на два порядка, следовательно, безразмерные параметры δ и ξ различаются на четыре порядка. Поэтому имеет смысл проанализировать отдельно предельные случаи, относящиеся к тем двум областям, в которых захваченные возмущения существуют.

4. Область коротковолновых возмущений ($k_x \geq N/U$)

При $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $U = 10 \text{ м/с}$ коротковолновые возмущения имеют место в области горизонтальных масштабов источников плавучести в направлении фонового потока, простирающейся на несколько километров и включающей масштабы многих конвективных явлений. В этой области

$$\xi \ll 1, \quad \sigma \leq 1, \quad \psi \approx [\delta(1-\sigma)]^{1/2}, \quad W_0 \approx -\frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma \delta}{1-\delta(1-\sigma)}.$$

Малость параметра ξ дает основание пренебрегать кориолисовыми ускорениями. Тогда приближенное решение приобретает вид:

$$u \approx \frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma \delta^{1/2}}{[1-\delta(1-\sigma)]} \frac{k_x}{k} \left\{ \exp(-z/h) - [\delta(1-\sigma)]^{1/2} \exp[-(1-\sigma)^{1/2} kz] \right\} \sin(k_x x) \cos(k_y y), \quad (5)$$

$$v \approx \frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma \delta^{1/2}}{[1-\delta(1-\sigma)]} \frac{k_y}{k} \left\{ \exp(-z/h) - [\delta(1-\sigma)]^{1/2} \exp[-(1-\sigma)^{1/2} kz] \right\} \cos(k_x x) \sin(k_y y), \quad (6)$$

$$w \approx \frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma \delta}{[1-\delta(1-\sigma)]} \left\{ \exp(-z/h) - \exp[-(1-\sigma)^{1/2} kz] \right\} \cos(k_x x) \cos(k_y y), \quad (7)$$

$$P \approx -Uu,$$

$$\theta \approx \frac{q_0}{U k_x [1-\delta(1-\sigma)]} \left\{ (1-\delta) \exp(-z/h) + \delta \sigma \exp[-(1-\sigma)^{1/2} kz] \right\} \sin(k_x x) \cos(k_y y). \quad (8)$$

В этом приближении завихренность отсутствует, а спиральность выражается формулой:

$$H \approx U \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \approx U \frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma k_y}{[1-\delta(1-\sigma)]} \left\{ (1-\delta) \exp(-z/h) + \delta \sigma \exp[-(1-\sigma)^{1/2} kz] \right\} \cos(k_x x) \sin(k_y y).$$

Полученные вертикальные профили представляют собой линейные комбинации двух убывающих с высотой экспонент, которые можно представить в виде $\exp(-Z)$ и $\exp\{-[\delta(1-\sigma)]^{1/2} Z\}$, где $Z = z/h$ — безразмерная вертикальная координата. Отношение второй экспоненты к первой равно $\exp\left\{\left\langle 1 - [\delta(1-\sigma)]^{1/2} \right\rangle Z\right\}$. Таким образом, знак разности $1 - [\delta(1-\sigma)]^{1/2}$ определяет асимптотику решений на больших высотах. В частности, при $\delta < 1$ вторая экспонента убывает с высотой медленнее, чем первая, и именно она определяет упомянутую асимптотику. Отметим, что разность $1 - [\delta(1-\sigma)]^{1/2}$ входит и в знаменатели выражений (5)–(8), но это не приводит к сингулярностям при переходе этой разности через нуль, поскольку и числители упомянутых выражений при этом переходят через нуль.

При отсутствии фонового горизонтального течения и кориолисовых ускорений система (1) имеет решение

$$w = Q/\gamma = (q_0/\gamma) \exp(-z/h) \cos(kx), \quad \theta = 0, \quad P = 0, \quad (9)$$

физический смысл которого достаточно прост: объем среды, в котором происходит тепловыделение, при отсутствии обмена с окружающей средой всплывает с такой скоростью, что прирост плавучести за счет тепловыделения в (9) в точности компенсируется убыванием плавучести, связанным с подъемом этого объема в менее плотные слои среды («режим с нейтральной плавучестью» [11, 18]). Отсюда понятен смысл масштаба скорости q_0/γ , входящего в полученное выше решение — это предельная скорость, с которой может всплывать нагревающийся объем без приобретения отрицательной плавучести на фоне покоящейся устойчивой стратифицированной среды. Представляет интерес сравнение с этим масштабом скорости вертикальных движений при наличии фонового течения.

В области максимального тепловыделения (вблизи вертикали $x = 0, y = 0$) вертикальная скорость в найденном решении всегда отрицательна, в отличие от конвекции на фоне покоящейся среды. В области охлаждения, напротив, имеют место восходящие движения; это может связываться с некоторыми наблюдаемыми особенностями интенсивной конвекции в атмосфере. Известно, что фоновый горизонтальный ветер способствует развитию интенсивных летних конвективных явлений в атмосфере [19]. Один из их механизмов заключается в следующем. Выпадающие локальные интенсивные осадки являются причиной возникновения охлажденной области в нижней атмосфере («cold pool» [19]). Взаимодействие фонового горизонтального ветра с этим «холодным пулом» может приводить к возникновению дополнительных восходящих движений, поддерживающих и усиливающих конвекцию.

Остановимся сначала на случае $\delta < 1$ (область тепловыделения вытянута по горизонтали). При этом вторая из упомянутых экспонент, входящих в решение, описывающих вертикальные профили параметров, убывает с высотой медленнее, чем первая. Именно она и определяет асимптотику решения на больших высотах. Особый интерес представляет случай $\sigma \rightarrow 1$, который соответствует резонансу, когда время прохождения частицы среды через пространственный период источника приближается к периоду плавучести. В этом случае показатель второй экспоненты неограниченно убывает по абсолютной величине, и высота проникновения возмущений в среду неограниченно растет. Кроме того, стремится к нулю разность $1 - \sigma$, входящая в знаменатели решения, вследствие чего увеличивается и амплитуда возмущений. Но эта разность присутствует и в качестве коэффициента при второй экспоненте в выражениях для u, v, P . Поэтому на малых высотах при $\sigma \rightarrow 1$ вторая экспонента вносит малый вклад в эти выражения, и лишь с высотой она становится существенной, так что с высотой выражения для u, v, P меняют знак.

При $\sigma = 1$ (в состоянии резонанса) амплитудные функции горизонтальных гармоник выглядят следующим образом:

$$Y = \delta^{1/2} \frac{q_0}{\gamma} \frac{k_x}{k} \exp(-z/h), \quad V = \delta^{1/2} \frac{q_0}{\gamma} \frac{k_y}{k} \exp(-z/h),$$

$$W = -\delta \frac{q_0}{\gamma} [1 - \exp(-z/h)], \quad T = \frac{q_0}{U k_x} [\delta + (1 - \delta) \exp(-z/h)],$$

$$H \approx U k_y \frac{q_0}{\gamma} [\delta + (1 - \delta) \exp(-z/h)],$$

где Y, V — амплитудные функции, относящиеся к u и v соответственно. Горизонтальные составляющие скорости в этих выражениях, как и амплитуда отклонения давления, затухают с высотой на вертикальных масштабах h источника тепла. Но амплитуды вертикальной скорости, спиральности и отклонения температуры при резонансных значениях параметров не затухают с высотой. Таким образом, интегральная спиральность в столбе среды вблизи резонанса может существенно возрастать.

С увеличением параметра δ амплитуды возмущений возрастают.

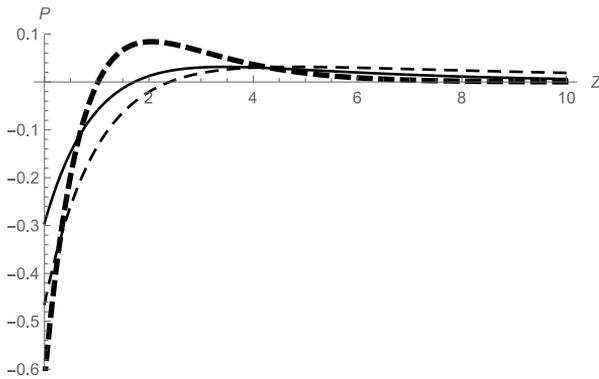


Рис. 1. Профили отклонения давления в области тепловыделения (на вертикали с координатами $x=0, y=0$), нормированные на $U(q_0/\gamma)(k_x/k)\bar{\rho}$ при $\sigma = 0.7, \delta = 0.3$ (сплошная линия), $\sigma = 0.95, \delta = 0.3$ (тонкая штриховая линия), $\sigma = 0.7, \delta = 3$ (толстая штриховая линия)

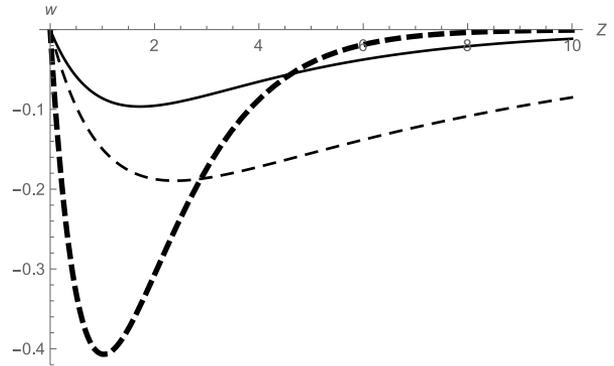


Рис. 2. Профили вертикальной скорости на вертикали $x=0, y=0$, нормированные на масштаб q_0/γ при тех же значениях параметров σ, δ , что и на рисунке 1

На рисунке 1 представлены безразмерные вертикальные профили отклонений давления в области тепловыделения ($Q > 0$) при различных значениях параметров σ, δ . Профили u отличаются от профилей P знаком и нормировкой. В нижнем слое среды при нагреве давление понижено, и горизонтальное течение ускоряется. Выше имеет место компенсационное противотечение и давление повышено. На рисунке 2 построены аналогичные профили вертикальной скорости. Видно, что при приближении σ к резонансному значению, равному 1, высота проникновения возмущений существенно увеличивается, а с ростом значения δ возрастает амплитуда возмущений.

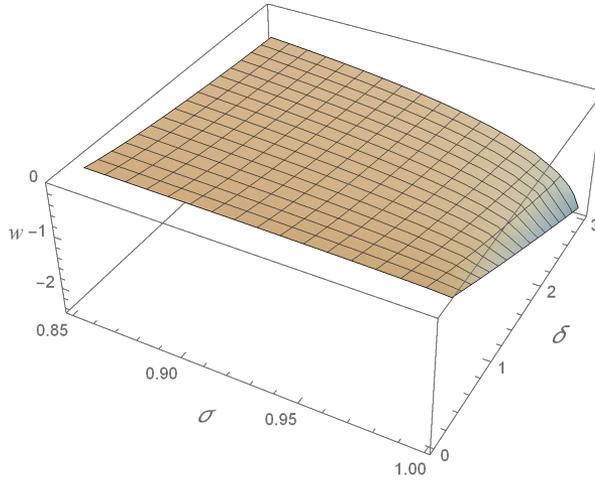


Рис. 3. Зависимость вертикальной скорости (нормирована на масштаб q_0/γ) на вертикали $x=0, y=0$ от безразмерных параметров σ, δ на уровне $Z=2$

Как видно из рисунка 3, амплитуда вертикальной скорости вблизи резонанса и при не слишком малых значениях δ может дажекратно превышать упомянутый выше масштаб q_0/γ , максимальный при отсутствии фоновых течений.

5. Область длинноволновых возмущений

Выше рассматривалась область небольших горизонтальных масштабов источников ($k_x \geq N/U, \sigma \leq 1$), когда в условиях земной атмосферы вращение (кориолисовы ускорения обычно несущественны). Теперь исследуем другую область захваченных возмущений, в которой $k_x \leq f/U, \xi \geq 1, \sigma \gg 1$.

Для простоты ограничимся двумерной постановкой задачи: $k_y = 0, k = k_x$. Здесь решение принимает вид:

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma \delta}{(\xi - 1)(1 - \psi^2)} \left[\exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right] \cos(kx), \\
 u &= \frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma \delta^{1/2}}{(\xi - 1)(1 - \psi^2)} \left[\psi \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right] \sin(kx), \\
 v &= \frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma (\xi \delta)^{1/2}}{(\xi - 1)(1 - \psi^2)} \left[\psi \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right] \cos(kx), \\
 P &= U \frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma \delta^{1/2}}{1 - \psi^2} \left[\psi \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right] \sin(kx), \\
 \theta &= \frac{q_0}{kU} \left\{ -\frac{\sigma \delta}{(\xi - 1)(1 - \psi^2)} \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) + \left[1 + \frac{\sigma \delta}{(\xi - 1)(1 - \psi^2)} \right] \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right\} \sin(kx) \approx \\
 &\approx \frac{q_0}{kU(1 - \psi^2)} \left[-\psi^2 \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) + \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right] \sin(kx)
 \end{aligned}$$

(в приближенном равенстве учтено, что $\sigma \gg 1$), и становятся следующими выражения:

– для вертикальной завихренности

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{f}{U} \frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma \delta^{1/2}}{(\xi - 1)(1 - \psi^2)} \left[\exp\left(-\frac{z}{h}\right) - \psi \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) \right] \sin(kx);$$

– для генерируемой спиральности

$$H \approx -U \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{f q_0 \sigma}{\gamma (\xi - 1)(1 - \psi^2)} \left[\psi^2 \exp\left(-\psi \frac{z}{h}\right) - \exp\left(-\frac{z}{h}\right) \right] \cos(kx).$$

Полная спиральность в столбе среды находится по формуле:

$$\int_0^{\infty} H dz = U v|_{z=0} = -\frac{f q_0 \sigma h}{\gamma(\xi-1)(1+\psi)} \cos(kx).$$

Пусть в воздухе мощность источника тепла на вертикали $x = 0$ составляет $E = 30 \text{ Вт/м}^2$ при $h = 1000 \text{ м}$, $\gamma = 3 \cdot 10^{-3} \text{ К/м}$, $U = 7 \text{ м/с}$, $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $k = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$, что отвечает длине горизонтальной полуволны около 250 км. Тогда $q_0 = E/c_p \rho_0 h \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ К/с}$ (c_p, ρ_0 — теплоемкость и средняя плотность воздуха соответственно), $N \approx 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\sigma \approx 1.4 \cdot 10^4$, $\xi \approx 1.4$, $\delta \approx 1.4 \cdot 10^{-4}$, $\psi \approx 2.2$. Масштаб вертикальной скорости q_0/γ равен при этом 10^{-2} м/с , модуль вихревой скорости v вблизи поверхности достигает

$$\frac{q_0}{\gamma} \frac{\sigma(\xi\delta)^{1/2}}{(\xi-1)(1+\psi)} \approx 1.5 \text{ м/с},$$

а абсолютная величина полной спиральности в столбе воздуха может составлять порядка $10 \text{ м}^2/\text{с}^2$.

Отметим, что мощность источников тепла в атмосфере, например, в полярных мезоциклонах, может быть гораздо больше, чем в приведенном примере, но представленная здесь линейная модель не позволяет корректно изображать интенсивные возмущения. Свойства решения существенно отличаются от рассмотренного выше случая захваченных коротковолновых возмущений. Например, если в том случае в области пониженного давления продольная скорость увеличивалась в направлении пониженного давления (движение было непосредственно обусловлено градиентом давления), то в данном случае отклонения давления и продольной скорости имеют одинаковый знак. Причина этого заключается в дополнительном влиянии кориолисовых сил. Вертикальная скорость в области тепловыделения теперь положительна (Рис. 4). При резонансе — совпадении периода прохождения потоком термической неоднородности с инерционным периодом ($\xi \rightarrow 1 + 0$) — амплитуда возмущений усиливается. Это видно, в частности на рисунке 4.

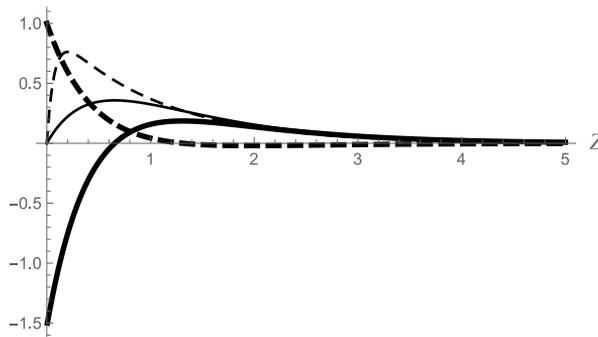


Рис. 4. Нормированные вертикальные профили некоторых искоемых переменных при $\sigma \approx 1.4 \cdot 10^4$, $\delta \approx 1.4 \cdot 10^{-4}$, $\xi \approx 1.4$ (если не оговорено иначе): вертикальная скорость в области максимального тепловыделения (на вертикали при $x = 0$), нормированная на q_0/γ (тонкая сплошная линия) – и она же при $\xi \approx 1.01$ (тонкая штриховая линия); отклонения составляющих горизонтальной скорости: u на краю области тепловыделения (на вертикали при $kx = \pi/2$), нормированного на $(q_0/\gamma)\delta^{-1/2}$, v (на вертикали при $x = 0$), нормированного на $(q_0/\gamma) \cdot (\zeta\delta)^{-1/2}$, и давления на вертикали $kx = \pi/2$, нормированного на $U\rho_0(q_0/\gamma)/[(\xi-1)\delta^{1/2}]$ (толстая сплошная линия); отклонения температуры (на вертикали $kx = \pi/2$), нормированного на q_0/kU , а также спиральность (на вертикали при $x = 0$), нормированная на $-fq_0\sigma/[\gamma(\xi-1)]$ (толстая штриховая линия)

6. Заключение

Выше найдены аналитические решения, описывающие стационарные захваченные возмущения, возникающие в горизонтальных течениях стратифицированной идеальной среды под влиянием объемных источников плавучести. Видно, что даже при ограничении исследования одной горизонтальной гармоникой и только захваченными возмущениями результаты, в зависимости от значений параметров, могут быть весьма содержательными и разнообразными. Например, при источниках тепла относительно малых горизонтальных масштабов (см. раздел

4) в области тепловыделения у нижней границы давление понижено, горизонтальное течение ускоряется и, как следует из уравнения неразрывности, имеют место нисходящие движения. При больших горизонтальных масштабах источников, когда существенна кориолисова сила (см. раздел 5), в аналогичной ситуации, несмотря на понижение давления, горизонтальный поток может замедляться, и в области тепловыделения возникают восходящие движения. Представляется, что без подобного понимания качественных особенностей динамики отдельных гармоник, трудно добиться прозрачных результатов при рассмотрении суперпозиции гармоник.

Представляется небезынтересной и продемонстрированная возможность резонансного усиления амплитуд возмущений и высоты их проникновения в среду при совпадении времени прохождения источника горизонтальным потоком с характерным периодом плавучести N^{-1} или инерционным периодом f^{-1} .

Автор признателен анонимному рецензенту за ценные замечания, существенно отразившиеся на содержании статьи.

Литература

1. *Raymond D.J.* Prescribed Heating of a Stratified Atmosphere as a Model for Moist Convection // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1986. Vol. 43, no. 11. P. 1101–1111. DOI: 10.1175/1520-0469(1986)043<1101:PH0ASA>2.0.CO;2.
2. *Lin Y.-L.* Mesoscale Dynamics. Cambridge University Press, 2007. 646 p. DOI: 10.1017/CB09780511619649.
3. *Lin C.A., Stewart R.E.* Diabatically Forced Mesoscale Circulations in the Atmosphere // *Advances in Geophysics*. Vol. 33 / ed. by R. Dmowska, B. Saltzman. Elsevier, 1991. P. 267–305. DOI: 10.1016/S0065-2687(08)60443-4.
4. *Robichaud A., Lin C.A.* The linear steady response of a stratified baroclinic atmosphere to elevated diabatic forcing // *Atmosphere-Ocean*. 1991. Vol. 29. P. 619–635. DOI: 10.1080/07055900.1991.9649421.
5. *Lin Y.L., Smith R.B.* Transient Dynamics of Airflow near a Local Heat Source // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1986. Vol. 43. P. 40–49. DOI: 10.1175/1520-0469(1986)043<0040:tdoana>2.0.co;2.
6. *Lin Y.-L.* Calculation of Airflow over an Isolated Heat Source with Application to the Dynamics of V-Shaped Clouds // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1986. Vol. 43. P. 2736–2751. DOI: 10.1175/1520-0469(1986)043<2736:coaoai>2.0.co;2.
7. *Lin Y.-L., Li S.* Three-Dimensional Response of a Shear Flow to Elevated Heating // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1988. Vol. 45. P. 2987–3002. DOI: 10.1175/1520-0469(1988)045<2987:tdroas>2.0.co;2.
8. *Lin Y.-L., Chun H.-Y.* Effects of Diabatic Cooling in a Shear Flow with a Critical Level // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1991. Vol. 48. P. 2476–2491. DOI: 10.1175/1520-0469(1991)048<2476:eodcia>2.0.co;2.
9. *Han J.-Y., Baik J.-J.* A Theoretical and Numerical Study of Urban Heat Island-Induced Circulation and Convection // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 2008. Vol. 65. P. 1859–1877. DOI: 10.1175/2007jas2326.1.
10. *Fuchs Ž., Gjorgjievska S., Raymond D.J.* Effects of Varying the Shape of the Convective Heating Profile on Convectively Coupled Gravity Waves and Moisture Modes // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 2012. Vol. 69. P. 2505–2519. DOI: 10.1175/jas-d-11-0308.1.
11. *Ингель Л.Х.* О возмущениях геострофического течения, обусловленных объемными источниками плавучести и количества движения // *Инженерно-физический журнал*. 2022. Т. 95, № 4. С. 994–999.
12. *Moreno-Ibáñez M., Laprise R., Gachon P.* Recent advances in polar low research: current knowledge, challenges and future perspectives // *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*. 2021. Vol. 73, no. 1. 1890412. DOI: 10.1080/16000870.2021.1890412.
13. *Луценко Э.И., Лагун В.Е.* Полярные мезомасштабные циклонические вихри в атмосфере Арктики: Справочное пособие. Т. 95. СПб.: ААНИИ, 2010. 97 с.
14. *Гилл А.Е.* Динамика атмосферы и океана. Т. 1. М.: Мир, 1986. 397 с.
15. *Stommel H., Veronis G.* Steady Convective Motion in a Horizontal Layer of Fluid Heated Uniformly from Above and Cooled Non-uniformly from Below // *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*. 1957. Vol. 9, no. 3. P. 401–407. DOI: 10.3402/tellusa.v9i3.9100.
16. *Ingel L.K., Makosko A.A.* To the theory of convective flows in a rotating stratified medium over a thermally inhomogeneous surface // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2022. Vol. 1040. 012023. DOI: 10.1088/1755-1315/1040/1/012023.
17. *Ингель Л.Х.* Аномальный отклик стратифицированной среды на объемное тепловыделение // *Журнал технической физики*. 2023. Т. 93, № 2. С. 202–206. DOI: 10.21883/ТФ.2023.02.55542.222–22.
18. *Ингель Л.Х.* Самовоздействие тепловыделяющей примеси в жидкой среде // *Успехи физических наук*. 1998. Т. 168, № 1. С. 104–108. DOI: 10.3367/UFN.199801f.0104.

19. *Markowski P., Richardson Y. Mesoscale Meteorology in Midlatitudes. Chichester: Wiley-Blackwell, 2010. 628 p.*

Сведения об авторах:

Ингель Лев Ханаанович, дфмн, внс, НПО «Тайфун», 249038, г. Обнинск, ул. Победы, д. 4; e-mail: lev.ingel@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6669-8021