

DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.4.39
УДК 532.517.3

ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПРАНДТЛЯ 2-ГО РОДА В ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕРАВНОВЕСНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ*

Н.В. Никитин

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

Проведено численное исследование турбулентного течения и теплообмена в плоском канале. Изучены особенности вторичных течений Прандтля 2-го рода, возникающих в окрестности продольных рёбер на стенках канала в условиях пространственной неоднородности потока. Проведены расчёты четырёх турбулентных течений: течения в однородном по длине гладком канале, в однородном оребрённом канале, а также течений в гладком и оребрённом каналах с изменяющейся по длине средней скоростью. Обнаружено, что наличие ребра в однородном канале значительно влияет на распределения характеристик турбулентного течения по сечению канала. Эти изменения обусловлены действием возникающего вторичного течения с максимальной скоростью, составляющей 5.2% от средней расходной скорости потока. При этом изменения в скоростных и тепловых характеристиках оказываются подобными. Как трение, так и теплообмен возрастают примерно на 10% благодаря увеличению площади смачиваемой поверхности. Неоднородность потока, которая обеспечивается организацией вдува и отсоса через верхнюю стенку канала, приводит к более заметной перестройке течения. На участках замедления потока жидкость движется в условиях неблагоприятного градиента давления, интенсивность турбулентных пульсаций в этих местах становится заметно выше. При наличии оребрения это приводит к существенному усилению вторичных течений. Как в гладком, так и в оребрённом каналах зафиксировано повышение коэффициента аналогии Рейнольдса до значения 1.07, что на 6% превышает показатель в однородном течении. В целом по результатам настоящей работы можно сделать вывод, что продольное оребрение едва ли способно существенно изменять теплогидравлические свойства плоской поверхности в турбулентном потоке, по крайней мере, без принятия специальных оптимизационных мер. Пространственная неоднородность потока, наоборот, в силу разного воздействия на распределения скорости и температуры имеет определённый потенциал для конструирования теплообменных устройств с более подходящими теплогидравлическими свойствами.

Ключевые слова: течение в канале, вдув и отсос, продольное ребро, уравнения Навье–Стокса, прямое численное моделирование

SECONDARY FLOWS OF PRANDTL'S 2-ND KIND IN SPATIALLY NONEQUILIBRIUM TURBULENT FLOW

N.V. Nikitin

Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russian Federation

In this work, a numerical study of turbulent flow and heat transfer in a plane channel was carried out. The features of secondary flows of Prandtl's 2nd kind, which arise in the vicinity of longitudinal ribs on the channel walls, are studied under conditions of spatial inhomogeneity of the flow. Simulations of four turbulent flows were carried out: flows in a smooth channel uniform in length, a uniform ribbed channel, as well as flows in a smooth and ribbed channel with an average velocity varying along the length. It is found that the presence of a rib in a homogeneous channel in the considered case significantly changes the distribution of turbulent flow characteristics over the channel section. These changes are due to the action of the emerging secondary flow with a maximum velocity of 5.2% of the average flow rate. In this case, changes in the velocity and thermal characteristics are similar. Both friction and heat transfer increase by about 10% due to the increased wetted surface area. The inhomogeneity of the flow, which is provided by the organization of blowing and suction through the upper wall of the channel, leads to more noticeable changes. In areas where the flow slows down, the fluid moves under conditions of an unfavorable pressure gradient. The intensity of turbulent pulsations in these places increases noticeably. In the presence of ribs, this leads to a significant increase in secondary flows. Both in the smooth and in the ribbed channel, an increase in the Reynolds analogy coefficient to a value of 1.07 was recorded, which is 6% higher than the uniform flow index. In general, based on the results of this work, we can conclude that the longitudinal ribbing is hardly capable of significantly changing the thermal-hydraulic properties of a flat surface in a turbulent flow, at least without taking special optimization measures. The spatial inhomogeneity of the flow, on the contrary, due to the different effects on the velocity and temperature profiles, has a certain potential for designing heat exchange devices with more suitable thermal-hydraulic properties.

Key words: channel flow, blow and suction, longitudinal rib, Navier–Stokes equations, direct numerical simulation

1. Введение

Одно из интересных и важных с практической точки зрения проявлений турбулентности — способность вызывать так называемые вторичные течения. Эти организованные движения жидкости в плоскости, перпендикулярной направлению основного потока, называются вторичными течениями Прандтля 2-го рода. Неоднородность поля течения в направлении размаха изменяет локальные свойства турбулентности потока, что порождает градиенты напряжений Рейнольдса, которые и приводят к возникновению вторичных течений. В настоящее время накоплен обширный научный материал о свойствах турбулентных течений при наличии вторичных течений [1]. Среди прочих, интересен обнаруженный недавно эффект опережающего роста конвективного теплообмена по сравнению с ростом трения на твёрдых стенках плоского канала при наличии продольных рёбер, которые создают вторичные течения [2]. Этот эффект имеет потенциал прикладного использования при создании новых эффективных теплообменных поверхностей.

Решение этой проблемы особенно актуально для турбулентных режимов течения теплоносителя, наиболее часто реализующихся в инженерных приложениях. В этой связи интересна возможность сочетания эффекта интенсификации теплообмена вторичными течениями с известными эффектами изменения теплообмена в динамически неравновесных турбулентных потоках: течениях в трубах с пульсирующим расходом, течениях с продольным градиентом давления (например, в сужающихся и расширяющихся каналах) [3].

Задачей настоящей работы является изучение особенностей развития вторичных течений и изменений теплогидравлических свойств оребрѐнной поверхности в изменяющемся в пространстве динамически неравновесном турбулентном потоке. В работе не ставится задача отыскания оптимальных компоновок, дающих максимальный эффект. Целью является выявление качественных закономерностей в условиях максимального упрощения модельной постановки, обеспечивающей, тем не менее, требуемые условия.

2. Постановка и метод решения задачи

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском длинном и широком канале высотой h : $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \{|x| < \infty, 0 < y < h, |z| < \infty\}$. Нестационарные поля скорости $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u, v, w)$, температуры $\theta(t, \mathbf{x})$ и кинематического давления $p(t, \mathbf{x})$ отыскиваются путѐм численного решения уравнений Навье–Стокса и энергии в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \theta = \alpha \Delta \theta + Q_0.$$

Здесь ν — кинематическая вязкость, α — коэффициент температуропроводности. Температура рассматривается как пассивная примесь, влиянием термических эффектов на поле скорости пренебрегается.

В продольном направлении x и боковом направлении z используются условия периодичности. Величины продольного L_x и бокового L_z периодов выбираются достаточно большими, для надёжного воспроизведения известных из литературы характеристик турбулентного течения в плоском канале. Средний градиент давления, обеспечивающий движение жидкости, определяется в каждый момент времени из условия сохранения постоянного расхода. В базовой постановке задачи на одной из стенок канала $y = 0$ ставятся условия прилипания. Противоположная стенка $y = h$ считается непроницаемой и свободной от касательных напряжений. Такая постановка отличается от традиционной постановки при расчѐте турбулентных течений в плоском канале, когда на обеих стенках задаются условия прилипания. Течение в рассматриваемой постановке можно интерпретировать как течение в канале удвоенной высоты: $0 < y < 2h$, в плоскости симметрии $y = h$ которого вводится искусственное условие симметрии течения. Это условие несколько ограничивает движение турбулентных структур и искажает течение при $y \sim h$, но, как показано в нескольких исследованиях (см., например, [4]), для течения в пристенной и средней области канала приводит к результатам, близким к традиционной постановке. Необходимый объѐм вычислений сокращается при этом вдвое. Поскольку в данной работе наибольшее внимание уделяется области течения, примыкающей к твёрдой стенке $y = 0$, то такое упрощение можно считать оправданным. Для образности изложения твёрдую стенку будем именовать нижней, а свободную — верхней. Эта терминология в данном случае не предполагает наличие силы тяжести и связанных с ней сил плавучести. Температура нижней стенки считается постоянной (для определённости она полагается равной нулю), а верхняя стенка — теплоизолированной ($\partial \theta / \partial y = 0$). В правую часть уравнения для температуры добавлен источник тепла $Q_0(t)$, который обеспечивает сохранение постоянного уровня средней по объѐму температуры T_b , заданной начальными условиями. В начальный момент времени распределения температуры и продольной компоненты скорости принимаются параболическими по форме: $u/u_b = \theta/T_b = 1.5(y/h)(2 - y/h)$, с добавлением некоторого трёхмерного бездивергентного возмущения скорости. Расчѐт ведѐтся до установления статистически стационарного режима. После этого расчѐт продолжается с параллельным вычислением интересующих средних характеристик, которые не зависят от конкретного вида начального возмущения при условии его трёхмерности и достаточной интенсивности. Расчѐтная сетка в базовой постановке равномерная в однородных направлениях x и z и неравномерная, со сгущением вблизи твёрдой стенки, в направлении y .

При моделировании течений в оребрѐнном канале на его нижней стенке размещается продольное ребро постоянной высоты h_r и нулевой толщины. На ребре, подобно твёрдой нижней стенке, обеспечивается выполнение условий прилипания и сохранения нулевой температуры. При этом сетка в направлении z берѐтся неравномерная, со сгущением вблизи ребра. Выполнение условий непротекания на ребре обеспечивается путѐм применения алгоритма погружѐнных границ [4], согласно которому в правые части уравнений Навье–Стокса добавляются искусственные силы, стремящиеся на каждом шаге численного

интегрирования остановить поперечное движение частиц жидкости. Условие непротекания выполняется в этом случае не точно, а с погрешностью $O(\Delta_t^2)$ (Δ_t — временной шаг), что ограничивает величину Δ_t . Как показывают выполненные вычисления, ограничения эти в большинстве случаев не являются чрезмерно обременительными.

При рассмотрении пространственно неоднородных течений в данной работе качественно моделируется течение в канале переменной высоты: $H(x) = h(1 - \gamma \cos(2\pi x)/L_x)$. Здесь γ — параметр, задающий степень неоднородности высоты канала. Поскольку в несжимаемой жидкости расход Q в любом поперечном сечении канала постоянен, то отвечающая этому сечению средняя скорость $U_b = Q/H$ равняется $U_b(x) = u_b h/H(x)$, где $u_b = Q/h$ — средняя скорость в прямом канале, которая считается заданной. Для упрощения вычислений расчётная область остаётся прямоугольной, а изменение средней скорости вдоль канала обеспечивается путём периодического по длине ддува/отсоса, то есть за счёт ненулевого значения нормальной скорости $V_b(x)$ на границе $y = h$. Для сохранения условия несжимаемости принимается, что $V_b(x) = -hdU_b/dx$. Следуя [5], принимается отсутствие касательных компонент завихрённости на поверхности $y = h$. С учётом вышесказанного граничные условия при $y = h$ приобретают следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v = V_b(x), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Для численного решения задачи применялся универсальный метод решения уравнений Навье–Стокса [6], использующий конечно-разностную дискретизацию по пространственным координатам и полуявную схему интегрирования по времени. В данной работе представляются результаты, полученные при следующих значениях параметров: число Рейнольдса $Re = u_b h/\nu = 2800$, число Прандтля $Pr = \nu/\alpha = 1$, длина расчётной области (продольный период) $L_x = 36h$, ширина расчётной области (поперечный период) $L_z = 3h$, высота ребра $h_r = 0.2h$, параметр неоднородности высоты канала $\gamma = 0.2$. Число узлов расчётной сетки составляло $512 \times 64 \times 128$ в направлениях x, y, z , соответственно.

3. Результаты расчётов

3.1. Течение с постоянной по длине канала средней скоростью

Покажем результаты, демонстрирующие точность и надёжность расчёта турбулентного течения в базовом канале, то есть в канале с гладкой стенкой и постоянным вдоль канала расходом. Результаты настоящей работы сравниваются с результатами [7], полученными при том же числе Рейнольдса. Подробные данные из [7] имеются в Интернете (см. [8]). Несмотря на то, что в настоящей работе используются искусственные условия симметрии при $y = h$, результаты двух расчётов близки. В частности, коэффициенты сопротивления $C_f = 2\tau_w/(\rho u_b^2)$ (τ_w — среднее трение на стенке, ρ — плотность жидкости), составляют 0.008049 и 0.008136, то есть различаются на 1.0%.

На рисунке 1 приведены профили средней скорости $U(y) = \langle u \rangle$ и профили среднеквадратичных пульсаций продольной скорости $u'(y) = (\langle u^2 \rangle - U^2)^{0.5}$ (угловые скобки означают осреднение по времени), полученные в [7] и в настоящей работе. В силу однородности течения в направлениях x и z средние характеристики зависят лишь от одной координаты — y . Здесь и далее все величины представляются в безразмерном виде. В качестве масштабов берутся высота канала h , средняя расходная скорость u_b и средняя по объёму температура T_b . Профили средней скорости в двух расчётах совпадают с графической точностью. Так же близки и профили пульсаций скорости. На рисунке также показаны профили средней температуры $T(y) = \langle \theta \rangle$ и профили среднеквадратичной интенсивности пульсаций температуры $T'(y) = (\langle \theta^2 \rangle - T^2)^{0.5}$. При выбранном числе Прандтля $Pr = 1$ и используемой постановке соответствующие температурные и скоростные характеристики близки, что облегчает изучение их изменения под влиянием тех или иных внешних факторов, рассматриваемых ниже. Для сопоставления интенсивности теплообмена с величиной пристенного трения удобно пользоваться безразмерным числом Стэнтона, которое по аналогии с коэффициентом сопротивления определим как $St_2 = 2q_w/(u_b T_b)$, где $q_w = \alpha(dT/dy)|_{y=0}$. Число St_2 вдвое

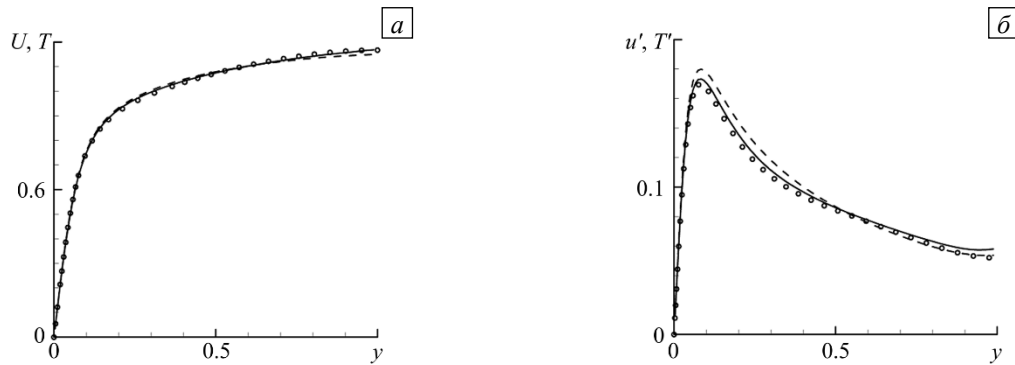


Рис. 1. Профили средней скорости U (сплошная линия), температуры T (штриховая линия), профиль скорости согласно [7] (символы) (а); профили среднеквадратичных пульсаций продольной компоненты скорости u' (сплошная линия), температуры T' (штриховая линия), профиль среднеквадратичных пульсаций продольной компоненты скорости из [7] (символы) (б)

превышает традиционно определяемое число Стэнтона St и лучше подходит для оценки степени выполнения аналогии Рейнольдса, которая в случае $Pr = 1$ приобретает вид: $St_2 \approx C_f$. В случае гладкого канала имеем $St_2 = 0.008156$, то есть коэффициент аналогии Рейнольдса $C_R = St_2/C_f$ имеет близкое к 1 значение 1.013.

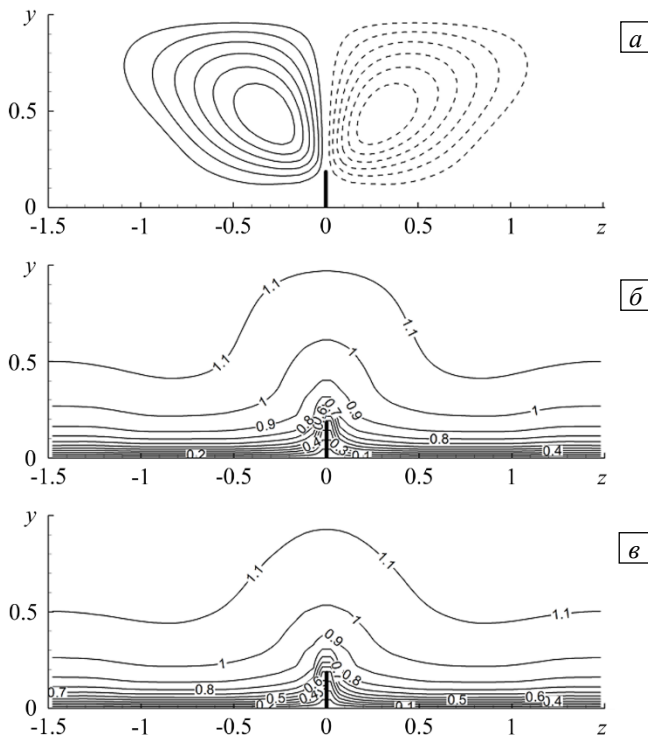


Рис. 2. Линии тока вторичного течения (а) (сплошные линии тока отвечают движению жидкости против часовой стрелки, штриховые – по часовой стрелке); распределения по поперечному сечению канала средних значений продольной компоненты скорости (б) и температуры (в)

аналогии Рейнольдса сохраняет своё значение на уровне 1.01. Таким образом, в рассмотренном случае наличие продольного ребра не приводит к заметному изменению теплогидравлических характеристик обтекаемой поверхности. Напомним, что никаких оптимизационных поисков ни по форме, ни по размеру ребра в этой работе не проводилось.

3.2. Течение в канале с переменной по длине средней скоростью

Течение с переменной по длине канала средней расходной скоростью моделируется путём организации вдува/отсоса жидкости через верхнюю стенку, как было сформулировано выше. Средние характеристики

Размещение продольного ребра на нижней стенке канала порождает в турбулентном потоке вторичное течение Прандтля 2-го рода [1]. В среднем течении (которое теперь зависит от двух координат: y и z), кроме продольной компоненты скорости, появляются и поперечные компоненты. Линии тока вторичного течения изображены на рисунке 2а. Над ребром скорость вторичного течения направлена вверх, а вдоль нижней стенки — по направлению к ребру. Скорость вторичного течения достигает в данном случае 5.2% от u_b . Движение в поперечной плоскости вызывает значительные искажения в распределениях скорости и температуры по сечению канала (Рис. 2б, в). Благодаря наличию вертикального движения жидкости над ребром изолинии скорости и температуры приобретают характерные выпуклости, направленные вверх. Как и в гладком канале, распределения средней скорости и температуры по сечению канала близки между собой. Так же близкими оказываются значения коэффициентов C_f и St_2 . Трение и поток тепла на стенке канала уменьшаются примерно на 1% (течение замедляется вблизи основания ребра), но увеличиваются (примерно на 11%) за счёт трения и теплообмена непосредственно на поверхности ребра. В целом коэффициент

турбулентного течения в такой постановке зависят от координат x и y . На рисунке 3 представлены поля средних по времени продольной компоненты скорости U , температуры T , давления P и среднеквадратичной интенсивности пульсаций продольной скорости u' . Из поля давления вычтена линейная по x составляющая, обеспечивающая прокачку жидкости с заданной постоянной средней скоростью u_b . Средняя по сечению скорость течения $U_b(x)$ меняется в пределах от 0.81 до 1.23, но сохраняет среднее по всей длине канала значение, равное 1.0. В первой половине канала скорость отсоса жидкости положительна, в результате $U_b(x)$ уменьшается, а во второй — скорость отсоса отрицательна (что соответствует вдуву), и $U_b(x)$ увеличивается. С изменением $U_b(x)$ происходят серьезные изменения в распределение $U(x, y)$ (см. Рис. 3а), по сравнению с однородным по x распределением при отсутствии вдува/отсоса. Воздействие вдува/отсоса сказывается и на распределении температуры (см. Рис. 3б), однако температура менее чувствительна к нему, чем продольная компонента скорости. Периодическое поведение $U_b(x)$ приводит к изменению давления. В соответствии с законом Бернулли уменьшение скорости сопровождается увеличением давления и наоборот, так что максимальное давление достигается на середине длины канала, где U_b имеет минимум. При всех x распределение среднего давления почти постоянно вдоль вертикальной координаты y .

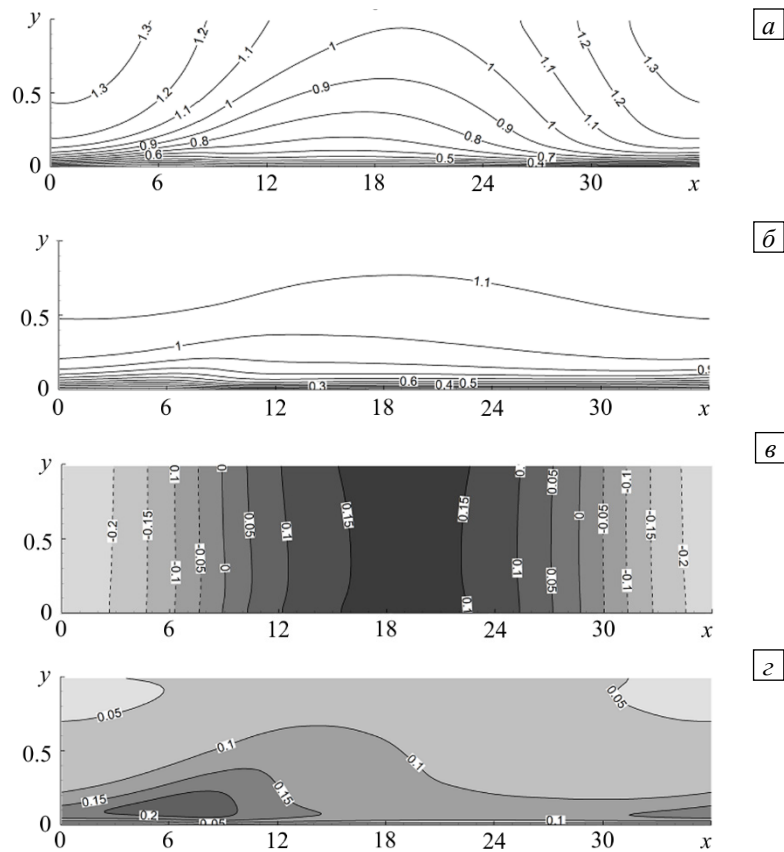


Рис. 3. Течение с переменной по длине канала средней скоростью; изолинии средних полей параметров в плоскости (x, y) : продольной компоненты скорости (а), температуры (б), давления (в), интенсивности пульсаций продольной скорости (з)

На первой половине длины канала жидкость движется в условиях неблагоприятного градиента давления (сила давления действует навстречу потоку). Такая ситуация служит причиной возникновения точек перегиба в профилях скорости, что отражается, в частности, в появлении повышенного уровня турбулентных пульсаций u' в этой области (см. Рис. 3з). Максимум $u' = 0.24$, достигающийся при $y = 0.12$ и $x = 7$, вдвое превышает минимальное значение u' на этой высоте. В этой же области наблюдаются и максимальные пульсации температуры (на Рис. 3 не показаны), хотя вариация их интенсивности по длине канала на этой высоте незначительна: от 0.17 до 0.19.

Изменения в характеристиках турбулентности, по сравнению с аналогичными характеристиками в однородном по длине канала течении, отражаются на теплогидравлических свойствах течения. Так, коэффициент сопротивления меняется противоположно: на участке увеличения средней скорости (на первой

половине канала) C_f уменьшается на 19%, а на второй половине канала увеличивается на 24%. Суммарно получается рост C_f на 2.6%. Число Стэнтона повышается на обоих участках практически в равной степени — на 9%. В результате коэффициент аналогии Рейнольдса достигает значения $C_R = 1.07$, что на 6% больше, чем в однородном канале.

Размещение продольного ребра на нижней стенке, так же, как и в однородном канале, вызывает появление вторичного течения, характеризующегося циркуляционным движением жидкости в плоскости, перпендикулярной направлению основного течения. Вторичные течения в турбулентном потоке возникают под действием напряжений Рейнольдса, которые, в свою очередь, пропорциональны интенсивности турбулентных пульсаций. Увеличение интенсивности пульсационного движения на участке замедления потока ожидаемо приводят к усилению вторичных течений, характерная скорость которых на этом участке вырастает на треть, по сравнению с однородным каналом. Оребрение канала практически не влияет на итоговое значение коэффициента аналогии Рейнольдса. Как и в однородном по x канале, незначительно (на уровне 1%) уменьшаются трение и теплообмен на стенке канала и более заметной (более 10% в каждом случае) становится добавка за счёт трения и теплообмена непосредственно на поверхности ребра. Таким образом, по сравнению с однородным каналом с гладкой стенкой, повышаются и коэффициент трения (на 14.2%), и число Стэнтона (на 20.3%). При этом коэффициент аналогии Рейнольдса равняется $C_R = 1.07$, что совпадает со значением в неоднородном канале с гладкой стенкой.

4. Заключение

Проведено численное исследование турбулентного течения в плоском канале. Побудительным мотивом данного исследования стал результат работы [2], где обнаружен эффект опережающего роста конвективного теплообмена, по сравнению с ростом трения, в присутствии вторичных течений, создаваемых продольным оребрением стенок канала. Цель работы заключалась в изучении особенностей вторичных течений Прандтля 2-го рода, возникающих в окрестности продольных рёбер, в условиях пространственной неоднородности потока. Проведены расчёты четырёх турбулентных течений: течения в однородном по длине гладком канале, однородном оребрённом канале, а также течений в гладком и оребрённом каналах с изменяющейся по длине средней скоростью. Температура рассматривается как пассивная примесь, влиянием термических эффектов на поле скорости пренебрегается. В работе не проводились оптимизационные исследования, направленные на варьирование геометрии, расположения и высоты рёбер. Целью было выявление качественных закономерностей с фиксированным по форме и размеру ребром. Обнаружено, что наличие ребра в однородном канале значительно меняет распределения характеристик турбулентного течения по сечению канала. Эти изменения обусловлены действием возникающего вторичного течения с максимальной скоростью в 5.2% от средней расходной скорости потока. При этом изменения в скоростных и тепловых характеристиках оказываются подобными. Как трение, так и теплообмен увеличиваются примерно на 10% благодаря расширению площади смачиваемой поверхности. Коэффициент аналогии Рейнольдса, характеризующий теплогидравлические свойства канала, сохраняет постоянное значение на уровне 1.01.

Неоднородность потока, которая обеспечивается организацией вдува и отсоса через верхнюю стенку канала, приводит к более заметным изменениям. На участках замедления потока жидкость движется в условиях неблагоприятного градиента давления (сила давления направлена навстречу потоку). В этих условиях профили скорости в пристенной области имеют точки перегиба. Интенсивность турбулентных пульсаций в этих местах заметно возрастает. При наличии оребрения это приводит к существенному усилению вторичных течений. Пристенное трение и теплообмен в условиях пространственной неоднородности ведут себя по-разному. На участке замедления потока трение падает, а на участке ускорения — возрастает. При этом интенсивность теплообмена на стенке практически не реагирует на изменение средней скорости, на обоих участках наблюдается повышение теплообмена. Наличие ребра не приводит к качественным изменениям: как трение, так и теплообмен увеличиваются одинаково. Как в гладком, так и в оребрённом канале зафиксировано повышение коэффициента аналогии Рейнольдса до значения 1.07, что на 6% выше показателя в однородном течении.

В целом по результатам настоящей работы можно сделать вывод, что продольное оребрение, вызывающее вторичное течение в поперечной к потоку плоскости, само по себе едва ли способно существенно изменять теплогидравлические свойства плоской поверхности в турбулентном потоке, по крайней мере, без принятия специальных оптимизационных мер. Пространственная неоднородность потока, наоборот, в силу разного воздействия на распределения скорости и температуры имеет определённый потенциал для конструирования теплообменных устройств с более подходящими теплогидравлическими свойствами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 22-21-00184, с использованием вычислительных ресурсов ОВК НИЦ «Курчатовский институт», <http://computing.nrcki.ru/>.

Литература

1. Никитин Н.В., Попеленская Н.В., Stroh A. Вторичные течения Прандтля 2-го рода. Проблемы описания, предсказания, моделирования // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 4. С. 73-99. <https://doi.org/10.31857/S0568528121040095>
2. Stroh A., Schafer K., Forooghi P., Frohnapfel B. Secondary flow and heat transfer in turbulent flow over streamwise ridges // Int. J. Heat Fluid Flow. 2020. Vol. 81. 108518. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2019.108518>
3. Лушчик В.Г., Макарова М.С., Решмин А.И. Ламинаризация потока при течении с теплообменом в плоском канале с конфузуром // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 1. С. 68-77. <https://doi.org/10.1134/S0568528119010092>
4. Водопьянов И.С., Никитин Н.В., Чернышенко С.И. Снижение турбулентного сопротивления боковыми колебаниями оребренной поверхности // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 4. С. 46-56. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462813040054>)
5. Coleman G.N., Rumsey C.L., Spalart P.R. Numerical study of turbulent separation bubbles with varying pressure gradient and Reynolds number // J. Fluid Mech. 2018. Vol. 847. P. 28-70. <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.257>
6. Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates // J. Comput. Phys. 2006. Vol. 217. P. 759-781. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.01.036>
7. Moser R.D., Kim J., Mansour N.N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$ // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11. P. 943-945. <https://doi.org/10.1063/1.869966>
8. https://turbulence.oden.utexas.edu/МКМ_1999.html (дата обращения: 10.12.2023)

References

1. Nikitin N.V., Popelenskaya N.V., Stroh A. Prandtl's secondary flows of the second kind. Problems of description, prediction, and simulation. *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, pp. 513-538. <https://doi.org/10.1134/S0015462821040091>
2. Stroh A., Schafer K., Forooghi P., Frohnapfel B. Secondary flow and heat transfer in turbulent flow over streamwise ridges. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 2020, vol. 81, 108518. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2019.108518>
3. Lushchik V.G., Makarova M.S., Reshmin A.I. Laminarization of flow with heat transfer in a plane channel with a confuser. *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, pp. 67-76. <https://doi.org/10.1134/S0015462819010099>
4. Vodopyanov I.S., Nikitin N.V., Chernyshenko S.I. Turbulent drag reduction by spanwise oscillations of a ribbed surface. *Fluid Dyn.*, 2013, vol. 48, pp. 461-470. <https://doi.org/10.1134/S0015462813040054>
5. Coleman G.N., Rumsey C.L., Spalart P.R. Numerical study of turbulent separation bubbles with varying pressure gradient and Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 2018, vol. 847, pp. 28-70. <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.257>
6. Nikitin N. Finite-difference method for incompressible Navier-Stokes equations in arbitrary orthogonal curvilinear coordinates. *J. Comput. Phys.*, 2006, vol. 217, pp. 759-781. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.01.036>
7. Moser R.D., Kim J., Mansour N.N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, 1999, vol. 11, pp. 943-945. <https://doi.org/10.1063/1.869966>
8. https://turbulence.oden.utexas.edu/МКМ_1999.html (accessed 10 December 2023)

Поступила в редакцию 26.06.2023; после доработки 13.07.2023; принята к опубликованию 14.08.2023