

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.3.33](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.33)

УДК 534-16

ПОВЕДЕНИЕ ГИБКОЙ СЕТЧАТОЙ ПЛАСТИНЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ *

Е.Ю. Крылова

Саратовский национальный исследовательский университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Российская Федерация

Объектом исследования является гибкая пластина сетчатой структуры с заземленными краями. На некотором расстоянии от пластины параллельно ей расположен неподвижный электрод. За счет внешнего источника между пластиной и электродом создается электрическое поле с заданной разностью потенциалов. Пластина притягивается (прогибается) в нормальном к электроду направлении и при достижении баланса между электрическими силами (силой Кулона) и силами упругости приходит в равновесное состояние. При увеличении разности потенциалов пластина перемещается в новое равновесное положение. Уравнения состояния элемента геометрически нелинейной пластины и граничные условия получены в рамках гипотез Кирхгофа из вариационного принципа Остроградского–Гамильтона. Рассматривается изотропный однородный материал. Масштабные эффекты приняты во внимание посредством применения модифицированной моментной теории упругости. При этом предполагается, что поля перемещений и вращений не являются независимыми. Геометрическая нелинейность учтена согласно теории Кармана. Сетчатая структура пластины моделировалась в рамках континуальной теории Г.И. Пшеничного, что позволило заменить регулярную систему ребер сплошным слоем. Исходя из условий равновесия прямоугольного элемента записаны соотношения, связывающие механические напряжения в эквивалентной гладкой пластине и в ребрах пластины сетчатой структуры. Для определения физических соотношений сетчатой пластины использован метод множителей Лагранжа. Для численного решения системы дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные колебания сетчатой пластины, применен метод Бубнова–Галеркина. Математическая модель, алгоритм решения и программный комплекс верифицированы путем сравнения авторских результатов расчета с данными натурального эксперимента и результатами других авторов. Исследовано влияние геометрии сетчатой структуры пластины, величины постоянного электрического напряжения, геометрической нелинейности на частоту собственных колебаний жестко заземленной пластины. Численные результаты приведены для пластины из графена.

Ключевые слова: углеродная нанопластина, сетчатая пластина, модифицированная моментная теория, электростатика, нелинейные колебания, собственные частоты.

BEHAVIOR OF A FLEXIBLE MESH PLATE PLACED IN AN ELECTROSTATIC FIELD

E.Yu. Krylova

Saratov State University, Saratov, Russian Federation

The object of study is a flexible mesh plate with clamped edges. A stationary electrode is arranged in parallel with the plate at some distance from it. The electric field between the plate and electrode with a given potential difference is created by an external source. The plate is attracted (deflected) towards the electrode and comes in equilibrium when a balance between the electric (Coulomb force) and elastic forces is reached. When the potential difference increases, the plate moves to a new equilibrium position. The state equations of a geometrically nonlinear plate and boundary conditions based on the Kirchhoff hypotheses are derived from the Ostrogradsky–Hamilton variational principle. An isotropic, homogeneous material is considered. The scale effects are taken into account by means of the couple stress theory. It is assumed that the fields of displacement and rotation are not independent. Geometric nonlinearity is taken into account according to Von Karman's theory. The mesh structure of the plate was modeled using the continuum theory developed by G. I. Pshenichny, which made it possible to replace the system of regular ribs by a continuous layer. Based on equilibrium conditions for a rectangular element, the relations between stresses arising in an equivalent smooth plate and stresses in the ribs were derived. The Lagrange multiplier method was used to determine the mesh plate physical ratios. The Bubnov–Galerkin method was applied to numerically solve a system of differential equations describing the nonlinear oscillations of the mesh plate under consideration. The mathematical model, solution algorithm and software package were verified by comparing the author's calculation results with the full-scale experiment data and with the results obtained by other authors. The paper investigates the influence of plate mesh structure geometry, constant voltage value, and geometric non-linearity on the natural frequency of the clamped plate. Numerical results are given for the graphene plate.

Key words: carbon nano-plate, mesh plate, modified moment theory, electrostatics, non-linear oscillations, natural frequencies

1. Введение

Микроэлектромеханические системы надежно зарекомендовали себя как устройства для анализа информации на атомном уровне. В наши дни, когда доступны самые современные производственные технологии, возникает необходимость проектирования приборов, способных измерять массу и силу на уровне аттоньютон, обнаруживать пары газов и вирусы. Резонаторы микронного размера имеют ограничения на обнаружение объектов на субмикронном уровне. Для решения данной проблемы возникла потребность в наномеханических системах (НЭМС).

Так, на основе НЭМС нового поколения разработаны современные датчики (температуры, давления, влажности, газа) и электрохимические биосенсоры [1–4], которые можно использовать в биомедицине, автомобилестроении, пищевой промышленности, при мониторинге окружающей среды, в сельском

хозяйстве и другом [5–8]. Базой подобных систем зачастую служат структуры на основе графена вследствие его превосходных свойств [9–12].

В типичной НЭМС главными конструкционными элементами являются такие механические объекты, как балки, пластины, оболочки, которые колеблются под действием сил различной природы [13–14]. Таким образом, НЭМС можно определить как миниатюрное устройство, где объединены механические элементы, выполняющие функции чувствительного элемента, с электрической системой управления. Посредством переменного или постоянного тока (или их комбинации) возбуждаются колебания чувствительного элемента на гигагерцовом уровне. Такую сверхвысокую частоту сложно достичь в устройствах микронного размера. В теоретических и экспериментальных работах [15–17] показано, что в случае микро- и наноразмерных пластин результаты, установленные на основе классической теории, не учитывающей так называемые эффекты масштаба, могут быть некорректными. Именно поэтому получили развитие неклассические теории континуума [18–24], обзор применения которых к изучению поведения элементов МЭМС и НЭМС дан в статье [25].

Аналізу особенностей режимов работы, амплитудно-частотных характеристик, определению частот собственных колебаний, нелинейной динамике МЭМС и НЭМС балочного типа посвящены исследования [26–29]. В источниках [30–34] проводилась оценка критических электростатических напряжений, строились кривые частотных характеристик, форм собственных колебаний тонких прямоугольных микропластин с электрическим приводом. Показано, что жесткость микропластины уменьшается за счет увеличения постоянного электрического напряжения, увеличение же переменного напряжения существенно на ней не сказывается. Влияние профиля начальных несовершенств на свободные и вынужденные динамические реакции микропластины под действием силы Кулона рассмотрено в работах [35–37].

Значительные усилия исследователей направлены на изучение динамики механических микро- и нанорезонаторов на основе углеродных нанотрубок и листов графена [38–54]. Влияние длины наноболочки, диаметра и граничных условий на основную частоту резонатора описано в статье [38]. Авторы работы [39] изготовили однослойный графеновый резонатор и проверили его реакцию на изменение температуры. Наблюдался резонанс в мегагерцовом диапазоне, так как длина чувствительного элемента составляла несколько микрометров. В исследовании [40] представлены результаты влияния амплитуды вибрации и геометрии на частоту собственных колебаний нанопластины. Эрикссон с коллегами [42] использовали теорию упругости континуума для изучения поведения резонаторов на основе круглых нанопластин. Они получили аналитические выражения для собственных частот в зависимости от геометрических параметров системы. Авторы работы [43] провели анализ собственной частоты нанорезонатора в зависимости от граничных условий, показав, что наибольшая чувствительность достижима в условиях жесткой заделки. Интерес к особенностям колебаний нанопластин не ослабевает, проводятся исследования влияния соотношения сторон, граничных условий и нелокальных параметров [45–47], температуры [48–50], упругого основания [51–53] на частотно-амплитудные характеристики системы.

На сегодняшний момент имеется ограниченное количество источников, посвященных изучению сетчатых пластин с учетом масштабных эффектов [55–58], среди них нет исследований, посвященных анализу собственных частот нелинейных колебаний и влиянию на них электростатических сил. Данная работа имеет целью заполнение вышеуказанного пробела.

2. Постановка задачи

Предметом исследования является сетчатая прямоугольная пластина, занимающая в пространстве область $\Omega = \{0 \leq x \leq c; 0 \leq y \leq b; -h/2 \leq z \leq h/2\}$, на расстоянии g_0 от которой находится электрод (Рис. 1). V — разность потенциалов между пластиной и электродом. Материал пластины изотропный

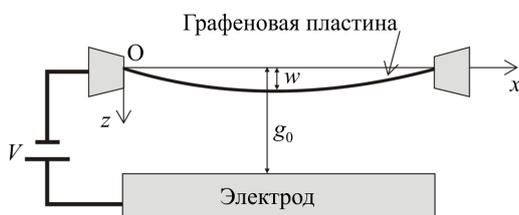


Рис. 1. Расчетная схема

однородный, подчиняющийся закону Гука. Геометрическая нелинейность принята по модели Теодора фон Кармана [59]. Масштабные эффекты учитываются посредством модифицированной моментной теории, в предположении, что поля перемещений и вращений не являются независимыми. Определяющие соотношения выбираются в форме, предложенной в работе [60]. Сетчатая структура пластины учтена по теории Г.И. Пшеничного [61]. В основу математической модели положены кинематические гипотезы Кирхгофа.

Отличные от нуля компоненты симметричного тензора полных деформаций с учетом принятых допущений примут вид:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1)$$

где w — прогиб, u , v — смещения срединной поверхности пластины в направлениях x , y соответственно.

В случае стесненного вращения компоненты вектора поворотов определяются как $\theta_i = 1/2 \operatorname{rot} u_i$. Таким образом, отличные от нуля компоненты симметричного тензора градиента кривизны представляются как

$$\chi_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}, \quad \chi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad \chi_{xz} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right), \quad \chi_{yz} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (2)$$

Определяющие соотношения для материала пластины выберем в соответствии с [60]:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} [e_{xx} + \nu e_{yy}], \quad x \rightleftharpoons y, \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} e_{xy}, \quad (m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}, m_{xz}, m_{yz}) = \frac{El^2}{1+\nu} (\chi_{xx}, \chi_{yy}, \chi_{xy}, \chi_{xz}, \chi_{yz}), \quad (3)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора Коши, m_{ij} — компоненты симметричного тензора момента высшего порядка, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала пластины, l — дополнительный независимый материальный параметр длины.

Уравнения движения элемента сплошной микрополярной пластины с учетом электростатического воздействия, граничные и начальные условия получим из энергетического принципа Остроградского–Гамильтона [62]:

$$\int_{t_0}^t (\delta K - \delta U + \delta W) dt = 0. \quad (4)$$

Здесь: K — кинетическая энергия; U — потенциальная энергия; W — работа внешних сил. С учетом микрополярной теории потенциальная энергия в упругом теле записывается в виде:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + m_{xx} \chi_{xx} + m_{yy} \chi_{yy} + 2m_{xy} \chi_{xy} + 2m_{xz} \chi_{xz} + 2m_{yz} \chi_{yz}) d\Omega,$$

$$K = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega.$$

Вариация работы внешних сил представляется как $\delta W = \delta W_{coul}$, при этом $\delta W_{coul} = \int_0^c \int_0^b F_{coul} \delta w dx dy$ —

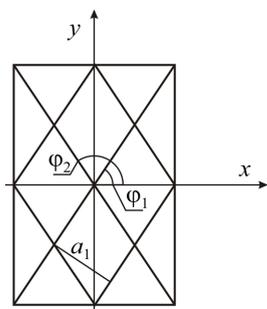


Рис. 2. Схема сетки

вариация работы электростатической силы (силы Кулона), где $F_{coul} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2}{2(g_0 - w)^2}$ — сила Кулона, ε_r — диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 — электрическая постоянная, V — разность потенциалов между пластиной и электродом.

Исходная пластина имеет сетчатую структуру (Рис. 2). Предположим, что она состоит из нескольких семейств густо расположенных ребер. При этом стыки ребер считаются жесткими. Все семейства ребер имеют одинаковую толщину. Согласно континуальной теории Г.И. Пшеничного регулярную систему ребер можно заменить сплошным слоем, вследствие чего напряжения и моменты высших порядков, возникающие в эквивалентной гладкой оболочке,

будут связаны с напряжениями и моментами высших порядков в ребрах, следующими соотношениями:

$$\sigma_{xx} = \sum_{j=1}^{nr} \frac{\sigma_x^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, \quad \sigma_{yy} = \sum_{j=1}^{nr} \frac{\sigma_x^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, \quad \sigma_{xy} = \sum_{j=1}^{nr} \frac{\sigma_x^j \delta_j \cos^2 \varphi_j \sin \varphi_j}{a_j}, \quad m_{xx} = \sum_{j=1}^{nr} \frac{m_{xx}^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j},$$

$$m_{yy} = \sum_{j=1}^{nr} \frac{m_{xx}^j \delta_j \sin^2 \varphi_j}{a_j}, \quad m_{yx} = \sum_{j=1}^{nr} \frac{m_{xx}^j \delta_j \cos^2 \varphi_j \sin \varphi_j}{a_j}, \quad m_{xz} = \sum_{j=1}^{nr} \frac{m_{yx}^j \delta_j \cos^2 \varphi_j}{a_j}, \quad m_{yz} = \sum_{j=1}^{nr} \frac{m_{yx}^j \delta_j \sin \varphi_j}{a_j}. \quad (5)$$

Соотношения (5) найдены из условий равенства сил и моментов, действующих на одинаковых элементарных площадках пластины, состоящей из системы ребер, и эквивалентной ей гладкой пластины. В выражениях (5) nr — количество семейств ребер в рассматриваемой сетчатой пластине; j — номер семейства ребер; a_j , δ_j , φ_j — расстояние между ребрами, ширина ребер, угол между осью Ox и осью ребра j -го семейства соответственно (Рис. 2).

Дополнительные условия статической эквивалентности исходной сетчатой пластины и эквивалентной ей сплошной получены с помощью метода множителей Лагранжа из условия достижения функционалом стационарных значений:

$$m_{yx}^j = m_{xz} \cos \varphi_j + m_{yz} \sin \varphi_j, \quad (6)$$

$$\{\sigma_x^j, m_x^j\} = \{\sigma_{xx}, m_{xx}\} \cos^2 \varphi_j + \{\sigma_{yy}, m_{yy}\} \sin^2 \varphi_j + \{\sigma_{xy}, m_{xy}\} \cos \varphi_j \sin \varphi_j.$$

Принимая во внимание соотношения (5), (6), можно записать выражения для всех усилий и моментов микрополярной гладкой пластины (с индексом s), эквивалентной исходной сетчатой, учитывающие сетчатую структуру:

$$\begin{aligned} N_{xx}^s &= A_{40}N_{xx} + A_{22}N_{yy} + A_{31}T, & N_{yy}^s &= A_{22}N_{xx} + A_{04}N_{yy} + A_{13}T, \\ M_{xx}^s &= A_{40}M_{xx} + A_{22}M_{yy} + A_{31}H, & M_{yy}^s &= A_{22}M_{xx} + A_{04}M_{yy} + A_{13}H, \\ T^s &= A_{31}N_{xx} + A_{13}N_{yy} + A_{22}T, & H^s &= A_{31}M_{xx} + A_{13}M_{yy} + A_{22}H, \\ Y_{xx}^s &= A_{40}Y_{xx} + A_{22}Y_{yy} + A_{31}Y_{xy}, & Y_{yy}^s &= A_{22}Y_{xx} + A_{04}Y_{yy} + A_{13}Y_{xy}, & Y_{xy}^s &= A_{31}Y_{xx} + A_{13}Y_{yy} + A_{22}Y_{xy}, \\ Y_{yz}^s &= A_{11}Y_{xz} + A_{02}Y_{yz}, & Y_{xz}^s &= A_{20}Y_{xz} + A_{11}Y_{yz}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$A_{sk} = \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j \cos^s \varphi_j \sin^k \varphi_j}{a_j} \quad (s, k = \overline{0, 4}),$$

$$\{N_{xx}, M_{xx}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z^{\{0,1\}} dz, \quad \{T, H\} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z^{\{0,1\}} dz, \quad (8)$$

$$Y_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} m_{xx} dz, \quad Y_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} m_{xy} dz, \quad Y_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} m_{xz} dz, \quad x \Leftrightarrow y.$$

Подставляя выражения (7) в уравнения движения, полученные из вариационного принципа Остроградского–Гамильтона, получим разрешающую систему уравнений движения элемента микрополярной пластины в напряжениях с учетом ее сетчатой структуры:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{yy}^s}{\partial y} + \frac{\partial T^s}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{xz}^s}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{yz}^s}{\partial x \partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, & 1 \\ \frac{\partial N_{xx}^s}{\partial x} + \frac{\partial T^s}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{yz}^s}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y_{xz}^s}{\partial x \partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & 2 \\ \frac{\partial^2 M_{xx}^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}^s}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx}^s \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy}^s \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial T^s}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{\partial T^s}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + 4 T^s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - & \\ - \frac{\partial^2 Y_{xx}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Y_{yy}^s}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Y_{xy}^s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y_{xy}^s}{\partial y^2} + F_{coul} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. & 3 \end{aligned} \quad (9)$$

Далее будем рассматривать динамический процесс без учета распространения упругих волн. Введем функцию напряжений в срединной плоскости по формулам [63]:

$$N_{xx} = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_{yy} = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad T = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (10)$$

Так как продольные нагрузки не присутствуют в разрешающей системе уравнений движения элемента микрополярной сетчатой пластины (9), то инерционные члены относительно u и v можно отбросить. В таком случае уравнения (9₁) и (9₂) после введения функции напряжений (10) будут удовлетворяться автоматически. Уравнение относительно функции прогиба (9₃) с учетом (7) и (10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\frac{Eh^2 (A_{04} + A_{22} \nu)}{12(1-\nu^2)} + \frac{A_{22} El^2}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \left(\frac{Eh^2 (A_{13} (\nu-3) - 2A_{31} \nu)}{12(1-\nu^2)} + \frac{3(A_{13} - A_{31}) El^2}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} - \\ - \left(\frac{Eh^2 (2A_{22} (2-\nu) + (A_{04} + A_{40}) \nu)}{12(1-\nu^2)} + \frac{(A_{04} - 3A_{22} + A_{40}) El^2}{1+\nu} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + \left(\frac{Eh^2 (A_{31} (\nu-3) - 2A_{13} \nu)}{12(1-\nu^2)} + \frac{3(A_{31} - A_{13}) El^2}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - \left(\frac{Eh^2 (A_{40} + A_{22} \nu)}{12(1-\nu^2)} + \frac{EA_{22} l^2}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+A_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A_{22} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \frac{\partial w}{\partial y} + 2A_{31} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \frac{\partial w}{\partial x} - A_{13} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4A_{31} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 4A_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - (A_{13} - 2A_{31}) \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial w}{\partial y} \\
 &- (2A_{22} - A_{40}) \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} + A_{04} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4A_{13} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + A_{40} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A_{31} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
 &+ (A_{04} - 2A_{22}) \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + (2A_{13} - A_{31}) \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + 2A_{13} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \frac{\partial w}{\partial y} + A_{22} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{F_{Coul}}{h} = 0. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Присоединим к нему уравнение совместности деформаций:

$$\begin{aligned}
 &\frac{A_{40} - A_{22}\nu}{E} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{A_{13}\nu - A_{31}(3+2\nu)}{E} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \frac{2A_{22}(2+\nu) - (A_{04} + A_{40})}{E} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \\
 &+ \frac{A_{31}\nu - A_{13}(3+2\nu)}{E} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + \frac{A_{04} - A_{22}\nu}{E} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Разложим выражение силы Кулона в ряд Маклорена:

$$F_{coul} = q_0 + \sum_{i=0}^{N_1} K_i w^{i+1}.$$

В разложении $q_0 = \varepsilon_r \varepsilon_0 V^2 / (2g_0^2)$ и $K_0 = \varepsilon_r \varepsilon_0 V^2 / g_0^3$ — коэффициенты линейной части, $K_1 = 3\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2 / (2g_0^4)$, $K_2 = 2\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2 / g_0^5$, $K_3 = 5\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2 / (2g_0^6)$, $K_4 = 3\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2 / g_0^7$, $K_5 = 7\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2 / (2g_0^8)$, $K_6 = 4\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2 / g_0^9$, $K_7 = 9\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2 / 2g_0^{10}$, $K_8 = 5\varepsilon_r \varepsilon_0 V^2 / g_0^{11}$.

Рассмотрим граничные условия жесткой заделки:

$$\begin{aligned}
 x = 0, c: \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \\
 y = 0, b: \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,
 \end{aligned} \quad (13)$$

и начальные условия:

$$t = 0: \quad w = \varphi_w, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \psi_w. \quad (14)$$

3. Методы решения

Пластина представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы, следовательно, число собственных частот бесконечно велико и каждой частоте отвечает определенная форма колебаний. Для того чтобы иметь возможность исследовать не только основной тон колебаний пластины выберем представление для функции прогиба и усилий следующим образом:

$$w = D_{nm}(t)(1 - \cos(2n\pi x/c))(1 - \cos(2m\pi y/b)), \quad F = B_{nm}(1 - \cos(2n\pi x/c))(1 - \cos(2m\pi y/b)), \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Применив к системе уравнений (11), (12) метод Бубнова–Галеркина, приходим к системе двух уравнений, из которых легко получается обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно коэффициента $D_{nm}(t)$ в разложении функции прогиба w :

$$\begin{aligned}
 &\frac{d^2 D_{nm}(t)}{dt^2} - \frac{147744025K_7}{36864h\rho} D_{nm}^8(t) - \frac{4601025K_6}{4096h\rho} D_{nm}^7(t) - \frac{20449K_5}{64h\rho} D_{nm}^6(t) - \\
 &- \frac{5929K_4}{64h\rho} D_{nm}^5(t) - \frac{441K_3}{16h\rho} D_{nm}^4(t) + \psi_{nm} D_{nm}^3(t) - \frac{25K_1}{9h\rho} D_{nm}^2(t) + \omega_{nm0}^2 D_{nm}(t) = 0, \quad (15)
 \end{aligned}$$

где ω_{nm0}^2 — квадрат частоты собственных линейных колебаний.

В случае жесткой заделки

$$\omega_{nm0}^2 = \frac{4E\pi^4}{27b^4 c^4 \rho(1-\nu^2)} \left[3c^4 m^4 (A_{04} h^2 + A_{22} [\nu h^2 - 6l^2 (\nu - 1)]) + 3b^4 n^4 (A_{40} h^2 + A_{22} [\nu h^2 - 6l^2 (\nu - 1)]) + \right.$$

$$+b^2c^2n^2m^2\left(2A_{22}\left(h^2(2-\nu)-18l^2(1-\nu)\right)+\left(A_{04}+A_{40}\right)\left(h^2\nu-12l^2(1-\nu)\right)\right)-\frac{K_0}{hr}, \quad (16)$$

$$\Psi_{nm} = \frac{32En^4m^4\pi^4(A_{04}+2A_{22}+A_{40})}{3\rho\left(3c^4m^4[A_{40}-A_{22}\nu]+b^2c^2n^2m^2[4A_{22}-\nu(A_{04}+2A_{22}-A_{40})]+3b^4n^4[A_{04}-A_{22}\nu]\right)} - \frac{1225K_2}{144hr}. \quad (17)$$

Уравнение (15) не имеет точного решения, для его решения воспользуемся методом Бубнова–Галеркина [63]. Будем искать коэффициенты $D_{nm}(t)$ в следующем виде [63]:

$$D_{nm}(t) = H \cos(\omega t),$$

здесь H — амплитуда, ω — частота колебаний. После выполнения процедуры метода Бубнова–Галеркина получим выражение для частоты собственных нелинейных колебаний рассматриваемой пластины:

$$\omega_{nm}^2 = \left(\frac{29548805K_7}{4536hr\pi} H^7 + \frac{161035875K_6}{262144hr\pi} H^6 + \frac{20449K_5}{35hr\pi} H^5 + \frac{29645K_4}{512hr\pi} H^4 + \frac{294K_3}{5hr\pi} H^3 - \frac{3}{4} H^2 \Psi_{nm} + \frac{200K_1}{27hr\pi} H \right) + \omega_{nm0}^2 = \omega_{nm0}^2 - F(H).$$

Далее, отнесем это выражение к квадрату частоты линейных колебаний:

$$\mu_{nm}^2 = \frac{\omega_{nm}^2}{\omega_{nm0}^2} = 1 - \frac{F(H)}{\omega_{nm0}^2}. \quad (18)$$

Зависимость $\mu_{nm}(H)$ позволит увидеть влияние нелинейности на собственную частоту в зависимости от амплитуды колебаний пластины и тона колебаний (n, m) .

4. Численные результаты

4.1. Достоверность получаемых результатов

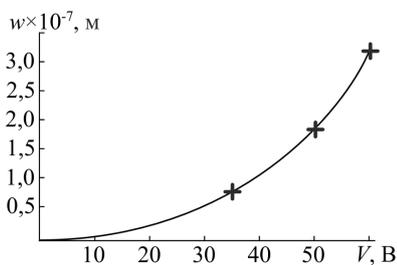


Рис. 3. Прогиб $w(V)$ кремниевой пластины при различном электрическом напряжении: расчет (сплошная линия), эксперимент (крестики)

Оценим достоверность предложенного в работе метода. Обоснуем возможность использования первого приближения в методе Бубнова–Галеркина для решения поставленной задачи.

В работе [64] экспериментально измерено отклонение центра квадратной кремниевой жестко закрепленной по торцам пластины под действием электростатической силы разной интенсивности. На рисунке 3 приведены экспериментальные данные и график зависимости $w(V)$ в центральной точке для кремниевой пластины с характеристиками: $\nu = 0,06$, $E = 169$ ГПа, $g_0 = 1$ мкм, $V = 60$ мкм, $c = b = 250$ мкм. График $w(V)$ построен по результатам решения задачи (11)–(13) в статической постановке без учета сетчатой структуры пластины методом Бубнова–Галеркина при $l = 0$ мкм. Входящие в уравнения функции выбирались в следующем виде:

$$w = D(1 - \cos(2\pi x/c))(1 - \cos(2\pi y/b)), \quad F = B(1 - \cos(2\pi x/c))(1 - \cos(2\pi y/b)).$$

Уже в первом приближении решение методом Бубнова–Галеркина дает хорошее совпадение с экспериментом. В работе [32] также имеется обоснование возможности использования первого приближения метода Бубнова–Галеркина для получения результатов, хорошо согласующихся с экспериментальными данными и расчетами методом конечных элементов. В исследовании [65] было показано, что для жестко защемленной нанобалки Бернулли–Эйлера результаты расчета собственной частоты методом Бубнова–Галеркина в первом приближении соответствуют результатам, полученным при решении той же задачи методом конечных разностей (число точек разбиения $n = 80$).

Чтобы еще раз убедиться в возможности использования первого приближения метода, проведем анализ сходимости полученных на его основе результатов. Для этого построим ортогональную систему функций $\zeta_{nm}(x, y)$, применив классический алгоритм Гильберта–Шмидта к системе функций

$$w = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M D_{nm} \zeta_{nm}(x, y), \quad F = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{nm} \zeta_{nm}(x, y), \quad N, M \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

В таблице 1 приведены значения прогиба в центральной точке кремниевой пластины в зависимости от числа членов в разложениях (19). Данные таблицы 1 также показывают, что уже в первом приближении метод Бубнова–Галеркина дает достаточно точный результат.

В настоящей работе предложены формулы для расчета частот как линейных, так и нелинейных собственных колебаний нанопластин сетчатой структуры. Обоснуем корректность их работы.

В статье [66] приведены расчеты частоты основного тона собственных изгибных линейных колебаний кремниевой пластины при комнатной температуре жестко заземленной по торцам, с теми же характеристиками, что рассматривались ранее. В диапазоне до напряжения втягивания предложенная в данной статье расчетная формула для нахождения значений частоты собственных линейных колебаний (16) дает хорошее совпадение с результатами авторов работы [66]. Под напряжением втягивания здесь и далее понимается минимальное напряжение, необходимое для замыкания нормально разомкнутого контакта, то есть обеспечивающее явление втягивания, которое в свою очередь характеризуется резким увеличением значения прогиба и падением значения частоты собственных колебаний до нуля. На рисунке 4 приведен график из работы [66], звездами на рисунке 4 отмечены результаты, полученные по формуле (16) без учета масштабного параметра. В таблице 2 даны численные значения частоты, рассчитанные по формуле (16).

Таблица 1. Сходимости результатов, полученных методом Бубнова–Галеркина

$N = M$	1	3	5
$V, \text{ В}$	$w \times 10^7, \text{ м}$		
50	1,86925	1,81617	1,81532
60	2,96618	2,91237	2,91198

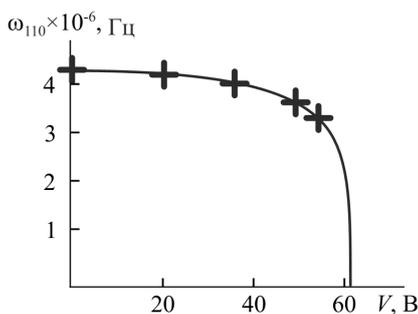


Рис. 4. Собственная частота линейных колебаний кремниевой пластины: данные из [66] (сплошная линия), расчет по формуле (16) (крестики)

Таблица 2. Значение частоты основного тона собственных линейных колебаний кремниевой пластины, полученное методом Бубнова–Галеркина

$V, \text{ В}$	$\omega_{110}, \text{ МГц}$
0	4,205
20	4,162
36	4,005
50	3,811
55	3,093

Вычисления по предложенной в настоящей статье формуле (18) хорошо согласуются с собранными в работе результатами многих исследований на основании разных методов [46], а также полученными авторами работы [46] посредством нелокальной теории упругости (Рис. 5, кривая 1). В приведенной статье рассматривалось влияние амплитуды на частоту основного тона собственных нелинейных колебаний жестко заземленной графеновой нанопластины. Сетчатая структура не учитывалась. На рисунке 5 (кривая 2) также представлена зависимость $\mu(H)$, полученная на основании формулы (18). При этом рассматривалась пластина состоящая из двух семейств взаимно перпендикулярных ребер $\varphi_1 = 45^\circ$,

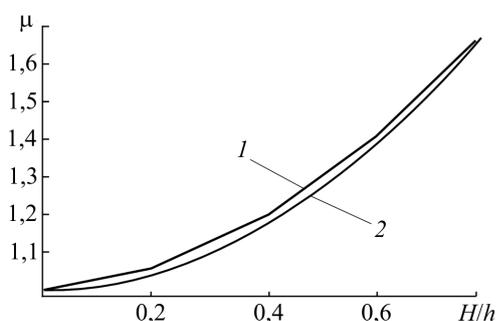


Рис. 5. Зависимости от амплитуды частоты основного тона собственных нелинейных колебаний графеновой пластины: результаты [46] (кривая 1), расчет по формуле (18) (2)

$\varphi_2 = 135^\circ$, сила Кулона не учитывалась, материал — графен ($\nu = 0,024$, $E = 1 \text{ ТПа}$, $c = b = 20 \text{ нм}$, $\rho = 2267 \text{ кг/м}^3$, $h = 0,34 \text{ нм}$, $\delta = 0,154 \text{ нм}$, $a = 0,123 \text{ нм}$, $l = h$). Амплитуда колебаний H при построении графика бралась до значения $0,272 \text{ нм}$, что меньше $1/3 g_0$ (эффект втягивания еще не достигается), таким образом, $w/h = 0,272 \text{ нм}/0,34 \text{ нм} = 0,8$. Согласно рисунку 5 видно, что зависимости хорошо согласуются.

В работе [67] обнаружено, что при приближении приложенного напряжения к напряжению втягивания зазор между пластиной и электродом достигает значения $2/3$ своего первоначального значения. Экспериментально выявлено [64], что эффект втягивания наступает при $2/5$

начального зазора. Таким образом, расчет собственной линейной частоты по предложенной формуле (16) можно проводить в случае, если зазор между пластиной и электродом не превышает $1/3 g_0$.

4.2. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим квадратную жестко закрепленную по торцам пластину, состоящую из двух семейств взаимно перпендикулярных ребер $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $\nu = 0,024$, $E = 1$ ТПа, $c = b = 20$ нм, $\rho = 2267$ кг/м³, $h = 0,34$ нм, $\delta = 0,154$ нм, $a = 0,123$ нм (материал — графен). Пластина находится в поле действия одного неподвижного электрода (Рис. 1).

В таблице 3 приведены значения напряжений (V) в зависимости от расстояния до электрода, при которых расчетная формула для частоты собственных линейных колебаний (16) будет работать, при разных значениях размерно зависимого параметра l .

В процессе сравнения авторских результатов с натурным [64] и численным [66] экспериментом использовалась классическая теория упругости, ее было достаточно, чтобы получить адекватные результаты для механических систем размером порядка 10^2 мкм. Для исследования поведения наноразмерных механических систем необходимо вводить в модель дополнительный параметр длины.

На рисунке 6а, б приведена зависимость частоты основного тона линейных колебаний пластины от дополнительного параметра длины l , связанного с учетом в модели моментных напряжений. Расстояние от пластины до электрода равнялось $g_0 = 1$ нм, $V = 1,4$ В; геометрия сетчатой структуры пластины имела вариации (Рис. 6в).

Таблица 3. Максимальные значения напряжения V , В в зависимости от расстояния между пластиной и электродом при разных значениях размерно зависимого параметра

g_0 , нм \ l , нм	h	$3h$	$5h$
0,5	0,55	1,40	2,30
1,0	1,75	4,00	6,40
2,0	6,40	12,00	18,60
4,0	29,50	41,00	58,00
8,0	87,00	110,00	150,00

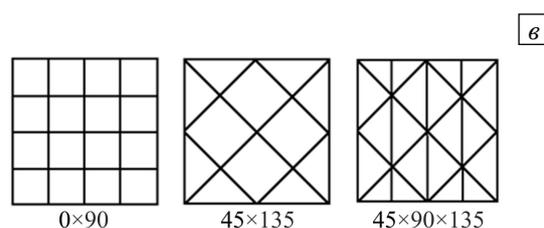
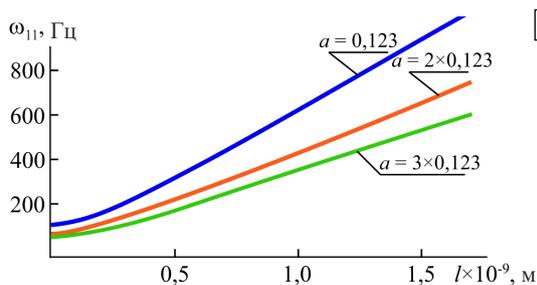
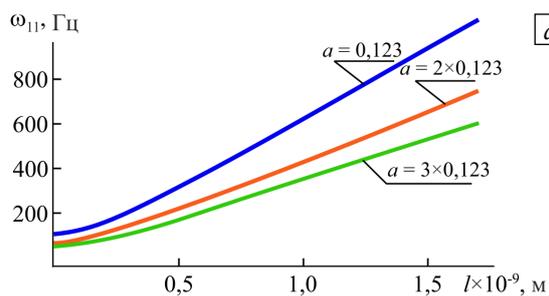


Рис. 6. Зависимость частоты основного тона линейных колебаний пластины от дополнительного параметра длины в зависимости от расстояния между ребрами в случае двух семейств взаимно перпендикулярных ребер $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$ (а); углов наклона семейств ребер при фиксированном расстоянии между ребрами $a = 3 \times 0,123$ нм (б); геометрия сетчатой структуры (в)

Частота основного тона собственных линейных колебаний жестко заземленной квадратной графеновой пластины размером 20×20 нм попадает в гигагерцовый интервал. С увеличением значения дополнительного параметра длины собственная частота пластины растет, так как растет жесткость пластины. Увеличение расстояния между ребрами в сетчатой структуре приводит к уменьшению жесткости пластины, а, следовательно, к снижению значения частоты собственных линейных колебаний. Пластина, в структуре сетки которой имеются ребра с углом наклона 0° и 90° , является более жесткой.

В таблице 4 приведены частоты мод собственных линейных колебаний пластины в зависимости от количества семейств ребер и углов их наклона $l = h$.

На рисунке 7 даны графики $\omega_{nm}(V)/\omega_{nm}(0)$ в зависимости от геометрии сетчатой структуры

Таблица 4. Частота собственных линейных колебаний пластины

ω_{nm} , ГГц	Углы наклона семейств ребер		
	$45^\circ \times 135^\circ$	$0^\circ \times 90^\circ$	$45^\circ \times 90^\circ \times 135^\circ$
ω_{11}	311	412	365
ω_{22}	1243	1648	1460

при $g_0 = 1$ нм, $l = h$. Частота более высокого тона собственных линейных колебаний менее чувствительна к действию электростатической силы (Рис.7).

Также выполнено исследование сходимости результатов расчета частоты собственных нелинейных колебаний по формуле (18) в зависимости от числа членов в разложении силы Кулона в ряд. Графики зависимости $\mu(H)$, представленные на рисунке 8, полученные с использованием более 7 членов ряда, совпадают. Следует отметить, что частота основного тона нелинейных собственных колебаний пластины под действием силы Кулона с постоянным напряжением $V = 1,4$ В при расстоянии до затвора в 1 нм обращается в ноль гораздо раньше, чем зазором достигается значение $1/3g_0$, что видно на рисунке 9. Рисунок 9 иллюстрирует, что в условиях данного вычислительного эксперимента ($V = 1,4$ В, $g_0 = 1$ нм, $\varphi_1 = 45^\circ$, $\varphi_2 = 135^\circ$, $a = 0,123$ нм, $v = 0,024$, $E = 1$ ТПа, $c = b = 20$ нм, $\rho = 2267$ кг/м³, $h = 0,34$ нм, $\delta = 0,154$ нм) эффект втягивания наступает при $H = 0,26355$ нм — это примерно $1/4 g_0$. Таким образом, посредством формулы (18) можно прогнозировать эффект втягивания.

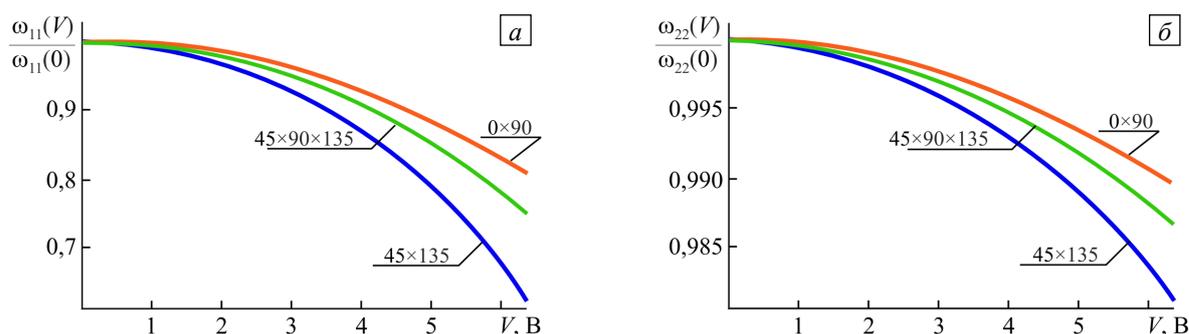


Рис. 7. Графики $\omega_{nm}(V)/\omega_{nm}(0)$ в зависимости от геометрии сетчатой структуры пластины

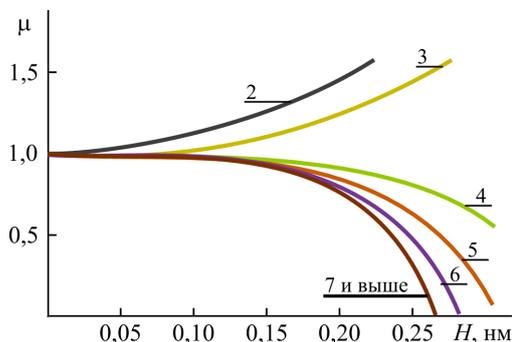


Рис. 8. Частота собственных нелинейных колебаний при разном числе членов в разложении силы Кулона в ряд Маклорена

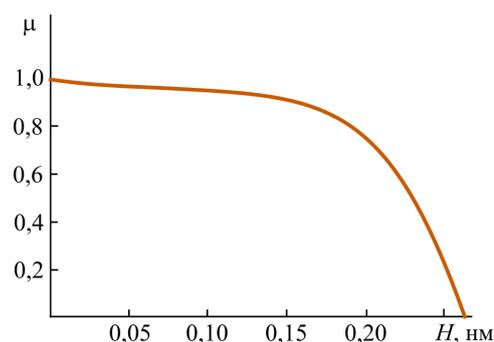


Рис. 9. Характер функции $\mu(H)$ в условиях действия электростатической силы $V = 1,4$ В при $g_0 = 1$ нм

В заключение следует сказать, что частоты более высоких мод собственных нелинейных колебаний менее чувствительны к изменению постоянного напряжения V (Рис. 10). Так, значение частоты ω_{22} незначительно снижается в условиях электрического поля (Рис. 10б).

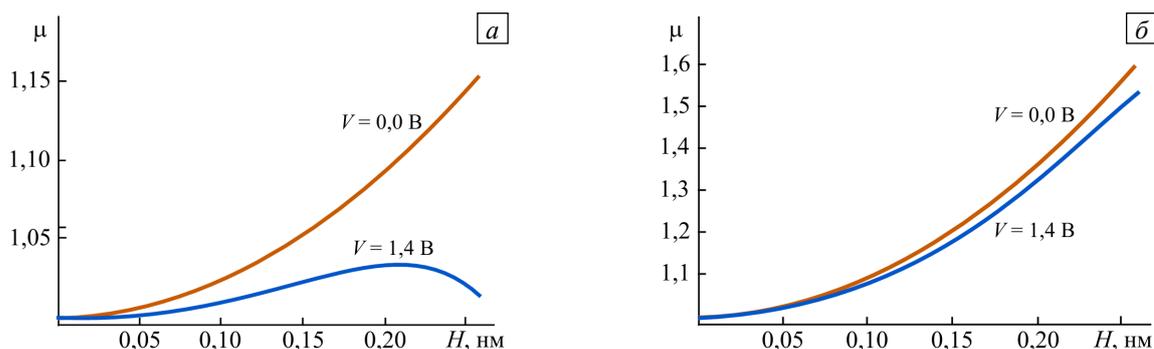


Рис. 10. Характер функции $\mu(H)$ при действии электростатической силы: оценка по нелинейным модам ω_{12} (а) и ω_{22} (б)

Результаты, приведенные в работе, показывают необходимость учета геометрической нелинейности при анализе частотных характеристик нанорезонаторов, основанных на нанопластинах в том числе сетчатой структуры.

5. Выводы

В работе построена математическая модель колебаний элемента сетчатой гибкой нанопластины в электрическом поле одного неподвижного электрода. Она учитывает масштабные эффекты посредством модифицированной моментной теории упругости. Верификация математической модели была проведена путем сравнения полученных результатов с натурным экспериментом и результатами других авторов. Решена задача о собственных колебаниях графеновой пластины. Проведен анализ влияния геометрии сетки пластины на частоту собственных колебаний. Показано, что увеличение расстояния между ребрами в сетчатой структуре приводит к снижению значения частоты собственных колебаний, наличие в структуре сетки ребер с углом наклона 0° , 90° — к увеличению собственной частоты.

Методом Бубнова–Галеркина в первом приближении получена формула для расчета частот собственных нелинейных колебаний прямоугольной сетчатой нанопластины с электрическим приводом в зависимости от тона колебаний. Показано, что посредством данной формулы можно прогнозировать эффект втягивания, который может наступать уже при прогибе близком к четверти первоначального зазора между пластиной и электродом. Подтверждено, что собственные частоты более высоких мод как линейных, так и нелинейных колебаний менее чувствительны к изменению значения постоянного напряжения. Результаты работы могут быть полезны при проектировании НЭМС на основании графеновых пластин.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00331) <https://rscf.ru/project/22-21-00331>.

Литература

1. Zaporotskova I.V., Boroznina N.P., Parkhomenko Y.N., Kozhitov L.V. Carbon nanotubes: Sensor properties. A review // *Mod. Electron. Mater.* 2016. Vol. 2. P. 95-105. <https://doi.org/10.1016/j.moem.2017.02.002>
2. Meuyappan M. Carbon nanotube-based chemical sensor // *Small.* 2016. Vol. 12. P. 2118-2129. <https://doi.org/10.1002/sml.201502555>
3. Ionete E.I., Spiridon S.-I., Monea B.F., Ebrasu-Ion D., Vaseashta A. SWCNT-Pt-P₂O₅-based sensor for humidity measurements // *IEEE Sensor J.* 2016. Vol. 16. P. 7593-7599. <https://doi.org/10.1109/JSEN.2016.2603478>
4. Ionete E.I., Spiridon S.-I., Monea B.F., Stratulat E. A room temperature gas sensor based on sulfonated SWCNTs for the detection of NO and NO₂ // *Sensors.* 2019. Vol. 19. 1116. <https://doi.org/10.3390/s19051116>
5. Sinha N., Ma J., Yeow J.T.W. Carbon nanotube-based sensors // *JNN.* 2006. Vol. 6. P. 573-590. <https://doi.org/10.1166/jnn.2006.121>
6. Yu C., Liu Q., He Z., Gao X., Wu E., Guo J., Zhou C., Feng Z. Epitaxial graphene gas sensors on SiC substrate with high sensitivity // *J. Semicond.* 2020. Vol. 41. 032101. <https://doi.org/10.1088/1674-4926/41/3/032101>
7. Dong Q., Xiao M., Li G., Zhang Y. Recent progress of toxic gas sensors based on 3d graphene frameworks // *Sensors.* 2021. Vol. 21. 3386. <https://doi.org/10.3390/s21103386>
8. Wei L., Kuai X., Bao Y., Wei J., Yang L., Song P., Zhang M., Yang F., Wang X. The recent progress of MEMS/NEMS resonators // *Micromachines.* 2021. Vol. 12. 724. <https://doi.org/10.3390/mi12060724>
9. Geim A.K., Novoselov K.S. The rise of graphene // *Nature Mater.* 2007. Vol. 6. P. 183-191. <https://doi.org/10.1038/nmat1849>
10. Bernholc J., Brenner D., Buongiorno Nardelli M., Meunier V., Roland C. Mechanical and electrical properties of nanotubes // *Annu. Rev. Mater. Res.* 2002. Vol. 32. P. 347-375. <https://doi.org/10.1146/annurev.matsci.32.112601.134925>
11. Fukuda T., Arai F., Dong L. Assembly of nanodevices with carbon nanotubes through nanorobotic manipulations // *Proc. IEEE.* 2003. Vol. 91. P. 1803-1818. <https://doi.org/10.1109/JPROC.2003.818334>
12. De Volder M.F.L., Tawfik S.H., Baughman R.H., Hart A.J. Carbon nanotubes: Present and future commercial applications // *Science.* 2013. Vol. 339. P. 535-539. <https://doi.org/10.1126/science.1222453>
13. Verbiest G.J., Kirchhof J.N., Sonntag J., Goldsche M., Khodkov T., Stampfer C. Detecting ultrasound vibrations with graphene resonators // *Nano Lett.* 2018. Vol. 18. P. 5132-5137. <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.8b02036>
14. Monea B.F., Ionete E.I., Spiridon S.I., Ion-Ebrasu D., Petre E. Carbon nanotubes and carbon nanotube structures used for temperature measurement // *Sensors.* 2019. Vol. 19. 2464. <https://doi.org/10.3390/s19112464>
15. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity // *J. Mech. Phys. Solid.* 2003. Vol. 51. P. 1477-1508. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00053-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00053-X)
16. Chong A.C.M., Yang F., Lam D.C.C., Tong P. Torsion and bending of micron-scaled structures // *J. Mater. Res.* 2001. Vol. 16. P. 1052-1058. <https://doi.org/10.1557/JMR.2001.0146>
17. Stolken J.S., Evans A.G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale // *Acta Mater.* 1998. Vol. 46. P. 5109-5115. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(98\)00153-0](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(98)00153-0)
18. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables.* Paris: A. Herman Sons, 1909. 250 p.
19. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1962. Vol. 11. P. 415-448.
20. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1962. Vol. 11. P. 385-414.
21. Koiter W.T. Couples-stress in the theory of elasticity // *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* 1964. Vol. 67. P. 17-44.

22. *Eringen A.C.* Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves // *Int. J. Eng. Sci.* 1972. Vol. 10. P. 425-435.
23. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 286 с.
24. *Altenbach H., Eremeyev V.A.* On the linear theory of micropolar plates // *ZAMM.* 2009. Vol. 89. P. 242-256. <https://doi.org/10.1002/zamm.200800207>
25. *Nuhu A.A., Safaei B.* A comprehensive review on the vibration analyses of small-scaled plate-based structures by utilizing the nonclassical continuum elasticity theories // *Thin-Walled Structures.* 2022. Vol. 179. 109622. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109622>
26. *Mozhgova N., Lukin A., Popov I.* Model of a micromechanical modal-localized accelerometer with an initially curved microbeam as a sensitive element // *Microactuators, Microsensors and Micromechanisms / Ed. A.K. Pandey, P. Pal, Nagahanumaiyah, L. Zentner.* Springer Cham, 2022. P. 94-118. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20353-4_7
27. *Morozov N.F., Indeitsev D.A., Igumnova V.S., Lukin A.V., Popov I.A., Shtukin L.V.* Nonlinear dynamics of mode-localized MEMS accelerometer with two electrostatically coupled microbeam sensing elements // *Int. J. Non Lin. Mech.* 2022. Vol. 138. 103852. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103852>
28. *Ilyas S., Younis M.I.* Theoretical and experimental investigation of mode localization in electrostatically and mechanically coupled microbeam resonators // *Int. J. Non Lin. Mech.* 2020. Vol. 125. 103516. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103516>
29. *Indeitsev D.A., Igumnova V.S., Lukin A.V., Popov I.A., Shtukin L.V., Belyaev Ya.V.* Differential resonant MEMS accelerometer: Synchronization characteristics of weakly coupled microbeam sensing elements. <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.36579.84004>
30. *Karimipour I., Beni Y.T., Akbarzadeh A.H.* Size-dependent nonlinear forced vibration and dynamic stability of electrically actuated micro-plates // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2019. Vol. 78. 104856. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104856>
31. *Karimipour I., Tadi Beni Y., Zeighampour H.* Vibration and dynamic behavior of electrostatic size-dependent micro-plates // *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* 2020. Vol. 42. P. 1-22. <https://doi.org/10.1007/s40430-020-02490-4>
32. *Karami M., Kazemi A., Vatankhah R., Khosravifard A.* Adaptive fractional-order backstepping sliding mode controller design for an electrostatically actuated size-dependent microplate // *J. Vib. Contr.* 2021. Vol. 27. P. 1353-1369. <https://doi.org/10.1177/1077546320940916>
33. *Ghayesh M.H., Farokhi H.* Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators // *MSSP.* 2018. Vol. 109 P. 220-234. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.11.043>
34. *Saghir S., Younis M.I.* An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation // *Acta Mech.* 2018. Vol. 229. P. 2909-2922. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2141-3>
35. *Saghir S., Younis M.I.* An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation // *Acta Mech.* 2018. Vol. 229. P. 2909-2922. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2141-3>
36. *Ghayesh M.H., Farokhi H.* Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators // *MSSP.* 2018. Vol. 109. P. 220-234. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.11.043>
37. *Chen X., Chen L., Huang S., Li M., Li X.* Nonlinear forced vibration of in-plane bi-directional functionally graded materials rectangular plate with global and localized geometrical imperfections // *Appl. Math. Model.* 2021. Vol. 93. P. 443-466. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.12.033>
38. *Li C., Chou T.W.* Single-walled carbon nanotubes as ultrahigh frequency nanomechanical resonators // *Phys. Rev. B.* 2003. Vol. 68. 073405. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.073405>
39. *Chen C., Rosenblatt S., Bolotin K.I., Kalb W., Kim P., Kymissis I., Stormer H.L., Heinz T.F., Hone J.* Performance of monolayer graphene nanomechanical resonators with electrical readout // *Nature Nanotech.* 2009. Vol. 4. P. 861-867. <https://doi.org/10.1038/nnano.2009.267>
40. *Sadeghi M., Naghdabadi R.* Nonlinear vibrational analysis of single-layer graphene sheets // *Nanotechnology.* 2010. Vol. 21. 105705. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/21/10/105705>
41. *Kang J.W., Kim H.-W., Kim K.-S., Lee J.H.* Molecular dynamics modeling and simulation of a graphene-based nanoelectromechanical resonator // *Curr. Appl. Phys.* 2013. Vol. 13. P. 789-794. <https://doi.org/10.1016/j.cap.2012.12.007>
42. *Eriksson A.M., Midtvedt D., Croy A., Isacsson A.* Frequency tuning, nonlinearities and mode coupling in circular mechanical graphene resonators // *Nanotechnology.* 2013. Vol. 24. 395702. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/24/39/395702>
43. *Lee H.-L., Hsu J.-C., Lin S.-Y., Chang W.-J.* Sensitivity analysis of single-layer graphene resonators using atomic finite element method // *J. Appl. Phys.* 2013. Vol. 114. 123506. <https://doi.org/10.1063/1.4823735>
44. *Jiang S., Gong X., Guo X., Wang X.* Potential application of graphene nanomechanical resonator as pressure sensor // *Solid State Comm.* 2014. Vol. 193. P. 30-33. <https://doi.org/10.1016/j.ssc.2014.05.020>
45. *Ansari R., Sahmani S., Arash B.* Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets // *Phys. Lett.* 2010. Vol. 375. P. 53-62. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.10.028>
46. *Zhang L.W., Zhang Y., Liew K.M.* Modeling of nonlinear vibration of graphene sheets using a meshfree method based on nonlocal elasticity theory // *Appl. Math. Model.* 2017. Vol. 49. P. 691-704. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.02.053>
47. *Shen Z.-B., Tang H.-L., Li D.-K., Tang G.-J.* Vibration of single-layered graphene sheet-based nanomechanical sensor via nonlocal Kirchhoff plate theory // *Comput. Mater. Sci.* 2012. Vol. 61. P. 200-205. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2012.04.003>
48. *Nematollahi M.S., Mohammadi H., Nematollahi M.A.* Thermal vibration analysis of nanoplates based on the higher-order nonlocal strain gradient theory by an analytical approach // *Superlattices Microst.* 2017. Vol. 111. P. 944-959. <https://doi.org/10.1016/j.spmi.2017.07.055>
49. *Ebrahimi F., Barati M.R.* Vibration analysis of nonlocal strain gradient embedded single-layer graphene sheets under nonuniform in-plane loads // *J. Vib. Contr.* 2018. Vol. 24. P. 4751-4763. <https://doi.org/10.1177/1077546317734083>
50. *Fazelzadeh S.A., Ghavanloo E.* Nanoscale mass sensing based on vibration of single-layered graphene sheet in thermal environments // *Acta Mech. Sin.* 2014. Vol. 30. P. 84-91. <https://doi.org/10.1007/s10409-013-0102-6>

51. *Ebrahimi F., Barati M.R.* Damping vibration analysis of graphene sheets on viscoelastic medium incorporating hygro-thermal effects employing nonlocal strain gradient theory // *Compos. Struct.* 2018. Vol. 185. P. 241-253. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.021>
52. *Shahsavari D., Karami B., Li L.* Damped vibration of a graphene sheet using a higher-order nonlocal strain-gradient Kirchhoff plate model // *Compt. Rendus Méc.* 2018. Vol. 346. P. 1216-1232. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2018.08.011>
53. *Ebrahimi F., Barati M.R.* A nonlocal strain gradient mass sensor based on vibrating hygro-thermally affected graphene nanosheets // *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Eng.* 2019. Vol. 43. P. 205-220. <https://doi.org/10.1007/s40997-017-0131-z>
54. *Desai S.H., Pandya A.A., Panchal M.B.* Vibration characteristics of graphene nano resonator as mass sensor // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. Vol. 1854. 012029. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1854/1/012029>
55. *dell'Isola F., Steigman D.* A Two-dimensional gradient-elasticity theory for woven fabrics // *J. Elast.* 2015. Vol. 118. P. 113-125. <https://doi.org/10.1007/s10659-014-9478-1>
56. *Еремеев В.А.* Об одной нелинейной модели сетчатой оболочки // *Изв. РАН. МТТ.* 2018. № 4. С. 127-133. <https://doi.org/10.31857/S057232990000704-4>
57. *Крылова Е.Ю., Папкова И.В., Салтыкова О.А., Крысько В.А.* Особенности сложных колебаний гибких микрополярных сетчатых панелей // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2021. Т. 21, № 1. С. 48-59. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59>
58. *Крылова Е.Ю., Папкова И.В., Яковлева Т.В., Крысько В.А.* Теория колебаний углеродных нанотрубок как гибких микрополярных сетчатых цилиндрических оболочек с учетом сдвига // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.* 2019. Т. 19, № 3. С. 305-316. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316>
59. *Karman Th.* Festigkeits probleme in Maschinenbau // *Encykle. D. Math. Wiss.* 1910. Vol. 4. P. 311-385.
60. *Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P.* Couple stress based strain gradient theory for elasticity // *Int. J. Solids Struct.* 2002. Vol. 39. P. 2731-2743. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
61. *Пишечников Г.И.* Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М.: Наука, 1982. 352 с.
62. *Hamilton W.* Report of the Fourth Meeting British Association for the Advancement of Science. 1835. P. 513-518.
63. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
64. *Francais O., Dufour I.* Normalized abacus for the global behavior of diaphragm: pneumatic, electrostatic, piezoelectric or electromagnetic actuation // *J. Model Simul. Microsyst.* 1999. Vol. 2. P. 149-160.
65. *Papkova I.V., Yakovleva T.V.* Nonlinear eigen frequencies of a functionally graded porous nano-beam with respect to the coulomb and Casimir forces // *E3S Web of Conf.* 2023. Vol. 389. 01029. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202338901029>
66. *Talebian S., Rezazadeh G., Fathalilou M., Toosi B.* Effect of temperature on pull-in voltage and natural frequency of an electrostatically actuated microplate // *Mechatronics.* 2010. Vol. 20. P. 666-673. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2010.07.009>
67. *Lee K.B.* Closed-form solutions of the parallel plate problem // *Sensors and Actuators A: Physical.* 2007. Vol. 133. P. 518-525. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2006.04.049>

References

1. Zaporotzkova I.V., Boroznina N.P., Parkhomenko Y.N., Kozhitov L.V. Carbon nanotubes: Sensor properties. A review. *Mod. Electron. Mater.*, 2016, vol. 2, pp. 95-105. <https://doi.org/10.1016/j.moem.2017.02.002>
2. Meyyappan M. Carbon nanotube-based chemical sensor. *Small*, 2016, vol. 12, pp. 2118-2129. <https://doi.org/10.1002/sml.201502555>
3. Ionete E.I., Spiridon S.-I., Monea B.F., Ebrasu-Ion D., Vaseashta A. SWCNT-Pt-P₂O₅-based sensor for humidity measurements. *IEEE Sensor J.*, 2016, vol. 16, pp. 7593-7599. <https://doi.org/10.1109/JSEN.2016.2603478>
4. Ionete E.I., Spiridon S.-I., Monea B.F., Stratulat E. A room temperature gas sensor based on sulfonated SWCNTs for the detection of NO and NO₂. *Sensors*, 2019, vol. 19, 1116. <https://doi.org/10.3390/s19051116>
5. Sinha N., Ma J., Yeow J.T.W. Carbon nanotube-based sensors. *JNN*, 2006, vol. 6, pp. 573-590. <https://doi.org/10.1166/jnn.2006.121>
6. Yu C., Liu Q., He Z., Gao X., Wu E., Guo J., Zhou C., Feng Z. Epitaxial graphene gas sensors on SiC substrate with high sensitivity. *J. Semicond.*, 2020, vol. 41, 032101. <https://doi.org/10.1088/1674-4926/41/3/032101>
7. Dong Q., Xiao M., Li G., Zhang Y. Recent progress of toxic gas sensors based on 3d graphene frameworks. *Sensors*, 2021, vol. 21, 3386. <https://doi.org/10.3390/s21103386>
8. Wei L., Kuai X., Bao Y., Wei J., Yang L., Song P., Zhang M., Yang F., Wang X. The recent progress of MEMS/NEMS resonators. *Micromachines*, 2021, vol. 12, 724. <https://doi.org/10.3390/mi12060724>
9. Geim A.K., Novoselov K.S. The rise of graphen. *Nature Mater.*, 2007, vol. 6, pp. 183-191. <https://doi.org/10.1038/nmat1849>
10. Bernholc J., Brenner D., Buongiorno Nardelli M., Meunier V., Roland C. Mechanical and electrical properties of nanotubes. *Annu. Rev. Mater. Res.*, 2002, vol. 32, pp. 347-375. <https://doi.org/10.1146/annurev.matsci.32.112601.134925>
11. Fukuda T., Arai F., Dong L. Assembly of nanodevices with carbon nanotubes through nanorobotic manipulations. *Proc. IEEE*, 2003, vol. 91, pp. 1803-1818. <https://doi.org/10.1109/JPROC.2003.818334>
12. De Volder M.F.L., Tawfick S.H., Baughman R.H., Hart A.J. Carbon nanotubes: Present and future commercial applications. *Science*, 2013, vol. 339, pp. 535-539. <https://doi.org/10.1126/science.1222453>
13. Verbiest G.J., Kirchhoff J.N., Sonntag J., Goldsche M., Khodkov T., Stampfer C. Detecting ultrasound vibrations with graphene resonators. *Nano Lett.*, 2018, vol. 18, pp. 5132-5137. <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.8b02036>
14. Monea B.F., Ionete E.I., Spiridon S.I., Ion-Ebrasu D., Petre E. Carbon nanotubes and carbon nanotube structures used for temperature measurement. *Sensors*, 2019, vol. 19, 2464. <https://doi.org/10.3390/s19112464>
15. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solid.*, 2003, vol. 51, pp. 1477-1508. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00053-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00053-X)

16. Chong A.C.M., Yang F., Lam D.C.C., Tong P. Torsion and bending of micron-scaled structures. *J. Mater. Res.*, 2001, vol. 16, pp. 1052-1058. <https://doi.org/10.1557/JMR.2001.0146>
17. Stolken J.S., Evans A.G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Mater.*, 1998, vol. 46, pp. 5109-5115. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(98\)00153-0](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(98)00153-0)
18. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables* [Theory of deformable bodies]. Paris: A. Herman Sons, 1909. 250 p.
19. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1962, vol. 11, pp. 415-448.
20. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1962, vol. 11, pp. 385-414.
21. Koiter W.T. Couples-stress in the theory of elasticity. *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, 1964, vol. 67, pp. 17-44.
22. Eringen A.C. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *Int. J. Eng. Sci.*, 1972, vol. 10, pp. 425-435.
23. Eremeev V.A., Zubov L.M. *Mekhanika uprugih obolochek* [Mechanics of elastic shells]. Moscow, Nauka, 2008. 286 p.
24. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the linear theory of micropolar plates. *ZAMM*, 2009, vol. 89, pp. 242-256. <https://doi.org/10.1002/zamm.200800207>
25. Nuhu A.A., Safaei B. A comprehensive review on the vibration analyses of small-scaled plate-based structures by utilizing the nonclassical continuum elasticity theories. *Thin-Walled Structures*, 2022, vol. 179, 109622. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109622>
26. Mozhgova N., Lukin A., Popov I. Model of a micromechanical modal-localized accelerometer with an initially curvedmicrobeam as a sensitive element. *Microactuators, Microsensors and Micromechanisms*, ed. A.K. Pandey, P. Pal, Nagahanumaiah, L. Zentner. Springer Cham, 2022. Pp. 94-118. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20353-4_7
27. Morozov N.F., Indeitsev D.A., Igumnova V.S., Lukin A.V., Popov I.A., Shtukin L.V. Nonlinear dynamics of mode-localized MEMS accelerometer with two electrostatically coupled microbeam sensing elements. *Int. J. Non Lin. Mech.*, 2022, vol. 138, 103852. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103852>
28. Ilyas S., Younis M.I. Theoretical and experimental investigation of mode localization in electrostatically and mechanically coupled microbeam resonators. *Int. J. Non Lin. Mech.*, 2020, vol. 125, 103516. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103516>
29. Indeitsev D.A., Igumnova V.S., Lukin A.V., Popov I.A., Shtukin L.V., Belyaev Ya.V. Differential resonant MEMS accelerometer: Synchronization characteristics of weakly coupled microbeam sensing elements. <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.36579.84004>
30. Karimipour I., Beni Y.T., Akbarzadeh A.H. Size-dependent nonlinear forced vibration and dynamic stability of electrically actuated micro-plates. *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2019, vol. 78, 104856. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104856>
31. Karimipour I., Tadi Beni Y., Zeighampour H. Vibration and dynamic behavior of electrostatic size-dependent micro-plates. *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2020, vol. 42, pp. 1-22. <https://doi.org/10.1007/s40430-020-02490-4>
32. Karami M., Kazemi A., Vatankeh R., Khosravifard A. Adaptive fractional-order backstepping sliding mode controller design for an electrostatically actuated size-dependent microplate. *J. Vib. Contr.*, 2021, vol. 27, pp. 1353-1369. <https://doi.org/10.1177/1077546320940916>
33. Ghayesh M.H., Farokhi H. Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators. *MSSP*, 2018, vol. 109, pp. 220-234. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.11.043>
34. Saghir S., Younis M.I. An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation. *Acta Mech.*, 2018, vol. 229, pp. 2909-2922. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2141-3>
35. Saghir S., Younis M.I. An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation. *Acta Mech.*, 2018, vol. 229, pp. 2909-2922. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2141-3>
36. Ghayesh M.H., Farokhi H. Nonlinear behaviour of electrically actuated microplate-based MEMS resonators. *MSSP*, 2018, vol. 109, pp. 220-234. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.11.043>
37. Chen X., Chen L., Huang S., Li M., Li X. Nonlinear forced vibration of in-plane bi-directional functionally graded materials rectangular plate with global and localized geometrical imperfections. *Appl. Math. Model.*, 2021, vol. 93, pp. 443-466. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.12.033>
38. Li C., Chou T.W. Single-walled carbon nanotubes as ultrahigh frequency nanomechanical resonators. *Phys. Rev. B*, 2003, vol. 68, 073405. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.073405>
39. Chen C., Rosenblatt S., Bolotin K.I., Kalb W., Kim P., Kyymissis I., Stormer H.L., Heinz T.F., Hone J. Performance of monolayer graphene nanomechanical resonators with electrical readout. *Nature Nanotech.*, 2009, vol. 4, pp. 861-867. <https://doi.org/10.1038/nnano.2009.267>
40. Sadeghi M., Naghdabadi R. Nonlinear vibrational analysis of single-layer graphene sheets. *Nanotechnology*, 2010, vol. 21, 105705. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/21/10/105705>
41. Kang J.W., Kim H.-W., Kim K.-S., Lee J.H. Molecular dynamics modeling and simulation of a graphene-based nanoelectromechanical resonator. *Curr. Appl. Phys.*, 2013, vol. 13, pp. 789-794. <https://doi.org/10.1016/j.cap.2012.12.007>
42. Eriksson A.M., Midtvedt D., Croy A., Isacson A. Frequency tuning, nonlinearities and mode coupling in circular mechanical graphene resonators. *Nanotechnology*, 2013, vol. 24, 395702. <https://doi.org/10.1088/0957-4484/24/39/395702>
43. Lee H.-L., Hsu J.-C., Lin S.-Y., Chang W.-J. Sensitivity analysis of single-layer graphene resonators using atomic finite element method. *J. Appl. Phys.*, 2013, vol. 114, 123506. <https://doi.org/10.1063/1.4823735>
44. Jiang S., Gong X., Guo X., Wang X. Potential application of graphene nanomechanical resonator as pressure sensor. *Solid State Comm.*, 2014, vol. 193, pp. 30-33. <https://doi.org/10.1016/j.ssc.2014.05.020>
45. Ansari R., Sahmani S., Arash B. Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets. *Phys. Lett.*, 2010, vol. 375, pp. 53-62. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.10.028>
46. Zhang L.W., Zhang Y., Liew K.M. Modeling of nonlinear vibration of graphene sheets using a meshfree method based on nonlocal elasticity theory. *Appl. Math. Model.*, 2017, vol. 49, pp. 691-704. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.02.053>

47. Shen Z.-B., Tang H.-L., Li D.-K., Tang G.-J. Vibration of single-layered graphene sheet-based nanomechanical sensor via nonlocal Kirchhoff plate theory. *Comput. Mater. Sci.*, 2012, vol. 61, pp. 200-205. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2012.04.003>
48. Nematollahi M.S., Mohammadi H., Nematollahi M.A. Thermal vibration analysis of nanoplates based on the higher-order nonlocal strain gradient theory by an analytical approach. *Superlattices Microst.*, 2017, vol. 111, pp. 944-959. <https://doi.org/10.1016/j.spmi.2017.07.055>
49. Ebrahimi F., Barati M.R. Vibration analysis of nonlocal strain gradient embedded single-layer graphene sheets under nonuniform in-plane loads. *J. Vib. Contr.*, 2018, vol. 24, pp. 4751-4763. <https://doi.org/10.1177/1077546317734083>
50. Fazelzadeh S.A., Ghavanloo E. Nanoscale mass sensing based on vibration of single-layered graphene sheet in thermal environments. *Acta Mech. Sin.*, 2014, vol. 30, pp. 84-91. <https://doi.org/10.1007/s10409-013-0102-6>
51. Ebrahimi F., Barati M.R. Damping vibration analysis of graphene sheets on viscoelastic medium incorporating hygro-thermal effects employing nonlocal strain gradient theory. *Compos. Struct.*, 2018, vol. 185, pp. 241-253. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.021>
52. Shahsavari D., Karami B., Li L. Damped vibration of a graphene sheet using a higher-order nonlocal strain-gradient Kirchhoff plate model. *Compt. Rendus Méc.*, 2018, vol. 346, pp. 1216-1232. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2018.08.011>
53. Ebrahimi F., Barati M.R. A nonlocal strain gradient mass sensor based on vibrating hygro-thermally affected graphene nanosheets. *Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Eng.*, 2019, vol. 43, pp. 205-220. <https://doi.org/10.1007/s40997-017-0131-z>
54. Desai S.H., Pandya A.A., Panchal M.B. Vibration characteristics of graphene nano resonator as mass sensor. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1854, 012029. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1854/1/012029>
55. dell'Isola F., Steigman D. A Two-dimensional gradient-elasticity theory for woven fabrics. *J. Elast.*, 2015, vol. 118, pp. 113-125. <https://doi.org/10.1007/s10659-014-9478-1>
56. Eremeyev V.A. A nonlinear model of a mesh shell. *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, pp. 464-469. <https://doi.org/10.3103/S002565441804012X>
57. Krylova E.Yu., Papkova I.V., Saltykova O.A., Krysko V.A. Features of complex vibrations of flexible micropolar mesh panels. *Izv. Sarat. Univ. Math. Mech. Inform.*, 2021, vol. 21, no. 1, pp. 48-59. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-48-59>
58. Krylova E.Yu., Papkova I.V., Yakovleva T.V., Krysko V.A. Theory of vibrations of carbon nanotubes like flexible micropolar mesh cylindrical shells taking into account shift. *Izv. Sarat. Univ. Math. Mech. Inform.*, 2019, vol. 19, no. 3, pp. 305-316. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-305-316>
59. Karman Th. Festigkeitsprobleme in Maschinenbau [Strength problems in mechanical engineering]. *Encyklo. D. Math. Wiss.*, 1910, vol. 4, pp. 311-385.
60. Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 2002, vol. 39, pp. 2731-2743. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00152-X](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00152-X)
61. Pshenichnov G.I. *Teoriya tonkih uprugih setchatykh obolochek i plastinok* [The theory of thin elastic mesh shells and plates]. Moscow, Nauka, 1982. 352 p.
62. Hamilton W. Report of the Fourth Meeting British Association for the Advancement of Science. 1835. P. 513-518.
63. Vol'mir A.S. *Nelinejnaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow, Nauka, 1972. 432 p.
64. Francais O., Dufour I. Normalized abacus for the global behavior of diaphragm: pneumatic, electrostatic, piezoelectric or electromagnetic actuation. *J. Model Simul. Microsyst.*, 1999, vol. 2, pp. 149-160.
65. Papkova I.V., Yakovleva T.V. Nonlinear eigen frequencies of a functionally graded porous nano-beam with respect to the coulomb and Casimir forces. *E3S Web of Conf.*, 2023, vol. 389, 01029. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202338901029>
66. Talebian S., Rezazadeh G., Fathalilou M., Toosi B. Effect of temperature on pull-in voltage and natural frequency of an electrostatically actuated microplate. *Mechatronics*, 2010, vol. 20, pp. 666-673. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2010.07.009>
67. Lee K.B. Closed-form solutions of the parallel plate problem. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2007, vol. 133, pp. 518-525. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2006.04.049>

Поступила в редакцию 15.03.2023; после доработки 20.06.2023; принята к опубликованию 07.08.2023