

Научная статья

## Моделирование турбулентной естественной конвекции на основе 2–жидкостного подхода

З.М. Маликов<sup>1</sup>, Д.П. Наврузов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Университет АКФА, Ташкент, Узбекистан

<sup>2</sup> Бухарский институт управления природными ресурсами Национального исследовательского университета ТИИИМСХ, Бухара, Узбекистан

Проводится математическое моделирование турбулентной естественной конвекции воздуха у нагретой вертикальной пластины на основе сравнительно недавно разработанной 2-жидкостной модели турбулентности. Рассмотренная задача, несмотря на свою относительную простоту, содержит в себе все главные элементы, характерные для течений вблизи стенки, обусловленные силами плавучести. Существенным недостатком моделей турбулентности RANS, используемых для решения подобных задач, является то, что для их численной реализации требуется задание точки перехода от ламинарного режима к турбулентному, которую необходимо определять экспериментальным путем. Таким образом, все RANS-модели не в состоянии отображать зону перехода от ламинарного режима течения к турбулентному. Поэтому основной целью работы является проверка способности 2-жидкостной модели турбулентности описывать переходную зону. В известных публикациях показано, что 2-жидкостная модель имеет высокую точность, устойчивость, а также способна адекватно представлять анизотропную турбулентность. В данной работе в модель турбулентности вводится дополнительная термическая сила, которой во многих течениях с вынужденной конвекцией можно пренебречь. Однако в течениях с естественной конвекцией именно термическая сила способствует смене режима течения. Для валидации модели и верификации вычислительной процедуры результаты авторов сравниваются с результатами, полученными по известным RANS-моделям турбулентности: однопараметрической модели Спаларта–Аллмараса и модели переноса рейнольдсовых напряжений, а также с доступными экспериментальными данными. Показано, что 2-жидкостная модель адекватно воспроизводит зону перехода от ламинарного режима к турбулентному и полученные численные результаты хорошо совпадают с опытными данными.

*Ключевые слова:* 2-жидкостной подход к турбулентности, нагретая вертикальная пластина, верификация, естественная конвекция, термическая сила, число Нуссельта, зона перехода

Получение: 09.08.2022 / Публикация онлайн: 01.04.2024

УДК: 532

### 1. Введение

Теплообмен в турбулентных естественно-конвективных потоках представляет большой интерес как в теоретическом, так и в прикладном аспекте. В качестве примера достаточно привести природные явления, где турбулентная конвекция играет решающую роль [1]. Процессы конвекции значимы также и в промышленности. Например, естественная конвекционная теплопередача служит надежным и экономичным методом охлаждения в быстрорастущей электронной промышленности, где сотни модулей могут размещаться на небольшом основании. Поскольку плотность этих тепловыделяющих элементов постоянно увеличивается, испускаемое тепло должно эффективно отводиться не только для их защиты, но и для увеличения срока службы. Часто возникает необходимость охлаждения внутренних поверхностей вертикальных открытых воздухопроводов за счет естественной конвекции, где скорости теплопередачи низкие. Таким образом, владение информацией о поведении естественного конвекционного потока в замкнутых пространствах не только полезно, но и необходимо, особенно в системах теплоносителей, используемых в различных областях ядерной и солнечной энергетики [2].

Вследствие важности проблема естественной конвекции в последние годы привлекает все большее внимание исследователей [3]. Существующие конвективные процессы можно разделить на свободные и вынужденные. Такой градации придерживаются авторы большинства публикаций [4, 5]. Изучением вопросов свободной и вынужденной конвекции занимались многие ученые, в частности, описание конвективных систем подробно приводится в [6–8]. Естественная конвекция бывает как ламинарной, так и турбулентной. В природных условиях, а также в больших помещениях конвекция имеет турбулентный характер. Поэтому моделирование турбулентности — одна из проблем при изучении процессов конвекции. В последнее время наравне с лабораторными испытаниями используется численный эксперимент — исследование явления при помощи методов вычислительной гидродинамики (Computational Fluid Dynamics, CFD). Современные программные комплексы позволяют проводить исследования большого числа гидродинамических, тепло- и массообменных процессов [9–12]. Наиболее распространены комплексы ANSYS, COMSOL Multyphysics, FlowVision и другие, которые содержат различные модели турбулентности и предназначены для исследования большинства потоков, встречающихся в природе и

в создаваемых человеком технологиях, имеющих турбулентный характер. Поэтому применение пакетов программ для решения той или иной задачи гидродинамики ставит ученых перед необходимостью выбора подходящей модели турбулентности. В основном существует три подхода к математическому моделированию турбулентности. Первый подход основан на прямом численном моделировании (Direct Numerical Simulation, DNS), базирующемся на гипотезе о достаточности уравнений Навье–Стокса для описания турбулентных течений. При этом численно решается нестационарная система уравнений Навье–Стокса в трехмерной постановке. Причем для интегрирования требуются расчетные ячейки, размеры которых меньше, чем Колмогоровский масштаб. DNS-подход требует большого объема вычислительных ресурсов, и его использование для расчета сложных гидродинамических задач в настоящее время не представляется возможным. Во втором подходе производится осреднение уравнений Навье–Стокса по числу Рейнольдса (Reynolds Averaged Navier–Stokes, RANS), которое приводит к незамкнутой системе уравнений. Поэтому для замыкания этой системы дополнительно вводятся модели турбулентности. Все они называются RANS-моделями. Достоинством RANS-моделей является то, что для их численной реализации требуются существенно меньшие вычислительные ресурсы по сравнению с методами DNS [13]. По этой причине подход RANS находит наиболее широкое приложение при решении инженерных задач. Несмотря на значительный прогресс, достигнутый в области моделирования турбулентных течений на основе RANS-моделей, все еще остаются нерешенные проблемы, связанные с расчетом динамики и теплообмена в турбулентных естественно-конвективных потоках. Как показано в ряде исследований [14, 15], применение наиболее распространенных при решении прикладных задач конвективного теплообмена двухпараметрических полуэмпирических моделей турбулентности типа  $k - \varepsilon$  не обеспечивает необходимой для практики точности описания естественно-конвективных турбулентных течений. В связи с этим на протяжении многих лет предпринимаются попытки усовершенствования существующих и построения новых моделей турбулентности для течений данного класса. Во многих работах основной акцент делается на необходимости прямого учета влияния эффектов плавучести в традиционных моделях турбулентности (например, в  $k - \varepsilon$ -моделях) путем включения дополнительных членов в соответствующие уравнения переноса турбулентных характеристик потока [16, 17]. Однако такой метод приводит как к введению и определению ряда дополнительных эмпирических констант, так и к увеличению числа дифференциальных уравнений, входящих в модель. Это в свою очередь дополнительно усложняет и без того трудоемкие с вычислительной точки зрения низко рейнольдсовы версии  $k - \varepsilon$ -моделей и других, аналогичных им.

Еще одним направлением в моделировании естественной конвекции является использование более сложных RANS-моделей, в частности, моделей переноса рейнольдсовых напряжений (RSM). Однако, из-за сложности, их применение ограничивается главным образом решением достаточно простых модельных задач. Проведение же широких численных исследований и параметрических расчетов, необходимых для решения практических задач конвективного теплообмена, не всегда оправдано и эффективно. В последние годы широкую популярность получили модели, существенно превосходящие традиционные как с точки зрения вычислительной эффективности, так и с точки зрения точности решений охватываемого круга задач вынужденной конвекции. В частности, к их числу можно отнести однопараметрическую модель, основанную на решении уравнения переноса турбулентной вязкости, — модель Спаларта–Алмараса (SA) [18], и двухпараметрическую модель Ментера (SSG) [19], представляющую собой комбинацию стандартной  $k - \varepsilon$ -модели и известной  $k - \omega$ -модели Уилкокса [20]. Возможности этих моделей и их существенное превосходство над стандартными  $k - \varepsilon$ -моделями применительно к решению ряда сложных задач вынужденной конвекции продемонстрированы во многих работах. Так, в [21] эти модели использованы для решения некоторых задач естественной конвекции и отмечено, что они дают более точные решения, чем сложные модели. Однако, по мнению авторов настоящей работы, существенным недостатком практически всех RANS-моделей является то, что при решении задач естественной конвекции они не в состоянии представлять переход от ламинарного потока к турбулентному. Например, в упомянутой работе для расчета турбулентной конвекции около нагретой вертикальной пластины во всех рассмотренных моделях зона перехода течения от ламинарного режима к турбулентному задавалась на основе опытных исследований. К третьему подходу математического моделирования турбулентности можно отнести так называемый 2-жидкостный подход, предложенный Сполдингом [22, 23]. С его помощью исследовались: неустойчивость Релея–Тейлора [24]; процесс горения [25]; турбулентные стратифицированные течения [26]; ограниченное и свободное турбулентные сдвиговые течения [27] и другое. Дальнейшее развитие 2-жидкостный подход получил в работах [28, 29], где представлена его способность с большой точностью описывать турбулентные процессы переноса импульса и тепла в анизотропных турбулентных течениях. Целью настоящей работы является демонстрация возможности 2-жидкостного подхода к учету естественной турбулентной конвекции воздуха около нагретой вертикальной пластины. Несмотря на свою относительную простоту, выбранная задача содержит в себе все главные элементы, характерные для течений вблизи стенки, обусловленных силами плавучести. Наряду с надежными экспериментальными данными [30,

31] для рассматриваемого течения также представлены результаты расчетов по моделям SA и RSM из [21].

## 2. Система уравнений турбулентной естественной конвекции около нагретой вертикальной бесконечной пластины в 2-жидкостном подходе

В работе [28] показано, что турбулентный поток можно представить в виде гетерогенной смеси двух жидкостей не только с разными скоростями, но и с разными температурами:

$$V_{1i} = V_i + \vartheta_i, \quad V_{2i} = V_i - \vartheta_i, \quad T_1 = T + t, \quad T_2 = T - t. \quad (1)$$

В выражениях (1) обозначено:  $V_i$ ,  $T$  — осредненные скорость и температура турбулентного потока;  $\vartheta_i$ ,  $t$  — относительные скорость и температура гетерогенной смеси. Вывод уравнений турбулентной термодинамики подробно приведен в упомянутой работе. Исходя из этих уравнений, приведем систему уравнений для конвективного течения воздуха со скоростью  $V_0$  около нагретой до температуры  $T_w$  вертикальной пластины длиной  $L$  (Рис. 1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} &= 0, \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial U}{\partial y} - u\vartheta \right) + g \frac{T - T_0}{T_0}, \\ U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} &= -(1 - C_s)\vartheta \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\rho \partial y} \left( \rho \nu_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - K_f u + g \frac{t}{T_0}, \\ U \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + V \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= -C_s u \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\rho \partial y} \left( 2\rho \nu_{yy} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) - K_f \vartheta - \vartheta^2 \frac{t}{T_0^2} \frac{\partial T}{\partial y}, \\ U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial}{\rho \partial y} \left( \rho k \frac{\partial T}{\partial y} - \rho t \vartheta \right), \\ U \frac{\partial t}{\partial x} + V \frac{\partial t}{\partial y} &= -\frac{\partial T}{\partial y} \vartheta + \frac{\partial}{\rho \partial y} \rho k_y \frac{\partial t}{\partial y} - K_t t, \\ \nu_{xy} &= 3\nu + 2 \left| \frac{u\vartheta}{\partial U / \partial y} \right|, \quad \nu_{yy} = 3\nu + 2 \left| \frac{\vartheta\vartheta}{\partial U / \partial y} \right|, \quad k_y = 3k + 2 \left| \frac{t\vartheta}{\partial T / \partial y} \right|, \\ \rho T &= \rho_0 T_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь:  $x$  — координата, направленная вдоль вертикальной пластины;  $y$  — координата, перпендикулярная к пластине;  $U, V$  — продольная и поперечная скорости;  $u, \vartheta$  — продольная и поперечная относительные скорости;  $T$  — температура воздуха;  $T_0$  — температура воздуха вдали от пластины;  $\rho$  — плотность воздуха;  $\rho_0$  — плотность среды вдали от пластины;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $k$  — коэффициент температуропроводности воздуха;  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yy}$  — молярные вязкости;  $k_y$  — молярный коэффициент температуропроводности;  $g$  — ускорение

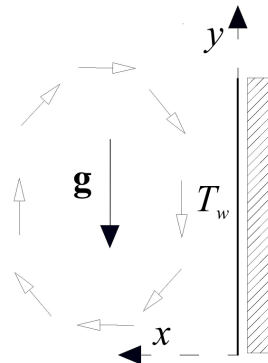


Рис. 1. Схема к задаче

свободного падения;  $C_s$  — поправочный коэффициент;  $K_f$  и  $K_t$  — коэффициенты трения и теплообмена;  $t$  — нефлуктуирующая температура. Давление везде имеет постоянное значение. Ввиду малости пренебрегаем продольными производными в диффузионных членах правых частей уравнений (2). Как видно, в четвертом уравнении в правую часть введена дополнительная термическая сила

$$f_T = -\rho \vartheta_T^2 \frac{t}{T_0^2} \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (3)$$

В (3) параметр  $\vartheta_T$  имеет размерность скорости, и путем численного исследования выявлено, что он равен  $\vartheta_T = 2.05 \text{ м/с}$ . Во многих турбулентных течениях характерная скорость  $V_0$  такова, что  $\vartheta_T/V_0 \ll 1$ . Поэтому в задачах с вынужденной конвекцией сила  $f_T$  может быть существенно меньше, чем другие силы, следовательно, эту силу можно не учитывать. Однако в естественных конвекциях скорость потока невелика и в этих случаях пренебрегать термической силой нельзя. Ниже будет показано, что в естественном конвективном течении около нагретой вертикальной пластины переход ламинарного потока в турбулентный происходит благодаря именно этой силе, потому что в переходной зоне скорость потока мала.

Систему уравнений (2) приведем к безразмерному виду. Для этого все скорости отнесем к величине с размерностью скорости  $\sqrt{gL(T_w - T_0)}/T_0$ , все расстояния — к длине  $L = 1 \text{ м}$ , все температуры — к температуре окружающей среды  $T_0 = 289 \text{ К}$ , а плотность воздуха — к плотности окружающей среды  $\rho_0 = 1.23 \text{ кг/м}^3$ . Температура нагретой пластины составляет  $T_0 = 333 \text{ К}$ . Для численной реализации системы (2) удобно ввести переменные Мизеса  $\xi$  и  $\psi$  [32, 33]:

$$\xi = x, \quad \rho U = \frac{\psi \partial \psi}{\partial y}, \quad \rho V = -\frac{\psi \partial \psi}{\partial x}.$$

В новых переменных первое уравнение в (2) — уравнение неразрывности, удовлетворяется автоматически. Численное решение системы (2) проведем на основе неявной конечно-разностной схемы. В поперечном направлении воспользуемся центральными разностями. Для решения неявной схемы применим метод прогонки. Шаги интегрирования по переменным Мизеса возьмем равными  $\Delta \xi = 0.00002$  и  $\Delta \psi = 0.001$ , а число расчетных точек в поперечном направлении пусть составляет 1000. Заметим, что вычислительные эксперименты позволили сделать вывод о несущественном влиянии параметров сетки на результат. Для замыкания системы разрешающих уравнений (2) поставим на пластине условия прилипания, а вдали от нее все скорости приравняем нулю. На входе, то есть при  $\xi = 0$ , безразмерные относительные скорости зададим следующими:  $\bar{u} = 10^{-20}$ ,  $\bar{v} = 0$ . Для более точного расчета вязкости воздуха используем закон Сазерленда:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{2.5} \frac{T_0 + 110.4}{T + 110.4}. \quad (4)$$

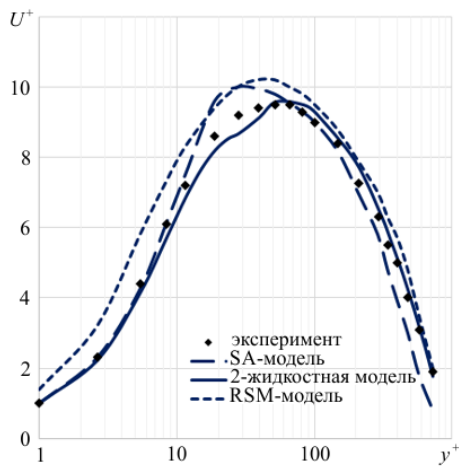
### 3. Обсуждение результатов

Ниже на рисунках 2–6 приведены численные результаты, рассчитанные по 2-жидкостной модели. Для сравнения на этих рисунках также содержатся результаты из работы [21], отвечающие моделям турбулентности SA и RSM, и экспериментальные данные из [30, 31]. На рисунке 2 представлен профиль продольной скорости в сечении  $\xi = 2.535$ . Здесь  $U^+ = U/u_*$ , где  $u_* = \sqrt{\nu(\partial U/\partial y)|_w}$  — динамическая скорость вблизи стенки и  $y^+ = \nu y/u_*$ . Из рисунка видно, что модель SA хорошо описывает профиль продольной скорости вблизи пластины, а модель RSM — вдали от нее. Результаты, более близкие к экспериментальным данным, получаются по 2-жидкостной модели.

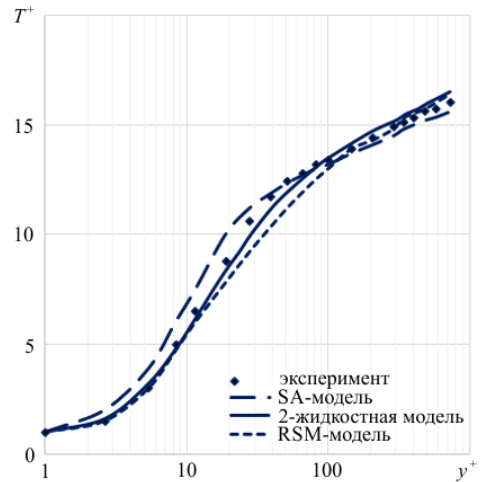
На рисунке 3 изображен профиль безразмерной избыточной температуры в сечении  $\xi = 2.535$ . Здесь  $T^+ = (T_w - T)/t_*$ , где  $t_* = [\nu/(u_* \text{Pr})](\partial T/\partial y)|_w$ . И в этом случае результаты, наиболее близкие к экспериментальным данным, рассчитываются по 2-жидкостной модели.

Важную информацию о турбулентных потоках дают турбулентные напряжения и поток температуры. Поэтому на рисунках 4 и 5 приведены профили турбулентных напряжений и потока температуры в том же сечении  $\xi = 2.535$ . Для этих параметров также наилучшее соответствие опытным замерам наблюдается при 2-жидкостной модели.

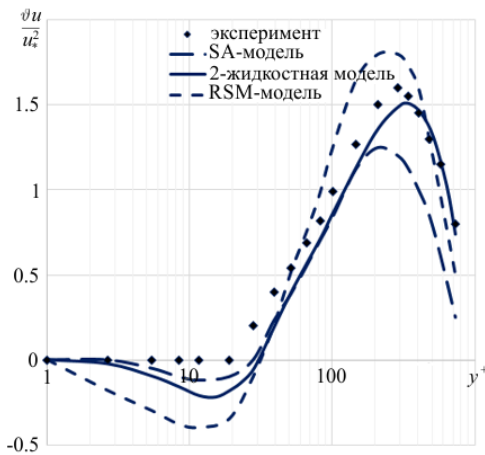
Выше сказано, что при применении моделей RANS для численного исследования рассматриваемой задачи необходимо задавать зону перехода от ламинарного режима к турбулентному на основании опытных данных. Поэтому, естественно, представляет интерес способность 2-жидкостной модели предсказывать эту зону перехода напрямую, без привлечения опытных данных. На рисунке 5 представлен результат 2-жидкостной модели для числа



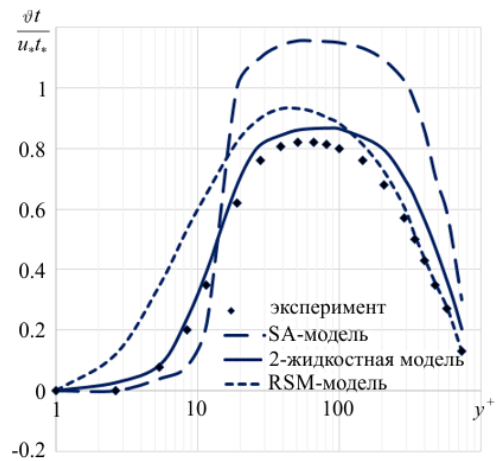
**Рис. 2.** Профиль безразмерной продольной скорости



**Рис. 3.** Профиль безразмерной избыточной температуры



**Рис. 4.** Профиль турбулентных напряжений



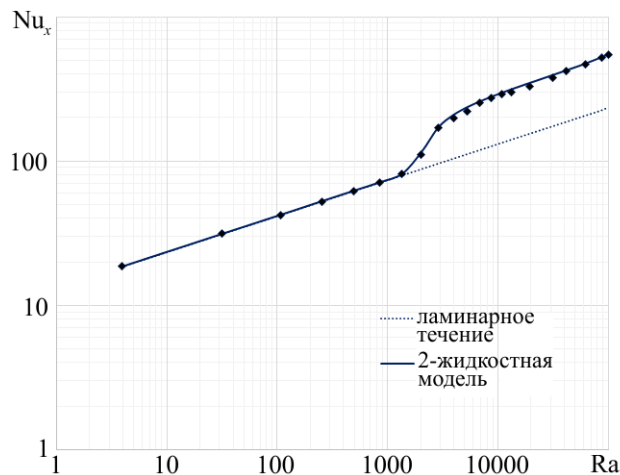
**Рис. 5.** Профиль турбулентного потока температуры

Нуссельта  $Nu_x$  в зависимости от числа Рейля  $Ra$ , которые связаны с параметрами модели соотношениями.

$$Nu_x = - \frac{x}{T_w - T_0} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w, \quad Ra = Pr Re_w^2 x^3,$$

где числа Прандтля и Рейнольдса взяты из работы [21]. Из рисунка видно, что, примерно начиная со значения  $Ra = 10^9$ , наступает турбулентный режим, и число Нуссельта начинает резко увеличиваться по сравнению со значением, характерным для ламинарного режима. Результаты 2-жидкостной модели хорошо описывают все режимы течения, включая и переходный от ламинарного к турбулентному.

Необходимо отметить, что при моделировании естественной конвекции большую роль играет турбулентная термическая сила. Расчеты по определению числа Нуссельта показали, что без учета данной силы не возможен переход от ламинарного к турбулентному режиму течения, то есть поток остается ламинарным и на больших расстояниях от пластины. Переход в турбулентный режим не наблюдается даже при сильном увеличении начальных возмущений, например при  $\bar{u} = 0.1, \bar{v} = 0$ . Данное обстоятельство свидетельствует о необходимости учета турбулентной термической силы в расчетах турбулентной естественной конвекции, несмотря на ее малость по сравнению с другими силами.



**Рис. 6.** Зависимость числа Нуссельта от числа Рейля согласно 2-жидкостной модели турбулентности

#### 4. Заключение

Полученные численные результаты показывают, что 2-жидкостная модель позволяет более точно описать естественную конвекцию, по сравнению с хорошо известными RANS-моделями. Доказано, что при моделировании естественной конвекции необходимо учитывать термическую силу, которая инициирует переход от ламинарного режима к турбулентному без учета дополнительных поправок. 2-жидкостная модель проста для численной реализации и имеет хорошую устойчивость, поэтому ее можно рекомендовать для исследования течений естественной конвекции.

#### Литература

1. *Lal S.A., Reji R.V.* Numerical Simulation of Natural Flow of Air Through a Room // International Journal of Green Energy. 2012. Vol. 9. P. 540–552. DOI: 10.1080/15435075.2011.622153.
2. *Чумаков Ю.С., Левченко А.М., Малах Х.* Формирование вихревой структуры в окрестности стыка кругового цилиндра с вертикальной нагретой поверхностью // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11, № 1. С. 73–85. DOI: 10.18721/JPM.11108.
3. *Roul M.K., Nayak R.C.* Experimental Investigation of Natural Convection Heat Transfer through Heated Vertical Tubes // International Journal of Engineering Research and Applications (IJERA). 2012. Vol. 2, no. 6. P. 1088–1096.
4. *Neilo R.V.* Experimental study of hydrodynamics and heat transfer in conditions of free convection // Technological audit and reserves of production. 2013. Vol. 6, 5(14). P. 169–171456.
5. *Ganesan P., Rani H.P.* Transient natural convection along vertical cylinder with Heat and Mass transfer // Heat and Mass Transfer. 1998. Vol. 33. P. 449–455. DOI: 10.1007/s002310050214.
6. *Мадера А.Г.* Математическое моделирование свободной конвекции вертикальной пластины в сопряженной постановке // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2015. № 4. С. 25–28. URL: <https://applied-research.ru/ru/article/view?id=6576>.
7. *Гореликов А.В., Ряховский А.В.* Численное моделирование естественной конвекции в сферическом слое // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 3. С. 77–84.
8. *Fetecau C., Vieru D., Azhar W.A.* Natural Convection Flow of Fractional Nanofluids Over an Isothermal Vertical Plate with Thermal Radiation // Applied Sciences. 2017. Vol. 7, no. 3. 247. DOI: 10.3390/app7030247.
9. *Martorell I., Herrero J., Grau F.X.* Natural convection from narrow horizontal plates at moderate Rayleigh numbers // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 46, no. 13. P. 2389–2402. DOI: 10.1016/S0017-9310(03)00010-3.
10. *Abdulateef J., Hassan A.* Correlations for Nusselt Number in Free Convection from an Isothermal Inclined Square Plate by a Numerical Simulation // American Journal of Mechanics and Applications. 2015. P. 8–18. DOI: 10.11648/j.ajma.20150302.11.
11. *Романов С.В., Зиганшин А.М., Посохин В.Н.* Численное исследование конвекции над объемным протяженным теплоисточником // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2007. Т. 8. С. 111–115. URL: <https://www.elibrary.ru/ibqmb>.

12. *Kholboev B.M., Navruzov D.P., Asrakulova D.S., Engalicheva N.R., Turemuratova A.A.* Comparison of the Results for Calculation of Vortex Currents After Sudden Expansion of the Pipe with Different Diameters // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2022. Vol. 27, no. 2. P. 115–123. DOI: 10.2478/ijame-2022-0023.
13. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K.* Jet noise computation based on enhanced DES formulations accelerating the RANS-to-LES transition in free shear layers // *International Journal of Aeroacoustics*. 2016. Vol. 15, no. 6/7. P. 595–613. DOI: 10.1177/1475472x16659388.
14. *Багаев Д.В., Сыралева М.Н.* Численное моделирование свободно-конвективного течения около вертикальной поверхности нагрева // *Труды Крыловского государственного научного центра*. 2018. Т. 2. С. 93–98. DOI: 10.24937/2542-2324-2018-2-384-93-98.
15. *Смирнов С.И., Смирнов Е.М.* Опыт применения полуэмпирических дифференциальных моделей турбулентности для расчета конвекции жидкого металла в подогреваемом снизу цилиндре // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2022. Т. 15, № 3. С. 43–60. DOI: 10.18721/JPM.15304.
16. *Ince N.Z., Launder B.E.* Computation of Turbulent Natural Convection in Closed Rectangular Cavities // *Proc. 2nd U.K. National Conf. on Heat Transfer*. Vol. 2. 1988. P. 1389–1400.
17. *Davidson L.* Second-order corrections of the  $k-\varepsilon$  model to account for non-isotropic effects due to buoyancy // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1990. Т. 33, № 12. С. 2599–2608. DOI: 10.1016/0017-9310(90)90195-z.
18. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows // *La Recherche Aerospatiale*. 1994. No. 1. P. 5–21.
19. *Menter F.* Zonal Two Equation  $k-\omega$  Turbulence Models For Aerodynamic Flows // *23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference*. American Institute of Aeronautics, Astronautics, 1993. 93-2906. DOI: 10.2514/6.1993-2906.
20. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries. Inc. La Canada, California, 1993. 460 p.
21. *Бассина И.А., Ломакин С.А., Никулин Д.А., Стрелец М.Х., Шур М.Л.* Оценка применимости современных моделей турбулентности для расчета естественных конвективных течений и теплообмена // *Теплофизика высоких температур*. 1998. Т. 36, № 2. С. 246–254.
22. *Spalding D.B.* A turbulence model for buoyant and combusting flows // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1987. Vol. 24, no. 1. P. 1–23. DOI: 10.1002/nme.1620240102.
23. *Spalding D.B.* A turbulence model for buoyant and combusting flows // *4th Int. Conf. on Numerical methods in Thermal Problems*. Swansea, 1984. Also, as Imperial College report CFD/86/4 (1984).
24. *Hoshoudy G.A.* Rayleigh-Taylor instability in quantum magnetized viscous plasma // *Plasma Physics Reports*. 2011. Vol. 37, no. 9. P. 775–784. DOI: 10.1134/s1063780x11080046.
25. *Markatos N.C., Kotsifaki C.A.* One-dimensional, two-fluid modelling of turbulent premixed flames // *Applied Mathematical Modelling*. 1994. Vol. 18. P. 646–657. DOI: 10.1016/0307-904x(94)90389-1.
26. *Shen Y.M., Ng C.-O., Chwang A.T.* A two-fluid model of turbulent two-phase flow for simulating turbulent stratified flows // *Ocean Engineering*. 2003. Vol. 30. P. 153–161. DOI: 10.1016/s0029-8018(02)00020-3.
27. *Старченко В., Нутерман Р.Б., Данилкин Е.А.* Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах. Томск: Томский государственный университет, 2015. 252 с.
28. *Malikov Z.* Mathematical model of turbulence based on the dynamics of two fluids // *Applied Mathematical Modelling*. 2020. Vol. 82. P. 409–436. DOI: 10.1016/j.apm.2020.01.047.
29. *Malikov Z.M.* Mathematical model of turbulent heat transfer based on the dynamics of two fluids // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 91. P. 409–436. DOI: 10.1016/j.apm.2020.09.029.
30. *Tsuji T., Nagano Y.* Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1988. P. 1723–1734.
31. *Tsuji T., Nagano Y.* Turbulence measurements in a natural convection boundary layer along a vertical flat plate // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1988. Vol. 31, no. 10. P. 2101–2111. DOI: 10.1016/0017-9310(88)90120-2.
32. *Von Mises R.* Bernerkungen zur Hydrodynamik // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1927. Vol. 7. P. 425.
33. *Malikov Z., Navruzov D., Djumayev X.* Models results Comparison of different approaches to turbulence for flow past a heated flat plate // *E3S Web of Conferences*. 2021. Vol. 264. 01008. DOI: 10.1051/e3sconf/202126401008.

### Сведения об авторах:

Маликов Зафар Маматкулович, д.т.н., проф., Университет АКФА, Узбекистан, г. Ташкент, Кукча Дарвоза, 1-тулик, д. 10; e-mail: malikov.z62@mail.ru; ORCID: 0000-0001-9038-5407

*Наврзов Дилшод Примулович (корр.)*, PhD, доц., Бухарский институт управления природными ресурсами при Национальном исследовательском университете ТИИИМСХ, 200100, Узбекистан, г. Бухара, ш. Газлийское, д. 32; e-mail: [navruzov.d@mail.ru](mailto:navruzov.d@mail.ru); ORCID: 0000-0002-9640-4434