ISSN: 1999-6691, e-ISSN: 2782-3709 DOI: http://doi.org/10.7242/1999-6691/2024.17.1.4

Научная статья

Деформационное состояние листа графена в рамках континуальной моментно-мембранной теории упругих пластин

***С.О. Саркисян*[1], *К.А. Жамакочян*[1], *Л.С. Саркисян*[2]**

[1] *Ширакский государственный университет, Гюмри, Республика Армения*
[2] *Институт механики НАН РА, Ереван, Республика Армения*

Предложен подход для отыскания напряженно-деформированного состояния (НДС) структур, содержащих графен – новый наноматериал, который в настоящее время нашёл наиболее широкое практическое применение в наноэлектромеханических системах. Графен является базовым двумерным блоком, из которого строятся другие углеродные структуры: мембраны, листы, нанотрубки и другое. Для описания НДС листа графена использована феноменологическая континуальная моментно-мембранная теория пластин, из которой, вследствие того, что графен сверхтонкий материал, исключается понятие толщины. Физические соотношения упругости листа графена выражаются через его жёсткостные характеристики, которые определяются с помощью гармонического потенциала межатомных взаимодействий в углероде. Сформулированы дифференциальная и соответствующая ей вариационная постановка задачи статического деформирования и определения собственных частот и форм колебаний листа графена. Вариационная формулировка выполнена на основе принципа Лагранжа. Задача в вариационной постановке реализована численно, методом конечных элементов. Построены конечно-элементные соотношения, учитывающие моментные эффекты поведения листа графена. Для аппроксимации использован 4-узловой прямоугольный конечный элемент. Представлены численные решения нескольких задач статического деформирования листа графена в условиях плоского напряжённого состояния и поперечного изгиба, а также выполнен анализ его собственных колебаний. Продемонстрирована хорошая сходимость результатов численного моделирования во всех рассмотренных задачах. Полученные численные решения представляют собой важный результат для проектирования и расчёта резонаторов, в которых применяются сверхтонкие наноструктуры, а установление того факта, что лист графена обладает высокой собственной наименьшей частотой, находящейся в гегагерцевой области (например, для кварцевых резонаторов характерны мегагерцевые частоты), открывают перспективу применения самого графена в качестве сверхчувствительного наномеханического резонатора для детектирования малых масс и сверхмалых перемещений.

Ключевые слова: континуальная моментно-мембранная теория упругости, плоское напряжённое состояние, поперечный изгиб, наноструктуры с графеном, статика и собственные колебания, метод конечных элементов

Получение: 28.04.2023 / *Публикация онлайн*: 01.04.2024 УДК: 539.3

1. Введение

Графен — это двумерный материал, представляющий собой монослой атомов углерода и обладающий уникальными свойствами [1]. Необычность графена проявляется не только в электронных, но и в механических свойствах. Графен является очень прочным, гибким материалом, который обладает выдающимися механическими характеристиками [2]: высокими модулем сдвига, модулем Юнга, продольной скоростью звука и другим.

При исследовании процессов деформирования однослойного листа графена (или других однослойных наноматериалов, например, однослойной нанотрубки) можно непосредственно рассматривать атомную или молекулярную природу строения этих наностуктур. Широкое распространение получило молекулярно-динамическое моделирование графена [3–5]. На практике, для моделирования механического поведения графена или других двумерных наноматериалов, развит метод молекулярной механики (а также метод молекулярной структурной механики) [6–10] и дискретно-континуальные модели [11–15].

При применении метода молекулярной динамики в основном предполагается, что между атомами двумерных наноматериалов имеют место силовые взаимодействия центрального характера. С этой точки зрения в работе [16] отмечается, что если в атомной модели однослойной нанотрубки (также для однослойного графена) учесть только силовое взаимодействие центрального характера между формирующими трубку атомами, тогда нанотрубка (или лист графена) не имела бы изгибной жёсткости и была бы неустойчива. Это означает, что только существование однослойной нанотрубки (или листа графена) будет свидетельствовать о необходимости учёта моментного взаимодействия между её атомами. Исходя из этого, далее, в работах [17–20], как континуальная модель деформационного поведения однослойной нанотрубки (а также однослойного листа графена), устанавливается трёхмерная моментная теория упругости с независимыми полями перемещений и вращений.

Так как графен и углеродная однослойная нанотрубка состоят из одного атомного слоя, следовательно, актуальной является проблема: для изучения механического поведения двумерных наноматериалов, необходимо построение на основе трёхмерной моментной теории упругости адекватной двумерной модели пластин или оболочек. С этой точки зрения отметим, что в работе [21] сначала изучается линейная атомная цепочка, когда между атомами силовое взаимодействие нецентрально и также имеется моментное взаимодействие (для силового поля атомных взаимодействий выбран гармонический потенциал), а затем строится соответствующая её одномерно-стержневая континуальная модель. При рассмотрении ячейки периодичности кристаллической решётки графена взаимодействие между атомами заменяется указанными стержнями, в результате чего получается дискретно-континуальная (стержневая) модель графена и предельным переходом — его континуальная линейная модель. В этой же работе устанавливается, что построенная континуальная модель графена полностью идентична моментно-мембранной линейной теории упругих пластин [22, 23] и, при помощи сравнения этих двух моделей, определяются упругие жёсткостные характеристики указанной теории пластин через физические параметры гармонического потенциала углерода (которые в литературе известны).

Таким образом, моментно-мембранная линейная теория упругих пластин: а) плоское напряжённое состояние, б) поперечный изгиб, с определёнными указанным выше способом жёсткостными характеристиками, трактуется как континуальная теория деформаций графена, которая открывает большие возможности для изучения различных прикладных задач статики, динамики и устойчивости листа графена.

Возможно рассмотрение задач листа графена в его плоскости; для этого необходимо использовать модель плоского напряжённого состояния моментно-мембранной теории пластин. Аналогично, при его поперечном изгибе требуется применение модели поперечного изгиба указанной теории пластин. В данной работе для решения граничных задач плоского напряжённого состояния и поперечного изгиба моментно-мембранной теории упругих пластин разработаны варианты применения метода конечных элементов (МКЭ), которые дают возможность для изучения различных конкретных прикладных задач статики и собственных колебаний листа графена.

Отметим работы [24–26], которые посвящены применению МКЭ для решения различных прикладных граничных задач моментной теории упругости. Полученные численные результаты в работе [26] рассматриваются как дополнение к аналитическим решениям с позиций их использования для экспериментального подтверждения моментных эффектов при деформировании упругих материалов и в решении проблемы идентификации механических постоянных моментной теории упругости.

2. Постановка задачи

В работах [22, 23] построена моментно-мембранная линейная теория упругих тонких оболочек (срединная поверхность оболочки отнесена к криволинейной ортогональной системе координат, в которой любой точке поверхности отвечают числа (α_1,α_2)). Эта теория основывается на следующих гипотезах:

1) кинематической: компоненты векторов перемещения $(\mathbf{V})$ и свободного поворота $(\boldsymbol{\omega})$ не зависят от координаты z, которая отсчитывается по нормали от точки (α_1,α_2) срединной поверхности до произвольной точки оболочки :

$$V_i=u_i(\alpha_1,\alpha_2),\quad V_3=w(\alpha_1,\alpha_2)\quad (i=1,2);\quad \omega_k=\Omega_k(\alpha_1,\alpha_2)\quad (k=1,2,3), \tag{1}$$

то есть перемещения, прогиб, повороты распределены равномерно по толщине оболочки.

2) статической: в физических соотношениях не принимаются во внимание напряжения как существенно меньшие: σ_{33} — относительно напряжений σ_{ii}, где $i=1,2$; σ_{3i} — относительно σ_{i3}; моментное напряжение μ_{33} — относительно μ_{ii}; μ_{3i} — относительно μ_{i3}.

3) предполагается, что оболочка тонкая.

Следует отметить, что решения трёхмерной граничной задачи моментной теории упругости в тонких областях, построенные в [27, 28] имеют свойства, отвечающие указанным гипотезам.

При переходе к рассмотрению пластинки из уравнений и граничных условий моментно-мембранной линейной теории упругих тонких оболочек [22, 23], получаются две отдельные постановки, представляемые: 1) системой уравнений и граничными условиями для плоского напряжённого состояния упругих пластин, 2) системой уравнений и граничными условиями при поперечной изгибной деформации упругих пластин. Ниже приводятся обе системы уравнений и граничные условия в декартовых координатах x,y.

2.1. Основные уравнения и граничные условия моментно-мембранной теории для случая плоского напряжённого состояния упругих тонких пластинок

Основные уравнения и граничные условия, описывающие плоское напряжённое состояние упругих тонких пластин в рамках моментно-мембранной теории имеют вид [22, 23]:

– уравнения равновесия (движения, где t — время)

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x}+\frac{\partial S_{21}}{\partial y}=0\left(\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right),\quad \frac{\partial S_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_{22}}{\partial y}=0\left(\rho_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right),\quad \frac{\partial L_{13}}{\partial x}+\frac{\partial L_{23}}{\partial y}+(S_{12}-S_{21})=0\left(J_0\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}\right); \tag{2}$$

– геометрические соотношения

$$\Gamma_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x},\quad \Gamma_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial y},\quad \Gamma_{12}=\frac{\partial u_2}{\partial x}-\Omega_3,\quad \Gamma_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial y}+\Omega_3,\quad k_{13}=\frac{\partial \Omega_3}{\partial x},\quad k_{23}=\frac{\partial \Omega_3}{\partial y}; \tag{3}$$

– физические соотношения упругости

$$\begin{gathered}T_{11}=\tilde{E}_*(\Gamma_{11}+\nu\Gamma_{22}),\quad T_{22}=\tilde{E}_*(\Gamma_{22}+\nu\Gamma_{11}),\quad S_{12}=C_*[\Gamma_{12}+\eta_1\Gamma_{21}],\quad S_{21}=C_*[\Gamma_{21}+\eta_1\Gamma_{12}],\\ L_{13}=B_*k_{13},\quad L_{23}=B_*k_{23},\quad \eta_1=\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha};\end{gathered} \tag{4}$$

– граничные условия

$$x=\text{const}:\ T_{11}=\bar{T}_{11},\ S_{12}=\bar{S}_{12},\ L_{13}=\bar{L}_{13};\quad y=\text{const}:\ S_{21}=\bar{S}_{21},\ T_{22}=\bar{T}_{22},\ L_{23}=\bar{L}_{23} \tag{5}$$

или

$$x=\text{const}:\ u_1=\bar{u}_1,\ u_2=\bar{u}_2,\ \Omega_3=\bar{\Omega}_3;\quad y=\text{const}:\ u_1=\bar{u}_1,\ u_2=\bar{u}_2,\ \Omega_3=\bar{\Omega}_3, \tag{6}$$

где чертой сверху отмечены заданные значения величин на контуре пластинки. Также могут иметь место смешанные граничные условия. В формулах (1)–(6) приняты обозначения: u_1, u_2 — перемещения в плоскости (x,y); Ω_3 — свободный поворот пластинки в плоскости (x,y); Γ_{11}, Γ_{22}, Γ_{12}, Γ_{21} — тангенциальные деформации; k_{13}, k_{23} — изменения кривизны вокруг осей x,y соответственно; T_{11}, T_{22}, S_{12}, S_{21} — тангенциальные усилия ($T_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}dz$, $S_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}dz$, $i,j=1,2$, $i\neq j$); L_{13}, L_{23} — моменты относительно оси z от моментных напряжений μ_{13}, μ_{23} ($L_{i3}=\int_{-h}^{h}\mu_{i3}dz$, $i=1,2$), распределённые вдоль осей x,y соответственно; ρ_0 — поверхностная плотность материала пластинки; J_0 — поверхностная плотность, мера инерции при вращении. В физических соотношениях (4) величины $\tilde{E}_*$, C_*, B_* представляют собой жёсткостные характеристики плоской пластинки, которые связаны со свойствами её материала (E — модулем упругости, ν — коэффициентом Пуассона, μ, α, B — упругими постоянными пластинки) и с толщиной пластинки $2h$ формулами: $E_*=2Eh$, $\tilde{E}_*=E_*\big/\left(1-\nu^2\right)$, $C_*=2h(\mu+\alpha)$, $B_*=2Bh$). В работе [21] для графена определены значения его жёсткостных характеристик (отметим, что для двумерных материалов удобно использование именно жёсткостных характеристик [20]). А это означает, что в континуальную модель графена (2)–(4) не требуется вводить числовое значение толщины пластинки, что является определённым преимуществом перед другими стандартными (классическими) моделями упругих пластин. Для численного расчёта пластинки графена с помощью МКЭ предполагается запись энергетического функционала, под которым в данной работе подразумевается выражение полной потенциальной энергии пластинки, состоящее из суммы потенциальной энергии деформации U и потенциала внешних сил и моментов V:

$$\Pi=U-V, \tag{7}$$

где [23]:

$$U=\iint_{(S)}W\,dxdy, \tag{8}$$

$$V=\int_0^a\left(\bar{S}_{21}\cdot u_1+\bar{T}_{22}\cdot u_2+\bar{L}_{23}\cdot\Omega_3\right)\Big|_{y=0}^{y=b}dx+\int_0^b\left(\bar{T}_{11}\cdot u_1+\bar{S}_{12}\cdot u_2+\bar{L}_{13}\cdot\Omega_3\right)\Big|_{x=0}^{x=a}dy. \tag{9}$$

Здесь W — поверхностная плотность потенциальной энергии деформации пластинки:

$$W=\frac{1}{2}\left[\tilde{E}_*\left(\Gamma_{11}^2+\Gamma_{22}^2+2\nu\Gamma_{11}\Gamma_{22}\right)+C_*\left(\Gamma_{12}^2+\Gamma_{21}^2+2\eta_1\Gamma_{12}\Gamma_{21}\right)+B_*\left(k_{13}^2+k_{23}^2\right)\right]. \tag{10}$$

Итак, имеем функционал для анализа плоского напряжённого состояния пластинки из однослойного графена в рамках моментно-мембранной теории упругих пластин. С математической точки зрения решение системы уравнений (2)–(4) с граничными условиями (5), (6) эквивалентно отысканию минимума функционала (7) с учётом соотношений (8)–(10) [23].

Следует отметить, что модель плоского напряжённого состояния моментно-мембранной теории упругих пластин идентична модели плоской задачи моментной теории упругости [29, 30]. Здесь эта модель относится к графену (с известными жёсткстными характеристиками). При $\alpha=0$, $B=0$ модель (2)–(6) переходит к плоскому напряжённому состоянию пластин как в классической теории упругости.

2.2. Основные уравнения и граничные условия моментно-мембранной теории для случая поперечного изгиба упругих тонких пластинок

Описание поперечного изгиба упругих тонких пластин в рамках моментно-мембранной теории включает [22, 23]:

– уравнения равновесия (движения)

$$\begin{gathered}\frac{\partial N_{13}}{\partial x}+\frac{\partial N_{23}}{\partial y}=-q_3\left(\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right),\quad \frac{\partial L_{11}}{\partial x}+\frac{\partial L_{21}}{\partial y}+N_{23}=-m_1\left(J_0\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2}\right),\\ \frac{\partial L_{12}}{\partial x}+\frac{\partial L_{22}}{\partial y}-N_{13}=-m_2\left(J_0\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}\right),\end{gathered}\tag{11}$$

где q_3, m_1, m_2 — распределённые в плоскости пластины нормальная нагрузка и моменты-пары;

– геометрические соотношения

$$\Gamma_{13}=\frac{\partial w}{\partial x}+\Omega_2,\quad \Gamma_{23}=\frac{\partial w}{\partial y}-\Omega_1,\quad k_{11}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial x},\quad k_{22}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial y},\quad k_{12}=\frac{\partial\Omega_2}{\partial x},\quad k_{21}=\frac{\partial\Omega_1}{\partial y};\tag{12}$$

– физические соотношения упругости

$$\begin{gathered}N_{13}=D_*\Gamma_{13},\quad N_{23}=D_*\Gamma_{23},\quad L_{12}=D'[k_{12}+\eta_2k_{21}],\quad L_{21}=D'[k_{21}+\eta_2k_{12}],\\ L_{11}=D'[(1+2\eta_2)k_{11}+\eta_2k_{22}],\quad L_{22}=D'[(1+2\eta_2)k_{22}+\eta_2k_{11}],\quad \eta_2=(\gamma_*-\varepsilon_*)/(\gamma_*+\varepsilon_*);\end{gathered}\tag{13}$$

– граничные условия

$$x=\mathrm{const}:\ N_{13}=\bar N_{13},\ L_{11}=\bar L_{11},\ L_{12}=\bar L_{12}\quad \text{или}\quad w=\bar w,\ \Omega_1=\bar\Omega_1,\ \Omega_2=\bar\Omega_2;\tag{14}$$

$$y=\mathrm{const}:\ N_{23}=\bar N_{23},\ L_{21}=\bar L_{21},\ L_{22}=\bar L_{22}\quad \text{или}\quad w=\bar w,\ \Omega_1=\bar\Omega_1,\ \Omega_2=\bar\Omega_2.\tag{15}$$

Здесь чертой сверху отмечены, величины заданные на контуре пластинки. Также могут иметь место граничные условия смешанного типа. В формулах (11)–(15) обозначено: w — прогиб срединной поверхности пластинки; Ω_1, Ω_2 —свободные повороты точек пластинки относительно осей x и y; Γ_{13}, Γ_{23} — поперечные сдвиговые деформации в плоскостях (x,z) и (y,z); $k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{21}$ — компоненты тензора изгиба–кручений; N_{13}, N_{23} — перерезывающие усилия ($N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dz,\ i=1,2$); $L_{11}, L_{22}, L_{12}, L_{21}$ — изгибающие и крутящие моменты ($L_{ij}=\int_{-h}^{h}\mu_{ij}dz,\ i,j=1,2$); D_*, D' ($D_*=2Gh$, $D'=\gamma_*+\varepsilon_*=(\gamma+\varepsilon)\cdot 2h$) — жёсткостные характеристики материала пластинки при поперечном изгибе (при этом G — модуль сдвига, γ и ε — упругие постоянные моментной теории упругости, $2h$ — толщина пластинки). Указанные жесткостные характеристики для графена определены в работе [21].

Сформулированная граничная задача (11)–(15), согласно моментно-мембранной теории поперечного изгиба упругих пластин [23], эквивалентна вариационной задаче, имеющей в основе принцип возможных перемещений. Решение задачи в вариационной форме сводится к минимизации функционала полной потенциальной энергии пластинки размерами $a\times b$:

$$\begin{gathered}\Pi=\iint\limits_{(S)}W_0dxdy-\iint\limits_{(S)}qwdxdy-\int_0^a\left(\bar N_{23}\cdot w+\bar L_{22}\cdot\Omega_2+\bar L_{21}\cdot\Omega_1\right)\Big|_{y=0}^{y=b}dx-\\ -\int_0^b\left(\bar N_{13}\cdot w+\bar L_{11}\cdot\Omega_1+\bar L_{12}\cdot\Omega_2\right)\Big|_{x=0}^{x=a}dy,\end{gathered}\tag{16}$$

где поверхностная плотность потенциальной энергии её деформации W_0 выражается как

$$W_0=\frac{1}{2}\left\{D_*\left(\Gamma_{13}^2+\Gamma_{23}^2\right)+D'\left[(1+2\eta_2)\left(k_{11}^2+k_{22}^2\right)+2\eta_2 k_{11}k_{22}\right]+D'\left(k_{12}^2+k_{21}^2+2\eta_2 k_{12}k_{21}\right)\right\}. \quad (17)$$

Отметим, что модель поперечного изгиба моментно-мембранной теории упругих пластин в силу того, что по толщине пластинки все искомые величины (1) распределены равномерно, при обращении в нуль моментной жёсткостной постоянной D' не переходит в модель классической теории изгиба пластин. Однако эта модель, с математической точки зрения, аналогична модели изгиба пластин с малой сдвиговой жёсткостью, то есть модели пластин типа Тимошенко [31]. Это означает, что обе модели описываются одинаковыми уравнениями, но физические уравнения содержат различные коэффициенты.

3. Конечно-элементное решение краевых задач статики и собственных колебаний в рамках моментно-мембранной теории упругих пластин на примере прямоугольного листа графена при плоском напряжённом состоянии и при поперечном изгибе

3.1. Задача статики

В рассматриваемых задачах действительные поля переменных сообщают минимум функционалу полной потенциальной энергии. Для задачи плоского напряжённого состояния (модель А) функционал задаётся выражениями (7)–(10), для задачи поперечного изгиба (модель Б) — выражениями (16), (17). В рамках основных процедур МКЭ будем отыскивать приближение к точному решению для обеих граничных задач.

После разбиения прямоугольной срединной поверхности на прямоугольные конечные элементы полная потенциальная энергия пластинки представляется в виде:

$$\Pi=\sum_{e=1}^{m}\Pi^e=\sum_{e=1}^{m}\iint_{s^e}\frac{1}{2}\varepsilon^{\mathrm{T}}\sigma\,ds^e-\sum_{e=1}^{m}\int_{l^e}U^{\mathrm{T}}p^e\,dl^e, \quad (18)$$

где s^e — площадь конечного элемента, l^e — его контур, m — общее число элементов, ε^{T}, σ, U^{T}, p^e — векторы переменных, T — символ операции транспонирования.

<u>*Модель А.*</u> Плоское напряжённое состояние пластинки. В этом случае величины, входящие в (18), выражаются через следующие параметры элементов: $\{\varepsilon^e\}^{\mathrm{T}}=(\Gamma_{11}^e,\Gamma_{22}^e,\Gamma_{12}^e,\Gamma_{21}^e,k_{13}^e,k_{23}^e)$ — вектор обобщённых деформаций, $\{\sigma^e\}^{\mathrm{T}}=(T_{11}^e,T_{22}^{(e)},S_{12}^e,S_{21}^e,L_{13}^{(e)},L_{23}^{(e)})$ — вектор обобщённых усилий, $\{u^e\}^{\mathrm{T}}=(u_1^e,u_2^e,\Omega_3^e)$ — вектор обобщённых перемещений, $\{p^e\}^{\mathrm{T}}=(T_{11}^{(e)},S_{12}^{(e)},L_{13}^{(e)})$ — усилия на контурах $x=\mathrm{const}$ прямоугольного элемента, $\{p^e\}^{\mathrm{T}}=(S_{21}^e,T_{22}^{(e)},L_{23}^{(e)})$ — усилия на контурах $y=\mathrm{const}$ прямоугольного элемента. Символ T указывает на операцию транспонирования.

Рассмотрим равновесие некоторого элемента e с узлами i,j,k,l, каждый из которых характеризуется 9 степенями свободы (9 независимыми переменными): $u_1^{(e)}$, $u_2^{(e)}$, $\Omega_3^{(e)}$ $\partial u_1^{(e)}/\partial x$, $\partial u_2^{(e)}/\partial x$, $\partial\Omega_3^{(e)}/\partial x$, $\partial u_1^{(e)}/\partial y$, $\partial u_2^{(e)}/\partial y$, $\partial\Omega_3^{(e)}/\partial y$. Представим переменные $u_1^{(e)}$, $u_2^{(e)}$, $\Omega_3^{(e)}$ в плоскости $\{x,y\}$ в виде полиномиальных рядов, содержащих в общей сложности 36 коэффициентов $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{36}$:

$$\begin{aligned}
u_1^{(e)}&=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4x^2+\alpha_5y^2+\alpha_6xy+\alpha_7x^2y+\alpha_8xy^2+\alpha_9x^3+\alpha_{10}y^3+\alpha_{11}x^3y+\alpha_{12}xy^3,\\
u_2^{(e)}&=\alpha_{13}+\alpha_{14}x+\alpha_{15}y+\alpha_{16}x^2+\alpha_{17}y^2+\alpha_{18}xy+\alpha_{19}x^2y+\alpha_{20}xy^2+\alpha_{21}x^3+\alpha_{22}y^3+\alpha_{23}x^3y+\alpha_{24}xy^3,\\
\Omega_3^{(e)}&=\alpha_{25}+\alpha_{26}x+\alpha_{27}y+\alpha_{28}x^2+\alpha_{29}y^2+\alpha_{30}xy+\alpha_{31}x^2y+\alpha_{32}xy^2+\alpha_{33}x^3+\alpha_{34}y^3+\alpha_{35}x^3y+\alpha_{36}xy^3.
\end{aligned} \quad (19)$$

После выполнения процедур МКЭ придём к соответствующим дискретным представлениям:

$$\{u^e\}=[N]\{\delta^e\},\quad \{\varepsilon^e\}=[R][N]\{\delta^e\}=[B]\{\delta^e\},\quad \{\sigma^e\}=[D][B]\{\delta^e\}, \quad (20)$$

где $[N]$ — матрица базисных функций конечного элемента (матрица функций формы), $[R]$ — матрица дифференциальных операторов, связывающих линейные деформации и деформации изгиба–кручения с перемещениями и свободным поворотом, $[D]$ — матрица упругости:

$$[R]=\begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0 & 0\\ 0 & \partial/\partial y & 0\\ 0 & \partial/\partial x & -1\\ \partial/\partial y & 0 & 1\\ 0 & 0 & \partial/\partial x\\ 0 & 0 & \partial/\partial y\end{bmatrix},\quad [D]=\begin{bmatrix}\tilde{E}_* & \tilde{E}_*\nu & 0 & 0 & 0 & 0\\ \tilde{E}_*\nu & \tilde{E}_* & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & C_* & C_*\eta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & C_*\eta_1 & C_* & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_* & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_*\end{bmatrix}.$$

Далее вектор узловых обобщённых перемещений в элементе e выражается через искомые переменные:

$$\{\delta^e\}^{\mathrm{T}}=\left(u_{1i}^e,\frac{\partial u_{1i}^e}{\partial x},\frac{\partial u_{1i}^e}{\partial y},u_{2i}^e,\frac{\partial u_{2i}^e}{\partial x},\frac{\partial u_{2i}^e}{\partial y},\Omega_{3i}^e,\frac{\partial \Omega_{3i}^e}{\partial x},\frac{\partial \Omega_{3i}^e}{\partial y},u_{1j}^e,\frac{\partial u_{1j}^e}{\partial x},\frac{\partial u_{1j}^e}{\partial y},u_{2j}^e,\frac{\partial u_{2j}^e}{\partial x},\frac{\partial u_{2j}^e}{\partial y},\Omega_{3j}^e,\frac{\partial \Omega_{3j}^e}{\partial x},\frac{\partial \Omega_{3j}^e}{\partial y},\right.$$
$$\left.u_{1k}^e,\frac{\partial u_{1k}^e}{\partial x},\frac{\partial u_{1k}^e}{\partial y},u_{2k}^e,\frac{\partial u_{2k}^e}{\partial x},\frac{\partial u_{2k}^e}{\partial y},\Omega_{3k}^e,\frac{\partial \Omega_{3k}^e}{\partial x},\frac{\partial \Omega_{3k}^e}{\partial y},u_{1l}^e,\frac{\partial u_{1l}^e}{\partial x},\frac{\partial u_{1l}^e}{\partial y},u_{2l}^e,\frac{\partial u_{2l}^e}{\partial x},\frac{\partial u_{2l}^e}{\partial y},\Omega_{3l}^e,\frac{\partial \Omega_{3l}^e}{\partial x},\frac{\partial \Omega_{3l}^e}{\partial y}\right). \tag{21}$$

<u>*Модель Б.*</u> Поперечный изгиб пластинки. При поперечном изгибе входящие в выражение полной потенциальной энергии пластинки (18) обобщённые параметры связываются с характеристиками конечных элементов, которые отвечают состоянию поперечного изгиба: $\{u^e\}^{\mathrm{T}}=(w^e,\Omega_1^e,\Omega_2^e)$ — вектор обобщённых перемещений, $\{\varepsilon^e\}^{\mathrm{T}}=(\Gamma_{13}^e,\Gamma_{23}^e,k_{11}^e,k_{22}^e,k_{12}^e,k_{21}^e)$ — вектор обобщённых деформаций, $\{\sigma^e\}^{\mathrm{T}}=(N_{13}^e,N_{23}^e,L_{11}^e,L_{22}^e,L_{12}^e,L_{21}^e)$ — вектор обобщённых усилий, $\{p^e\}^{\mathrm{T}}=(N_{13}^e,L_{11}^{(e)},L_{12}^{(e)})$ — усилия на контуре $x=\mathrm{const}$ прямоугольного элемента, $\{p^e\}^{\mathrm{T}}=(N_{23}^e,L_{21}^e,L_{22}^e)$ — усилия на контуре $y=\mathrm{const}$ прямоугольного элемента.

Узлы прямоугольного конечного элемента также имеют по 9 степеней свободы (w^e, Ω_1^e, Ω_2^e $\partial w^e/\partial x$, $\partial w^e/\partial y$, $\partial\Omega_1^e/\partial x$, $\partial\Omega_1^e/\partial y$, $\partial\Omega_2^e/\partial x$, $\partial\Omega_2^e/\partial y$). Прогиб w^e и независимые повороты Ω_1^e, Ω_2^e представляются подобно (20):

$$\begin{gathered}
w=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4x^2+\alpha_5y^2+\alpha_6xy+\alpha_7x^2y+\alpha_8xy^2+\alpha_9x^3+\alpha_{10}y^3+\alpha_{11}x^3y+\alpha_{12}xy^3,\\
\Omega_1=\alpha_{13}+\alpha_{14}x+\alpha_{15}y+\alpha_{16}x^2+\alpha_{17}y^2+\alpha_{18}xy+\alpha_{19}x^2y+\alpha_{20}xy^2+\alpha_{21}x^3+\alpha_{22}y^3+\alpha_{23}x^3y+\alpha_{24}xy^3,\\
\Omega_2=\alpha_{25}+\alpha_{26}x+\alpha_{27}y+\alpha_{28}x^2+\alpha_{29}y^2+\alpha_{30}xy+\alpha_{31}x^2y+\alpha_{32}xy^2+\alpha_{33}x^3+\alpha_{34}y^3+\alpha_{35}x^3y+\alpha_{36}xy^3.
\end{gathered}$$

В этом случае также приходим к дискретным выражениям вида (20), где на этот раз

$$[R]=\begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0 & +1\\ \partial/\partial y & -1 & 0\\ 0 & \partial/\partial x & 0\\ 0 & 0 & \partial/\partial y\\ 0 & 0 & \partial/\partial x\\ 0 & \partial/\partial y & 0\end{bmatrix},\quad [D]=\begin{bmatrix}D_* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & D_* & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & D'(1+2\eta_2) & D'\eta_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & D'\eta_2 & D'(1+2\eta_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & D' & D'\eta_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & D'\eta_2 & D'\end{bmatrix}.$$

Вектор узловых обобщённых перемещений в элементе e связан с другими узловыми переменными:

$$\{\delta^e\}^{\mathrm{T}}=\left(w_i^e,\frac{\partial w_i^e}{\partial x},\frac{\partial w_i^e}{\partial y},\Omega_{1i}^e,\frac{\partial \Omega_{1i}^e}{\partial x},\frac{\partial \Omega_{1i}^e}{\partial y},\Omega_{2i}^e,\frac{\partial \Omega_{2i}^e}{\partial x},\frac{\partial \Omega_{2i}^e}{\partial y},w_j^e,\frac{\partial w_j^e}{\partial x},\frac{\partial w_j^e}{\partial y},\Omega_{1j}^e,\frac{\partial \Omega_{1j}^e}{\partial x},\frac{\partial \Omega_{1j}^e}{\partial y},\Omega_{2j}^e,\frac{\partial \Omega_{2j}^e}{\partial x},\frac{\partial \Omega_{2j}^e}{\partial y},\right.$$
$$\left.w_k^e,\frac{\partial w_k^e}{\partial x},\frac{\partial w_k^e}{\partial y},\Omega_{1k}^e,\frac{\partial \Omega_{1k}^e}{\partial x},\frac{\partial \Omega_{1k}^e}{\partial y},\Omega_{2k}^e,\frac{\partial \Omega_{2k}^e}{\partial x},\frac{\partial \Omega_{2k}^e}{\partial y},w_l^e,\frac{\partial w_l^e}{\partial x},\frac{\partial w_l^e}{\partial y},\Omega_{1l}^e,\frac{\partial \Omega_{1l}^e}{\partial x},\frac{\partial \Omega_{1l}^e}{\partial y},\Omega_{2l}^{(e)},\frac{\partial \Omega_{2l}^{(e)}}{\partial x},\frac{\partial \Omega_{2l}^{(e)}}{\partial y}\right). \tag{22}$$

Далее, для задач А и Б, исходя из функционала (18), после дифференцирования в соответствии с МКЭ [32–34] и введения обозначений:

$$\{f^e\}=\int\limits_{(l^e)}[N]^{\mathrm{T}}\{p^e\}dl^e,[K^e]=\iint\limits_{(s^e)}[B]^{\mathrm{T}}[D][B]ds^e, \tag{23}$$

придём к уравнению равновесия элемента e:

$$\frac{\partial\Pi^e}{\partial\{\delta^e\}}=[K^e]\{\delta^e\}-\{f^e\}=0,$$

где $[K^e]$ — матрицы жёсткости конечного элемента e, $\{f^e\}$ — вектор эквивалентных узловых сил.

Далее, объединим эти элементарные матричные соотношения в одно матричное соотношение, в которое внесём изменения в целях учёта кинематических граничных условий (при представлении вектора узловых сил статические граничные условия выполняются автоматически), получим окончательную систему алгебраических уравнений:

$$\left[K_{\sum}\right]\{\Delta\}=\left\{f_{\sum}\right\},$$

порядок которой соответствует числу введённых в рассмотрение неизвестных. Матрица $\left[K_{\sum}\right]$ носит название глобальной матрицы жёсткости, $\left\{f_{\sum}\right\}$ — глобального вектора узловых сил системы, а $\{\Delta\}$ — глобального вектора узловых неизвестных:

$$\{\Delta\}=\{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_N\}^{\mathrm{T}}. \tag{24}$$

Здесь: N — общее число узлов в системе; δ_i — вектор неизвестных i-го узла вида (21) или (22).

3.2. Задача собственных колебаний листа графена

Решение этой задачи также будем находить численно, с помощью МКЭ.

При исследовании собственных колебаний пластины по модели А функционал (7)–(10) заменяется лагранжианом:

$$L_1=\frac{1}{2}\iint\limits_{(s)}\left[\tilde{}_{*}\left(\mathit{\Gamma}_{11}^2+\mathit{\Gamma}_{22}^2+2\nu\mathit{\Gamma}_{11}\mathit{\Gamma}_{22}\right)+C_*\left(\mathit{\Gamma}_{12}^2+\mathit{\Gamma}_{21}^2+2\eta_1\mathit{\Gamma}_{12}\mathit{\Gamma}_{21}\right)+B_*\left(k_{13}^2+k_{23}^2\right)\right]dxdy-$$

$$-\frac{1}{2}\omega^2\iint\limits_{(s)}\left[\rho_0\left(u_1^2+u_2^2\right)+J_0\mathit{\Omega}_3^2\right]dxdy, \tag{25}$$

где ω — круговая частота колебаний. В случае модели Б функционал (16), (17) заменяется лагранжианом вида:

$$L_2=\frac{1}{2}\iint\limits_{(S)}\left\{D_*\left(\mathit{\Gamma}_{13}^2+\mathit{\Gamma}_{23}^2\right)+D'\left[(1+2\eta_2)\left(k_{11}^2+k_{22}^2\right)+2\eta_2\cdot k_{11}k_{22}\right]+D'\left(k_{12}^2+k_{21}^2+2\eta_2\cdot k_{12}k_{21}\right)\right\}dxdy-$$

$$-\frac{1}{2}\omega^2\iint\limits_{(S)}\left[\rho_0 w^2+J_0\left(\mathit{\Omega}_1^2+\mathit{\Omega}_2^2\right)\right]dxdy, \tag{26}$$

Экстремальные свойства (см. [35]) функционала (25) или (26) приводят в задаче на собственные колебания к следующим конечно-элементным уравнениям для элемента:

$$\left\{[K^e]-\omega^2[M^e]\right\}\cdot\{\delta^e\}=0,$$

где $[K^e]$ — матрица жёсткости (23), $[M^e]$ — матрица массы конечного элемента e. Глобальная система однородных алгебраических уравнений метода МКЭ в целом для пластины примет вид:

$$\left\{\left[K_{\sum}\right]-\omega^2\left[M_{\sum}\right]\right\}\cdot\{\mathit{\Delta}\}=0, \tag{27}$$

при этом $\left[K_{\sum}\right]$ — глобальная матрица жёсткости, $\left[M_{\sum}\right]$ — глобальная матрица масс, $\{\mathit{\Delta}\}$ — глобальный вектор узловых неизвестных (24). В системе (27) необходимо учесть кинематические граничные условия.

Система (27) является задачей на собственные значения, решениями которой служат частоты и формы собственных колебаний пластины в рамках моделей А и Б листа графена.

4. Результаты решения задач

Рассмотрим задачи статики и собственных колебаний прямоугольного листа графена по модели Б (поперечный изгиб пластинки) (Рис. 1) при двух вариантах закрепления по контуру: 1) шарнирное опирание; 2) жёсткое защемление. В задаче статики зададим $q_3\equiv\mathrm{const}$, $m_1=0$, $m_2=0$. Первый вариант граничных условий записывается так:

$$\begin{aligned} x=0,a: &\quad w=0, \quad \frac{d\mathit{\Omega}_2}{dx}=0, \quad \mathit{\Omega}_1=0; \\ y=0,b: &\quad w=0, \quad \mathit{\Omega}_2=0, \quad \frac{d\mathit{\Omega}_1}{dy}=0. \end{aligned} \tag{28}$$

В расчёте использовались характеристики графена из [21] (размерности содержат приставку «н» — нано: наноНьютон (нН), нанометр (нм) и так далее): $D_*=86$ нН/нм; $D'=0.415$ нН·нм; $\eta_2=-0.219$. Для q_3 принималось значение: $q_3=10^{-3}$ нН/нм^2. Пластинка графена имела размеры $0=20$ нм, $b=20$ нм.

Из решения матричного уравнения (27) с учётом граничных условий (28) получим значения всех искомых величин в любой точке прямоугольной области. Таблица 1 содержит вычисленные значения компонент обобщённых переменных в центральной точке $D(a/2,b/2)$ прямоугольной области размерами $a\times b$. Для сравнения здесь и в последующих таблицах приведены точные значения, определённые из решения граничной задачи методом двойных тригонометрических рядов.

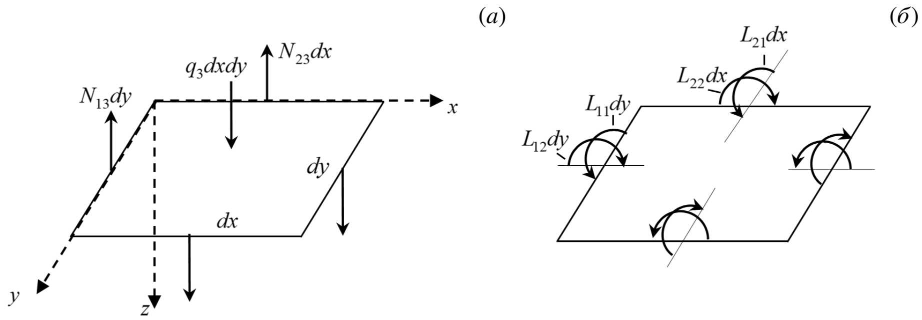

Рис. 1. Распределённые усилия (*а*) и моменты (*б*) в элементе пластины при расчёте по модели Б

Таблица 1. Значения компонент обобщённых переменных в центре прямоугольной области

Компонента	Число конечных элементов в дискретизирующей область сетке				Точное значение
	4	16	36	64	
Прогиб w, нм	0.1019	1.1214	1.4664	1.5231	1.5665
Свободный поворот Ω_1, рад относительно оси x	0	0	0	0	0
Свободный поворот Ω_2, рад относительно оси C	0	0	0	0	0
Перерезывающее усилие N_{13}, нН/нм	0	0	0	0	0
Перерезывающее усилие N_{23}, нН/нм	0	0	0	0	0
Крутящий момент L_{11}, нН	0	0	0	0	0
Крутящий момент L_{22}, нН	0	0	0	0	0
Изгибающий момент L_{12}, нН	0.0023	0.0156	0.0182	0.01817	0.01775
Изгибающий момент L_{21}, нН	–0.0023	–0.0156	–0.0182	–0.01817	–0.01775

Таблица 2. Значения компонент обобщённых переменных в точке с координатами $B(a,b/2)$

Компонента	Число конечных элементов в дискретизирующей область сетке				Точное значение
	4	16	36	64	
Свободный поворот Ω_2, рад относительно оси y	0.0133	0.1786	0.2391	0.2504	0.2598
Перерезывающее усилие N_{13}, нН/нм	–0.0597	–0.0377	–0.0144	–0.0086	–0.0067
Крутящий момент L_{11}, нН	0	0	0	0	0
Изгибающий момент L_{12}, нН	0	0	0	0	0

Таблица 3. Наименьшая частота собственных колебаний листа графена

Наименьшая частота собственных колебаний	Число конечных элементов в дискретизирующей область сетке			Точное значение
	4	16	36	
ω, ГГц	19.5	6.47	5.80	5.72

Результаты решения задачи на собственные колебания прямоугольного листа графена приведены в таблице 3 ($\rho_0 = 0.76 \cdot 10^{-15}$ нкг/нм^2; $J_0 = 0.46 \cdot 10^{-19}$ нкг [21]).

Данные таблиц 1–3 демонстрируют сходимость численного решения к точному с измельчением конечно-элементной сетки.

Рассмотрим задачу при втором варианте граничных условий:

$$x = 0, a: \quad w = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0;$$

$$x = 0, b: \quad w = 0, \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0.$$

При 64 конечных элементах получены следующие результаты: $w(O) = 0.478$ нм; $\Omega_1(O) = \Omega_2(O) = 0$;

$N_{13}(O)=N_{23}(O)=L_{11}(O)=L_{22}(O)=0$; $L_{12}(O)=0.00897$ нН; $L_{21}(O)=-0.00897$ нН; $\omega=10.9$ ГГц.

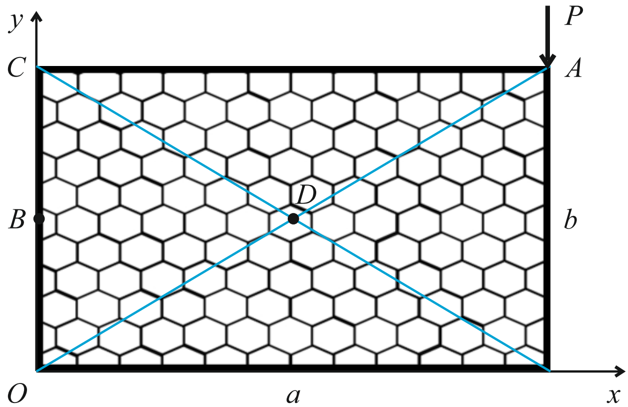

Рис. 2. Расчётная область в задаче плоского напряжённого состояния прямоугольного листа графена

Теперь рассмотрим задачи статики и собственных колебаний прямоугольного листа графена по модели А (плоское напряжённое состояние). На рисунке 2 показан прямоугольный лист графена с контрольными точками. Левый конец этой области жёстко защемлён, в точке A приложена сосредоточенная нагрузка P. Граничные условия этой задачи имеют вид:

$$x=0: \quad u_1=0, u_2=0, \Omega_3=0$$

$$y=0: \quad S_{21}=0, T_{22}=0, L_{23}=0,$$

$$y=b: \quad S_{21}=0, T_{22}=-P\delta(x-a,y)\, L_{23}=0,$$

$$x=a: \quad S_{12}=0, T_{11}=0, L_{13}=0,$$

где $\delta(x,y)$ — дельта-функция Дирака.

Расчёты выполнены при значениях параметров: E_* = 287 нН/нм; $\tilde{E}_*$ = 304 нН/нм; C_* = 168 нН/нм; $B_*=0{,}505$ нН·нм [21], $a=20$ нм, $b=20$ нм, $P=0{,}5$ нН. В результате вычисленный получены следующие данные в точках $A(a,b)$, $B(0,b/2)$ при ω = 93 ГГц: $u_1(A)=0.0115$ нм, $u_2(A)=-0.0226$ нм, $\Omega_3(A)=-0.00481$ рад, $T_{11}(B)=-0.0014$ нН/нм, $S_{12}(B)=0.00328$ нН/нм, $L_{13}(B)=0.00014$ нН.

5. Заключение

На основе построенной в рамках моментно-мембранной линейной теории упругих тонких пластин континуальной математической модели деформационного поведения листа графена представлен его конечно-элементный расчёт в случае задач статики и собственных колебаний. Использован четырёхузловой прямоугольный конечный элемент с характерными узловыми кинематическими параметрами, отвечающими моментно-мембранной теории упругих тонких пластин. При вариационной реализации метода конечных элементов для задач статики листа графена получены матрицы жёсткости и векторы эквивалентных узловых усилий, а для задачи собственных колебаний — матрица жёсткости и матрица масс. С использованием разработанного алгоритма конечно-элементного подхода решены и проанализированы прикладные задачи статики и собственных колебаний листа графена при его плоском напряжённом состоянии и поперечном изгибе. Численные результаты демонстрируют достаточно хорошую сходимость. Построенные конечно-элементные соотношения обладают универсальностью и могут применяться при решении других задач с наноструктурами в рамках моментно-мембранной линейной теории упругих оболочек.

Работа выполнена в рамках контракта N: 10-12/23-I/SHSU, финансируемого Комитетом по науке Республики Армении.

Литература

1. *Geim A.K.*, *Novoselov K.S.* The rise of graphene // Nature Materials. 2007. No. 3. P. 183–191. DOI: `10.1038/nmat1849`.
2. *Баимова Ю.А.*, *Мулюков Р.Р.* Графен, нанотрубки и другие углеродные наноструктуры. М.: РАН, 2018. 212 с.

3. *Kang J.W.*, *Kim H.-W.*, *Kim K.-S.*, *Lee J.H.* Molecular dynamics modeling and simulation of a graphene-based nanoelectromechanical resonator // Current Applied Physics. 2013. Vol. 13, no. 4. P. 789–794. DOI: 10.1016/j.cap.2012.12.007.
4. *Wang J.*, *Li T.T.* Molecular dynamics simulation of the resonant frequency of graphene nanoribbons // Ferroelectrics. 2019. Vol. 549, no. 1. P. 87–95. DOI: 10.1080/00150193.2019.1592547.
5. *Попов А.М.* Вычислительные нанотехнологии. М.: КноРус, 2017. 312 с.
6. *Korobeynikov S.N.*, *Alyokhin V.V.*, *Babichev A.V.* Simulation of mechanical parameters of graphene using the DREIDING force field // Acta Mechanica. 2018. Vol. 229, no. 6. P. 2343–2378. DOI: 10.1007/s00707-018-2115-5.
7. *Korobeynikov S.N.*, *Alyokhin V.V.*, *Babichev A.V.* On the molecular mechanics of single layer graphene sheets // International Journal of Engineering Science. 2018. Vol. 133. P. 109–131. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.09.001.
8. *Korobeynikov S.N.*, *Alyokhin V.V.*, *Babichev A.V.* Advanced nonlinear buckling analysis of a compressed single layer graphene sheet using the molecular mechanics method // International Journal of Mechanical Sciences. 2021. Vol. 209. 106703 DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2021.106703.
9. *Аннин Б.Д.*, *Баимова Ю.А.*, *Мулюков Р.Р.* Механические свойства, устойчивость, коробление графеновых листов и углеродных нанотрубок (обзор) // Прикладная механика и техническая физика. 2020. Т. 61, № 5. С. 175–189. DOI: 10.15372/PMTF20200519.
10. *Квашнин А.Г.*, *Сорокин П.Б.*, *Квашнин Д.Г.* Теоретические исследования механических свойств графеновых мембран методом молекулярной механики // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика. 2009. Т. 2, № 4. С. 426–431.
11. *Odegard G.M.*, *Gates T.S.*, *Nicholson L.M.*, *Wise K.E.* Equivalent-Continuum Modeling of Nano-structured Materials: Technical Memorandum / NASA Langley Research Center. 2001. NASA/TM-2001-210863–2001.
12. *Li C.*, *Chou T.-W.* A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes // International Journal of Solids and Structures. 2003. Vol. 40. P. 2487–2499. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00056-8.
13. *Гольдштейн Р.В.*, *Ченцов А.В.* Дискретно-континуальная модель нанотрубки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 57–74.
14. *Wan H.*, *Delale F.* A structural mechanics approach for predicting the mechanical properties of carbon nanotubes // Meccanica. 2009. Vol. 45. P. 43–51. DOI: 10.1007/s11012-009-9222-2.
15. *Беринский И.Е.*, *Кривцов А.М.*, *Кударова А.М.* Определение изгибной жёсткости графенового листа // Физическая мезомеханика. 2014. Т. 17, № 1. С. 57–65. URL: https://www.elibrary.ru/rzuckp.
16. *Иванова Е.А.*, *Морозов Н.Ф.*, *Семенов Б.Н.*, *Фирсова А.Д.* Об определении упругих моделей наноструктур: теоретические расчеты и методика экспериментов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 75–84.
17. *Иванова Е.А.*, *Кривцов А.М.*, *Морозов Н.Ф.*, *Фирсова А.Д.* Учёт моментного взаимодействия при расчёте изгибной жёсткости наноструктур // Доклады Академии наук. 2003. Т. 391, № 6. С. 764–768.
18. *Иванова Е.А.*, *Кривцов А.М.*, *Морозов Н.Ф.* Получение макроскопических соотношений упругости сложных кристаллических решёток с учётом моментных взаимодействий на микроуровне // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71, № 4. С. 595–615.
19. *Кузькин В.А.*, *Кривцов А.М.* Описание механических свойств графена с использованием частиц с вращательными степенями свободы // Доклады Академии наук. 2011. Т. 440, № 4. С. 476–479.
20. Современные проблемы механики. Механические свойства ковалентных кристаллов / под ред. А.М. Кривцов, О.С. Лобода. СПб.: Исд-во Политехн. ун-та, 2014. 160 с.
21. *Саркисян С.О.* Стержневая и континуально-моментная модели деформаций двумерных наноматериалов // Физическая мезомеханика. 2022. Т. 25, № 2. С. 109–121. DOI: 10.55652/1683-805X_2022_25_2_109.
22. *Саркисян С.О.* Модель тонких оболочек в моментной теории упругости с деформационной концепцией «сдвиг плюс поворот» // Физическая мезомеханика. 2020. Т. 23, № 4. С. 13–19. DOI: 10.24411/1683-805X-2020-14002.
23. *Саркисян С.О.* Вариационные принципы моментно-мембранной теории оболочек // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2022. № 1. С. 38–47.
24. *Sachio N.*, *Benedict R.*, *Lakes R.* Finite element method for orthotropic micropolar elasticity // International Journal of Engineering Science. 1984. Vol. 22, no. 3. P. 319–330. DOI: 10.1016/0020-7225(84)90013-2.
25. *Nakamura S.*, *Lakes R.S.* Finite element analysis of stress concentration around a blunt crack in a cosserat elastic solid // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1988. Vol. 66, no. 3. P. 257–266. DOI: 10.1016/0045-7825(88)90001-1.
26. *Корепанов В.В.*, *Матвеенко В.П.*, *Шардаков И.Н.* Численное исследование двумерных задач несимметричной теории упругости // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2008. № 2. С. 63–70.

27. *Саркисян С.О.* Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72, № 1. С. 129–147.

28. *Саркисян С.О.* Теория микрополярных упругих тонких оболочек // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, № 2. С. 325–343.

29. *Пальмов В.А.* Плоская задача теории несимметричной упругости // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28, № 6. С. 1117–1120.

30. *Булыгин А.Н.*, *Кувшинский Е.В.* Плоская деформация в асимметрической теории упругости // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31, № 3. С. 543–547.

31. *Пелех Б.Л.* Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев: Наукова думка, 1977. 183 с.

32. *Норри Д.*, *де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981. 304 с.

33. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.

34. *Белкин А.Е.*, *Гаврюшин С.С.* Расчёт пластин методом конечных элементов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. 232 с.

35. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862 с.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович (корр.), член-корр. НАН Армении, дфмн, проф., Ширакский государственный университет имени М. Налбандяна, Республика Армения, 3126, г. Гюмри, ул. Паруйра Севака, д. 4; e-mail: `s_sargsyan@yahoo.com`; ORCID: 0000-0003-1102-1061

Жамакочян Кнарик Араратовна, кфмн, преп., Ширакский государственный университет имени М. Налбандяна; e-mail: `knarikzhamakochyan@mail.ru`; ORCID: 0009-0008-1692-2866

Саркисян Лусине Самвеловна, кфмн, доц., снс, Институт механики НАН РА, Республика Армения, 0019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, д. 24/2; e-mail: `slusin@yahoo.com`; ORCID: 0009-0006-5255-1930