

DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.4.36
УДК 532.516:539.3

ЭВОЛЮЦИЯ УЕДИНЕННЫХ ГИДРОУПРУГИХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ С ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ШАМЕЛЯ

Ю.А. Блинков¹, Л.И. Могилевич², В.С. Попов^{2,3}, Е.В. Попова²

¹*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
Саратов, Российская Федерация*

²*Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация*

³*Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Российская Федерация*

Обсуждаются вопросы постановки и решения задачи гидроупругости для изучения волновых процессов в системе, состоящей из двух коаксиальных оболочек, кольцевой зазор между которыми и внутренняя оболочка содержат жидкости. Исследуется осесимметричный случай для оболочек типа Кирхгофа–Лява, материал которых подчиняется физическому закону с дробным показателем степени нелинейного члена (нелинейность Шамеля). Динамика жидкостей в системе рассматривается в рамках модели несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости. Осуществлен вывод уравнений динамики оболочек с нелинейностью Шамеля, что позволило сформулировать математическую постановку задачи гидроупругости, включающую в себя полученные уравнения, уравнения динамики жидкости и краевые условия на границах контакта оболочек и жидкости, а также на оси симметрии потока. Проведен асимптотический анализ задачи методом двухмасштабных разложений и построена система двух обобщенных уравнений Шамеля, описывающая эволюцию нелинейных уединенных волн деформации в соосных оболочках, заполненных вязкими жидкостями, с учетом инерции движения последних. Для определения напряжений в жидкостях на границах контакта с оболочками выполнена линеаризация уравнений динамики жидкости в кольцевом зазоре и уравнений динамики жидкости во внутренней оболочке. Далее линеаризованные уравнения решены методом итераций. На первой итерации из уравнений исключались инерционные члены. На второй итерации этими членами становились величины из решения, найденного на первой итерации. Для численного решения системы нелинейных эволюционных уравнений предложена новая разностная схема, полученная на основе техники базисов Грёбнера. Осуществлены вычислительные эксперименты по оценке влияния вязкости жидкости в оболочках и инерции ее движения на волновой процесс. Результаты расчетов при отсутствии жидкости во внутренней оболочке показали, что волны деформации в оболочках при упругом взаимодействии не меняют своей формы и амплитуды, то есть являются солитонами. Наличие вязкой жидкости во внутренней оболочке приводит к затуханию волнового процесса.

Ключевые слова: нелинейные волны деформации, коаксиальные цилиндрические оболочки, дробная нелинейность, вязкая жидкость, метод возмущений, метод итерации, обобщенное уравнение Шамеля

EVOLUTION OF SOLITARY HYDROELASTIC STRAIN WAVES IN TWO COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS WITH THE SCHAMEL PHYSICAL NONLINEARITY

Yu.A. Blinkov¹, L.I. Mogilevich², V.S. Popov^{2,3} and E.V. Popova²

¹*Saratov State University, Saratov, Russian Federation*

²*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation*

³*Institute for Precision Mechanics and Control RAS, Saratov, Russian Federation*

The paper considers the formulation and solution of the hydroelasticity problem for studying wave processes in the system of two coaxial shells containing fluids in the annular gap between them and in the inner shell. We investigate the axisymmetric case for Kirchhoff–Lave type shells whose material obeys a physical law with a fractional exponent of the nonlinear term (Schamel nonlinearity). The dynamics of fluids in the shells is considered within the framework of the incompressible viscous Newtonian fluid model. The derivation of the Schamel nonlinear equations of shell dynamics makes it possible to develop a mathematical formulation of the problem, which includes the obtained equations, the dynamics equations of two shells, the fluid dynamics equations and the boundary conditions at the shell-fluid interfaces and at the flow symmetry axis. The asymptotic analysis of the problem is performed using perturbation techniques, and the system of two generalized Schamel equations is obtained. This system describes the evolution of nonlinear solitary hydroelastic strain waves in the coaxial shells filled with viscous fluids, taking into account the inertia of the fluid motion. In order to determine the fluid stress at the shell-fluid interfaces, we perform linearization of the fluid dynamics equations for fluids in the annular gap and in the inner shell. The linearized equations are solved by the iterative method. The inertial terms are excluded from the equations in the first iteration, while, in the second iteration, these are the values found in the first iteration. A numerical solution of the system of nonlinear evolution equations is obtained by applying a new difference scheme developed using the Gröbner basis technique. Computational experiments are performed to investigate the effect of fluid viscosity and the inertia of fluid motion in the shells on the wave process. In the absence of fluids in the inner shell, the results of calculations demonstrate that the strain waves in the shells during elastic interactions do not change their shape and amplitude, i.e., they are solitons. The presence of viscous fluid in the inner shell leads to attenuation of the wave process.

Key words: nonlinear strain waves, coaxial cylindrical shells, fractional nonlinearity, viscous liquid, perturbation method, iteration method, generalized Schamel equation

1. Введение

Вопросы распространения волн в сплошных средах в рамках линейных моделей к настоящему времени достаточно хорошо изучены, составляют предмет линейной волновой динамики [1] и находят широкое

применение. С другой стороны, в последние десятилетия активно развиваются подходы, методы и модели современной нелинейной волновой динамики [2] для исследования проблем эволюции волн деформации в стержнях, пластинах и оболочках. В первых работах [3, 4] показана возможность существования нелинейных уединенных продольных волн деформации в нелинейно-упругом стержне [3], вязкоупругом стержне и пластине [4], получены уравнение Кортевега–де Вриза и уравнение Бюргерса–Кортевега–де Вриза, описывающие эволюцию этих волн, и дана их качественная оценка. Состояние исследований в указанной области на начало 2000-х годов достаточно подробно рассмотрено в обзоре [5]. В [6] представлены современные результаты построения математических моделей распространения уединенных волн деформации в нелинейно-упругих стержнях и их экспериментального обнаружения. Проведено численно-аналитическое исследование качественно различных сценариев взаимодействия солитонов продольной деформации и показана возможность расщепления солитонов в стержне. Распространение уединенных волн деформации в цилиндрической оболочке с кубической физической нелинейностью ее материала и конструктивной анизотропией, а также с учетом окружающей оболочку упругой среды с мягкой кубической нелинейностью, — предмет изучения в [7]. В осесимметричной постановке получено новое квазигиперболическое эволюционное уравнение для продольных волн деформации и найдены его точные солитоноподобные решения. В [8, 9] рассмотрены вопросы вывода эволюционных уравнений для ребристых цилиндрических оболочек, материал обшивки которых имеет дробную физическую нелинейность (нелинейность Шамеля), а также найдены солитонные решения построенных уравнений, описывающие распространение нелинейных уединенных осесимметричных волн деформаций в этих оболочках.

В то же время проявляется постоянный интерес к проблемам волновой динамики конструкций, заполненных жидкостью. Первые исследования в этом направлении выполнены в линейной постановке и к ним следует отнести работы [10, 11]. В [10] рассмотрено нестационарное движение вязкой несжимаемой жидкости в жестком цилиндре за счет пульсирующего давления на его торцах. В [11] определена скорость распространения волны давления несжимаемой жидкости в упругой круглой трубе с учетом инерции движения ее стенок. Задача для сжимаемой идеальной жидкости решена в [12], где получены формулы для ударного давления жидкости и скорости его распространения. Волновое пульсирующее движение вязкой жидкости по тонкостенной упругой трубе постоянного сечения изучалось в [13]. Данные исследования способствовали становлению нового направления в механике — гидроупругости.

Обзор современных проблем гидроупругости содержат публикации [14–17]. В большинстве работ рассматриваются вопросы взаимодействия пластин и оболочек с идеальной жидкостью. Например, в [18] проведен численный анализ динамического поведения коаксиальных цилиндрических оболочек, взаимодействующих с вращающейся сжимаемой идеальной жидкостью, находящейся в кольцевом зазоре и во внутренней оболочке. Эволюция нелинейных осесимметричных уединенных волн в цилиндрической геометрически нелинейной оболочке, по которой движется стационарный одномерный поток идеальной несжимаемой жидкости, исследована в [19]. В [20] в рамках линейной пространственной задачи гидроупругости численно изучены свободные колебания стенок горизонтального кольцевого канала, образованного двумя цилиндрическими оболочками, частично заполненного сжимаемой вязкой жидкостью. Решение реализовано методом конечных элементов, оценено влияние на собственные частоты и формы колебаний толщины слоя жидкости, уровня заполнения канала и торцевого закрепления оболочек. Работы [21–23] посвящены численному моделированию нелинейных уединенных волн деформации в стенках кольцевых каналов с учетом физической и геометрической нелинейности с позиции нелинейной гидроупругости в осесимметричной постановке. Для описания эволюции волн использованы новые разностные схемы, которые получены с применением техники базисов Грёбнера. В [21] стенки канала являются коаксиальными геометрически нелинейными цилиндрическими оболочками с физической кубической нелинейностью их материала, а движение в кольцевом зазоре моделируется как ползущее. Обобщение указанной задачи на случай заполнения внутренней оболочки вязкой жидкостью при исследовании ее динамики в рамках ползущего движения выполнено в [22], а в последующей работе [23] принято во внимание влияние конструкционного демпфирования и инерции движения жидкости в кольцевом зазоре. Однако эволюция уединенных нелинейных волн деформации в коаксиальных оболочках с физической нелинейностью Шамеля, заполненных вязкой жидкостью, еще не рассматривалась с учетом инерции движения последней как в кольцевом зазоре, так и во внутренней оболочке. Представляемая статья нацелена на восполнение данного пробела.

2. Постановка задачи гидроупругости: основные положения и допущения

Пусть имеются две цилиндрические оболочки, оси симметрии которых совпадают (см. Рис. 1). При этом R_1 — радиус внутренней поверхности внешней оболочки, R_2 — радиус внешней поверхности внутренней оболочки. Кольцевой зазор $\delta = R_1 - R_2$ между оболочками и внутренняя оболочка заполнены вязкой жидкостью, плотность которой постоянна. Исследуем осесимметричный волновой процесс в оболочках, который вызван некоторым начальным возмущением и, как принято в таких задачах [1], длину оболочек будем считать бесконечно большой. Введем две системы координат с началом в общей точке O : декартову Ox, y, z ,

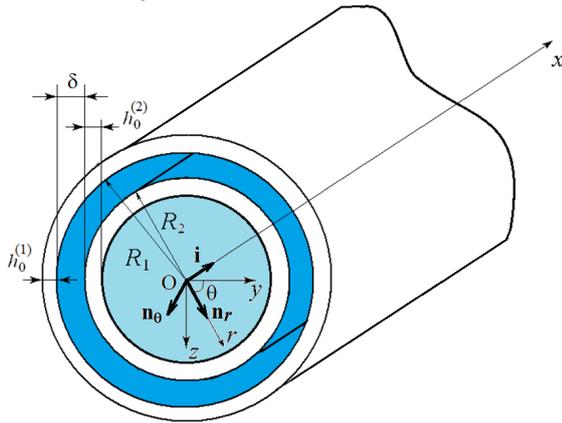


Рис. 1. Две бесконечно длинные коаксиальные оболочки, образующие стенки кольцевого и кругового каналов, заполненных вязкой жидкостью

ось x которой направим по продольной оси симметрии оболочек, а ось z — по нормали к срединной поверхности оболочек в невозмущенном состоянии, и цилиндрическую $O r \theta x$.

Далее верхним индексом i обозначим параметры оболочек, а именно: $i=1$ для внешней, $i=2$ для внутренней. С учетом сказанного $h_0^{(i)}$ — толщина i -й оболочки, $R^{(i)}$ — радиус ее срединной поверхности. Для определенности примем, что оболочки выполнены из одинакового материала и положим, что у данного материала модуль Юнга равен E , плотность — ρ_0 , коэффициент Пуассона — μ_0 . Так как многие современные материалы способны выдерживать нагрузки, превышающие предельные упругие, то рассмотрим состояние оболочек в рамках нелинейной теории [24]. Для этого представим связь напряжений σ_x, σ_θ

с деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$ и интенсивностью деформаций ε_u в виде нелинейного физического закона, содержащего член с дробным значением показателя степени [8, 25]:

$$\sigma_x^{(i)} = E(\mu_0 \varepsilon_\theta^{(i)} + \varepsilon_x^{(i)}) \left[1 + (\varepsilon_u^{(i)})^{1/2} m/E \right] / (1 - \mu_0^2), \quad \sigma_\theta^{(i)} = E(\varepsilon_\theta^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)}) \left[1 + (\varepsilon_u^{(i)})^{1/2} m/E \right] / (1 - \mu_0^2), \quad (1)$$

где $\varepsilon_u^{(i)} = (2/\sqrt{3}) \left(\mu_1 \left[(\varepsilon_\theta^{(i)})^2 + (\varepsilon_x^{(i)})^2 \right] - \mu_2 \varepsilon_\theta^{(i)} \varepsilon_x^{(i)} \right)^{1/2}$, $\mu_1 = (1/3) \left[1 + \mu_0 / (1 - \mu_0^2) \right]$, $\mu_2 = (1/3) \left[1 - 2\mu_0 / (1 - \mu_0^2) \right]$.

Параметр m в (1) имеет размерность напряжения и представляет собой константу материала, которая определяется экспериментально из опытов на растяжение–сжатие [24].

Заметим, что физический закон с дробной нелинейностью справедлив для ряда материалов [26, 27], а также использован при выводе уравнений динамики ребристых оболочек из изотропного несжимаемого материала в [8, 9]. Закон (1) содержит член с показателем степени $3/2$, и, если материал оболочек несжимаем, то $\mu_0 = 1/2$ и $\mu_1 = 1$, а $\mu_2 = -1$. Указанный частный случай рассмотрен в [8, 9], где получены уравнения ребристых цилиндрических оболочек с нелинейностью Шамеля. Оболочки широко применяются для транспортировки жидкости, поэтому представляет научный интерес исследование волновых процессов в оболочках–каналах с нелинейностью Шамеля, заполненных вязкой жидкостью, как фундаментальный задел для дальнейшего развития технологий неразрушающей волновой диагностики состояния подобных систем.

Учитывая гипотезу Кирхгофа–Лява [28], представим связь деформаций и упругих перемещений элемента i -й оболочки как

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_\theta^{(i)} = -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - z \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \quad -h_0^{(i)}/2 \leq z \leq h_0^{(i)}/2. \quad (2)$$

Здесь $W^{(i)}$ — прогиб, для которого примем направление к центру кривизны оболочки, $U^{(i)}$ — продольное упругое перемещение. Тогда нормальные усилия и изгибающий момент в элементе срединной поверхности i -й оболочки определяются по следующим формулам:

$$N_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} dz, \quad N_\theta^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_\theta^{(i)} dz, \quad M_x^{(i)} = \int_{-h_0^{(i)}/2}^{h_0^{(i)}/2} \sigma_x^{(i)} z dz. \quad (3)$$

Воспользуемся уравнениями динамики оболочки из [28], представленными в усилиях и моментах и включающими даламберовы силы инерции. В рассматриваемой постановке, с учетом напряжений со стороны жидкости в кольцевом зазоре и во внутренней оболочке, приведенных к невозмущенной срединной поверхности, запишем эти уравнения в виде:

$$\frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - \left(q_x^{(i)} + U^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial r} + (i-1) \left(q_x^{cir} + U^{(i)} \frac{\partial q_x^{cir}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_x^{cir}}{\partial r} \right) \right) \Bigg|_{R^{(i)}}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 M_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} N_x^{(i)} \right) + \frac{1}{R^{(i)}} N_\theta^{(i)} = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} -$$

$$-\left. \left((-1)^{i-1} \left(q_n + U^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial r} \right) + (i-1) \left(q_n^{cir} + U^{(i)} \frac{\partial q_n^{cir}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_n^{cir}}{\partial r} \right) \right) \right|_{R^{(i)}}.$$

Здесь $q_x^{(i)}$, q_n — касательное и нормальное напряжения жидкости в кольцевой щели, q_x^{cir} , q_n^{cir} — касательное и нормальное напряжения жидкости во внутренней оболочке, t — время.

Подставив (1)–(3) в (4) и приняв во внимание результаты асимптотического анализа [23], который показал, что при изучении продольных волн деформации в оболочке интенсивность деформаций в (2), можно рассматривать на срединной поверхности, то есть при $z = 0$, получим уравнения динамики оболочек, выраженные в перемещениях:

$$\begin{aligned} & \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left[\left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[\mu_1 \left(\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)} W^{(i)}}{\partial x R^{(i)}} \right]^{1/4} \right] \right\rangle = \\ & = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} - \left(q_x^{(i)} + U^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_x^{(i)}}{\partial r} + (i-1) \left(q_x^{cir} + U^{(i)} \frac{\partial q_x^{cir}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_x^{cir}}{\partial r} \right) \right) \Big|_{R^{(i)}}, \\ & \frac{Eh_0^{(i)}}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle -\frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)2}} \right) \right\rangle + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left[\left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \times \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \times \left[\mu_1 \left(\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)} W^{(i)}}{\partial x R^{(i)}} \right]^{1/4} \right] \right] \right\rangle + \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R^{(i)}} \left\langle \mu_0 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \left[\left[\mu_0 \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left[\mu_1 \left(\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right) + \mu_2 \frac{\partial U^{(i)} W^{(i)}}{\partial x R^{(i)}} \right]^{1/4} \right] \right\rangle = \\ & = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} - \left. \left((-1)^{i-1} \left(q_n + U^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_n}{\partial r} \right) + (i-1) \left(q_n^{cir} + U^{(i)} \frac{\partial q_n^{cir}}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial q_n^{cir}}{\partial r} \right) \right) \right|_{R^{(i)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Совместно с уравнениями (5) запишем уравнения динамики вязкой жидкости постоянной плотности для осесимметричного случая [29]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = v \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ & \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = v \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь: V_x , V_r — проекции скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат; p — давление в жидкости; ρ — плотность жидкости; v — кинематический коэффициент вязкости. Уравнения (6) описывают динамику жидкости в кольцевом зазоре и во внутренней оболочке. Если заполняющие жидкости разные, то ρ и v будут характеристиками жидкости в кольцевом зазоре, а для жидкости во внутренней оболочке в (6) введем обозначения ρ_c и v_c соответственно.

Напряжения в жидкости $q_x^{(i)}$, q_n и q_x^{cir} , q_n^{cir} , входящие в уравнения динамики оболочек (5), определяются согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} q_n^{(i)} &= p_{rr} \cos(-\mathbf{n}^{(i)}, \hat{\mathbf{n}}_r) + p_{rx} \cos(-\mathbf{n}^{(i)}, \hat{\mathbf{i}}), & r &= R^{(i)} - W^{(i)}, \\ q_x^{(i)} &= p_{rx} \cos(-\mathbf{n}^{(i)}, \hat{\mathbf{n}}_r) + p_{xx} \cos(-\mathbf{n}^{(i)}, \hat{\mathbf{i}}), & r &= R^{(i)} - W^{(i)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$p_{rr} = -p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad q_{rx} = q_{xr} = -\rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right), \quad p_{xx} = -p + 2\rho v \frac{\partial V_x}{\partial x}. \quad (8)$$

Здесь обозначено: $\mathbf{n}^{(i)}$ — нормаль к срединной поверхности i -й оболочки; \mathbf{n}_r , \mathbf{n}_θ , \mathbf{i} — орты введенной цилиндрической системы координат с началом на продольной оси симметрии оболочек; угловое надчеркивание указывает, какие векторы образуют угол с нормалью к срединной поверхности. Выражения для q_x^{cir} , q_n^{cir} получим из (7), приняв $i = 2$ и, если жидкости в кольцевом зазоре и во внутренней оболочке

разные, в (8) полагаем ρ_c и v_c . Далее рассмотрим напряжения на невозмущенной срединной поверхности оболочек. Тогда $-\mathbf{n}^{(i)} = \mathbf{n}_r$ и $\cos(-\mathbf{n}^{(i)}, \hat{\mathbf{n}}_r) = 1$, $\cos(-\mathbf{n}^{(i)}, \hat{\mathbf{i}}) = 0$.

Дополним уравнения (6) краевыми условиями на границах контакта жидкости и оболочек. Представим их как равенства скоростей движения жидкости и соответствующей ограничивающей поверхности. Данные условия в эйлерово–лагранжевом подходе имеют вид [30]:

$$V_x + U^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial r} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r + U^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}, \quad r = R_i - W^{(i)}. \quad (9)$$

Кроме того, для жидкости во внутренней оболочке необходимо сформулировать условия на оси симметрии. В движущейся сплошной среде поверхностные пары сил отсутствуют, то есть главный момент поверхностных сил равен нулю. Для осесимметричного течения это условие эквивалентно равенству: $0 \mathbf{n}_r + (q_{xr} - q_{rx}) \mathbf{n}_0 + 0 \mathbf{i} = 0$. Тогда $q_{rx} = q_{xr}$ (согласно теореме о взаимности касательных напряжений) [29]. Однако поверхностные напряжения q_{rx} и q_{xr} в обсуждаемой задаче на оси симметрии имеют ограничение, то есть $\lim_{r \rightarrow 0} (r q_{rx}) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\rho v \left(\frac{\partial}{\partial x} (r V_r) + r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) \right] = 0$. Из этого выражения следуют условия для компонент скорости на оси симметрии

$$r V_r = 0, \quad r \partial V_x / \partial r = 0, \quad r = 0. \quad (10)$$

Заметим, что сформулированные условия (10) автоматически исключают из общего решения особенности: степенную (для V_r) и логарифмическую (для V_x). Они эквивалентны условиям ограниченности компонент скорости жидкости на оси симметрии: $V_x < \infty$ и $V_r < \infty$ при $r = 0$.

3. Асимптотический анализ сформулированной задачи и численное моделирование эволюции волн

Для изучения волнового процесса в оболочках перейдем к рассмотрению безразмерной задачи. Для этого введем характерные малые параметры и безразмерные переменные:

$$h_0^{(i)} / R^{(i)} = \varepsilon \ll 1, \quad R^{(i)2} / l^2 = O(\varepsilon^{1/2}), \quad w_m / h_0^{(i)} = O(1), \quad u_m R^{(i)} / (l h_0^{(i)}) = O(1), \quad m / E = O(1), \quad (11)$$

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad x^* = x / l, \quad t^* = t c_0 / l, \quad r^* = r / R^{(i)}.$$

Здесь: $c_0^2 = E / (\rho(1 - \mu_0^2))$ — квадрат скорости звука в материале оболочек; w_m, u_m — характерные масштабы безразмерных прогибов $u_3^{(i)}$ и продольных перемещений $u_1^{(i)}$; l — длина волны, принимаемая за характерный линейный размер; ε — малый параметр задачи.

Проанализируем уравнения динамики оболочек методом двухмасштабных разложений [31], представив искомые функции в виде асимптотических разложений:

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} u_{31}^{(i)} + \dots, \quad (12)$$

с введением независимой переменной ξ и медленного времени τ :

$$\xi = x^* - \sqrt{1 - \mu_0^2} t^*, \quad \tau = \varepsilon^{1/2} t^*. \quad (13)$$

После подстановки (11)–(13) в (5), ограничившись в разложениях (12) двумя первыми членами, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 u_{30}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} \left(\frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 u_{31}^{(i)} \right) + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2} \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 u_{30}^{(i)} \right) \left[\mu_1 \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial x^*} \right)^2 + \mu_1 u_{30}^{(i)2} + \mu_2 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} u_{30}^{(i)} \right]^{1/4} \right\rangle =$$

$$= (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \varepsilon^{1/2} (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^2 u_{11}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \varepsilon^{1/2} 2 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{l}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \varepsilon} \left(q_x^{(i)} + (i-1) q_x^{cir} \right) \Big|_{R^{(i)}}, \quad (14)$$

$$\mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{30}^{(i)} + \varepsilon^{1/2} \left(\mu_0 \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{31}^{(i)} \right) + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2} \left(\mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{30}^{(i)} \right) \left[\mu_1 \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial x^*} \right)^2 + \mu_1 u_{30}^{(i)2} + \mu_2 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} u_{30}^{(i)} \right]^{1/4} =$$

$$= (1 - \mu_0^2) \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{30}^{(i)}}{\partial \xi^2} - \frac{R^{(i)}}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \varepsilon} \left((-1)^{i-1} q_n^{(i)} + (i-1) q_n^{cir} \right) \Big|_{R^{(i)}}.$$

Согласно (14) для нулевого приближения по ε вытекает:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \mu_0 u_{30}^{(i)} \right\rangle = (1 - \mu_0^2) \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2}, \quad \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} = u_{30}^{(i)}, \quad (15)$$

Заметим, что продольное перемещение $u_{10}^{(i)}$ в (15) может быть произвольной функцией, так как после исключения из первого уравнения прогиба $u_{30}^{(i)}$ путем подстановки его величины из второго уравнения, приходим к тождеству.

В следующем приближении по ε с учетом второго уравнения из (15) получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left\langle \mu_0 \left(\mu_0 \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{31}^{(i)} \right) + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} (1 - \mu_0^2) \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \left[(\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \right]^{1/4} \right\rangle + \\ & + 2\sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} = - \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left(q_x^{(i)} + (i-1) q_x^{cir} \right) \Big|_{R^{(i)}}, \quad (16) \\ & \mu_0 \frac{\partial u_{11}^{(i)}}{\partial \xi} - u_{31}^{(i)} - \mu_0 (1 - \mu_0^2) \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} = - \frac{R^{(i)}}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left((-1)^{i-1} q_n^{(i)} + (i-1) q_n^{cir} \right) \Big|_{R^{(i)}}. \end{aligned}$$

Исключение из (16) u_{11} , u_{31} даст выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{3}{4} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} = \\ & = - \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[q_x^{(i)} + (i-1) q_x^{cir} - \mu_0 \varepsilon^{1/4} \frac{\partial \left((-1)^{i-1} q_n + (i-1) q_n^{cir} \right)}{\partial \xi} \right] \Big|_{R^{(i)}} \quad (i = 1, 2). \quad (17) \end{aligned}$$

Полученная система состоит из двух уравнений, которые являются обобщениями уравнения Шамеля для $\partial u_{10}^{(i)} / \partial \xi$ — продольной деформации оболочек. Если положить, что жидкость в каналах отсутствует, то $q_x^{(i)} = q_n = q_x^{cir} = q_n^{cir} = 0$. Тогда приходим к двум независимым уравнениям Шамеля: для внешней ($i = 1$) и внутренней ($i = 2$) оболочек.

В правые части (17) входят напряжения в жидкости, для определения которых проведем асимптотический анализ уравнений динамики жидкости (6)–(10) в кольцевом зазоре и во внутренней оболочке. Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

– для кольцевого зазора

$$V_r = h_0^{(i)} v_r c_0 / l_r, \quad V_x = h_0^{(i)} v_x c_0 / \delta, \quad r^* = (r - R^{(2)}) / \delta, \quad t^* = t c_0 / l, \quad x^* = x / l, \quad p = \rho v c_0 h_0^{(i)} P / \delta^3, \quad (18)$$

$$\psi = \delta / R^{(2)} = \varepsilon^{1/2}, \quad \lambda = h_0^{(i)} / \delta = \varepsilon^{1/2}, \quad h_0^{(i)} / R^{(i)} = \varepsilon, \quad h_0^{(i)} / l = \varepsilon^{5/4}, \quad \delta / l = \varepsilon^{3/4};$$

– для жидкости во внутренней оболочке

$$V_r = h_0^{(i)} v_r c_0 / l_r, \quad V_x = h_0^{(i)} v_x c_0 / R^{(2)}, \quad r^* = r / R^{(2)}, \quad t^* = t c_0 / l, \quad x^* = x / l, \quad (19)$$

$$p = \rho_c v_c c_0 h_0^{(i)} P / R^{(2)3}, \quad R^{(2)} / l = \psi_c = O(\varepsilon^{1/4}), \quad \lambda_c = h_0^{(i)} / R^{(2)} = \varepsilon.$$

Подставив (18) в (6)–(9) и выполнив асимптотические разложения по степеням малого параметра $\varepsilon^{1/2}$

$$P = P^0 + \varepsilon^{1/2} P^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \varepsilon^{1/2} v_r^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \varepsilon^{1/2} v_x^1 + \dots, \quad (20)$$

с удержанием первого члена в разложениях (20), для кольцевого зазора получим:

– линеаризованные уравнения динамики жидкости:

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \text{Re} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0, \quad (21)$$

где $\text{Re} = \frac{\delta \delta c_0}{l v}$ — аналог числа Рейнольдса для рассматриваемой задачи;

– краевые условия

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 1, \quad v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 0; \quad (22)$$

– напряжения на стенках кольцевого канала (с точностью до ψ и $\varepsilon^{1/2}$, см. (18))

$$q_x^{(i)} = -\rho v \frac{h_0^{(i)} c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \quad \text{при} \quad r^* = 1 \quad (\text{для } i=1) \quad \text{или} \quad \text{при} \quad r^* = 0 \quad (\text{для } i=2), \quad q_n = -\frac{\rho v c_0 h_0^{(i)}}{\delta^3} P^0. \quad (23)$$

Задачу (21), (22) решим методом итерации по аналогии с [23]. На первом шаге итерационного процесса в (21) положим $Re = 0$, то есть исключим инерцию движения жидкости. С учетом этого для давления и скорости жидкости в кольцевом канале получим:

$$P^0 = 12 \int \left[\int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} = 6(r^{*2} - r^*) \int \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) dx^*. \quad (24)$$

На втором шаге удержим инерционный член в уравнении для скорости, подставив найденное на первой итерации выражение $\partial v_x^0 / \partial t^*$, в результате найдем:

$$P^0 = \iint \left[12 \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{6}{5} Re \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^* dx^*, \quad (25)$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = (2r^* - 1) \int \left[6 \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) + \frac{1}{10} Re \left(\frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 u_3^{(1)}}{\partial t^{*2}} \right) \right] dx^*.$$

Приняв во внимание (13) и разложения (12), выражения (25) с точностью до $\varepsilon^{1/2}$ запишем как

$$P^0 = \int \left[12\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{6}{5} Re(1-\mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right] d\xi, \quad (26)$$

$$\frac{\partial P^0}{\partial \xi} = \left[12\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{6}{5} Re(1-\mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right],$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = (2r^* - 1) \left[6\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{Re}{10} (1-\mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \right],$$

$$\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 6\sqrt{1-\mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) - \frac{Re}{10} (1-\mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} \right), \quad \left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = -\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1}.$$

С учетом связи $u_{30}^{(i)}$ и $\partial u_{10}^{(i)} / \partial \xi$ из второго уравнения (15), малости параметров ψ , λ и допущений, что $R^{(1)} = R^{(2)} \approx R$, $h_0^{(1)} = h_0^{(2)} \approx h_0$, для слагаемых $q_x^{(i)}$, q_n в правой части уравнения (17) найдем:

– при $i = 1$

$$-\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[q_x^{(1)} - \mu_0 \varepsilon^{1/4} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right]_{R^{(1)}} =$$

$$= -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon^{1/2}} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \frac{Re}{10} \sqrt{1-\mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right], \quad (27)$$

– при $i = 2$

$$-\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l}{\varepsilon^{3/2} \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[q_x^{(2)} + \mu_0 \varepsilon^{1/4} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right]_{R^{(2)}} =$$

$$= -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon^{1/2}} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \frac{Re}{10} \sqrt{1-\mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right]. \quad (28)$$

Перейдем к рассмотрению жидкости во внутренней оболочке. Подставим (19) в (6)–(10) и выполним асимптотические разложения (20). В результате, ограничившись первым членом в разложениях, получим:

– линеаризованные уравнения, описывающие динамику жидкости во внутренней оболочке

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \Psi_c \frac{R_3 c_0}{v_c} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0; \quad (29)$$

– граничные условия

$$\begin{aligned} \text{при } r^* = 0: \quad r^* v_r^0 = r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \quad (\text{то есть } v_x^0 < \infty \text{ и } v_r^0 < \infty), \\ \text{при } r^* = 1: \quad v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*}; \end{aligned} \quad (30)$$

– напряжения в жидкости q_x^{cir} , q_n^{cir} на внутренней поверхности оболочки с точностью до Ψ и $\varepsilon^{1/2}$

$$q_x^{cir} = -\lambda_c \frac{v_c}{R^{(2)} c_0} \rho_c c_0^2 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*}, \quad q_n^{cir} = -\frac{\lambda_c}{\Psi_c} \frac{v_c}{R^{(2)} c_0} \rho_c c_0^2 P^0 \quad \text{при } r^* = 1. \quad (31)$$

Решив (29), (30) методом итерации аналогично ранее описанной процедуре на первом шаге итерационного процесса найдем:

$$P^0 = 16 \int \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] dx^*, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} = 4(r^{*2} - 1) \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \left[\frac{1}{2} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] + \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial t^{*2}}. \quad (32)$$

На втором шаге определим:

$$\begin{aligned} P^0 &= \frac{\partial}{\partial t^*} \int \left[16 \left(\frac{1}{2} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right) + \frac{2}{3} \Psi_c \frac{R^{(2)} c_0}{v_c} \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{1}{2} u_1^{(2)} - 4 \int u_3^{(2)} dx^* \right) \right] dx^*, \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} &= \frac{\partial}{\partial t^*} \left[8 \left(\frac{1}{2} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right) + \frac{1}{3} \Psi_c \frac{R^{(2)} c_0}{v_c} \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{1}{2} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставив в (33) разложения (12) и учтя введенные параметры (13), с точностью до $\varepsilon^{1/2}$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^0}{\partial \xi} &= \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[8 \left(2u_{30}^{(2)} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{3} \Psi_c \frac{R^{(2)} c_0}{v_c} \left(8 \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \sqrt{1 - \mu_0^2} \right], \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1} &= \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[4 \left(2u_{30}^{(2)} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{6} \Psi_c \frac{R^{(2)} c_0}{v_c} \left(2 \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \sqrt{1 - \mu_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Приняв во внимание уравнение (15) при $i = 2$, малость параметров Ψ_c , λ_c и выражения (31), (34), для слагаемых q_x^{cir} , q_n^{cir} в правой части уравнения (17) при $i = 2$, придем к формулам:

$$q_x^{cir} - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial q_n^{cir}}{\partial \xi} = \frac{v_c}{R c_0} \rho_c c_0^2 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} [1 - 2\mu_0]^2 \varepsilon \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{R}{l} \rho_c c_0^2 \frac{1}{6} (1 - \mu_0^2) [(1 - 2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \varepsilon \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2}. \quad (35)$$

В итоге система (17) с учетом (27), (28), (35) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{3}{4} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} = \\ &= -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \frac{1}{10} \text{Re} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right], \\ &\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{m}{E} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{1/2} \frac{3}{4} \sqrt{1 - \mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4} \left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right)^{1/2} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} = \\ &= -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{v}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) - \frac{1}{10} \text{Re} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \left(1 - \frac{1}{12} \frac{\delta}{\mu_0 R} \right) \right] - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l}{\varepsilon^{1/2} \rho_0 h_0 c_0^2} \left\{ \frac{v_c}{R c_0} \rho_c c_0^2 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} [1 - 2\mu_0]^2 \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{R}{l} \rho_c c_0^2 \frac{1}{6} (1 - \mu_0^2) [(1 - 2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right\}. \end{aligned} \quad (36)$$

Если исключить из рассмотрения вязкую жидкость, заполняющую каналы кольцевого и кругового сечения, то есть отбросить правые части в уравнениях (36), то система распадется на два независимых уравнения Шамеля. Данные уравнения при несжимаемом материале оболочек совпадают с уравнением, полученным в [9] для ребристой оболочки, если считать высоту ребер равной нулю.

Введя обозначения $\partial u_{10}^{(1)}/\partial \xi = c_3 \phi^{(1)}$, $\partial u_{10}^{(2)}/\partial \xi = c_3 \phi^{(2)}$, $\eta = c_1 \xi$, $t = c_2 \tau$, $c_1 = (2c_2)^{1/3} (\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2})^{-1/3}$, $c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon^{1/2}} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \left[1 - \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right] \frac{v}{\delta c_0}$, $c_3 = (24c_2 E / (c_1 m))^2 \left(3\sqrt{1-\mu^2} (2/\sqrt{3})^{1/2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2)^{1/4}\right)^{-2}$ и положив $\sigma_1 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \frac{\delta}{l} \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{10} \left(1 - \frac{\delta}{12\mu_0 R}\right) \frac{c_1}{c_2}$, $\sigma_2 = \frac{\rho \varepsilon l}{\rho_0 h_0} \frac{v_c}{\varepsilon^{1/2} R c_0} 2(1-2\mu_0)^2 \frac{1}{c_2}$, $\sigma_3 = \frac{\rho \varepsilon l}{\rho_0 h_0} \frac{R}{l \varepsilon^{1/2}} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{12} \left[(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2\right] \frac{c_1}{c_2}$, систему (36) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \phi_t^{(1)} + 6\phi^{(1)/2} \phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} - \sigma_1 (\phi_\eta^{(1)} - \phi_\eta^{(2)}) &= 0, \\ \phi_t^{(2)} + 6\phi^{(2)/2} \phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma_1 (\phi_\eta^{(2)} - \phi_\eta^{(1)}) + \sigma_2 \phi^{(2)} - \sigma_3 \phi_\eta^{(2)} &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь нижний буквенный индекс обозначает частную производную по соответствующей переменной.

Если жидкость во внутренней оболочке отсутствует, то есть $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, то (37) имеет точное частное решение:

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = 25k^4 \left\{1 + \text{chk} \left[\eta - (4k^2)t\right]\right\}^{-2} / 4. \tag{38}$$

Здесь k — волновое число, являющееся произвольной величиной. Данное решение совпадает с решением уравнения для ребристой оболочки из несжимаемого материала с дробной физической нелинейностью, полученному в [9] при высоте ребер равной нулю.

При учете жидкости система (37) в общем случае точно не разрешима, и требуется численное решение, которое можно реализовать при начальных условиях $t = 0$ в виде (38) для каждой из оболочек как

$$\phi^{(1)}(0, \eta) = \phi^{(2)}(0, \eta) = 25k^4 (1 + \text{chk} \eta)^{-2} / 4, \tag{39}$$

или в виде (38) для одной из оболочек, например, внешней:

$$\phi^{(1)}(0, \eta) = 25k^4 (1 + \text{chk} \eta)^{-2} / 4, \quad \phi^{(2)}(0, \eta) = 0. \tag{40}$$

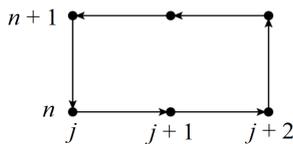


Рис. 2. Базовый шаблон

Для численного решения системы (37) воспользуемся подходом, реализованным в [22, 23], в котором с помощью техники базисов Грёбнера генерируются новые разностные схемы [32]. Но для этого систему (37) нужно записать в интегральной форме для произвольной области Ω , ограниченной контуром $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \left[(-4\phi^{(1)3/2} + \sigma_1 (\phi^{(1)} - \phi^{(2)}) - \phi_{\eta\eta}^{(1)}) dt + \phi^{(1)} d\eta \right] + \iint_{\Omega} (\phi^{(1)} - \phi^{(2)}) dt d\eta &= 0, \\ \oint_{\partial\Omega} \left[(-4\phi^{(2)3/2} + \sigma_1 (\phi^{(2)} - \phi^{(1)}) + \sigma_3 \phi^{(2)} - \phi_{\eta\eta}^{(2)}) dt + \phi^{(2)} d\eta \right] + \iint_{\Omega} (\phi^{(2)} - \phi^{(1)} + \sigma_2 \phi^{(2)}) dt d\eta &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Чтобы перейти к дискретной форме записи уравнений, введем сеточные функции $u^{(i)n} = \phi^{(i)}(t_n, \eta_j)$, а в качестве базового разностного шаблона используем контур, показанный на рисунке 2. Тогда дискретные функции и их производные свяжутся интегральными соотношениями:

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_\eta^{(i)} d\eta = u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j), \quad \int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u_{\eta\eta}^{(i)} d\eta = u_\eta^{(i)}(t, \eta_{j+2}) - u_\eta^{(i)}(t, \eta_j). \tag{42}$$

Приняв $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$ и применив для интегрирования по времени и расчета первой производной по η формулу трапеций, а для расчета второй производной по η — формулу среднего значения, запишем (41), (42) в виде:

$$\begin{aligned}
 & \left(-4 \left(u^{(1)3/2n}_j + u^{(1)3/2n+1}_j - u^{(1)3/2n}_{j+2} - u^{(1)3/2n+1}_{j+2} \right) - \sigma_1 \left(u^{(1)n}_j - u^{(2)n}_j + u^{(1)n+1}_j - u^{(2)n+1}_j - u^{(1)n}_{j+2} + u^{(2)n}_{j+2} - u^{(1)n+1}_{j+2} + u^{(2)n+1}_{j+2} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \left(u^{(1)n}_{\eta j} + u^{(1)n+1}_{\eta j} - u^{(1)n}_{\eta j+2} - u^{(1)n+1}_{\eta j+2} \right) \frac{\tau}{2} + \left(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n}_{j+1} \right) 2h + \left(\left(u^{(1)n+1}_{j+1} + u^{(1)n}_{j+1} \right) - \left(u^{(2)n+1}_{j+1} + u^{(2)n}_{j+1} \right) \right) h\tau = 0, \right. \\
 & \left(-4 \left(u^{(2)3/2n}_j + u^{(2)3/2n+1}_j - u^{(2)3/2n}_{j+2} - u^{(2)3/2n+1}_{j+2} \right) - \sigma_1 \left(u^{(2)n}_j - u^{(1)n}_j + u^{(2)n+1}_j - u^{(1)n+1}_j - u^{(2)n}_{j+2} + u^{(1)n}_{j+2} - u^{(2)n+1}_{j+2} + u^{(1)n+1}_{j+2} \right) - \right. \\
 & \quad \left. - \sigma_3 \left(u^{(2)n}_j + u^{(2)n+1}_j - u^{(2)n}_{j+2} - u^{(2)n+1}_{j+2} \right) - \left(u^{(2)n}_{\eta j} + u^{(2)n+1}_{\eta j} - u^{(2)n}_{\eta j+2} - u^{(2)n+1}_{\eta j+2} \right) \frac{\tau}{2} + \left(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n}_{j+1} \right) 2h + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\left(u^{(2)n+1}_{j+1} + u^{(2)n}_{j+1} \right) - \left(u^{(1)n+1}_{j+1} + u^{(1)n}_{j+1} \right) - \sigma_2 \left(u^{(2)n+1}_{j+1} + u^{(2)n}_{j+1} \right) \right) h\tau = 0, \right. \\
 & \quad \left. \left(u^{(i)n}_{\eta j+1} + u^{(i)n}_{\eta j} \right) \frac{h}{2} = u^{(i)n}_{j+1} - u^{(i)n}_j, \quad u^{(i)n}_{\eta j+1} 2h = u^{(i)n}_{j+2} - u^{(i)n}_j. \right.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Поскольку исходная система уравнений (37) является нелинейной, заменим нелинейную часть дополнительной функцией $F^{(i)} = 4u^{(i)3/2}$. Осуществим выбор допустимого упорядочения так, чтобы функции удовлетворяли условию $u^{(1)} \succ u^{(2)} \succ \dots \succ F^{(1)} \succ F^{(2)}$, а затем, аналогично упорядочим и переменные с индексами n, j . Таким образом добиваемся того, что нелинейная часть не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера. В этом случае структура базиса позволяет проверить, является ли искомая новая разностная схема условием совместности системы разностных уравнений [33]. В результате для системы уравнений (37) получим новую разностную схему:

$$\begin{aligned}
 & \frac{u^{(1)n+1}_j - u^{(1)n}_j}{\tau} + 4 \frac{\left(u^{(1)3/2n+1}_{j+1} - u^{(1)3/2n+1}_{j-1} \right) + \left(u^{(1)3/2n}_{j+1} - u^{(1)3/2n}_{j-1} \right)}{4h} + \frac{\left(u^{(1)n+1}_{j+2} - 2u^{(1)n+1}_{j+1} + 2u^{(1)n+1}_{j-1} - u^{(1)n+1}_{j-2} \right)}{4h^3} + \\
 & \quad + \frac{\left(u^{(1)n}_{j+2} - 2u^{(1)n}_{j+1} + 2u^{(1)n}_{j-1} - u^{(1)n}_{j-2} \right)}{4h^3} + \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \\
 & \quad - \sigma_1 \left(\frac{\left(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1} \right) + \left(u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1} \right)}{4h} - \frac{\left(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1} \right) + \left(u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1} \right)}{4h} \right) = 0, \\
 & \frac{u^{(2)n+1}_j - u^{(2)n}_j}{\tau} + 4 \frac{\left(u^{(2)3/2n+1}_{j+1} - u^{(2)3/2n+1}_{j-1} \right) + \left(u^{(2)3/2n}_{j+1} - u^{(2)3/2n}_{j-1} \right)}{4h} + \frac{\left(u^{(2)n+1}_{j+2} - 2u^{(2)n+1}_{j+1} + 2u^{(2)n+1}_{j-1} - u^{(2)n+1}_{j-2} \right)}{4h^3} + \\
 & \quad + \frac{\left(u^{(2)n}_{j+2} - 2u^{(2)n}_{j+1} + 2u^{(2)n}_{j-1} - u^{(2)n}_{j-2} \right)}{4h^3} + \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \sigma_1 \left(\frac{\left(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1} \right) + \left(u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1} \right)}{4h} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\left(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1} \right) + \left(u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1} \right)}{4h} \right) + \sigma_2 \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \sigma_3 \frac{\left(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1} \right) + \left(u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1} \right)}{4h} = 0.
 \end{aligned} \tag{44}$$

Наличие степени нелинейности 3/2 на следующем временном слое требует выполнения линеаризации, которая осуществлена как

$$\begin{aligned}
 v_k^{3/2} &= v_{k+1}^{3/2} - v_k^{3/2} + v_k^{3/2} = \left(v_{k+1}^{1/2} - v_k^{1/2} \right) \left(v_{k+1} + v_{k+1}^{1/2} v_k^{1/2} + v_k \right) + v_k^{3/2} = \\
 &= \left(v_{k+1}^{1/2} - v_k^{1/2} \right) \frac{v_{k+1}^{1/2} + v_k^{1/2}}{v_{k+1}^{1/2} + v_k^{1/2}} \left(v_{k+1} + v_{k+1}^{1/2} v_k^{1/2} + v_k \right) + v_k^{3/2} \approx \left(v_{k+1} - v_k \right) \frac{3}{2} v_k^{1/2} + v_k^{3/2} = \frac{3}{2} v_k^{1/2} v_{k+1} - \frac{1}{2} v_k^{3/2}.
 \end{aligned} \tag{45}$$

На основе (44), (45) проведено численное исследование системы уравнений (37) с начальными условиями (39), (40). Алгоритм численного решения реализован на языке Python с использованием библиотеки SciPy, предназначенной для выполнения научных и инженерных расчетов. Разработанная программа верифицировалась путем сравнения с точным частным решением (38) при $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ($\sigma_1 = 1, k = 0, 2$), то есть на задаче, когда жидкость во внутренней оболочке отсутствует. Результаты расчетов показаны на рисунке 3а. Временной шаг назначался как половина шага по пространственной переменной η , то есть $\tau = h/2$, а относительная погрешность вычислялась как $\bar{\Delta} = \max(|\phi - \phi_{ex}| / (1 + |\phi_{ex}|))$, где ϕ — численное решение, ϕ_{ex} — точное решение. На рисунке 3б представлены погрешности, вычисленные при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1, k = 0, 2$, то есть для заполненной жидкостью внутренней оболочки. В этом случае временной шаг выбирался как и ранее, а относительная погрешность рассчитывалась по формуле $\bar{\Delta} = \max(|\phi_* - \phi_{**}| / (1 + |\phi_{**}|))$, где ϕ_* — численное решение при варьировании шага по времени и

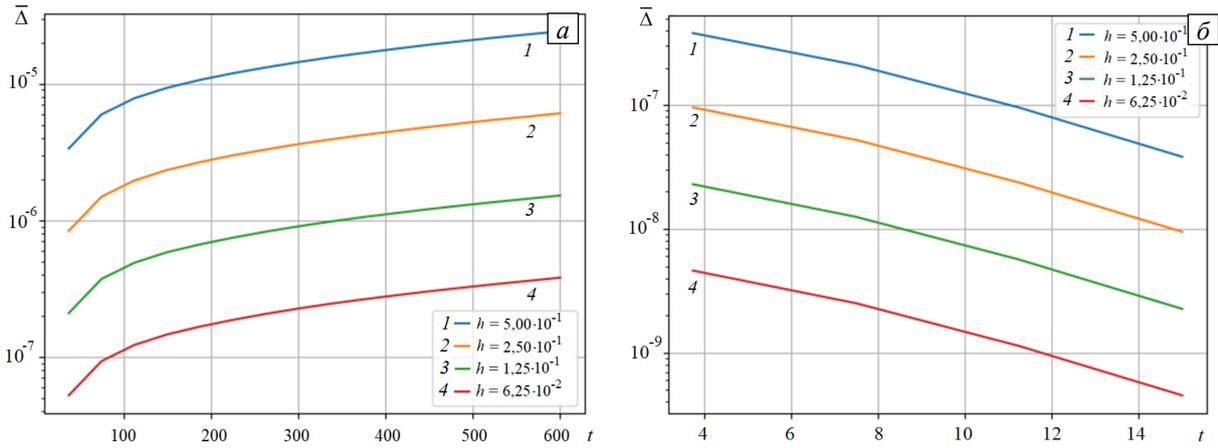


Рис. 3. Графики относительной погрешности при $\tau = h/2$: в сравнении с точным решением при отсутствии жидкости во внутренней оболочке ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $k = 0,2$) (а); в сравнении с численным решением при варьировании шага по времени и пространственной переменной при заполненной жидкостью внутренней оболочке ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1$, $k = 0,2$) (б)

пространственной координате, ϕ_{**} — численное решение при фиксированных значениях $h = 3,125 \cdot 10^{-2}$ и $\tau = h/2$. Графики на рисунке 3 имеют логарифмический масштаб по оси ординат.

В первом случае — в отсутствие жидкости (см. Рис. 3а), с ростом времени t при варьировании шага по времени и пространственной координате наблюдается постепенный выход графика погрешности на «полку». Если внутреннюю оболочку заполняет жидкость (см. Рис. 3б), то расчеты показывают, что при варьировании шагов по времени и пространственной переменной в сторону их убывания наблюдается уменьшение погрешности. Таким образом, представленные данные свидетельствуют, что при уменьшении шага по времени и пространственной координате происходит пропорциональное падение относительной погрешности, что позволяет говорить о сходимости реализованного численного решения.

Далее на рисунке 4 приведены результаты численного моделирования эволюции во времени волнового процесса в двух коаксиальных оболочках (левые фрагменты относятся к внешней оболочке, правые — к внутренней) при отсутствии/наличии жидкости во внутренней оболочке и заполненном жидкостью зазоре между оболочками, описываемого уравнениями (37), при различных начальных условиях:

- при (39) с $k = 0,2$ и $\sigma_1 = 0,2$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (без жидкости во внутренней оболочке) (см. Рис. 4а, б);
- при (40) с $k = 0,2$, то есть при задании в начальный момент времени уединенной волны во внешней оболочке и $\sigma_1 = 0,2$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (см. Рис. 4в, г);
- при (39) для заданных в начальный момент возмущений во внешней и внутренней оболочках в виде двух волн — задней, с большей амплитудой при $k = 0,225$ с начальным значением пространственной переменной $\eta = -50$, и передней, с меньшей амплитудой при $k = 0,2$ с $\eta = 0$, при этом $\sigma_1 = 0,2$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (см. Рис. 4д, е);
- при (39) с $k = 0,2$ и $\sigma_1 = 0,2$, $\sigma_2 = 0$ (внутренняя оболочка выполнена из несжимаемого материала ($\mu_0 = 1/2$), $\sigma_3 = 0,4$, с наличием жидкости во внутренней оболочке (см. Рис. 4ж, з);
- при (39) с $k = 0,2$ и $\sigma_1 = 0,2$, $\sigma_2 = 0,2$, $\sigma_3 = 0,4$ (см. Рис. 4и, к);
- при (40) с $k = 0,2$ и $\sigma_1 = 0,2$, $\sigma_2 = 0,2$, $\sigma_3 = 0,4$ (см. Рис. 4л, м).

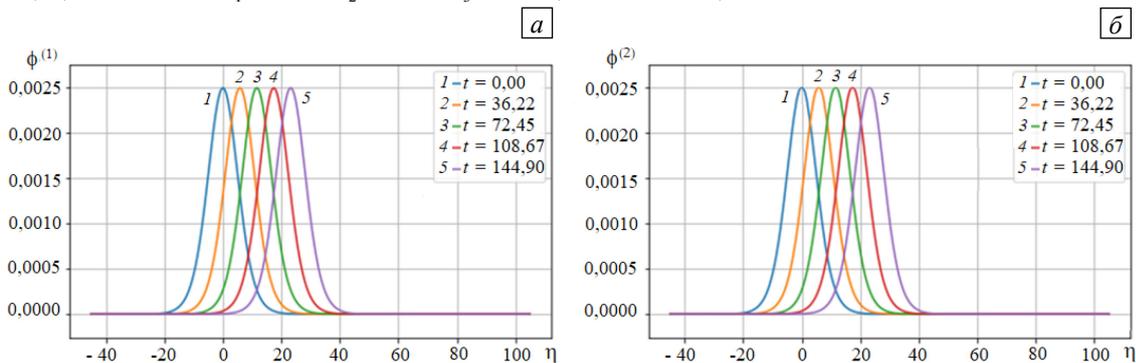


Рис. 4. Волновой процесс в системе оболочки–жидкость в разные моменты времени

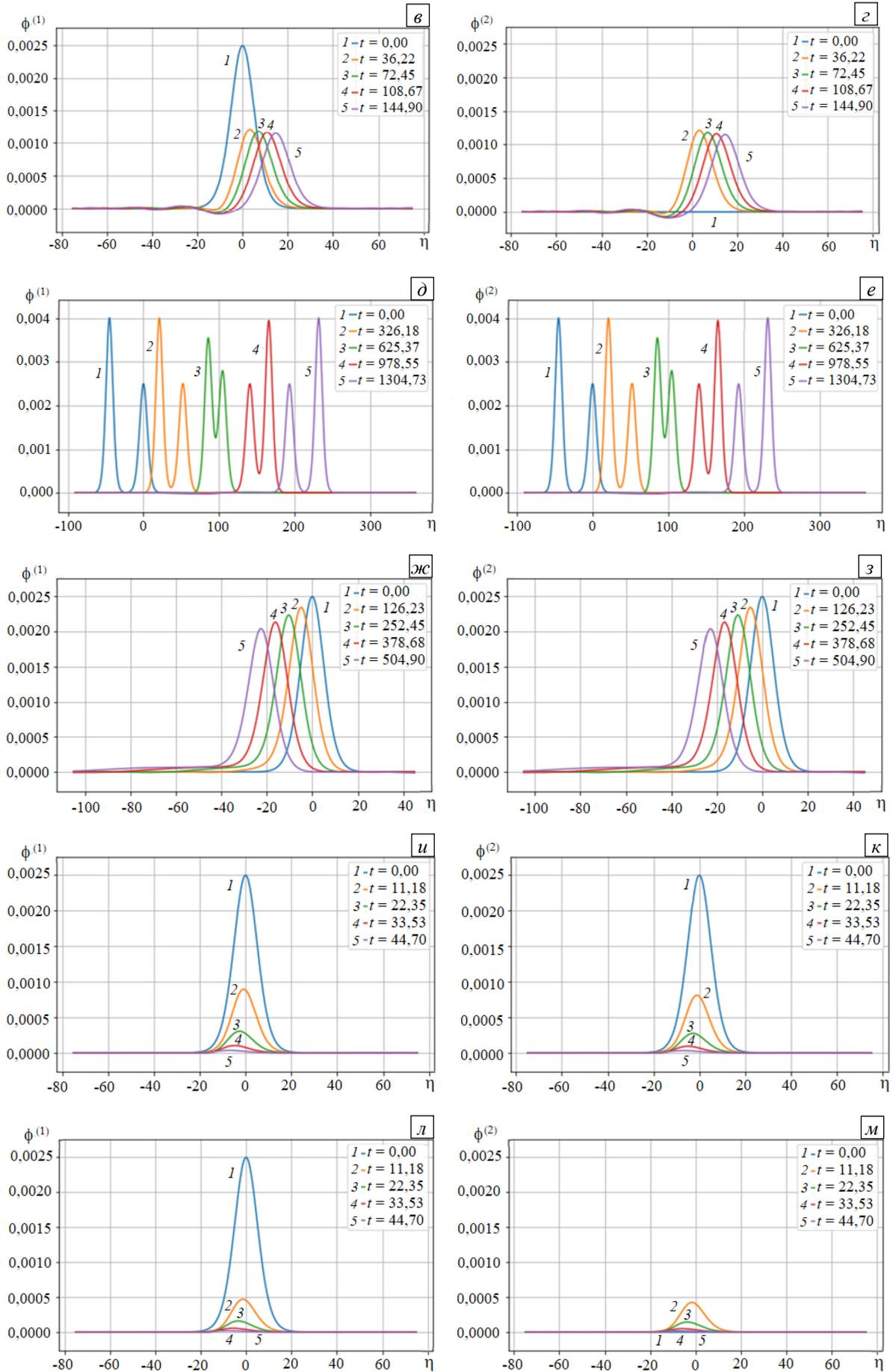


Рис. 4. Продолжение

Представленные на рисунке 4а–е результаты показывают, что при отсутствии жидкости во внутренней оболочке наблюдается движение волн вправо — это говорит о том, что волны распространяются со сверхзвуковой скоростью. Как хорошо видно из рисунка 4а, б, эволюция уединенных волн деформации в оболочках происходит с постоянной скоростью и амплитудой. Графики на рисунке 4в, г показывают, что при начальных условиях в виде уединенной волны деформации только во внешней оболочке с течением времени возбуждается волна во внутренней оболочке. При этом амплитуда у заданной волны падает, а у появившейся — растет. Со временем в оболочках имеют место две волны практически одинаковой амплитуды и скорости. Как свидетельствует рисунок 4д, е, заданные две уединенные волны, имеющие в начальный момент времени разные скорости и амплитуды, со временем взаимодействуют между собой как частицы, а именно, после воздействия друг на друга сохраняют свою форму и скорость. Отмеченное выше позволяет утверждать, что в рассматриваемых случаях уединенные волны деформации в оболочках представляют собой сверхзвуковые солитоны.

Результаты рисунка 4ж–м демонстрируют, что в присутствии вязкой жидкости во внутренней оболочке волны движутся влево — это говорит о том, что распространение волн происходит с дозвуковой скоростью. Кроме того, наблюдается падение амплитуды и скорости уединенных волн деформации в оболочках. Если материал внутренней оболочки несжимаем, интенсивность затухания волнового процесса выражена менее ярко (Рис. 4ж, з). При начальных условиях в виде уединенной волны деформации только во внешней оболочке с течением времени возбуждается волна и во внутренней оболочке. При этом амплитуда у заданной волны становится меньше, а у возникшей — вначале увеличивается, а затем также падает. Исходя из этого можно сделать вывод, что при наличии вязкой жидкости во внутренней оболочке наблюдается разрушение солитонов деформации в оболочках.

4. Выводы

В работе сформулирована новая математическая модель гидроупругости соосных оболочек с физической нелинейностью Шамеля. Посредством ее асимптотического анализа получена система двух эволюционных уравнений для исследования нелинейного гидроупругого волнового процесса в рассматриваемой механической системе. С использованием техники базисов Грёбнера построена новая разностная схема для численного решения системы обобщенных эволюционных уравнений Шамеля. В отличие от случая одной оболочки с нелинейностью Шамеля, изготовленной из несжимаемого материала и не заполненной жидкостью, которая исследовалась в [8, 9], в рамках предложенной модели, возможен учет сжимаемости материала обеих соосных оболочек.

Выполненные вычислительные эксперименты позволили оценить влияние на процессы эволюции нелинейных уединенных волн деформации в оболочках не только инерции движения вязкой несжимаемой жидкости между ними, но и инерции движения вязкой жидкости во внутренней оболочке. Данные вычислений дали основание заключить, что при отсутствии жидкости во внутренней оболочке в стенках кольцевого канала имеют место сверхзвуковые солитоны деформации.

Показано, что наличие в начальный момент времени волны деформаций во внешней оболочке приводит со временем к возбуждению во внутренней оболочке волны деформаций. Это указывает на передачу энергии от внешней оболочки к внутренней через слой вязкой жидкости. Данный процесс сопровождается падением амплитуды волны во внешней оболочке, и, как следствие, снижением скорости ее распространения. При этом амплитуда волны во внутренней оболочке сначала увеличивается, а затем медленно падает. С течением времени в каждой из оболочек устанавливаются уединенные волны практически одинаковой амплитуды и скорости.

Вычислительные эксперименты показали, что при наличии вязкой жидкости во внутренней оболочке наблюдается разрушение солитонов деформации в оболочках, а эволюция нелинейных волн деформации происходит с дозвуковой скоростью.

Представленная в работе модель и результаты вычислительных экспериментов могут быть использованы при волновой диагностике состояния трубопроводов, заполненных вязкой жидкостью.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-29-00140), <https://rscf.ru/project/23-29-00140/>.

Литература

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
2. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2010. 368 с.
3. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods // J. Math. Phys. Sci. 1970. Vol. 4. P. 64-73.
4. Nariboli G.A., Sedov A. Burgers's-Korteweg-De Vries equation for viscoelastic rods and plates // J. Math. Anal. Appl. 1970. Vol. 32. P. 661-677. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(70\)90290-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(70)90290-8)
5. Ерофеев В.И., Клюева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. Т. 48, № 6. С. 725-740.

6. Ерофеев В. И., Кажжаев В.В. Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в стержне // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10, № 2. С. 127-136. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.11>
7. Бочкарев А.В., Землянхун А.И., Могилевич Л.И. Уединенные волны в неоднородной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с упругой средой // Акустический журнал. 2017. Т. 63, № 2. С. 145-151. <https://doi.org/10.7868/S0320791917020022>
8. Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // Nonlinear Dyn. 2019. Vol. 98. P. 185-194. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05181-5>
9. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells // J. Sound Vib. 2021. Vol. 491. 115752. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115752>
10. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах // Громека И.С. Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР. 1952. С. 149-171.
11. Громека И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках // Громека И.С. Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 172-183.
12. Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М., Л.: Гостехиздат, 1949. 103 с.
13. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. The linear approximation for long waves // Phil. Mag. 1955. Vol. 46. P. 199-221. <http://dx.doi.org/10.1080/14786440208520564>
14. Paidoussis M.P. Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow. Vol. 2. London: Elsevier Academic Press, 2016. 942 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4>
15. Amabili M. Nonlinear mechanics of shells and plates in composite, soft and biological materials. Cambridge, Cambridge University Press, 2018. 586 p. <http://doi.org/10.1017/9781316422892>
16. Paidoussis M.P. Dynamics of cylindrical structures in axial flow: A review // J. Fluids Struct. 2021. Vol. 107. 103374. <http://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2021.103374>
17. Aljani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013 // Int. J. Nonlin. Mech. 2014. Vol. 58. P. 233-257. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.012>
18. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. 2013. Т. 6, № 1. С. 94-102. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.1.12>
19. Кореньков А.Н. Уединенные волны на цилиндрической оболочке с жидкостью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6, № 1. С. 131-143. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.110>
20. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Сенин А.Н. Анализ пространственных колебаний коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // Вычисл. мех. сплош. сред. 2018. Т. 11, № 4. С. 448-462. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.35>
21. Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии // Вычисл. мех. сплош. сред. 2013. Т. 6, № 3. С. 336-345. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.3.38>
22. Блинков Ю.А., Мясной А.В., Могилевич Л.И. Распространение нелинейных волн в соосных оболочках, заполненных вязкой жидкостью // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10, № 2. С. 172-186. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.15>
23. Mogilevich L., Ivanov S. Waves in two coaxial elastic cubically nonlinear shells with structural damping and viscous fluid between them // Symmetry. 2020. Vol. 12. 335. <https://doi.org/10.3390/sym12030335>
24. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 778 с.
25. Ильющин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
26. Singh V.K., Bansal G., Agarwal M., Negi P. Experimental determination of mechanical and physical properties of almond shell particles filled biocomposite in modified epoxy resin // J. Material. Sci. Eng. 2016. Vol. 5, No. 3. 1000246. <https://www.hilarispublisher.com/open-access/experimental-determination-of-mechanical-and-physical-properties-of-almond-shell-particles-filled-biocomposite-in-modified-epoxy-r-2169-0022-1000246.pdf>
27. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 204 с.
28. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М: Наука, 1972. 432 с.
29. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
30. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: ЛГУ, 1978. 296 с.
31. Nayfeh A.H. Perturbation methods. New York, Wiley, 1973. 425 p.
32. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // SIGMA. 2006. Vol. 2. 051. <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2006.051>
33. Блинков Ю.А., Гердт В.П., Маринов К.Б. Дискретизация квазилинейных эволюционных уравнений методами компьютерной алгебры // Программирование. 2017. № 2. С. 28-34. (English version <https://doi.org/10.1134/S0361768817020049>)

References

1. Gorshkov A.G., Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., Tarlakovskiy D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in continuous media]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 472 p.
2. Kudryashov N.A. *Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki* [Methods of nonlinear mathematical physics]. Dolgoprudny, Intellect, 2010. 368 p.
3. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods. *J. Math. Phys. Sci.*, 1970, vol. 4, pp. 64-73.
4. Nariboli G.A., Sedov A. Burgers's-Korteweg-De Vries equation for viscoelastic rods and plates. *J. Math. Anal. Appl.*, 1970, vol. 32, pp. 661-677. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(70\)90290-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(70)90290-8)
5. Erofeev V.I., Klyueva N.V. Solitons and nonlinear periodic strain waves in rods, plates, and shells (A review). *Acoust. Phys.*, 2002, vol. 48, pp. 643-655.

6. Erofeev V.I., Kazhaev V.V. Inelastic interaction and splitting of deformation solitons propagating in the rod. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 127-136. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.11>
7. Bochkarev A.V., Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. Solitary waves in an inhomogeneous cylindrical shell interacting with an elastic medium. *Acoust. Phys.*, 2017, vol. 63, pp. 148-153. <https://doi.org/10.1134/S1063771017020026>
8. Zemlyanukhin A.I., Andrianov I.V., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. The generalized Schamel equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *Nonlinear Dyn.*, 2019, vol. 98, pp. 185-194. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05181-5>
9. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Andrianov I.V., Erofeev V.I. The Schamel-Ostrovsky equation in nonlinear wave dynamics of cylindrical shells. *J. Sound Vib.*, 2021, vol. 491, 115752. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115752>
10. Gromeka I.S. K teorii dvizheniya zhidkosti v uzkih tsilindricheskikh trubakh [To the theory of fluid motion in narrow cylindrical tubes]. Sobraniye sochineniy [Collected works]. Moscow, Izd-vo AN USSR, 1952. Pp. 149-171.
11. Gromeka I.S. O skorosti rasprostraneniya volnoobraznogo dvizheniya zhidkostey v uprugikh trubkakh [On the velocity of wave-like motion of fluids in elastic tubes]. Sobraniye sochineniy [Collected Works]. Moscow, Izd-vo AN USSR 1952. Pp. 172-183.
12. Zhukovskiy N.E. O gidravlicheskom udare v vodoprovodnykh trubakh [On hydraulic shock in water pipes]. Moscow, Gostekhizdat, 1949. 103 p.
13. Womersley J.R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube. I. The linear approximation for long waves. *Phil. Mag.*, 1955, vol. 46, pp. 199-221. <http://dx.doi.org/10.1080/14786440208520564>
14. Païdoussis M.P. *Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow. Vol. 2.* London, Elsevier Academic Press, 2016. 942 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4>
15. Amabili M. *Nonlinear mechanics of shells and plates in composite, soft and biological materials.* Cambridge, Cambridge University Press, 2018. 586 p. <http://doi.org/10.1017/9781316422892>
16. Païdoussis M.P. Dynamics of cylindrical structures in axial flow: A review. *J. Fluids Struct.*, 2021, vol. 107, 103374. <http://doi.org/10.1016/j.jfluidstruct.2021.103374>
17. Alijani F., Amabili M. Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013. *Int. J. Nonlin. Mech.*, 2014, vol. 58, pp. 233-257. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.09.012>
18. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Stability of coaxial cylindrical shells containing a rotating fluid. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 94-102. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.1.12>
19. Korenkov A.N. Solitary waves on a cylinder shell with liquid. *Vestnik St.Petersb. Univ.Math.*, 2019, vol. 52, pp. 92-101. <https://doi.org/10.3103/S1063454119010060>
20. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Senin A.N. Analysis of spatial vibrations of coaxial cylindrical shells partially filled with a fluid. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 448-462. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.35>
21. Blinkova A.Yu., Blinkov Yu.A., Mogilevich L.I. Non-linear waves in coaxial cylinder shells containing viscous liquid inside with consideration for energy dispersion. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 336-345. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.3.38>
22. Blinkov Yu.A., Mesyanzhin A.V., Mogilevich L.I. Nonlinear wave propagation in coaxial shells filled with viscous liquid. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 2, pp. 172-186. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.15>
23. Mogilevich L., Ivanov S. Waves in two coaxial elastic cubically nonlinear shells with structural damping and viscous fluid between them. *Symmetry*, 2020, vol. 12, 335. <https://doi.org/10.3390/sym12030335>
24. Kauderer H. *Nichtlineare Mechanik* [Nonlinear Mechanics]. Springer, 1958. 684 p.
25. Il'yushin A.A. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Continuum mechanics]. Moscow, MSU, 1990. 310 p.
26. Singh V. K., Bansal G., Agarwal M., Negi P. Experimental determination of mechanical and physical properties of almond shell particles filled biocomposite in modified epoxy resin. *J. Material. Sci. Eng.*, 2016, vol. 5, no. 3, 1000246. <https://www.hilarispublisher.com/open-access/experimental-determination-of-mechanical-and-physical-properties-of-almond-shell-particles-filled-biocomposite-in-modified-epoxy-r-2169-0022-1000246.pdf>
27. Lukash P.A. *Osnovy nelineynoy stroitel'noy mekhaniki* [Fundamentals of nonlinear structural mechanics]. Moscow, Stroyizdat, 1978. 204 p.
28. Volmir A.S. *Nelineinaya dinamika platinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow, Nauka, 1972. 432 p.
29. Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquids and gases]. Moscow, Drofa, 2003. 840 p.
30. Vallander S.V. *Lektsii po gidroaeromekhanike* [Lectures on hydroaeromechanics]. Leningrad, LGU, 1978. 296 p.
31. Nayfeh A.H. *Perturbation methods.* New York, Wiley, 1973. 425 p.
32. Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations. *SIGMA*, 2006, vol. 2. 051. <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2006.051>
33. Blinkov Yu.A., Gerdt V.P., Marinov K.B. Discretization of quasilinear evolution equations by computer algebra methods. *Program. Comput. Soft.*, 2017, vol. 43, pp. 84-89. <https://doi.org/10.1134/S0361768817020049>

Поступила в редакцию 03.03.2023; после доработки 29.05.2023; принята к опубликованию 14.07.2023

Сведения об авторах

Блинков Юрий Анатольевич, дфмн, зав. каф., Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (СГУ), 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83; e-mail: blinkovua@info.sgu.ru

Могилевич Лев Ильич, дтн, проф., Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А. (СГТУ имени Гагарина Ю.А.), 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77; e-mail: mogilevichli@gmail.com

Попов Виктор Сергеевич, дтн, проф., СГТУ имени Гагарина Ю.А.; e-mail: vic_p@bk.

Попова Елизавета Викторовна, б/с, асп., СГТУ имени Гагарина Ю.А.; e-mail: elizaveta.popova.97@bk.ru