

Научная статья

Развитие метода дискретных вихрей в сочетании с быстрым методом мультиполя в задачах гидродинамики

М.А. Сумбатян, А.С. Пискунов

Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

В работе обсуждается течение идеальной несжимаемой жидкости в терминах завихренности. В рамках метода дискретных вихрей каждая материальная частица жидкости рассматривается в переменных Лагранжа; при этом скорости определяются законом Био–Савара. Таким образом учитывается влияние вихрей друг на друга. Целью работы является построение численного метода разного порядка точности в задачах вихревой динамики. В сочетании со стандартными методами средней точки и Рунге–Кутты 4-го порядка используется быстрый метод мультиполя, который существенно снижает алгоритмическую сложность. Вихревая система в быстром методе мультиполя состоит из дискретных вихрей. Область движения жидкости, определяемая движением вихрей, разбивается на некоторое число кольцевых подобластей, в каждой из которых скорости вычисляются поэтапно. Для верификации сочетаемости названных численных методов решены три тестовых примера: движение симметричного и асимметричного диполей Лэмба–Чаплыгина, а также вращение объема жидкости, занимающего цилиндрическую область конечного радиуса. Известно, что последний пример довольно сложен для прямых численных расчетов, в отличие от элементарного вида его аналитического решения. Фактически проведенные расчеты подтверждают, что без использования ускорения с помощью быстрого метода мультиполя построение численного решения для этого тестового примера вряд ли возможно за разумное время при достаточно большом количестве дискретных вихрей. Результаты тестовых расчетов представлены в виде графиков и таблиц. Применение стандартных методов дискретных вихрей в сочетании с быстрым методом мультиполя показывает, что за счет оптимального выбора числа подобластей и числа дискретных вихрей возможно существенное снижение времени вычислений.

Ключевые слова: идеальная жидкость, вихревая структура, численные методы, быстрый метод мультиполя, дискретные вихри

Получение: 25.05.2023 / Публикация онлайн: 01.04.2024

УДК: 532.5

1. Введение

В задачах динамики жидкости широкое распространение получили современные сеточные численные методы, такие как метод конечных элементов [1], метод конечных разностей [2], метод конечных объемов [3] и другие. С их помощью течение жидкости изучается на основе подхода Эйлера, при котором все физические характеристики относятся не к частицам жидкости, а к выбранным зафиксированным точкам в пространстве [4], а для определения физических параметров самих частиц требуются дополнительные усилия. В то же время с 1980-х годов стали развиваться так называемые «вихревые» методы, в которых ключевую роль играет функция завихренности в сочетании с другими кинематическими характеристиками (либо с компонентами вектора скорости, либо с функцией тока). При этом функция давления в описывающей процесс системе дифференциальных уравнений в явном виде не присутствует. Такая трактовка уравнений движения жидкости в терминах вихревой функции очень удобна, если применить подход Лагранжа, в котором физические характеристики потока напрямую относятся к движущимся частицам [4]. После дискретизации исследование сводится к слежению за конечным числом вихрей, взаимодействующих друг с другом по закону Био–Савара [5–11]. Этот подход оказался на удивление простым с алгоритмической точки зрения; ему было дано название «метод вихревых элементов» или «метод дискретных вихрей» (не путать с методом дискретных вихрей или панельным методом из теории тонкого крыла [12, 13]). К сожалению, платой за алгоритмическую простоту в таком подходе является его арифметическая сложность. При прямой реализации этой идеи для N вихрей сложность алгоритма оценивается как $O(N^2)$. В то же время для сеточных методов при переходе к системам линейных алгебраических уравнений вследствие использования итерационных схем сложность так называемых «быстрых методов» составляет $O(N \log N)$, если N — число узлов [14]. Заметим, что в двумерных задачах дискретные вихри являются точечными, но в пространственных задачах их можно рассматривать в более сложной конфигурации [15].

Несмотря на то, что в своей исходной формулировке метод дискретных вихрей (ДВ) не причисляется к «быстрым», он, как и сеточные методы, получил существенное развитие. Так, помимо детерминированной модели течения жидкости с «дискретными вихрями», нашли применение также модели со случайными дискретными вихрями [6], например, в задачах диффузии вязкой жидкости. Подход к решению уравнений Навье–Стокса через алгоритм расщепления вязкости описывается в [7] и по отдельности рассматривает течение идеальной и вязкой

жидкости. В [9] решена задача о плоском течении методом ДВ в сложных движущихся границах. Комбинация вихревого метода и метода граничных элементов представлена в [10] для прогнозирования двумерного течения вязкой жидкости вокруг круглого цилиндра. Из недавних работ, в которых находит приложение метод ДВ, отметим работу [11], где он сочетается с методом Галёркина. В настоящее время ускорение вычислительного процесса в методе ДВ достигается обычно путем распараллеливания вычислений [16], осуществить которое для бессеточных методов намного проще, чем для сеточных, либо за счет перехода при вычислениях на графические процессоры [17].

Между тем, примерно в те же годы, что и метод ДВ, независимо от него, был разработан быстрый метод мультиполя (БММ) [18], который на основе разделения переменных в физических системах с большим количеством вихревых частиц позволяет снизить число арифметических операций с $O(N^2)$ до $O(N \log N)$, что сопоставимо с «быстрыми» алгоритмами в сеточных методах. Это привело к большой популярности БММ и его распространению на решение широкого класса задач математической физики. Применялся он и в задачах гидродинамики, хотя и не так интенсивно, как в других разделах физики. Из недавних работ отметим несколько. В [19] идея БММ используется в рамках панельного метода [13] и по сути представляет собой запись некоторых граничных интегральных уравнений в дискретной форме. Рассматриваются кубические панельные функции и проводится численный анализ погрешности метода. В [20] сочетание методов ДВ и БММ исследуется на задаче о вихревом следе крыла в стационарном набегающем потоке. Корректируется известный дефект метода ДВ, состоящий в том, что формула Био–Савара для идеальных вихрей имеет особенность поля скоростей (нуль первого порядка в знаменателе), если точка наблюдения совпадает с одним из вихрей. С этой целью в формулу для индуцированной скорости вводится дополнительное слагаемое в виде экспоненциальной функции, нивелирующей нуль знаменателя, но быстро убывающей с расстоянием. Очевидно, что с физической точки зрения в вязкой жидкости это эквивалентно регуляризации с помощью вихрей, не имеющих, в отличие от случая идеальной жидкости, особенностей на оси вихревой линии. При таком подходе главной трудностью является выбор малого параметра регуляризации в виде значения вязкости, которая на самом деле равна нулю. В работе [21] показывается, что в БММ оценку сложности алгоритма можно снизить с $O(N \log N)$ до $O(N)$ объединением элементарных ячеек в кластеры. После этого ключевым элементом становится разложение не по степенным (как в классическом БММ), а по сферическим функциям. В итоге практическая реализация такого «быстрого» метода, по-видимому, становится более трудной, чем прямое решение исходной задачи. В [22] для гидродинамических задач развивается другой быстрый метод — Barnes–Hut метод (В–Н), альтернативный БММ и имеющий в основе иерархическую (в виде деревьев) организацию структуры элементарных ячеек. Этот метод был создан примерно тогда же, что и БММ, и обладает одинаковой с ним вычислительной сложностью, то есть, $O(N \cdot \log N)$. В работах [19–22] имеются ссылки, по которым можно составить более полное представление об истории развития БММ и В–Н методов в задачах вихревой динамики. В настоящей работе методы ДВ и БММ развиваются дальше — тестируется вычислительная эффективность их сочетания. Решаются три модельные двумерные задачи динамики идеальной несжимаемой жидкости, для которых известны точные решения. При этом интегрирование по времени производится по двум схемам: согласно методу средней точки и методу Рунге–Кутты 4-го порядка [23]. В полученных результатах при оценке точности различных алгоритмов основное внимание уделяется картинам течения жидкости, то есть собственно гидродинамике, и в меньшей степени — дискретной математике и иерархии (внутренней структуре) данных, обеспечивающей быстрый доступ (чему главным образом посвящены работы [19–22] и родственные им).

2. Основы метода дискретных вихрей

В двумерной постановке динамика идеальной несжимаемой жидкости описывается уравнением движения Эйлера и уравнением неразрывности [4, 8]:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь: t — время; x, y — декартовы координаты; $v_x(x, y, t), v_y(x, y, t)$ — компоненты вектора скорости частиц жидкости; ω — функция завихренности. Для решения системы уравнений (1) осуществим переход от непрерывной математической модели к дискретной. Соответственно сплошную жидкую среду представим в виде системы дискретных вихрей с интенсивностями ω_j . При этом каждый i -й вихрь меняет свое положение во времени под влиянием остальных вихрей. Заметим, что первое уравнение системы (1) фактически означает известный для идеальной жидкости закон Кельвина (Томсона) о сохранении интенсивности вихрей при их движении. Как

следствие, каждый вихрь с номером j в процессе взаимодействия с другими вихрями сохраняет свою интенсивность ω_j . Компоненты скорости движения введенных дискретных вихрей найдем по формулам Био–Савара [4, 8]:

$$\frac{dx_i}{dt} = v_{x_i} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^N \frac{\omega_j (y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad \frac{dy_i}{dt} = v_{y_i} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^N \frac{\omega_j (x_i - x_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (i = 1, \dots, N), \quad (2)$$

в которых значения вихрей ω_j определяются исходным распределением функции завихренности по объему жидкости в начальный момент времени $t = 0$. С вычислительной точки зрения расчет потока сводится к суммированию в формулах (2) по индексу $j = 1, \dots, N$ для каждого $i = 1, \dots, N$. Очевидно, что вычислительная сложность прямого алгоритма равна при этом $O(N^2)$, что слишком затратно по времени.

Для построения более быстрого алгоритма запишем формулы Био–Савара (2) в комплексном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} = v_{x_i} &= -\text{Im}(S_i) \quad (i = 1, \dots, N), \\ \frac{dy_i}{dt} = v_{y_i} &= \text{Re}(S_i), \quad \zeta = x + Iy, \quad S_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^N \left(\frac{\omega_j}{\zeta_i - \zeta_j} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где I — мнимая единица. Основная идея БММ состоит в разделении переменных, позволяющем произвести суммирование по индексу j сразу для всех i одновременно. Для этого вся область течения разбивается на конечное число мелких ячеек (обычно, на равные квадраты), и получающаяся ячеистая структура остается неизменной при возрастании числа дискретных вихрей N .

Пусть центр ячейки, в которой расположен вихрь с номером i , есть $c = x_c + Iy_c$. Тогда для вихрей с номерами j из той же ячейки суммирование в (3) выполним напрямую, без какой-либо специальной подготовки. Если обычное суммирование в прямом алгоритме (3) при его исходном виде состоит из DN^2 арифметических операций, где $D > 0$ — некоторая константа, то при числе ячеек L подобное «прямое» суммирование внутри текущей ячейки требует $D(N/L)^2$ действий.

При суммировании в (3) по всем ячейкам, внешним по отношению к рассматриваемой (содержащей вихрь с номером i), используем следующее представление:

$$\frac{1}{\zeta_i - \zeta_j} = \frac{1}{\zeta_i - c} \cdot \frac{1}{1 - (\zeta_j - c)/(\zeta_i - c)} = \frac{1}{\zeta_i - c} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta_j - c}{\zeta_i - c} \right)^k. \quad (4)$$

Бесконечный ряд в (4) имеет вид геометрической прогрессии, поскольку $|(\zeta_j - c)/(\zeta_i - c)| < 1$. Тогда с экспоненциально малой погрешностью его можно заменить конечной суммой. В итоге при фиксированном значении верхнего предела K (который на практике можно выбрать равным нескольким десяткам, независимо от количества точечных вихрей N) из (4) получаем:

$$\frac{1}{\zeta_i - \zeta_j} \approx \frac{1}{\zeta_i - c} \sum_{k=0}^K \left(\frac{\zeta_j - c}{\zeta_i - c} \right)^k. \quad (5)$$

Подстановка (5) в (3) приводит к следующему выражению суммы по всем ячейкам, внешним по отношению к рассматриваемой:

$$\sum_j \frac{\omega_j}{\zeta_i - \zeta_j} \approx \sum_j \frac{\omega_j}{\zeta_i - c} \sum_{k=0}^K \left(\frac{\zeta_j - c}{\zeta_i - c} \right)^k = \sum_{k=0}^K \frac{1}{(\zeta_i - c)^{k+1}} \left[\sum_j \omega_j (\zeta_j - c)^k \right]. \quad (6)$$

Согласно (6) получается, что за счет выполненного разделения переменных суммирование по j теперь можно произвести заранее и один раз для всех i . Очевидно, что здесь арифметическая сложность для каждого i равняется $O(K)$, а для всех i — $O(KN)$, то есть она линейна по N при фиксированном значении K . Тогда при $N \gg 1$ асимптотическая оценка сложности алгоритма имеет вид: $LD(N/L)^2 + O(KN) \sim DN^2/L$, если учитывать расчеты по всем L ячейкам. При таком подходе число арифметических операций оказывается в L раз меньше, чем при стандартном прямом суммировании по всем дискретным вихрям в формуле (2) или в эквивалентной ей формуле (3). Уменьшая размеры ячеек (а это равносильно увеличению их числа L), по аналогии с быстрым преобразованием

Фурье, можно показать, что в пределе сложность алгоритма оценивается как $O(N \log N)$. К сожалению, в литературе не удалось найти публикации с ясным изложением алгоритма, работающего со скоростью, соответствующей приведенной здесь оценке, хотя бы в виде подробной блок-схемы. В быстром преобразовании Фурье, в отличие от БММ, используется периодичность тригонометрических функций, что уменьшает на каждом уровне иерархии число арифметических операций в два раза по сравнению с общим суммированием. Организация подобной иерархии для сумм вида (4)–(6) менее очевидна, однако с более сложной структурой данных для БММ удастся достичь той же оценки: $O(N \log N)$. В данной работе, в рамках общей идеи БММ, предлагается простой альтернативный подход, в котором арифметическая сложность алгоритма в произвольное число раз меньше, чем при классическом прямом суммировании со сложностью порядка $O(N^2)$. Ускорение алгоритма исходит из формул, существенно отличающихся от формул (4)–(6), хотя они и основаны на родственной, но другой идее. Еще одним свойством предлагаемого алгоритма (помимо простоты реализации) является то, что при разделении переменных не нужно каждый раз переходить в систему координат, связанную с новой ячейкой. Здесь эти разложения в ряд имеют единый вид для всех кольцевых ячеек. Таким образом, развиваемый алгоритм, не будучи «быстрым» в теоретическом смысле, тем не менее обладает высокой практической скоростью вычислений и элементарной реализуемостью, что позволяет напрямую и эффективно строить полную картину течения жидкости. Заметим, что в работах [19–22] не приводится каких-либо картин течения в виде рисунков.

3. Описание предлагаемого метода

Для вычисления суммы S_i в (3) с помощью БММ выделим область G , в которой будем исследовать течение. Пусть расчетная область представляется в виде круга радиуса R_{\max} , в которой находится N вихрей. Область разделим на L кольцевых подобластей G_l ($l = 1, \dots, L$), для простоты с одинаковыми площадями и таким образом, что окружности радиусов $r_l = R_{\max} \sqrt{l/L}$ делят эти кольца. Очевидно, в каждой из введенных L областей асимптотически содержится $N_l = N/L$ ($l = 1, \dots, L$) частиц жидкости, а их общее число равняется $N = \sum_{l=1}^L N_l$. Очевидно также, что первая (самая внутренняя) область G_1 является кругом радиуса r_1 . Геометрия области для случая $L = 4$ изображена на рисунке 1.

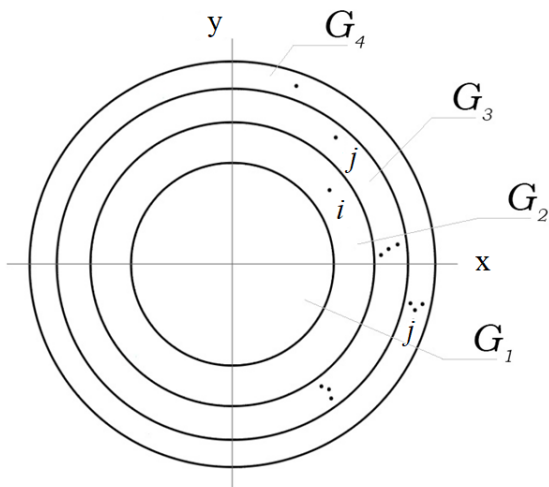


Рис. 1. Система из L кольцевых ячеек G_l ($l = 1, \dots, L$) равной площади для метода ДВ; точки суммирования j расположены снаружи от кольца с рассматриваемым вихревым элементом i

Ключевая идея предлагаемого в данной работе метода состоит в том, чтобы применить преобразование, родственное формуле (4), для области с кольцевыми ячейками. При этом суммирование по номерам j из той же ячейки, что и рассматриваемый — «пробный» — вихрь i , происходит «напрямую», то есть по формуле суммирования (7). Остальные вихри с номерами j распадаются на два класса — на вихри в кольцах, не содержащих i , и вихри внутри и снаружи кольца с вихрем i . На рисунке 1 для определенности показан только второй случай, когда вихри с номерами j расположены снаружи от кольца с номером i . Аналогично можно было изобразить и первый случай, но, чтобы не загромождать рисунок, он не показан.

Опишем предлагаемый метод более подробно. Рассмотрим любую из областей G_l и выберем в ней вихрь с номером i : $\zeta_i \in G_l$. Для вихрей с номерами j , находящимися в той же области, суммы рассчитываем напрямую

по формуле Био–Савара (7):

$$S_{l,i}^0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{\zeta_j \in G_l \\ j \neq i}} \left(\frac{\omega_j}{\zeta_i - \zeta_j} \right), \quad \zeta_i \in G_l. \quad (7)$$

Очевидно, что для всех внутренних областей (1-й тип колец) имеем $|\zeta_j| < |\zeta_i|$, а для внешних (2-й тип колец) — $|\zeta_j| > |\zeta_i|$. Этим определяется выбор разложения с разделяющимися переменными в каждом из этих типов кольцевых областей. Так, влияние вихрей из областей 1-го типа на вихрь с номером i рассчитывается в следующем виде:

$$S_{l,i}^1 = \sum_{|\zeta_j| < |\zeta_i|} \frac{\omega_j}{\zeta_i - \zeta_j} = \sum_{|\zeta_j| < |\zeta_i|} \frac{\omega_j}{\zeta_i(1 - \zeta_j/\zeta_i)} = \sum_{|\zeta_j| < |\zeta_i|} \frac{\omega_j}{\zeta_i} \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta_j/\zeta_i)^k \approx \sum_{|\zeta_j| < |\zeta_i|} \frac{\omega_j}{\zeta_i} \sum_{k=0}^K (\zeta_j/\zeta_i)^k = \sum_{k=0}^K \frac{A_k}{\zeta_i^{k+1}}, \quad (8)$$

$$A_k = \sum_{|\zeta_j| < |\zeta_i|} \zeta_j^k \omega_j \quad (\zeta_i \in G_l).$$

Аналогично, для вихрей из областей 2-го типа выделяется сумма B_k :

$$S_{l,i}^2 = \sum_{|\zeta_j| > |\zeta_i|} \frac{\omega_j}{\zeta_i - \zeta_j} = \sum_{|\zeta_j| > |\zeta_i|} \frac{\omega_j}{\zeta_j(1 - \zeta_i/\zeta_j)} = \sum_{|\zeta_j| > |\zeta_i|} \frac{\omega_j}{\zeta_j} \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta_i/\zeta_j)^k \approx \sum_{|\zeta_j| > |\zeta_i|} \frac{\omega_j}{\zeta_j} \sum_{k=0}^K (\zeta_i/\zeta_j)^k = \sum_{k=0}^K \zeta_i^k B_k, \quad (9)$$

$$B_k = \sum_{|\zeta_j| > |\zeta_i|} \frac{\omega_j}{\zeta_j^{k+1}} \quad (\zeta_i \in G_l).$$

Видно, что разделение переменных в формулах (8) и (9) привело к тому, что коэффициенты A_k и B_k для всех i вычисляются один раз.

Если последовать разделу 2, легко показать, что арифметическая сложность «прямого» вычисления суммы $S_{l,i}^0$ по формуле (7) составляет CN^2/L (при $C > 0$). Влияние вихрей из областей 1-го и 2-го типов определяется, соответственно, по формулам (8) и (9). Асимптотическая сложность равняется при этом произведению общего числа областей L , числа вихрей N/L в области соответствующего типа, числа элементов K в суммах (8) и (9) и числа областей L . В итоге получается оценка $O(NLK)$, которая линейно обуславливается числом вихрей N с его возрастанием, если остальные параметры задачи остаются неизменными.

Отсюда получается, что полный вклад всех вихрей j в сумму для i -го вихря есть простая сумма:

$$S_{l,i} = S_{l,i}^0 + S_{l,i}^1 + S_{l,i}^2 \quad (\zeta_i \in G_l, l = 1, \dots, L). \quad (10)$$

4. Методы интегрирования по времени

Для интегрирования уравнений по времени в задаче Коши (3) применяются два метода — метод средней точки и метод Рунге–Кутты 4-го порядка (РК4). При временном шаге Δt метод средней точки имеет точность $O(\Delta t^2)$ [23] и содержит коэффициенты $k_{m,i}^x, k_{m,i}^y, m = 1, 2$. На каждом шаге по времени следует совершить два внутренних шага:

$$k_{m,i}^x = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^N \frac{\omega_j (y_i^{m-1} - y_j^{m-1})}{(x_i^{m-1} - x_j^{m-1})^2 + (y_i^{m-1} - y_j^{m-1})^2}, \quad (11)$$

$$k_{m,i}^y = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^N \frac{\omega_j (x_i^{m-1} - x_j^{m-1})}{(x_i^{m-1} - x_j^{m-1})^2 + (y_i^{m-1} - y_j^{m-1})^2} \quad (i = 1, \dots, N).$$

Сначала по формуле Био–Савара (11) при $m = 1$ находим $k_{1,i}^x, k_{1,i}^y$ и таким образом вычисляем координаты центров дискретных вихрей, соответствующих новым значениям коэффициентов $k_{1,i}^x, k_{1,i}^y$:

$$x_i^1 = x_i + k_{1,i}^x \Delta t / 2, \quad y_i^1 = y_i + k_{1,i}^y \Delta t / 2. \quad (12)$$

Затем координаты дискретных вихрей (12) подставляем в выражения (11) при $m = 2$ и определяем коэффициенты $k_{2,i}^x, k_{2,i}^y$. Далее, по скорректированным при $m = 1$ координатам вихрей и при $m = 2$ коэффициентам методом

средней точки устанавливаем следующие функциональные зависимости от времени положений центров вихрей:

$$\begin{aligned} x_i(t + \Delta t) &= x_i(t) + k_{2,i}^x \Delta t, \\ y_i(t + \Delta t) &= y_i(t) + k_{2,i}^y \Delta t \quad (i = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (13)$$

Далее, рассмотрим применение метода Рунге–Кутты 4-го порядка. Точность данного алгоритма составляет $O(\Delta t^4)$ [23]. Его реализация осуществляется за четыре внутренних шага, на которых вычисляются коэффициенты $k_{m,i}^x, k_{m,i}^y$ при $m = 1, \dots, 4$ и координаты вихревых элементов. Расчеты выполняются поэтапно следующим образом: – на первом шаге (при $m = 1$) рассчитываем $k_{1,i}^x, k_{1,i}^y$ по аналогии с методом средней точки, то есть по формуле (11); – на втором (при $m = 2$) и каждом следующем внутреннем шаге определяем новые координаты вихревых элементов; формулы для расчета промежуточного расположения центров вихрей жидкости имеют вид:

$$\begin{aligned} x_i^m &= x_i + a_m^x, & y_i^m &= y_i + a_m^y \quad (m = 2, \dots, 4), \\ a_m^x &= \begin{cases} k_{m,i}^x \Delta t / 2 & (m = 2, 3), \\ k_{m,i}^x \Delta t & (m = 4), \end{cases} & a_m^y &= \begin{cases} k_{m,i}^y \Delta t / 2, & (m = 2, 3), \\ k_{m,i}^y \Delta t, & (m = 4). \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

С использованием вычисленных координат (14) по формуле Био–Савара (11) последовательно получаем коэффициенты $k_{m,i}^x, k_{m,i}^y$ ($m = 2, 3, 4$). В итоге расположение дискретных вихрей в зависимости от времени отыскиваем по формулам:

$$\begin{aligned} x_i(t + \Delta t) &= x_i(t) + (k_{1,i}^x + 2k_{2,i}^x + 2k_{3,i}^x + k_{4,i}^x) \Delta t / 6, \\ y_i(t + \Delta t) &= y_i(t) + (k_{1,i}^y + 2k_{2,i}^y + 2k_{3,i}^y + k_{4,i}^y) \Delta t / 6 \quad (i = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (15)$$

Сочетание БММ с методами средней точки или Рунге–Кутты позволяет сохранить устойчивость алгоритма при существенном сокращении времени вычислений. На каждом шаге интегрирования по времени некоторые из вихрей одного кольца могут сдвинуться в соседнее кольцо, поэтому на каждом шаге по времени с использованием БММ необходимо учитывать тип кольцевой области при перераспределении вихрей.

5. Тестовые примеры течений

5.1. Симметричный диполь Лэмба–Чаплыгина

Для тестирования совместного использования описанных алгоритмов рассмотрим тестовые задачи, у каждой из которых существует точное аналитическое решение. В первой задаче исследуем множество вихревых частиц жидкости, образующее в исходный момент прямой круговой цилиндр радиуса R (плоская задача). В центре круга поместим начало декартовых координат, при этом ось x направим вправо. В процессе движения вихревая система с постоянной скоростью U перемещается вправо по оси x как единое целое и, несмотря на сложное движение частиц внутри, сохраняет цилиндрическую форму. Движение такой системы представляется моделью, называемой диполем Лэмба–Чаплыгина [24, 25], состоящей из двумерных уравнений движения Эйлера.

Согласно модели, двумерное соленоидальное векторное поле описывается скалярной функцией тока, которая в заданной конфигурации задачи есть решение уравнения Пуассона [25], и в декартовых координатах $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, движущихся в вместе с цилиндром, имеет следующий вид:

$$\psi = \begin{cases} \frac{-2U J_1(kr)}{kJ_0(kR)} \sin \theta, & r^2 = x^2 + y^2 \leq R^2, \\ U \left(\frac{R^2}{r} - r \right) \sin \theta, & r^2 = x^2 + y^2 > R^2, \end{cases} \quad \omega = \begin{cases} k^2 \psi, & r^2 = x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0, & r^2 = x^2 + y^2 > R^2, \end{cases} \quad (16)$$

где J_0, J_1 — функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно. Параметр k определяется из того, что величина $kR = 3,83171$ является первым нетривиальным нулем функции Бесселя первого порядка: $J_1(kR) = 0$.

5.2. Асимметричный диполь Лэмба–Чаплыгина

Далее рассмотрим асимметричный диполь Лэмба–Чаплыгина, для которого также известно аналитическое решение [25]:

$$\psi = \begin{cases} \frac{-2U J_1(kr)}{kJ_0(kR)} \sin \theta + \lambda \left(1 - \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} \right), & r \leq R, \\ U \left(\frac{R^2}{r} - r \right) \sin \theta, & r > R, \end{cases} \quad \omega = \begin{cases} k^2(\psi - \lambda), & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (17)$$

где λ — величина, отвечающая за несимметричность диполя; при $\lambda = 0$ имеет место классический симметричный случай (16). В (17) выражение для функции тока также записано в подвижной системе координат, связанной с цилиндром.

При движении диполя Лэмба–Чаплыгина по известным функциям тока и завихренности можно найти скорости частиц:

$$v_r = \frac{-2U J_1(kr)}{kJ_0(kR)} \cos\theta, \quad r \leq R, \quad v_r = U \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \cos\theta, \quad r > R,$$

$$v_\theta = \begin{cases} \frac{2U}{kR J_0(kR)} \left\{ \left[J_0(kr) - \frac{J_1(kr)}{kr} \right] \sin\theta + \frac{k\lambda}{2U} J_1(kr) \right\}, & r \leq R, \\ U \left(\frac{R^2}{r^2} + 1 \right) \sin\theta, & r > R. \end{cases} \quad (18)$$

Очевидно, что при $\lambda = 0$ из (18) определяются скорости частиц в симметричном диполе (16). Степень влияния параметра λ на несимметричность диполя Лэмба–Чаплыгина можно понять из рисунка 2.

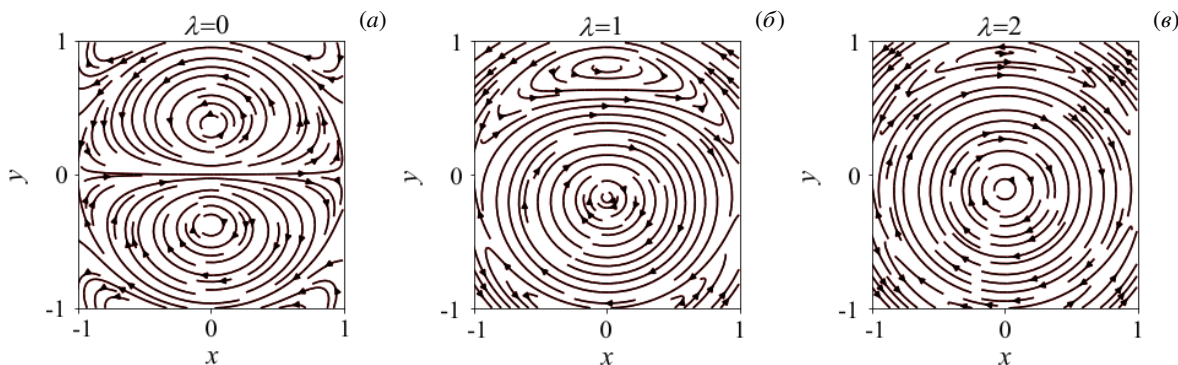


Рис. 2. Линии тока в подвижной инерциальной системе координат при движении частиц жидкости вдоль горизонтальной оси x с постоянной скоростью U согласно модели диполя Лэмба–Чаплыгина при разных λ

5.3. Вихревая конфигурация в форме вращающегося кругового цилиндра конечного радиуса

В третьей задаче промоделировано движение идеальной жидкости, заключенной в цилиндрическую область радиуса R и вращающейся как единое целое. При этом завихренность в каждой точке постоянна. Рассмотрено стационарное движение жидкости, вследствие этого, а также перехода из декартовой системы координат в полярную $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$ уравнения (1) приняли следующий вид:

$$v_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (19)$$

В рассматриваемой задаче решение системы (19) представляется формулами:

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \omega r, \quad \omega = \text{const} \quad (r \leq R); \quad v_r = v_\theta = \omega = 0 \quad (r > R). \quad (20)$$

В расчетах, обсуждаемых ниже, для всех тестовых задач в начальный момент времени сетка вихрей равномерно располагалась в узлах квадратной области, задаваемой на интервалах $x = -R, \dots, R$ и $y = -R, \dots, R$. Во внимание принимались только те вихри, которые попадали в круг радиуса R .

6. Экспериментальный анализ метода

Проанализируем численные результаты, полученные из решений тестовых задач, описанных в разделе 5. Во всех задачах применялись методы средней точки 2-го порядка (11)–(13) и Рунге–Кутты 4-го порядка (14), (15), а также их сочетание с БММ.

Алгоритмы реализованы в виде программ на языке программирования C++, который при математических вычислениях имеет высокую производительность, а для визуализации динамики частиц использовался язык Python и его библиотека Matplotlib для работы с графикой.

Задача 1. Первая тестовая задача (с движением жидкости согласно модели симметричного профиля Лэмба–Чаплыгина) имела входные параметры: $R = 1$ — радиус диполя; $U = 1$ — скорость движения диполя вдоль оси x ; Δt — шаг по времени; t_0 — физическое время, по достижении которого завершался расчет; $I = t_0/\Delta t$ — число временных шагов; $N = 17692$ — полное число дискретных вихрей (предварительная конфигурация имела размерность $150 \times 150 = 22500$). На рисунке 3 показаны данные двух расчетов различными методами при равной вычислительной сложности, занявшие порядка 8 мин на одном ядре процессора Intel Core i5-9500 с базовой частотой 3.00 GHz, без распараллеливания. В сочетании классического метода с БММ дополнительно задавались следующие параметры: $L = 24$ — число кольцевых подобластей; $R_{\max} = 5$ — радиус полной области G , занимаемой исследуемым потоком; K — верхний предел суммирования в формулах (8) и (9).

Определим оптимальное число подобластей L в алгоритмах, объединенных с БММ. Данную величину можно найти, если сравнить оценки сложности вычислений прямым методом и методами, учитывающими влияние вихрей из кольцевых областей разных типов: 1-го (области внутренние) и 2-го (области внешние). При таком подходе получим асимптотическую оценку $N^2/L = NLK$. Отсюда значение L есть $L = \sqrt{N/K}$. Например, при параметрах $N = 17692$ и $K = 30$ в рассмотренном выше примере получаем: $L = 24.28$, так что выбранное выше значение числа кольцевых подобластей $L = 24$ действительно оптимально. Проведенные на тестовых задачах расчеты показывают, что неоптимальный выбор параметра L может существенно (до двух раз) увеличивать время вычислений, причем это происходит при отклонении L от оптимального значения как в меньшую сторону, так и в большую.

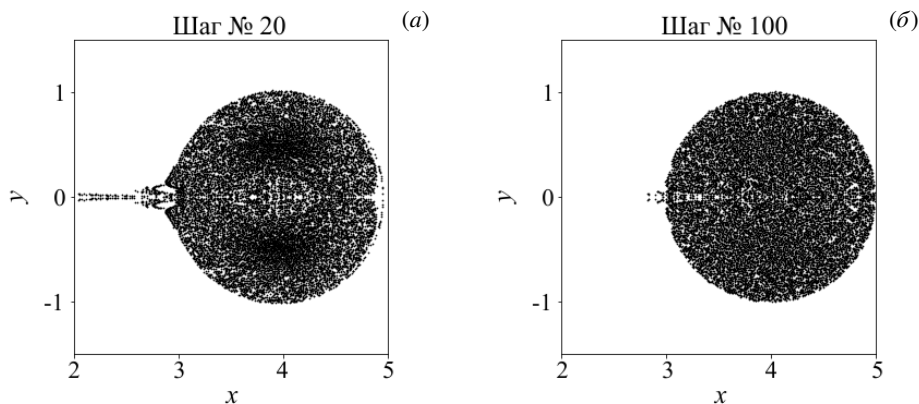


Рис. 3. Картины течения согласно модели симметричного диполя Лэмба–Чаплыгина при $t_0 = 4$, $N = 17692$ при условии одинаковой вычислительной сложности алгоритмов: метод средней точки с шагом $\Delta t = 0.2$ (а), метод средней точки + БММ с шагом $\Delta t = 0.04$ (б)

Проанализируем качество полученных результатов на рисунке 3. В явном аналитическом решении (16) симметричный диполь Лэмба–Чаплыгина сохраняет свою круглую форму при движении вправо. Это означает, что все вихревые элементы остаются в круге радиуса R (в подвижной системе координат). Кроме того, несмотря на сложные движения частиц внутри диполя, их распределение внутри него достаточно равномерное. Это предопределяет вывод, что геометрический центр диполя должен располагаться в центре координат подвижной системы отсчета. Таблица 1 позволяет сравнить основные характеристики двух примененных алгоритмов расчета. Заметим, что центр координат представлен в ней в исходной неподвижной системе координат, и его истинные координаты x и y в момент $t_0 = 4$ должны составлять 4.0. Но координаты центра диполя в численных алгоритмах находились в этот момент времени как среднее арифметическое горизонтальных и вертикальных координат вихревых элементов. Из двух нижних строк таблицы 1 видно, что сочетание классического метода средней точки с БММ при $K = 30$ заметно повышает точность и эффективность численного алгоритма по сравнению с меньшими значениями этого параметра.

Задача 2. На рисунке 4 приведены решения задачи с моделью асимметричного диполя Лэмба–Чаплыгина. Показано перемещение конфигурации вихрей с предварительным размером 100×100 и с входными данными, аналогичными таблице 1, за исключением числа кольцевых подобластей $L = 15$, которое с целью минимизации времени счета заменено в БММ для меньшего, по сравнению с предыдущим тестовым примером, числа дискретных

Таблица 1. К сравнению двух алгоритмов одинаковой асимптотической сложности для модели симметричного диполя Лэмба–Чаплыгина

N	Метод средней точки (Рис. 3а)	Метод средней точки + БММ (Рис. 3б)		
	150×150 (17692)	150×150 (17692)		
Число шагов по времени	20	100	100	100
Шаг по времени Δt	0.2	0.04	0.04	0.04
Число элементов суммирования K	–	5	15	30
Число подобластей L	–	60	34	24
Координаты центра диполя	(3.9222, -0.0013)	(3.7541, 0)	(4.084, 0.0004)	(3.9978, -0.0004)
Количество вихрей за границей круга радиуса R	725 (4%)	2052 (12%)	1199 (7%)	74 (0.4%)

вихрей. Задача решалась методом Рунге–Кутты 4-го порядка (РК4) и им же, но в сочетании с БММ при $\lambda = 1$. Результаты представлены лишь для случая $K = 30$.

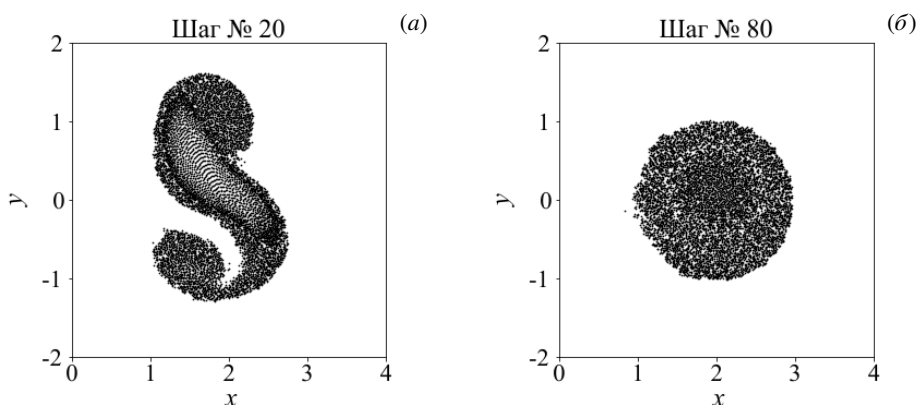


Рис. 4. Асимметричный диполь Лэмба–Чаплыгина при $t_0 = 2$, $N = 7860$, $\lambda = 1$ в расчетах одинаковой вычислительной сложности: РК4 (а), РК4+БММ (б)

Таблица 2. К сравнению эффективности двух алгоритмов для модели асимметричного диполя Лэмба–Чаплыгина ($\lambda = 1$)

N	РК4 (Рис. 4а)	РК4+БММ (Рис. 4б)
	100×100 (7860)	100×100 (7860)
Число шагов по времени	20	80
Шаг по времени Δt	0.1	0.025
Координаты центра диполя	(1.8007, 0.0719)	(1.9896, 0.0095)
Количество вихрей за границей круга радиуса R	2973 (38%)	201 (3%)

Из рисунка 4 и таблицы 2 видно, что при использовании классического метода (Рис. 4а) за пройденное физическое время диполь распался и полностью потерял круглую форму. В расчете же с ускорением методом мультиполя (Рис. 4б) за то же расчетное время, но с меньшим временным шагом, удается построить диполь круглой формы.

Задача 3. В третьей задаче, в которой вихревые элементы создавали двумерный

цилиндр конечного радиуса, вращающийся как единое целое в окружающем покоящемся объеме жидкости, задавались следующие входные параметры: $R = 1$ — радиус цилиндра; $\omega = 1$ — начальная угловая скорость вращения (она определяет интенсивность всех точечных вихрей в модели ДВ); Δt — шаг интегрирования по времени; I — число временных шагов; $N = 1976$ (предварительная конфигурация имела размер 50×50) — полное число дискретных вихрей; L — число подобластей; $R_{\max} = 1.1$ — радиус расчетной области; K — верхний предел суммирования в формулах (8) и (9). Очевидно, что при выбранном шаге и числе шагов интегрирования по времени цилиндр теоретически должен повернуться как единое целое на 180° . На рисунке 5 представлены результаты расчетов классическим методом Рунге–Кутты 4-го порядка и тем же методом с ускорением БММ. Время расчета РК4 и РК4+БММ при $K = 30$ было одно и то же — порядка 16 мин.

Заметим, что во всех рассмотренных примерах при уменьшении параметра K время счета сокращается пропорционально ему.

Из рисунка 5 и таблицы 3 видно, что структура, которая при вращении в виде единого целого и теоретически

Таблица 3. К оценке эффективности различных алгоритмов для модели двумерного вращающегося вихревого цилиндра

N	PK4 (Рис. 5а)	PK4 + БММ	PK4 + БММ	PK4 + БММ (Рис. 5б)
	50×50 (1976)	50×50 (1976)	50×50 (1976)	50×50 (1976)
Число шагов по времени	1500	4000	4000	4000
Шаг по времени Δt	$(2\pi/3) \cdot 10^{-3}$	$(5\pi/2) \cdot 10^{-4}$	$(5\pi/2) \cdot 10^{-4}$	$(5\pi/2) \cdot 10^{-4}$
Число элементов суммирования K	-	5	15	30
Число подобластей L	-	20	11	8
Количество вихрей за границей круга радиуса R	541 (27%)	285 (14%)	205 (10%)	117 (6%)

обязанная сохранять форму кругового цилиндра радиуса $R=1$, при классическом расчете существенно выходит за его границы. Примерно лишь две трети дискретных вихрей остаются внутри цилиндрической области. В сочетании же с БММ метод Рунге–Кутты 4-го порядка обеспечивает уменьшение доли вышедших за границу «паразитных» вихрей, например, при $K=30$ с 27% до 6%, по сравнению с расчетами с меньшими значениями этого параметра.

7. Заключение

1. В работе предложен метод ускорения классического метода дискретных вихрей (ДВ) путем его сочетания с быстрым методом мультиполя (БММ). Величины шагов по времени в задаче Коши обусловлены используемыми методами разного порядка — 2-го (метод средней точки) и 4-го (метод Рунге–Кутты).

2. Суть ускорения отличается от традиционного для БММ подхода с ячейками малого размера и основана на том, что при кольцевой структуре ячеек, образующих расчетную область, суммирование по всем влияющим дискретным вихрям, находящимся в одной кольцевой ячейке с «пробным» вихрем, требует в L раз меньших компьютерных затрат (где L — число ячеек), чем в классическом методе. При этом суммирование по всем остальным кольцевым ячейкам за счет разделения переменных на стадии предпроцессинга также существенно сокращается. Такой метод прозрачен алгоритмически и не требует специальных операций с иерархической организацией структуры данных.

3. Полная оценка сложности предложенного вычислительного алгоритма имеет вид $O(N^2/L + KLN)$. Здесь K — верхний предел суммирования членов в экспоненциально сходящихся геометрических прогрессиях (8) и (9). На практике значение $K=30$ во всех примерах обеспечивает точность, согласующуюся с точностью остальных операций при интегрировании по времени, и не зависит от числа дискретных вихрей N . Поскольку оптимальное число ячеек выбирается как $L = \sqrt{N/K}$, то приведенная выше оценка сложности принимает вид: $O(N^{3/2}K^{1/2})$, то есть при фиксированном K и растущем N имеет порядок $O(N^{3/2})$, что существенно меньше оценки $O(N^2)$, которую имеет классический случай.

4. Тестовые расчеты проведены для моделей симметричного и асимметричного диполей Лэмба–Чаплыгина, а

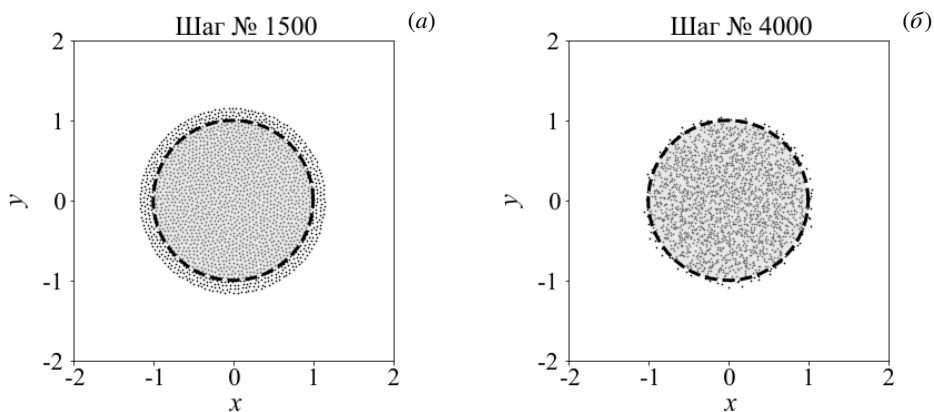


Рис. 5. Расположение вихрей во вращающемся двумерном цилиндре в момент времени $t_0 = \pi$: расчет методом PK4 (а), расчет методом PK4 + БММ (б); штриховая линия – граница теоретического круга радиуса R

также для модели цилиндрического объема жидкости конечного радиуса, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω как единое целое в покоящейся жидкости. Известно, что последний пример довольно сложен для прямых численных расчетов, в отличие от элементарного вида его аналитического решения. Фактически проведенные расчеты подтверждают, что без использования ускорения с помощью БММ построение численного решения для этого тестового примера вряд ли возможно за разумное время при достаточно большом количестве дискретных вихрей.

Авторы благодарны анонимному рецензенту за ценные замечания.

Литература

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 271 с.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
3. *Maukalled F., Mangani L., Darwish M.* The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics. Springer: New York, 2016. 816 p.
4. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
5. *Lewis R.I.* Surface Vorticity Modelling of Separated Flows from Two-Dimensional Bluff Bodies of Arbitrary Shape // Journal of Mechanical Engineering Science. 1981. Vol. 23. P. 1–12. DOI: 10.1243/JMES_JOUR_1981_023_003_02.
6. *Porthouse D.T.C., Lewis R.I.* Simulation of Viscous Diffusion for Extension of the Surface Vorticity Method to Boundary Layer and Separated Flows // Journal of Mechanical Engineering Science. 1981. Vol. 23. P. 157–167. DOI: 10.1243/JMES_JOUR_1981_023_029_02.
7. *Beale J.T., Majda A.* Rates of convergence for viscous splitting of the Navier-Stokes equations // Mathematics of Computation. 1981. Vol. 37. P. 243–259. DOI: 10.1090/S0025-5718-1981-0628693-0.
8. *Cottet G.H., Koumoutsakos P.D.* Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
9. *Kostecki S.W.* Numerical modelling of flow through moving water-control gates by vortex method. Part I – problem formulation // Archives of Civil and Mechanical Engineering. 2008. Vol. 8. P. 73–89. DOI: 10.1016/S1644-9665(12)60164-2.
10. *Kostecki S.* Random Vortex Method in Numerical Analysis of 2D Flow Around Circular Cylinder // Studia Geotechnica et Mechanica. 2015. Vol. 36. P. 57–63. DOI: 10.2478/sgem-2014-0036.
11. *Говорухин В.Н., Филимонова А.М.* Анализ структуры плоских вихревых течений и их изменений во времени // Вычисл. мех. сплош. сред. 2021. Т. 14, № 4. С. 367–376. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.30.
12. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 254 с.
13. *Katz J., Plotkin A.* Low-speed Aerodynamics. From Wing Theory to Panel Methods. N.Y.: McGraw-Hill, 1991. 632 p.
14. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. SIAM: Philadelphia, 2003. 520 p.
15. *Коцур О.С.* Математическое моделирование эллиптического вихревого кольца в вязкой жидкости методом вихревых петель // Математика и мат. моделирование. 2021. С. 46–61.
16. *Ibrahim K., Morgenthal G.* Vortex particle method for aerodynamic analysis: Parallel scalability and efficiency // IV Intern. Conf. PARTICLES 2015. 2015. P. 1052–1065.
17. *Morgenthal G., Sánchez Corriols A., Bendig B.* A GPU-accelerated pseudo-3D vortex method for aerodynamic analysis // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2014. Vol. 125. P. 69–80. DOI: 10.1016/j.jweia.2013.12.002.
18. *Greengard L., Rokhlin V.* A fast algorithm for particle simulations // Journal of Computational Physics. 1987. Vol. 73. P. 325–348. DOI: 10.1016/0021-9991(87)90140-9.
19. *Ramachandran P., Rajan S.C., Ramakrishna M.* A Fast Multipole Method for Higher Order Vortex Panels in Two Dimensions // SIAM Journal on Scientific Computing. 2005. Vol. 26. P. 1620–1642. DOI: 10.1137/s1064827502420719.
20. *Ricciardi T.R., Wolf W.R., Bimbato A.M.* Fast multipole method applied to Lagrangian simulations of vortical flows // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. Vol. 51. P. 180–197. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.04.005.
21. *Salloum S., Lakkis I.* An adaptive error-controlled hybrid fast solver for regularized vortex methods // Journal of Computational Physics. 2022. Vol. 468. 111504. DOI: 10.1016/j.jcp.2022.111504.
22. *Marchevsky I., Ryatina E., Kolganova A.* Fast Barnes–Hut-based algorithm in 2D vortex method of computational hydrodynamics // Computers and Fluids. 2023. Vol. 266. 106018. DOI: 10.1016/j.compfluid.2023.106018.

23. *Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
24. *Liang H., Zong Z., Zou L., Zhou L., Sun L.* Vortex shedding from a two-dimensional cylinder beneath a rigid wall and a free surface according to the discrete vortex method // *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. 2014. Vol. 43. P. 110–119. DOI: 10.1016/J.EUROMECHFLU.2013.08.004.
25. *Meleshko V.V., Heijst G.J.F. van van.* On Chaplygin's investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 1994. Vol. 272. P. 157–182. DOI: 10.1017/S0022112094004428.

Сведения об авторах:

Сумбатян Межлум Альбертович (корр.), дфмн, проф., Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (ЮФУ), 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а; e-mail: sumbatma@mail.ru; ORCID: 0000-0003-3653-4867

Пискунов Андрей Сергеевич, мнс, ЮФУ; e-mail: andrey91y@yandex.ru; ORCID: 0009-0009-5864-8671