

DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.4.42  
УДК 539.3

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

А.О. Ватульян<sup>1</sup>, С.А. Нестеров<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

<sup>2</sup>Южный математический институт – филиал ВНИИ РАН, Владикавказ, Российская Федерация

Исследована обратная задача термоупругости по идентификации переменных свойств функционально-градиентного прямоугольника. Неустойчивые колебания возбуждаются механическим и тепловым способами нагружения верхней стороны прямоугольника. Для решения прямой задачи в трансформантах Лапласа применяются метод разделения переменных и метод пристрелки для гармоник. Трансформанты обращаются на основе разложения оригинала по смещенным многочленам Лежандра. Проведена верификация предложенного метода решения прямой задачи посредством сравнения с конечно-элементным решением. Проанализировано влияние законов изменения переменных характеристик на граничные физические поля. В качестве дополнительной информации при механическом способе нагружения выступают компоненты перемещений, а при тепловом нагружении – температура, измеренные на верхней стороне прямоугольника на некотором временном интервале. В предположении, что дополнительная информация задана в виде функций, допускающих разложение в ряды Фурье, двумерная обратная задача сведена к одномерным задачам для различных гармоник. Решение полученных нелинейных обратных задач осуществлено на основе итерационного процесса, на каждом этапе которого для нахождения поправок термомеханических характеристик решаются интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода. Исследована возможность одновременной реконструкции нескольких характеристик. Представлены результаты вычислительных экспериментов поэтапной реконструкции термомеханических характеристик. Выявлено влияние параметра термомеханической связанности на результаты восстановления коэффициента температурных напряжений.

*Ключевые слова:* обратная задача, термоупругость, функционально-градиентный материал, прямоугольник, метод пристрелки, идентификация, итерационный процесс, интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

## ON THE FEATURES OF IDENTIFICATION OF VARIABLE THERMOMECHANICAL CHARACTERISTICS OF A FUNCTIONALLY GRADED RECTANGLE

A.O. Vatulyan<sup>1</sup> and S.A. Nesterov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

<sup>2</sup>South Mathematical Institute – branch of VSC RAS, Vladikavkaz, Russian Federation

The inverse thermoelastic problem of identification of the variable properties of a functionally graded rectangle is studied. Unsteady vibrations are excited by applying mechanical and thermal loads to the upper side of the rectangle. To solve the direct problem in Laplace transforms, the method of separation of variables and the shooting method for harmonics are used. Transformants are inverted by expanding the origin in terms of shifted Legendre polynomials. The method proposed for solving the direct problem is verified by comparison with a finite element solution. The influence of the laws of change of variable characteristics on the boundary physical fields is analyzed. The displacement components give additional information on the mechanical loading, and the temperature measured on the upper side of the rectangle over a certain time interval – on the thermal loading. Assuming that the additional information admits expansion in Fourier series, the two-dimensional inverse problem is reduced to one-dimensional problems for various harmonics. The solution of the obtained nonlinear inverse problems is carried out on the basis of an iterative process, at each stage of which, in order to find corrections for thermomechanical characteristics, systems of Fredholm integral equations of the 1st kind are solved. The possibility of simultaneous reconstruction of several characteristics is investigated. The results of computational experiments on the phased reconstruction of thermomechanical characteristics are presented. The influence of the thermomechanical coupling parameter on the results of the thermal stress coefficient reconstruction was clarified.

*Key words:* inverse problem, thermoelasticity, functionally graded material, rectangle, shooting method, identification, iterative process, Fredholm integral equation of the 1st kind

### 1. Введение

В настоящее время для повышения термостойкости элементов конструкций, работающих в областях с высокотемпературным окружением, используются функционально-градиентные материалы (ФГМ) [1] — композиты, термомеханические характеристики которых являются непрерывными функциями пространственных координат. В ФГМ не возникает концентрации напряжений на поверхности раздела материалов, в отличие от слоистых материалов [2]. Отказ от гипотезы однородности материала позволяет правильно оценивать влияние функционально-градиентных свойств материала и более точно анализировать термонапряженное состояние конструкций. Аналитические решения задач термомеханики с учетом переменных физических свойств получены, насколько известно авторам, только для законов неоднородности степенного и экспоненциального вида [3]. Однако фактические законы изменения термомеханических характеристик ФГМ могут отличаться от проектируемых. Если законы неоднородности произвольны, то для решения задач термомеханики применяются численные методы, например, метод конечных элементов [4, 5], совместно вариационный принцип Лагранжа и метод Канторовича [6], метод сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода [7, 8], метод пристрелки [9–11].

Точность расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) функционально-градиентных термоупругих тел зависит от знания переменных законов неоднородности. Для этого требуется построение эффективных и устойчивых вычислительных схем неразрушающей идентификации неоднородных характеристик на основе аппарата коэффициентных обратных задач (КОЗ) термомеханики.

Обычно обратные задачи теплопроводности и теории упругости решаются путем сведения к экстремальной постановке и минимизации функционала невязки градиентными методами [12–15]. Однако при решении КОЗ теории упругости для двумерных областей [16–18] применяется альтернативный — итерационный — подход, на каждом этапе которого решается интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Для ряда материалов необходимо учитывать связанность полей [19]. В [20] подобная задача рассматривается для однородной изотропной пластинки в режиме установившихся колебаний. Благодаря специальным граничным условиям и геометрии, удается свести задачу к одномерной. Монография [22] посвящена уточнению термомеханических характеристик слабо неоднородных материалов на основе метода стационарных базовых процессов.

В [23] разработан подход к решению одномерных КОЗ термоупругости. Операторные уравнения получены с использованием слабой постановки прямой задачи и метода линеаризации. Проведены вычислительные эксперименты по идентификации переменных свойств термоупругих тел: стержня [7], слоя [24], трубы [25, 26], конечного цилиндра [11, 27]. Однако задачи о реконструкции термомеханических характеристик неоднородного прямоугольника в литературе не обнаружены.

В данной работе исследуется обратная задача термоупругости для прямоугольника, применяется итерационный подход, разработанный авторами и описанный в [11, 23]. Прямая задача решается совместно методом разделения переменных и методом пристрелки. Обратные задачи формулируются для гармоник и выводятся соответствующие операторные уравнения. В ходе вычислительных экспериментов выяснено влияние как параметра связанности задачи термоупругости, так и зашумления входной информации на результаты реконструкции переменных характеристик.

## 2. Постановка обратной задачи для неоднородного прямоугольника

В рамках плоской деформации ( $u_1 = u_1(x_1, x_3, t)$ ,  $u_2 = 0$ ,  $u_3 = u_3(x_1, x_3, t)$ ,  $\theta = \theta(x_1, x_3, t)$ , где  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  — компоненты вектора перемещений,  $\theta$  — температура) рассмотрим задачу о неустановившихся колебаниях термоупругого неоднородного прямоугольника  $S = [-L, L] \times [0, h]$ . Его боковые стороны  $x_1 = \pm L$  теплоизолированы и находятся в условиях скользящей заделки. Нижняя сторона  $x_3 = 0$  жестко закреплена и на ней поддерживается нулевая температура. На верхней стороне  $x_3 = h$  действует один из видов нагрузки:

- 1) тепловой поток  $-k(h) \frac{\partial \theta}{\partial x_3}(x_1, h, t) = q_0 R_2(x_1) \varphi(t)$ , механическая нагрузка отсутствует;
- 2) нормальные напряжения  $\sigma_{33}(x_1, h, t) = -p_{33} R_1(x_1) \phi(t)$ , касательное напряжение и тепловой поток нулевые;
- 3) касательное напряжение  $\sigma_{13}(x_1, h, t) = p_{13} R_3(x_1) \psi(t)$ , нормальная нагрузка и тепловой поток равны нулю. Термомеханические характеристики являются функциями координаты  $x_3$ .

Постановка задачи термоупругости для прямоугольника при действии на его верхней грани тепловой нагрузки имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$k(x_3) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( k(x_3) \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right) = c_\epsilon(x_3) \frac{\partial \theta}{\partial t} + T_0 \gamma(x_3) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial t} \right), \quad (2)$$

$$u_1(x_1, 0, t) = u_3(x_1, 0, t) = \theta(x_1, 0, t) = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{33}(x_1, h, t) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h, t) = 0, \quad -k(h) \frac{\partial \theta(x_1, h, t)}{\partial x_3} = q_0 R_2(x_1) \varphi(t), \quad (4)$$

$$u_1(\pm L, x_3, t) = \sigma_{31}(\pm L, x_3, t) = \partial \theta(\pm L, x_3, t) / \partial x_1 = 0, \quad (5)$$

$$u_1(x_1, x_3, 0) = u_3(x_1, x_3, 0) = \theta(x_1, x_3, 0) = \partial u_1(x_1, x_3, 0) / \partial t = \partial u_3(x_1, x_3, 0) / \partial t = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \gamma \theta$ ,  $\sigma_{33} = \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \gamma \theta$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$  — ненулевые компоненты тензора напряжений.

Если на верхней грани прямоугольника действует только нормальная механическая нагрузка, постановка задачи включает уравнения (1)–(3), (5), (6). Уравнения (4) в этом случае записываются как

$$\sigma_{33}(x_1, h, t) = -p_{33}R_1(x_1)\phi(t), \quad \sigma_{13}(x_1, h, t) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_3}(x_1, h, t) = 0. \quad (7)$$

Отметим, что материальные характеристики и функции, входящие в (1)–(7), на несколько порядков различаются между собой. Для удобства дальнейших построений обезразмерим уравнения (1)–(6), вводя формулы:  $y_1 = x_1/h$ ,  $y_3 = x_3/h$ ,  $U_1 = u_1/h$ ,  $U_3 = u_3/h$ ,  $\beta_0 = L/h$ ,  $\Omega_{11} = \sigma_{11}/\mu_0$ ,  $\Omega_{13} = \sigma_{13}/\mu_0$ ,  $\Omega_{33} = \sigma_{33}/\mu_0$ ,  $W = \gamma_0\theta/\mu_0$ ,  $t_1 = h^2c_0/k_0$ ,  $t_2 = h/v_2$ ,  $t_3 = h/v_3$ ,  $v_2 = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ ,  $v_3 = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ ,  $\tau_1 = t/t_1$ ,  $\tau_2 = t/t_2$ ,  $\tau_3 = t/t_3$ ,  $\delta_0 = \gamma_0^2T_0/(\mu_0c_0)$ ,  $\varepsilon_0 = t_1/t_2$ ,  $\beta_1 = q_0h\gamma_0/(k_0\mu_0)$ ,  $\beta_2 = p_{13}/\mu_0$ ,  $\beta_3 = p_{33}/\mu_0$ ,  $\bar{c} = c_\varepsilon/c_0$ ,  $\bar{k} = k/k_0$ ,  $\bar{\gamma} = \gamma/\gamma_0$ ,  $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_0$ ,  $\bar{\mu} = \mu/\mu_0$ ,  $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$ . Здесь  $c_0$ ,  $k_0$ ,  $\gamma_0$ ,  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$  — максимальные значения соответствующих термомеханических характеристик.

Постановка задачи (1)–(6) принимает следующий безразмерный вид:

$$\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_{13}}{\partial y_3} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau_1^2}, \quad \frac{\partial \Omega_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_{33}}{\partial y_3} = \varepsilon_0^2 \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau_1^2}, \quad (8)$$

$$\bar{k} \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \left( \bar{k} \frac{\partial W}{\partial y_3} \right) = \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau_1} + \delta_0 \bar{\gamma} \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1 \partial \tau_1} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial y_3 \partial \tau_1} \right), \quad (9)$$

$$U_1(y_1, 0, \tau_1) = U_3(y_1, 0, \tau_1) = W(y_1, 0, \tau_1) = 0, \quad (10)$$

$$\Omega_{13}(y_1, 1, \tau_1) = \Omega_{33}(y_1, 1, \tau_1) = 0, \quad Q(y_1, 1, \tau_1) = \beta_1 R_2(y_1)\phi(\tau_1), \quad (11)$$

$$U_1(\pm\beta_0, y_3, \tau_1) = \Omega_{31}(\pm\beta_0, y_3, \tau_1) = \frac{\partial W}{\partial y_1}(\pm\beta_0, y_3, \tau_1) = 0, \quad (12)$$

$$U_1(y_1, y_3, 0) = U_3(y_1, y_3, 0) = W(y_1, y_3, 0) = \frac{\partial U_1}{\partial \tau_1}(y_1, y_3, 0) = \frac{\partial U_3}{\partial \tau_1}(y_1, y_3, 0) = 0. \quad (13)$$

Здесь  $\Omega_{11} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\partial U_1}{\partial y_1} + \bar{\lambda} \frac{\partial U_3}{\partial y_3} - \bar{\gamma} W$ ,  $\Omega_{33} = \bar{\lambda} \frac{\partial U_1}{\partial y_1} + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\partial U_3}{\partial y_3} - \bar{\gamma} W$ ,  $\Omega_{13} = \Omega_{31} = \bar{\mu} \left( \frac{\partial U_1}{\partial y_3} + \frac{\partial U_3}{\partial y_1} \right)$ ,  $Q = -\bar{k} \frac{\partial W}{\partial y_3}$ .

Задача термоупругости при действии нормальной механической нагрузки в безразмерной форме выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \Omega_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_{13}}{\partial y_3} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau_2^2}, \quad \frac{\partial \Omega_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_{33}}{\partial y_3} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U_3}{\partial \tau_2^2}, \quad (14)$$

$$\bar{k} \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \left( \bar{k} \frac{\partial W}{\partial y_3} \right) = \bar{c} \frac{\partial W}{\partial \tau_2} + \delta_0 \bar{\gamma} \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1 \partial \tau_2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial y_3 \partial \tau_2} \right), \quad (15)$$

$$U_1(y_1, 0, \tau_2) = U_3(y_1, 0, \tau_2) = W(y_1, 0, \tau_2) = 0, \quad (16)$$

$$\Omega_{33}(y_1, 1, \tau_2) = -\beta_3 R_1(y_1)\phi(\tau_2), \quad \Omega_{13}(y_1, 1, \tau_2) = 0, \quad Q(y_1, 1, \tau_2) = 0, \quad (17)$$

$$U_1(\pm\beta_0, y_3, \tau_2) = \Omega_{31}(\pm\beta_0, y_3, \tau_2) = \frac{\partial W}{\partial y_1}(\pm\beta_0, y_3, \tau_2) = 0, \quad (18)$$

$$U_1(y_1, y_3, 0) = U_3(y_1, y_3, 0) = W(y_1, y_3, 0) = \frac{\partial U_1}{\partial \tau_2}(y_1, y_3, 0) = \frac{\partial U_3}{\partial \tau_2}(y_1, y_3, 0) = 0. \quad (19)$$

В присутствии на верхней грани прямоугольника только касательной нагрузки в постановке задачи (14)–(19) вместо (17) будут использоваться граничные условия вида:

$$\Omega_{33}(y_1, 1, \tau_2) = 0, \quad \Omega_{13}(y_1, 1, \tau_2) = \beta_2 R_3(y_1)\psi(\tau_2), \quad Q(y_1, 1, \tau_2) = 0. \quad (20)$$

В случае теплового нагружения обратная задача термоупругости состоит в нахождении теплофизических характеристик  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{k}$ ,  $\bar{c}$  из уравнений (8)–(13) при известных остальных характеристиках исходя из информации о температуре, измеренной на верхней грани прямоугольника:

$$W(y_1, 1, \tau_1) = \eta(y_1, \tau_1), \quad y_1 \in [-\beta_0, \beta_0], \quad \tau_1 \in [a_1, b_1]. \quad (21)$$

При механическом нагружении обратная задача термоупругости решается с целью нахождения

механических характеристик  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\rho}$  из (14)–(19) при известных остальных характеристиках на основе информации о горизонтальном и вертикальном перемещениях на верхней грани прямоугольника:

$$U_1(y_1, 1, \tau_2) = f_1(y_1, \tau_2), \quad y_1 \in [-\beta_0, \beta_0], \quad \tau_2 \in [a_2, b_2], \quad (22)$$

$$U_3(y_1, 1, \tau_3) = f_3(y_1, \tau_3), \quad y_1 \in [-\beta_0, \beta_0], \quad \tau_3 \in [a_3, b_3]. \quad (23)$$

### 3. Решение прямой задачи термоупругости для прямоугольника

При произвольных законах изменения термомеханических характеристик прямые задачи (8)–(13) и (14)–(19) могут быть решены численными методами, например, методом пристрелки. Для этого применим к уравнениям (8)–(12) преобразование Лапласа и учтем начальные условия (13). В результате получим:

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{\Omega}_{13}}{\partial y_3} = \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \tilde{U}_1, \quad \frac{\partial \tilde{\Omega}_{31}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{\Omega}_{33}}{\partial y_3} = \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \tilde{U}_3, \quad (24)$$

$$\bar{k} \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \left( \bar{k} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial y_3} \right) = p \bar{c} \tilde{W} + p \delta_0 \bar{\gamma} \left( \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{U}_3}{\partial y_3} \right), \quad (25)$$

$$\tilde{U}_1(y_1, 0, p) = \tilde{U}_3(y_1, 0, p) = \tilde{W}(y_1, 0, p) = 0, \quad (26)$$

$$\tilde{\Omega}_{33}(y_1, 1, p) = \tilde{\Omega}_{13}(y_1, 1, p) = 0, \quad \tilde{Q}(1, y_1, p) = \beta_1 R_2(y_1) \tilde{\varphi}(p), \quad (27)$$

$$\tilde{U}_1(\pm\beta_0, y_3, p) = \tilde{\Omega}_{31}(\pm\beta_0, y_3, p) = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial y_1}(\pm\beta_0, y_3, p) = 0. \quad (28)$$

Воспользуемся методом разделения переменных, полагая в задаче (24)–(28)

$$\tilde{U}_1(y_1, y_3, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{a}_{N_1}(y_3, p) \sin(v_{N_1} y_1), \quad \tilde{U}_3(y_1, y_3, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{b}_{N_1}(y_3, p) \cos(v_{N_1} y_1), \quad v_{N_1} = \frac{\pi N_1}{\beta_0}, \quad (29)$$

$$\tilde{W}(y_1, y_3, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{d}_{N_1}(y_3, p) \cos(v_{N_1} y_1), \quad \tilde{Q}(y_1, y_3, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{q}_{N_1}(y_3, p) \cos(v_{N_1} y_1).$$

Пусть входящие в выражения возможных нагрузок на верхнюю границу прямоугольника функции  $R_1(y_1)$  и  $R_2(y_1)$  являются четными, а  $R_3(y_1)$  — нечетной. Представим их в виде:

$$R_1(y_1) = \sum_{N_1=0}^{\infty} r_{N_1} \cos(v_{N_1} y_1), \quad R_2(y_1) = \sum_{N_1=0}^{\infty} g_{N_1} \cos(v_{N_1} y_1), \quad R_3(y_1) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \zeta_{N_1} \sin(v_{N_1} y_1), \quad (30)$$

где коэффициенты определяются согласно формулам:  $r_0 = \frac{1}{2\beta_0} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R_1(y_1) dy_1$ ,  $r_{N_1} = \frac{1}{\beta_0} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R_1(y_1) \cos(v_{N_1} y_1) dy_1$ ,

$g_0 = \frac{1}{2\beta_0} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R_2(y_1) dy_1$ ,  $g_{N_1} = \frac{1}{\beta_0} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R_2(y_1) \cos(v_{N_1} y_1) dy_1$ ,  $\zeta_0 = 0$ ,  $\zeta_{N_1} = \frac{1}{\beta_0} \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R_3(y_1) \sin(v_{N_1} y_1) dy_1$ . Подставив

в выражения для трансформант компонент тензора напряжений  $\tilde{\Omega}_{11} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial y_1} + \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{U}_3}{\partial y_3} - \bar{\gamma} \tilde{W}$ ,

$\tilde{\Omega}_{33} = \bar{\lambda} \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial y_1} + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\partial \tilde{U}_3}{\partial y_3} - \bar{\gamma} \tilde{W}$ ,  $\tilde{\Omega}_{13} = \tilde{\Omega}_{31} = \bar{\mu} \left( \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial y_3} + \frac{\partial \tilde{U}_3}{\partial y_1} \right)$  выражения для трансформант компонент

вектора перемещений и температуры — формулы (29), получим:

$$\tilde{\Omega}_{11}(y_1, y_3, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{Z}_{1N_1}(y_3, p) \cos(v_{N_1} y_1),$$

$$\tilde{\Omega}_{13}(y_1, y_3, p) = \tilde{\Omega}_{31}(y_1, y_3, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{Z}_{2N_1}(y_3, p) \sin(v_{N_1} y_1), \quad (31)$$

$$\tilde{\Omega}_{33}(y_1, y_3, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{Z}_{3N_1}(y_3, p) \cos(v_{N_1} y_1).$$

В выражениях (31)  $\tilde{Z}_{1N_1} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) v_{N_1} \tilde{a}_{N_1} + \bar{\lambda} \tilde{b}'_{N_1} - \bar{\gamma} \tilde{d}'_{N_1}$ ,  $\tilde{Z}_{2N_1} = \bar{\mu} (\tilde{a}'_{N_1} - v_{N_1} \tilde{b}_{N_1})$ ,  $\tilde{Z}_{3N_1} = \bar{\lambda} v_{N_1} \tilde{a}_{N_1} + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \tilde{b}'_{N_1} - \bar{\gamma} \tilde{d}'_{N_1}$ , а знак «штрих» обозначает производную по координате  $y_3$ . Подставив соотношения для трансформант

компонент тензора напряжений и температуры в (24), (25), умножив первое уравнение из (24) на  $\sin(v_{N_1} y_1)$ , а второе уравнение из (24) и (25) — на  $\cos(v_{N_1} y_1)$  и проинтегрировав новые выражения по  $y_1 \in [-\beta_0, \beta_0]$ , получим следующий набор выражений для гармоник:

– при  $N_1 = 0$

$$Z'_{30} = \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \tilde{b}_0, \quad \tilde{b}'_0 = \frac{1}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} (\tilde{Z}_{30} + \bar{\gamma} \tilde{d}'_0), \quad \tilde{d}'_0 = \frac{1}{k} \tilde{Q}_0, \quad \tilde{Q}'_0 = p \delta_0 \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \tilde{Z}_{30} + p \left( \bar{c} + \delta_0 \frac{\bar{\gamma}^2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) \tilde{d}_0, \quad (32)$$

$$\tilde{b}_0(0, p) = 0, \quad \tilde{d}_0(0, p) = 0, \quad \tilde{Z}_{30}(1, p) = 0, \quad \tilde{q}_0(1, p) = \beta_1 g_0 \tilde{\varphi}(p); \quad (33)$$

– при  $N_1 = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}'_{2N_1} &= v_{N_1}^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} - \bar{\lambda}^2) \tilde{a}_{N_1} + (\bar{\lambda} - 1) \bar{\gamma} v_{N_1} \tilde{d}_{N_1} + \bar{\lambda} v_{N_1} Z_{3N_1} + \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \tilde{a}_{N_1}, \quad \tilde{Z}'_{3N_1} = -v_{N_1} \tilde{Z}_{2N_1} + \varepsilon_0^2 p^2 \bar{\rho} \tilde{b}_{N_1}, \\ \tilde{a}'_{N_1} &= \frac{1}{\bar{\mu}} \tilde{Z}_{2N_1} + v_{N_1} \tilde{b}_{N_1}, \quad \tilde{b}'_{N_1} = \tilde{Z}_{3N_1} - \bar{\lambda} v_{N_1} \tilde{a}_{N_1} + \bar{\gamma} \tilde{d}_{N_1}, \quad \tilde{d}'_{N_1} = \frac{1}{k} \tilde{q}_{N_1}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}'_{N_1} &= (p(\bar{c} + \delta_0 \bar{\gamma}^2) + \bar{k} v_{N_1}^2) \tilde{d}_{N_1} + p \delta_0 \bar{\gamma} v_{N_1} (1 - \bar{\lambda}) \tilde{a}_{N_1} + p \delta_0 \bar{\gamma} \tilde{Z}_{3N_1}, \\ \tilde{a}_{N_1}(0, p) &= 0, \quad \tilde{b}_{N_1}(0, p) = 0, \quad \tilde{d}_{N_1}(0, p) = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\tilde{Z}_{2N_1}(1, p) = 0, \quad \tilde{Z}_{3N_1}(1, p) = 0, \quad \tilde{q}_{N_1}(1, p) = \beta_1 g_{N_1} \tilde{\varphi}(p). \quad (36)$$

Далее, для любого значения параметра преобразования Лапласа  $p$  методом Рунге–Кутты построим решения трех вспомогательных задач Коши, состоящих из канонической системы (34) и следующего набора условий при  $y_3 = 0$  (с учетом того, что  $\tilde{a}_{N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{b}_{N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{d}_{N_1}(0, p) = 0$ ):

для задачи I:  $\tilde{a}_{N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{b}_{N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{d}_{N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{Z}_{2N_1}(0, p) = 1$ ,  $\tilde{Z}_{3N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{q}_{N_1}(0, p) = 0$ ;

для задачи II:  $\tilde{a}_{N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{b}_{N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{d}_{N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{Z}_{2N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{Z}_{3N_1}(0, p) = 1$ ,  $\tilde{q}_{N_1}(0, p) = 0$ ;

для задачи III:  $\tilde{a}_{N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{b}_{N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{d}_{N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{Z}_{2N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{Z}_{3N_1}(0, p) = 0$ ,  $\tilde{q}_{N_1}(0, p) = 1$ .

В силу линейности задачи (34)–(36) выражения для трансформант  $\tilde{a}_{N_1}$ ,  $\tilde{b}_{N_1}$ ,  $\tilde{d}_{N_1}$ ,  $\tilde{Z}_{2N_1}$ ,  $\tilde{Z}_{3N_1}$ ,  $\tilde{q}_{N_1}$  составим в виде линейной комбинации решений вспомогательных задач Коши, например,  $\tilde{a}_{N_1}(y_3, p) = A_{N_1} \tilde{a}_{N_1}^I(y_3, p) + B_{N_1} \tilde{a}_{N_1}^{II}(y_3, p) + C_{N_1} \tilde{a}_{N_1}^{III}(y_3, p)$ . Неизвестные коэффициенты пристрелки  $A_{N_1}$ ,  $B_{N_1}$  и  $C_{N_1}$  определяются из решения системы трех уравнений, которая получается путем удовлетворения условий при  $y_3 = 1$ :  $\tilde{Z}_{2N_1}(1, p) = 0$ ,  $\tilde{Z}_{3N_1}(1, p) = 0$ ,  $\tilde{q}_{N_1}(1, p) = \beta_1 g_{N_1} \tilde{\varphi}(p)$ .

В случае действия на верхней грани только касательной нагрузки набор краевых задач для гармоник при  $N_1 = 1, 2, \dots$  выглядит так:

$$Z'_{2N_1} = (\bar{\mu} v_{N_1}^2 + p^2 \bar{\rho}) \tilde{a}_{N_1}, \quad \tilde{a}'_{N_1} = (1/\bar{\mu}) \tilde{Z}_{2N_1}, \quad (37)$$

$$\tilde{a}_{N_1}(0, p) = 0, \quad \tilde{Z}_{2N_1}(1, p) = \beta_2 \zeta_{N_1} \tilde{\psi}(p). \quad (38)$$

После нахождения решений в трансформантах в виде  $\tilde{F}(p)$  переход к оригиналам  $F(\tau)$  осуществим методом их разложения по смещенным многочленам Лежандра  $P_m^*$ . Согласно этому методу [11, 28], функция  $F(\tau)$  имеет следующее разложение:

$$F(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \chi_m P_m^*(e^{-\tau}). \quad (39)$$

При этом коэффициенты  $\chi_m$ , коэффициенты  $\zeta_i^{(m)}$  многочленов  $P_m^*$  и целочисленные значения изображения  $\tilde{F}(p)$  связываются согласно формуле:  $\chi_m = \sum_{i=0}^m \zeta_i^{(m)} \tilde{F}(i)$ .

В качестве примера ФГМ рассмотрим композиционный материал со свойствами никеля Ni при  $y_3 = 0$  и карбида титана TiC при  $y_3 = 1$  [6]. В работах [3, 6] отмечается, что для моделирования эффективных свойств ФГМ используются степенные законы, определяемые по «правилу смеси»:

$$\bar{a}(y_3) = \bar{a}_{Ni} + (\bar{a}_{TiC} - \bar{a}_{Ni})y_3^s, \quad s = 1, 2, \dots \tag{40}$$

Здесь  $s$  — показатель неоднородности. Тогда, согласно (40), для свойств композиции Ni–TiC придем к следующим законам неоднородности [6]:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(y_3) &= 0.56 + 0.35y_3^s, & \bar{\lambda}(y_3) &= 0.62 + 0.38y_3^s, & \bar{\gamma}(y_3) &= 1 - 0.14y_3^s, \\ \bar{\rho}(y_3) &= 1 - 0.44y_3^s, & \bar{k}(y_3) &= 1 - 0.75y_3^s. \end{aligned} \tag{41}$$

Выполнена верификация предложенного метода решения задачи путем сопоставления с конечно-элементным решением, полученным в пакете FlexPDE в декартовых координатах  $x, y$ . Рассмотрена расчетная область — прямоугольник со сторонами  $x \in [-1, 1], y \in [0, 1]$ . Термомеханические характеристики определяются по формулам (41) при параметре неоднородности  $s = 1$ . В расчетах принято:  $\delta_0 = 0.04, \beta_0 = 1, \varepsilon_0 = 10^{-6}, \beta_1 = \beta_3 = 1, R_1(y_1) = R_2(y_1) = 1 - (y_1/2)^2, \varphi(\tau_1) = H(\tau_1), \phi(\tau_3) = H(\tau_3)$ . Найдено, что при параметрах  $N_1 = 8, m = 100$  максимальное относительное отклонение значений температуры и перемещений, вычисленных предложенным методом, от значений, установленных с помощью пакета FlexPDE на временах  $\tau > 10^{-3}$ , не превышает 1%.

Проведено исследование связи граничных физических полей, информация о которых используется при решении обратной задачи, с термомеханическими характеристиками прямоугольника. Выяснено следующее:

– при тепловой нагрузке на температуру верхней стороны прямоугольника оказывают соразмерное влияние теплофизические характеристики ( $\bar{k}(y_3)$  и  $\bar{c}(y_3)$ ), а влияние коэффициента температурных напряжений  $\bar{\gamma}(y_3)$  пропорционально параметру термомеханической связанности  $\delta_0$ ;

– при касательной нагрузке на горизонтальное перемещение  $U_1$  оказывает влияние только модуль сдвига  $\bar{\mu}(y_3)$ ;

– при нормальной механической нагрузке вертикальное перемещение  $U_3$  меняется в зависимости от  $\bar{\lambda}(y_3), \bar{\mu}(y_3)$  и  $\bar{\rho}(y_3)$ ; при этом влияние  $\bar{\lambda}(y_3)$  сказывается существенно меньше других характеристик.

На рисунке 1 показано, как с различными степенными законами неоднородности (41) связаны в точке  $(y_1, y_3) = (0.1, 1)$  зависимости от времени температуры при тепловом нагружении и вертикального перемещения при нормальной механической нагрузке. В вычислениях принято:  $\beta_1 = \beta_3 = 1, R_1(y_1) = R_2(y_1) = 1 - (y_1/2)^2, \varphi(\tau_1) = H(\tau_1) - H(\tau_1 - 1), \phi(\tau_3) = H(\tau_3) - H(\tau_3 - 0.1), \beta_0 = 1, \delta_0 = 0.04, \varepsilon_0 = 10^{-6}, m = 100, N_1 = 12$ . При этом сплошной линией изображены графики физических полей при разных значениях показателя неоднородности  $s$  в (41). Из рисунка следует, что различные степенные законы изменения термомеханических характеристик по-разному влияют на поля температуры и перемещений, поэтому дополнительная информация, снимаемая на верхней грани прямоугольника, может быть полезной при решении обратных задач.

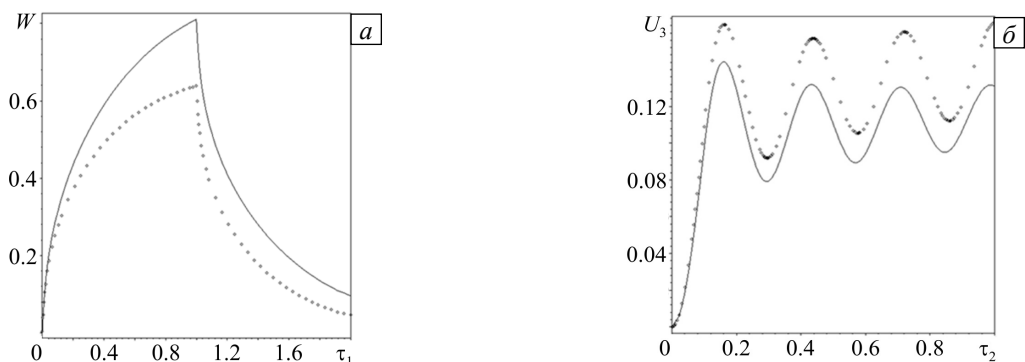


Рис. 1. Изменение во времени температуры (а) и вертикального перемещения (б) в точке (0,1,1) при различных законах неоднородности (41): физические поля при  $s = 1$  (сплошные линии) и  $s = 2$  (точки)

#### 4. Итерационная схема решения обратной задачи

Для прямоугольника КОЗ термоупругости является нелинейной. Ее решение построим путем реализации итерационного процесса, на каждом этапе которого будем решать линейную задачу.

Рассмотрим термоупругое тело, имеющее объем  $V$  и кусочно-гладкую границу  $S = S_u \cup S_\sigma = S_T \cup S_q$ , где на части  $S_q$  задан тепловой поток, на части  $S_T$  — температура, на  $S_u$  — перемещения, на  $S_\sigma$  — компоненты тензора напряжений.

В [23] на основе слабой постановки прямой задачи и последующей линеаризации для обратной задачи термоупругости получены операторные уравнения в трансформантах:

$$\int_V \delta k_{ij}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,i}^{(n-1)} \tilde{\theta}_{,j}^{(n-1)} dV + p \int_V \delta c_\varepsilon^{(n-1)} (\tilde{\theta}^{(n-1)})^2 dV + p T_0 \int_V \delta \gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = \int_{S_q} \tilde{q} (\tilde{f}_1 - \tilde{\theta}^{(n-1)}) dS, \quad (42)$$

$$\int_V \delta c_{ijkl}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{u}_{k,l}^{(n-1)} dV + p^2 \int_V \delta \rho^{(n-1)} (\tilde{u}_i^{(n-1)})^2 dV + \int_V \delta \gamma^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} dV = - \int_{S_\sigma} \tilde{p}_i (\tilde{f}_i - \tilde{u}_i^{(n-1)}) dS. \quad (43)$$

Для изотропного прямоугольника в соотношениях (42), (43) полагаем, что  $c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ ,  $k_{ij} = k \delta_{ij}$ ,  $\gamma_{ij} = \gamma \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. После обезразмеривания придем к следующим операторным уравнениям:

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \left( \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \left( \frac{\partial \tilde{W}^{(n-1)}}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{W}^{(n-1)}}{\partial y_3} \right)^2 \right) + p \delta \bar{c}^{(n-1)} (\tilde{W}^{(n-1)})^2 \right) dy_3 dy_1 + p \delta_0 \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{U}_3^{(n-1)}}{\partial y_3} \right) \tilde{W}^{(n-1)} dy_3 dy_1 =$$

$$= \beta_1 \tilde{\phi}(p) \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R_2(y_1) (\tilde{\eta}(y_1, p) - \tilde{W}^{(n-1)}(y_1, 1, p)) dy_1, \quad p \in [0, \infty), \quad (44)$$

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{U}_3^{(n-1)}}{\partial y_3} \right)^2 \right) dy_3 dy_1 + p^2 \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} (\tilde{U}_1^{(n-1)})^2 dy_3 dy_1 =$$

$$= -\beta_2 \tilde{\psi}(p) \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R_3(y_1) (\tilde{f}_1(y_1, p) - \tilde{U}_1^{(n-1)}(y_1, 1, p)) dy_1, \quad p \in [0, \infty), \quad (45)$$

$$\int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \left( \delta \bar{\lambda}^{(n-1)} \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{U}_3^{(n-1)}}{\partial y_3} \right)^2 + 2 \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tilde{U}_3^{(n-1)}}{\partial y_3} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_3} + \frac{\partial \tilde{U}_3^{(n-1)}}{\partial y_1} \right)^2 \right) \right) dy_3 dy_1 +$$

$$+ \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \int_0^1 \left( p^2 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left( (\tilde{U}_1^{(n-1)})^2 + (\tilde{U}_3^{(n-1)})^2 \right) - \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \left( \frac{\partial \tilde{U}_1^{(n-1)}}{\partial y_1} + \frac{\partial \tilde{U}_3^{(n-1)}}{\partial y_3} \right) \tilde{W}^{(n-1)} \right) dy_3 dy_1 =$$

$$= -\beta_3 \tilde{\phi}(p) \int_{-\beta_0}^{\beta_0} R_1(y_1) (\tilde{f}_3(y_1, p) - \tilde{U}_3^{(n-1)}(y_1, 1, p)) dy_1, \quad p \in [0, \infty). \quad (46)$$

Предположим, что функции  $\tilde{\eta}(y_1, p)$ ,  $\tilde{f}_1(y_1, p)$ ,  $\tilde{f}_3(y_1, p)$  допускают разложения в ряды:

$$\tilde{\eta}(y_1, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{\chi}_{N_1}(p) \cos(v_{N_1} y_1), \quad \tilde{f}_1(y_1, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{\Theta}_{N_1}(p) \sin(v_{N_1} y_1), \quad \tilde{f}_3(y_1, p) = \sum_{N_1=0}^{\infty} \tilde{w}_{N_1}(p) \cos(v_{N_1} y_1).$$

Тогда операторные уравнения для гармоник запишутся в виде:

– при  $N_1 = 0$

$$\int_0^1 \left( \delta \bar{s}^{(n-1)} (\tilde{b}_0^{(n-1)})^2 + p^2 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} (b_0^{(n-1)})^2 - \delta_0 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \tilde{a}_0^{(n-1)} \tilde{b}_0^{(n-1)} \right) dy_3 =$$

$$= -\beta_3 \tilde{\phi}(p) r_0 (\tilde{w}_0(p) - \tilde{b}_0^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (47)$$

$$\int_0^1 \left( \delta \bar{k}^{(n-1)} (\tilde{a}_0^{(n-1)})^2 + p \delta \bar{c}^{(n-1)} (\tilde{a}_0^{(n-1)})^2 + p \delta_0 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \tilde{a}_0^{(n-1)} \tilde{b}_0^{(n-1)} \right) dy_3 =$$

$$= \beta_1 \tilde{\phi}(p) g_0 (\tilde{\chi}_0(p) - \tilde{a}_0^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty); \quad (48)$$

– при  $N_1 = 1, 2, \dots$

$$\int_0^1 \left( \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( (\tilde{a}_{N_1}^{(n-1)})^2 + (v_{N_1} \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)})^2 \right) + p^2 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} (\tilde{a}_{N_1}^{(n-1)})^2 \right) dy_3 =$$

$$= -\beta_2 \tilde{\psi}(p) \zeta_{N_1} (\tilde{\Theta}_{N_1}(p) - \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)}(1, p)), \quad p \in [0, \infty), \quad (49)$$

$$\int_0^1 \left( \delta \bar{\lambda}^{(n-1)} \left( v_{N_1} \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)} + \tilde{b}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 + \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( \left( v_{N_1} \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 + \left( \tilde{b}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)} - v_{N_1} \tilde{b}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 \right) + p^2 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left( \left( \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 + \left( \tilde{b}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 \right) - \delta_0 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)} \left( v_{N_1} \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)} + \tilde{b}_{N_1}^{(n-1)} \right) \right) dy_3 = -\beta_3 \bar{\phi}(p) r_{N_1} \left( \tilde{w}_{N_1}(p) - \tilde{b}_{N_1}^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty), \quad (50)$$

$$\int_0^1 \left( \delta \bar{k}^{(n-1)} \left( \left( v_{N_1} \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 + \left( \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 \right) + p \delta \bar{c}^{(n-1)} \left( \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)} \right)^2 + p \delta_0 \delta \bar{\gamma}^{(n-1)} \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)} \left( v_{N_1} \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)} + \tilde{b}_{N_1}^{(n-1)} \right) \right) dy_3 = \beta_1 \bar{\phi}(p) g_{N_1} \left( \tilde{\chi}_{N_1}(p) - \tilde{a}_{N_1}^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty). \quad (51)$$

Здесь  $\bar{s} = \bar{\lambda} + 2\bar{\mu}$ .

Итерационный процесс реконструкции начинается с нахождения начального приближения в классе линейных функций, коэффициенты которых определяются исходя из априорной информации о значениях искомых характеристик на нижней и верхней гранях прямоугольника. Далее законы изменения термомеханических характеристик уточняются путем поиска поправок из решения соответствующих систем интегральных уравнений Фредгольма (ИУФ) 1-го рода для гармоник, при регуляризации которых применяется метод Тихонова А.Н. [29]. Выход из итерационного процесса осуществляется по предельному числу итераций, равному  $n = 20$ .

Для одновременной идентификация 6 термомеханических характеристик  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{k}$ ,  $\bar{c}$  необходимо решать систему 6 операторных уравнений, что представляет значительные математические трудности. Поэтому рассмотрим последовательное нахождение термомеханических характеристик прямоугольника.

Вначале получим систему операторных уравнений для определения поправок модуля сдвига  $\delta \bar{\mu}$  и плотности  $\delta \bar{\rho}$ , полагая в (49)  $N_1 = 1$  и  $N_1 = 2$ :

$$\int_0^1 \left( \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( \left( \tilde{a}_1^{(n-1)} \right)^2 + \left( v_1 \tilde{a}_1^{(n-1)} \right)^2 \right) + p^2 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left( \tilde{a}_1^{(n-1)} \right)^2 \right) dy_3 = -\beta_2 \tilde{\psi}(p) \zeta_1 \left( \tilde{\vartheta}_1(p) - \tilde{a}_1^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty), \quad (52)$$

$$\int_0^1 \left( \delta \bar{\mu}^{(n-1)} \left( \left( \tilde{a}_2^{(n-1)} \right)^2 + \left( v_2 \tilde{a}_2^{(n-1)} \right)^2 \right) + p^2 \delta \bar{\rho}^{(n-1)} \left( \tilde{a}_2^{(n-1)} \right)^2 \right) dy_3 = -\beta_2 \tilde{\psi}(p) \zeta_2 \left( \tilde{\vartheta}_2(p) - \tilde{a}_2^{(n-1)}(1, p) \right), \quad p \in [0, \infty). \quad (53)$$

Операторные уравнения на конечном временном отрезке (в оригиналах) найдем путем обращения операторных уравнений в трансформантах на основе теорем операционного исчисления. Вид ядер операторных уравнений в оригиналах зависит от закона изменения нестационарной нагрузки. Переходя в (52), (53) от трансформант к оригиналам, при нестационарной нагрузке  $\psi(\tau_2) = H(\tau_2)$  получим следующую систему операторных уравнений:

$$\int_0^1 \left( \delta \bar{\mu}^{(n-1)} R_{11}(y_3, \tau_2) + \delta \bar{\rho} R_{12}(y_3, \tau_2) \right) dy_3 = -\left( \vartheta_1(\tau_2) - a_1^{(n-1)}(1, \tau_2) \right), \quad \tau_2 \in [a_2, b_2], \quad (54)$$

$$\int_0^1 \left( \delta \bar{\mu}^{(n-1)} R_{21}(y_3, \tau_2) + \delta \bar{\rho} R_{22}(y_3, \tau_2) \right) dy_3 = -\left( \vartheta_2(\tau_2) - a_2^{(n-1)}(1, \tau_2) \right), \quad \tau_2 \in [a_2, b_2], \quad (55)$$

где

$$R_{11}(y_3, \tau_2) = \frac{1}{\beta_2 \zeta_1} \int_0^{\tau_2} \left( \frac{\partial^2 a_1^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial y_3 \partial \tau} \frac{\partial a_1^{(n-1)}(y_3, \tau_2 - \tau)}{\partial y_3} + v_1^2 \frac{\partial a_1^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial \tau} a_1^{(n-1)}(y_3, \tau_2 - \tau) \right) d\tau,$$

$$R_{12}(y_3, \tau_2) = \frac{1}{\beta_2 \zeta_1} \int_0^{\tau_2} \left( \frac{\partial^2 a_1^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial \tau^2} \frac{\partial a_1^{(n-1)}(y_3, \tau_2 - \tau)}{\partial \tau} \right) d\tau,$$

$$R_{22}(y_3, \tau_2) = \frac{1}{\beta_2 \zeta_2} \int_0^{\tau_2} \left( \frac{\partial^2 a_2^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial \tau^2} \frac{\partial a_2^{(n-1)}(y_3, \tau_2 - \tau)}{\partial \tau} \right) d\tau,$$

$$R_{21}(y_3, \tau_2) = \frac{1}{\beta_2 \zeta_2} \int_0^{\tau_2} \left( \frac{\partial^2 a_2^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial y_3 \partial \tau} \frac{\partial a_2^{(n-1)}(y_3, \tau_2 - \tau)}{\partial y_3} + v_1^2 \frac{\partial a_2^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial \tau} a_2^{(n-1)}(y_3, \tau_2 - \tau) \right) d\tau.$$

Расчеты показали, что на всех итерациях величина поправки плотности  $\delta \bar{\rho}^{(n-1)}$  стремится к нулю, так как значение норм ядер при поправке модуля сдвига  $\delta \bar{\mu}$  значительно больше, чем при  $\delta \bar{\rho}$ . В качестве выхода из создавшейся ситуации предложена поэтапная идентификация характеристик  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\rho}$ .



На первом этапе на всех итерациях функцию плотности полагаем равной выбранному начальному приближению, то есть  $\delta\bar{\rho}^{(n-1)} = 0$ , а поправки  $\delta\bar{\mu}^{(n-1)}$  находим из решения ИУФ 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta\bar{\mu}^{(n-1)} R_{11}(y_3, \tau_2) dy_3 = -(\mathfrak{G}_1(\tau_2) - a_1^{(n-1)}(1, \tau_2)), \quad \tau_2 \in [a_2, b_2]. \quad (56)$$

На втором этапе считаем, что поправки  $\delta\bar{\mu}^{(n-1)} = 0$ , и на каждой итерации определяем  $\delta\bar{\rho}^{(n-1)}$  путем решения ИУФ 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta\bar{\rho} R_{12}(y_3, \tau_2) dy_3 = -(\mathfrak{G}_1(\tau_2) - a_1^{(n-1)}(1, \tau_2)), \quad \tau_2 \in [a_2, b_2]. \quad (57)$$

При известных теперь модуле сдвига и плотности для отыскания поправок модуля Ламе  $\delta\bar{\lambda}$  воспользуемся соотношением:  $\bar{\lambda} = \bar{s} - 2\bar{\mu}$ , а для нахождения поправок  $\delta\bar{s}$ , положим в (47)  $\delta\bar{\rho} = \delta\bar{\gamma} = 0$ . Тогда получим ИУФ 1-го рода, которое после обращения при  $\phi(\tau_3) = H(\tau_3)$  примет вид:

$$\int_0^1 \delta\bar{s}^{(n-1)} M_1(y_3, \tau_3) dy_3 = -(\omega_0(\tau_3) - b_0^{(n-1)}(1, \tau_3)), \quad \tau_3 \in [a_3, b_3], \quad (58)$$

$$\text{где } M_1(y_3, \tau_3) = \frac{1}{\beta_3 r_0} \int_0^{\tau_3} \frac{\partial^2 b_0^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial y_3 \partial \tau} \frac{\partial b_0^{(n-1)}(y_3, \tau_2 - \tau)}{\partial y_3} d\tau.$$

Поправки теплофизических характеристик, например,  $\bar{k}(y_3)$  и  $\bar{c}(y_3)$  или  $\bar{k}(y_3)$  и  $\bar{\gamma}(y_3)$ , можно определить, если воспользоваться уравнениями (48) и (51). Выполняя действия, аналогичные примененным при поиске  $\bar{\mu}$  и  $\bar{\rho}$ , придем к системам соответствующих операторных уравнений в оригиналах. Однако вычисления показали, что значение норм ядер при поправке  $\delta\bar{k}$  значительно больше, чем при  $\delta\bar{c}$  и при  $\delta\bar{\gamma}$ . Для устранения создавшейся проблемы проведем поэтапную реконструкцию теплофизических характеристик. Так, для получения поправок  $\delta\bar{k}$  необходимо решать следующее ИУФ 1-го рода:

$$\int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} M_2(y_3, \tau_1) dy_3 = \chi_0(\tau_1) - d_0^{(n-1)}(1, \tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, b_1], \quad (59)$$

$$\text{где } M_2(y_3, \tau_2) = \frac{1}{\beta_1 g_0} \int_0^{\tau_2} \frac{\partial^2 d_0^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial y_3 \partial \tau} \frac{\partial d_0^{(n-1)}(y_3, \tau_2 - \tau)}{\partial y_3} d\tau. \text{ Для нахождения поправок } \delta\bar{\gamma} \text{ имеем:}$$

$$\int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} M_3(y_3, \tau_1) dy_3 = \chi_0(\tau_1) - d_0^{(n-1)}(1, \tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, b_1], \quad (60)$$

$$\text{где } M_3(y_3, \tau_1) = \frac{\delta_0}{\beta_1 g_0} \int_0^{\tau_1} \frac{\partial^2 b_0^{(n-1)}(y_3, \tau)}{\partial y_3 \partial \tau} \frac{\partial d_0^{(n-1)}(y_3, \tau_1 - \tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

## 5. Результаты реконструкции термомеханических характеристик

В вычислительных экспериментах принято:  $\beta_0 = 1$ ,  $\delta_0 = 0.04$ ,  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ ,  $R_1(y_1) = R_2(y_1) = 1 - (y_1/2)^2$ ,  $R_3(y_1) = y_1$ ,  $\phi(\tau_1) = H(\tau_1)$ ,  $\phi(\tau_3) = H(\tau_3)$ ,  $\psi(\tau_2) = H(\tau_2)$ ,  $m = 100$ ,  $N_1 = 12$ . Измерение дополнительной информации проводилось в 5 точках внутри временных отрезков  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$ ,  $[a_3, b_3]$ , выбранных на основе анализа влияния переменных термомеханических характеристик на температуру и компоненты вектора перемещений в точке  $(0.1, 1)$ . Результаты представлены на рисунках 2–5. Выяснено, что на восстановление  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{k}$ ,  $\bar{c}$  практически не сказывается влияние значения параметра  $\delta_0$ . Погрешность реконструкции монотонных функций  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{k}$  не превосходит 5%, а функции  $\bar{c}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\gamma}$  в окрестности  $y_3 = 0$  воссоздаются хуже, чем в других точках вследствие того, что ядра соответствующих интегральных уравнений обращаются в нуль при  $y_3 = 0$ .

Далее на рисунках изображены восстановленные механические характеристики прямоугольника и для сравнения показаны их точные зависимости:

– модуль сдвига  $\bar{\mu}(y_3) = 1.74 + 1.08y_3^2$  и плотность  $\bar{\rho}(y_3) = 1.4 + \cos(\pi y_3/2 - 3.2)$  при  $[a_2, b_2] = [0.2, 0.9]$  (см. Рис. 2). Погрешность восстановления  $\bar{\mu}$  не превышает 4%, а  $\bar{\rho}$  — 7%;

– модуль Ламе  $\bar{\lambda}(y_3) = 1 + 0.3 \ln(0.4 + 6y_3)$  и удельная теплоемкость  $\bar{c}(y_3) = 1/\sqrt{2 - 0.8y_3^2}$  при  $[a_1, b_1] = [0.02, 0.32]$ ,  $[a_3, b_3] = [0.14, 0.81]$  (см. Рис. 3);

– коэффициент теплопроводности при различном представлении:  $\bar{k}(y_3) = 1 - 0.75y_3^2$  и  $\bar{k}(y_3) = e^{-1.38y_3}$  при  $[a_1, b_1] = [0.02, 0.42]$  (см. Рис. 4). Погрешность реконструкции в том и другом случае не превысила 4%.

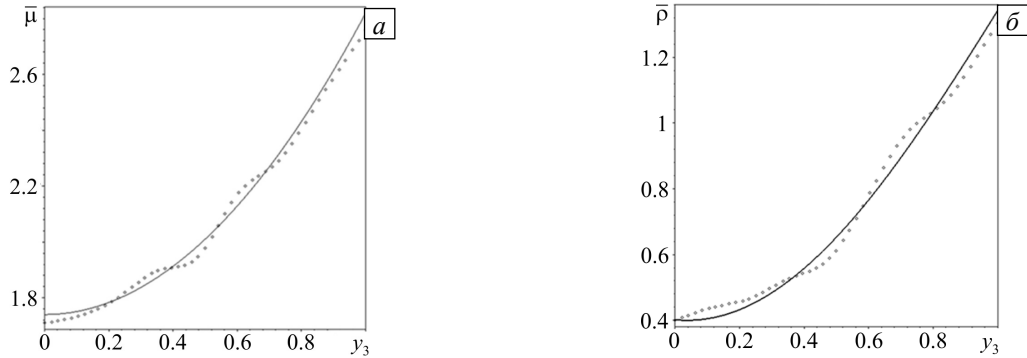


Рис. 2. Реконструкция модуля сдвига  $\bar{\mu}(y_3)$  (а) и плотности  $\bar{\rho}(y_3)$  (б); функции точные (сплошные линии) и восстановленные (точки)

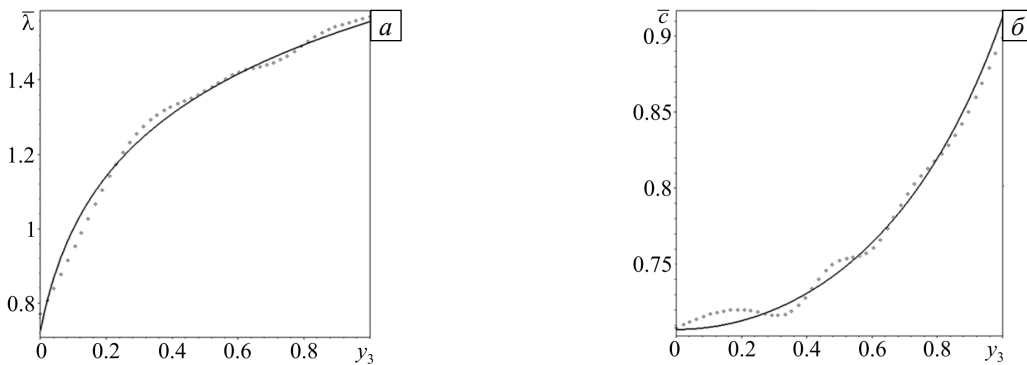


Рис. 3. Восстановление модуля Ламе (а) и удельной теплоемкости (б); функции точные (сплошные линии) и восстановленные (точки)

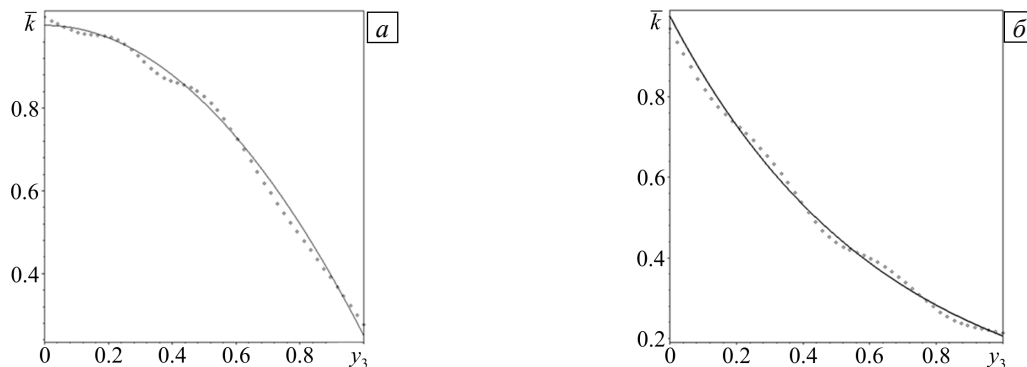


Рис. 4. Реконструкция коэффициента теплопроводности при разном представлении:  $\bar{k}(y_3) = 1 - 0.75y_3^2$  (а);  $\bar{k}(y_3) = e^{-1.38y_3}$  (б); функции точные (сплошные линии) и восстановленные (точки)

При реконструкции коэффициента температурных напряжений исследовано влияние параметра связанности  $\delta_0$  на результаты. На рисунке 5 показана восстановленная функция  $\bar{\gamma}(y_3) = 0.8 + \sin(1.8y_3)$  при  $[a_1, b_1] = [0.04, 0.56]$ ,  $\bar{\gamma}^0(y_3) = 2 - 1.64y_3$  и двух значениях параметра связанности  $\delta_0$ : 0.05 и 0.5. Для сравнения приведено начальное приближение. Из рисунка следует, что с увеличением параметра

термомеханической связанности погрешность реконструкции  $\bar{\gamma}(y_3)$  уменьшается. Так, при  $\delta_0 = 0.05$  результат практически не отличается от начального приближения, а максимальная погрешность восстановления составляет 26%. В тоже время при  $\delta_0 = 0.5$  погрешность реконструкции в точках, за исключением окрестности  $y_3 = 0$ , не превышает 11%.

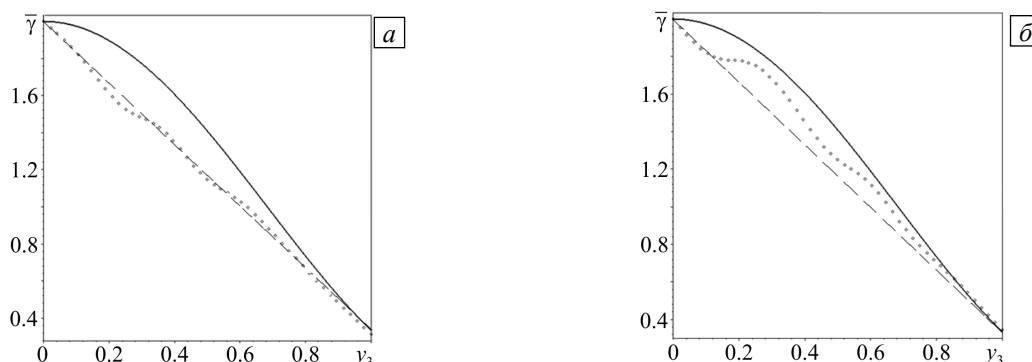


Рис. 5. Результаты реконструкции  $\bar{\gamma}(y_3) = 0.8 + \sin(1.8y_3)$  при:  $\delta_0 = 0.05$  (а);  $\delta_0 = 0.5$  (б); функции точные (сплошные линии) и восстановленные (точки); штриховые линии отвечают начальному приближению

## 6. Выводы

Представлен подход к решению коэффициентной обратной задачи термоупругости для прямоугольника. Решение прямой задачи основывается на совместном применении метода разделения переменных и метода пристрелки в трансформантах. Исследуется влияние законов неоднородности, определяемых для функционально-градиентных материалов по правилу смеси, на распределение температуры и перемещений. Двумерная обратная задача сводится к ряду одномерных задач для гармоник, которые решаются итерационно. На каждой итерации решаются интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода с гладкими ядрами. В ходе вычислительных экспериментов выяснено:

- законы изменения теплофизических характеристик и модулей Ламе восстанавливаются с небольшой погрешностью;
- погрешность реконструкция коэффициента температурного напряжения зависит от значения параметра термомеханической связанности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00265), <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, в Южном федеральном университете.

## Литература

1. Birman V., Byrd L.W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Appl. Mech. Rev. 2007. Vol. 60. P. 195-216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164>
2. Wetherhold R.C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // Compos. Sci. Tech. 2014. Vol. 56. P. 1099-1104. [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(96\)00075-9](https://doi.org/10.1016/0266-3538(96)00075-9)
3. Raddy J.N., Chin C.D. Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders and plates // J. Therm. Stresses. 1998. Vol. 21. P. 593-626. <https://doi.org/10.1080/01495739808956165>
4. Kulchitsky-Zhyhailo R., Bajkowski A. Analytical and numerical methods of solution of three-dimensional problem of elasticity for functionally graded coated half-space // Int. J. Mech. Sci. 2012. Vol. 54. P. 105-112. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.10.001>
5. Недин Р.Д. Моделирование и частотный анализ предварительно напряженных функционально-градиентных пластин с отверстиями // Вычисл. мех. сплош. сред. 2019. Т. 12, № 2. С. 192-201. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.17>
6. Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R. Regarding some thermoelastic models of “coating-substrate” system deformation // Continuum Mech. Thermodyn. 2020. Vol. 32. P. 1173-1186. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00824-9>
7. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // Int. J. Solid. Struct. 2014. Vol. 51. P. 767-773. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003>
8. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10, № 2. С. 117-126. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>
9. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Особенности распространения волн Лява в упругих функционально-градиентных покрытиях // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10, № 1. С. 39-52. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.1.4>
10. Ватульян А.О., Дударев В.В. К исследованию колебаний цилиндра с вязкоупругим покрытием // Вычисл. мех. сплош. сред. 2021. Т. 14, № 3. С. 312-321. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.3.26>
11. Ватульян А.О., Нестеров С.А. К определению термомеханических характеристик функционально-градиентного конечного цилиндра // ПММ. 2021. Т. 85, № 3. С. 396-408. <https://doi.org/10.31857/S0032823521030115>

12. Алифанов О.М., Будник С.А., Ненаркомов А.В., Нетелев А.В., Охалкин А. С., Чумаков В.А. Исследование теплофизических свойств градиентных материалов методом обратных задач // ИФЖ. 2022. Т. 95, № 4. С. 1031-1041. (English version <https://doi.org/10.1007/s10891-022-02560-5>)
13. Cao K., Lesnic D. Determination of space-dependent coefficients from temperature measurements using the conjugate gradient method // Numer. Meth. Part. Differ. Equat. 2018. Vol. 34. P. 1370-1400. <https://doi.org/10.1002/num.22262>
14. Geymonat G., Pagano S. Identification of mechanical properties by displacement field measurement: A variational approach // Meccanica. 2003. Vol. 38. P. 535-545. <https://doi.org/10.1023/A:1024766911435>
15. Avril S., Pierron F. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity // Int. J. Solid. Struct. 2007. Vol. 44. P. 4978-5002. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.018>
16. Ватулян А.О., Явруян О.В., Богачев И.В. Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акустический журнал. 2011. Т. 57, № 6. С. 723-730. (English version <https://doi.org/10.1134/S1063771011060182>)
17. Богачев И.В., Ватулян А.О., Явруян О.В. Идентификация свойств неоднородной электроупругой среды // ПММ. 2012. Т. 76, № 5. С. 860-866. (English version <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.016>)
18. Ватулян А.О., Углич П.С. Реконструкция неоднородных характеристик поперечно-неоднородного слоя при антиплоских колебаниях // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 3. С. 149-153. (English version <https://doi.org/10.1134/S0021894414030122>)
19. Sinitza A.V., Capsoni A. Design of novel inverse analysis methodology for exact estimation of elasticity parameters in thermoelastic stress model // Int. Comm. Heat Mass Tran. 2022. Vol. 135. 106096. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.106096>
20. Вестяк В.А., Земсков А.В., Эрихман Н.Н. Численно-аналитическое решение обратной коэффициентной задачи термоупругости для пластины // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т. 16, № 6. С. 244-249.
21. Lukasiewicz S.A., Babaei R., Qian R.E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // J. Therm. Stresses. 2003. Vol. 26. P. 13-23. <https://doi.org/10.1080/713855763>
22. Ломазов В.А. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел: Из-во ОрелГТУ, 2002. 168 с.
23. Ватулян А.О., Нестеров С.А. Коэффициентные обратные задачи термомеханики. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2022. 178 с.
24. Ватулян А.О., Нестеров С.А. Численная реализация итерационной схемы решения обратных задач термоупругости для неоднородных тел с покрытиями // Вычислительные технологии. 2017. Т. 22, № 5. С. 14-26.
25. Ватулян А.О., Нестеров С.А. К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы // ИФЖ. 2015. Т. 88, № 4. С. 951-959. (English version <https://doi.org/10.1007/s10891-015-1274-7>)
26. Nedin R.D., Nesterov S.A., Vatulyan A.O. Concerning identification of two thermomechanical characteristics of functionally graded pipe // Solid mechanics, theory of elasticity and creep / Ed. H. Altenbachet, S.M. Mkhitarayan, V. Hakobyan, A.V. Sahakyan. Springer Cham, 2023. P. 247-264. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9\\_18](https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_18)
27. Ватулян А.О., Нестеров С.А. О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, № 1. С. 35-47. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>
28. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 224 с.
29. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.

## References

1. Birman V., Byrd L.W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Appl. Mech. Rev.*, 2007, vol. 60, pp. 195-216. <https://doi.org/10.1115/1.2777164>
2. Wetherhold R.C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation. *Compos. Sci. Tech.*, 2014, vol. 56, pp. 1099-1104. [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(96\)00075-9](https://doi.org/10.1016/0266-3538(96)00075-9)
3. Raddy J.N., Chin C.D. Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders and plates. *J. Therm. Stresses*, 1998, vol. 21, pp. 593-626. <https://doi.org/10.1080/01495739808956165>
4. Kulchytsky-Zhyhailo R., Bajkowski A. Analytical and numerical methods of solution of three-dimensional problem of elasticity for functionally graded coated half-space. *Int. J. Mech. Sci.*, 2012, vol. 54, pp. 105-112. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.10.001>
5. Nedin R.D. Modeling and frequency analysis of prestressed functional gradient plates with holes. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 192-201. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.17>
6. Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R. Regarding some thermoelastic models of “coating-substrate” system deformation. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2020, vol. 32, pp. 1173-1186. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00824-9>
7. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *Int. J. Solid. Struct.*, 2014, vol. 51, pp. 767-773. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003>
8. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. The dynamic problem of thermoelectroelasticity for a functionally gradient layer. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 117-126. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>
9. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Features of the propagation of Love waves in elastic functional-gradient coatings. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 1, pp. 39-52. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.1.4>
10. Vatulyan A.O., Dudarev V.V. On the study of vibrations of a cylinder with a viscoelastic coating. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2021, vol. 14, no. 3, pp. 312-321. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.3.26>

11. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On determination of the thermomechanical characteristics of a functionally graded finite cylinder. *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, pp. 1429-1438. <https://doi.org/10.3103/S0025654421070256>
12. Alifanov O.M., Budnik S.A., Nenarokomov A.V., Netelev A.V., Okhapkin A.S., Chumakov V.A. Investigation of thermophysical properties of gradient materials by the method of inverse problems. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2022, vol. 95, pp. 1015-1025. <https://doi.org/10.1007/s10891-022-02560-5>
13. Cao K., Lesnic D. Determination of space-dependent coefficients from temperature measurements using the conjugate gradient method. *Numer. Meth. Part. Differ. Equat.*, 2018, vol. 34, pp. 1370-1400. <https://doi.org/10.1002/num.22262>
14. Geymonat G., Pagano S. Identification of mechanical properties by displacement field measurement: A variational approach. *Meccanica*, 2003, vol. 38, pp. 535-545. <https://doi.org/10.1023/A:1024766911435>
15. Avril S., Pierron F. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity. *Int. J. Solid. Struct.*, 2007, vol. 44, pp. 4978-5002. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.018>
16. Vatulyan A.O., Yavruyan O.V., Bogachev I.V. Identifying the elastic properties of an inhomogeneously thick layer. *Acoust. Phys.*, 2011, vol. 57, pp. 741-748. <https://doi.org/10.1134/S1063771011060182>
17. Bogachev I.V., Vatul'yan A.O., Yavruyan O.V. Identification of the properties of an inhomogeneous electroelastic medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, pp. 506-510. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.016>
18. Vatul'yan A.O., Uglich P.S. Reconstruction of inhomogeneous characteristics of a transverse inhomogeneous layer in antiplane vibrations. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, p. 499-505. <https://doi.org/10.1134/S0021894414030122>
19. Sinita A.V., Capsoni A. Design of novel inverse analysis methodology for exact estimation of elasticity parameters in thermoelastic stress model. *Int. Comm. Heat Mass Tran.*, 2022, vol. 135, 106096. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.106096>
20. Vestyak V.A., Zemskov A.V., Erikhman N.N. Chislenno-analiticheskoye resheniye obratnoy koeffitsiyentnoy zadachi termouprugosti dlya plastiny [Numerical-analytical solution of the inverse coefficient problem of thermoelasticity for a plate]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta – Aerospace MAI Journal*, 2009, vol. 16, no. 6, pp. 244-249.
21. Lukasievicz S.A., Babaei R., Qian R.E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects. *J. Therm. Stresses*, 2003, vol. 26, pp. 13-23. <https://doi.org/10.1080/713855763>
22. Lomazov V.A. *Zadachi diagnostiki neodnorodnykh termouprugikh sred* [Diagnostics problems for inhomogeneous thermoelastic media]. Orel, OrelGTU, 2002. 168 p.
23. Vatul'yan A.O., Nesterov S.A. *Koeffitsiyentnyye obratnyye zadachi termomekhaniki* [Coefficient inverse problems of thermomechanics]. Rostov-on-Don, Southern Federal University Publ., 2022. 178 p.
24. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Numerical realization of the iterative scheme for solving inverse thermoelasticity problems for inhomogeneous bodies with coatings. *Vychislitel'nyye tekhnologii – Computational technologies*, 2017, vol. 22, no. 5, p. 14-26.
25. Vatul'yan A.O., Nesterov S.A. On determination of inhomogeneous thermomechanical characteristics of a pipe. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2015, vol. 88, pp. 984-993. <https://doi.org/10.1007/s10891-015-1274-7>
26. Nedin R.D., Nesterov S.A., Vatulyan A.O. Concerning identification of two thermomechanical characteristics of functionally graded pipe. *Solid mechanics, theory of elasticity and creep*, ed. H. Altenbachet, S.M. Mkhitarian, V. Hakobyan, A.V. Sahakyan. Springer Cham, 2023. Pp. 247-264. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9\\_18](https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_18)
27. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On the identification problem of the thermomechanical characteristics of the finite functionally graded cylinder. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, no. 1, pp. 35-47. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>
28. Krylov V.I., Skoblya N.S. *Metody priblizhennogo preobrazovaniya Fur'ye i obrashcheniya preobrazovaniya Laplasya* [Approximate Fourier transform and Laplace transform inversion methods]. Moscow, Nauka, 1974. 224 p.
29. Tikhonov A.N., Goncharov A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 1990. 230 p.

Поступила в редакцию 12.07.2023; после доработки 14.09.2023; принята к опубликованию 14.09.2023

#### Сведения об авторах

Ватulyян Александр Ованесович, дфмн, проф., зав. каф., Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (ЮФУ), 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а; e-mail: aovatulyan@sfsedu.ru

Нестеров Сергей Анатольевич, кфмн, снс, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН (ВНИЦ РАН), 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, д. 53; e-mail: 1079@list.ru