

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.3.32](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.32)
УДК 539.3

СРАВНЕНИЕ ОБЩИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ, ХАРАКТЕРНЫХ ДЛЯ СТРУКТУР ПОВЕРХНОСТНЫХ ТРЕЩИН И ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТРЕЩИН

А.Ю. Фёдоров, Е.Б. Галкина

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Проведено численное моделирование трещин с целью поиска возможной взаимосвязи между параметрами сингулярного поведения напряжений вблизи общей вершины фронтов нескольких трещин разных конфигураций и частотой появления таких конфигураций в картинах, образуемых трещинами на поверхности реальных объектов. С помощью метода конечных элементов построена численная модель расчёта напряжённо-деформированного состояния вблизи пространственных трещин, учитывающая пересечение двух, трёх и четырёх клиновидных трещин, имеющих угол раствора 90° . Описывается разработанный численный алгоритм оценки характера сингулярности напряжений в окрестности особых точек, основанный на выделении из численного решения асимптотики напряжений вблизи этих точек. Алгоритм апробирован на различных типах особых точек в двумерных задачах и на трёхмерной задаче, связанной с определением поведения напряжений в точке выхода на поверхность фронта одиночной пространственной трещины. Продемонстрировано, что предлагаемый алгоритм позволяет рассчитать показатели сингулярности напряжений в общей вершине пересекающихся пространственных трещин. Приводятся результаты расчёта. Для дополнительного сравнения разных модельных конфигураций пересекающихся трещин по значениям средней плотности энергии деформаций вводится малая сфера с центром в общей вершине. Построены зависимости средней плотности энергии деформаций от углов, задающих геометрию пересекающихся пространственных трещин. Отмечаются общие признаки картин, которые образуют трещины на поверхности тел, и зависимостей поведения напряжений в окрестности вершин рассматриваемых конфигураций пространственных трещин.

Ключевые слова: сингулярность напряжений, концентрация напряжений, конечно-элементный анализ, клиновидные трещины, поверхностные трещины

COMPARISON OF GENERAL REGULARITIES INHERENT TO STRUCTURES OF SURFACE CRACKS AND STRESSES NEAR THE TIPS OF SPATIAL CRACKS

A.Yu. Fedorov and E.B. Galkina

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The paper compares the results of numerical simulation of surface cracks with the aim to find a possible relationship between the parameters of singular behavior of stresses near the common tip of several cracks of different configurations and the frequency of occurrence of such configurations in real patterns of surface crack networks. A finite element method is used to build a numerical model of spatial cracks, which takes into account the intersection of two, three and four wedge-shaped cracks with an opening angle of 90° . The nature of the stress singularity in the vicinity of singular points in three-dimensional bodies is estimated by making use of the developed numerical algorithm that extracts the asymptotics of stresses near singular points from the numerical solution. The proposed algorithm has been tested for different types of singular points in two-dimensional and three-dimensional problems, associated with the assessment of the behavior of stresses at the tip of a single spatial crack that has reached the body surface. It is demonstrated that the developed algorithm makes it possible to calculate the stress singularity index at the common tip of spatial cracks. The results of calculations are discussed. To make an additional comparison between different model configurations of intersecting cracks in terms of the mean strain energy densities, a small sphere with the center situated at the common crack tip is introduced. The dependences of the mean strain energy density on the angles that determine the geometry of intersecting spatial cracks are plotted. General signs of the patterns of surface cracks networks and the dependences of the behavior of stresses in the vicinity of tips of the considered spatial crack configurations are identified.

Key words: stress singularity, stress concentration, finite element analysis, wedged cracks, surface cracks

1. Введение

На поверхностях природных и создаваемых человеком объектов могут возникать не только одиночные трещины, но и сетки трещин. К объектам первого типа можно отнести: сланцы [1], глинистые почвы, грунты, илистые отложения при их высыхании [2–10], донья кратеров на Луне [11] и Марсе [11–13]. Ко второму типу относятся стекла [14, 15], керамика [16, 17], бетон [18], поверхность жаропрочной стали после испытания на термическую усталость [19], красочный или лаковый слой в произведениях живописи [20–22]. Типичные картины поверхностных трещин показаны на рисунке 1. Видно, что сетки трещин, вне зависимости от материала, имеют повторяющиеся элементы рисунка, что привлекает внимание многих исследователей. Опубликовано большое число работ, связанных с изучением механизмов распространения трещин на поверхности разных материалов, однако до сих пор нет объяснения, почему получается тот или иной узор.

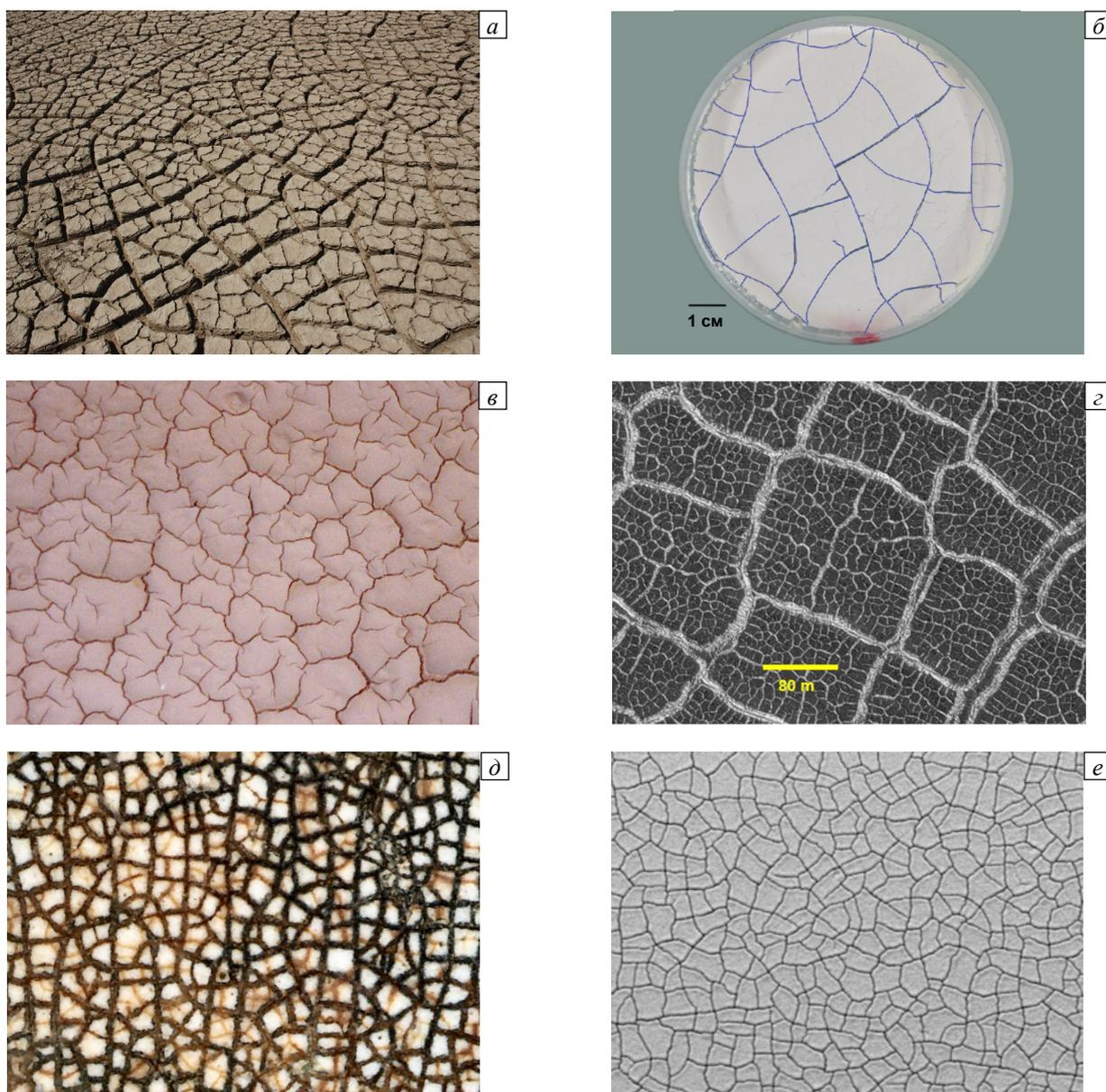


Рис. 1. Фотографии поверхностных трещин: треснувшая земля в Rann of Kutch (Индия) (а); результат лабораторного эксперимента по сушке водного раствора кукурузного крахмала [11] (б); поверхность высохшего солончака (Сицилия) (в); сеть трещин на дне ударного кратера на Марсе [26] (г); старая керамическая поверхность (д); поверхность образца из жаропрочной стали (на снимке участок размерами 320×240 мкм) после испытания на термическую усталость [19] (е)

Для изучения структуры сеток поверхностных трещин широко применяется анализ цифровых изображений [23, 24] в комбинации с лабораторными экспериментами [1, 3, 4, 7, 8, 11, 19]. Помимо этого, для исследования распространения трещин часто используется метод численного моделирования [22]. Эти методы позволили определить те или иные статистические зависимости и фрактальные характеристики сеток поверхностных трещин. Интегральные функции распределения фрагментов по размеру построены в работах [2, 4, 17], функции распределения сегментов трещин по длине — в [3, 4, 17], функции распределения сегментов трещин по ширине — в [4, 7, 24], функции распределения углов между сегментами трещин — в [10, 17, 19], фрактальная размерность определена в работах [3, 6, 14, 15, 25].

При попытках найти механизмы, которые могли бы привести к построению простых моделей поведения грунтов при их высыхании и усадке, исследовано, как влияют на статистические зависимости и фрактальные характеристики структур поверхностных трещин температура [4], уровни кислотности [25] и концентрации солей [27], толщина напряжённого слоя [11].

Анализ литературы позволяет сделать вывод, что сетка трещин на поверхности материалов в основном состоит из четырёх типов фрагментов: треугольников, четырёх-, пяти- и шестиугольников, при этом наиболее распространённые пересечения линий сетки выглядят как символы T, Y и + [3, 4, 19]. Эти формы содержат точку, в которой находится общая вершина трёх или четырёх трещин.

Пересечение трёх трещин встречается значительно чаще. В некоторых работах отмечается закономерность, а именно: углы между трещинами в основном имеют значения между 100 и 150° с пиком около 120° [10, 17, 19, 28], за пределами основного диапазона следующий пик функции распределения приходится приблизительно на 90° [2, 10, 19, 28]. Первый пик соответствует Y-конфигурации из трёх трещин, а последний пик характерен для T- и +-конфигураций из трёх и четырёх трещин соответственно.

Трещины, как объекты исследования в рамках теории упругости, представляют интерес с точки зрения появления сингулярных решений при определении напряжённо-деформированного состояния (НДС), связанных с бесконечными значениями напряжений в вершинах и на фронтах трещин. Теоретическим обоснованием появления сингулярных решений является работа [29], где показано, что для уравнений линейной теории упругости в окрестности угловых точек имеет место решение вида

$$\sigma \sim \sum_{n=1} K_n f_n r^{\lambda_n - 1}, \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad c < \operatorname{Re} \lambda_1 < \operatorname{Re} \lambda_2 < \dots < \operatorname{Re} \lambda_n < \dots \quad (1)$$

или более сложное, с логарифмическими составляющими в случае кратных точек спектра λ_n . Здесь: r — расстояние до угловой точки; K_n — коэффициенты интенсивности; f_n — функции углового распределения поля напряжения σ в окрестности угловой точки, в плоском случае зависящие от одной полярной угловой переменной φ (при этом $c=0$), в пространственном — от двух сферических координат — φ, θ , при $c=-0.5$.

Из решения вида (1) следует, что если имеются λ_n , удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} \lambda_n < 1$, то напряжения стремятся к бесконечности при $r \rightarrow 0$.

Задачам построения и приложения сингулярных решений посвящены сотни публикаций. Общую картину решений задач с особыми точками дают обзоры [30–36].

В настоящей работе представлена модель, описывающая пересечение на некоторой глубине двух, трёх, четырёх пространственных клиновидных трещин с углами раствора 90° . Приводится численный алгоритм оценки сингулярности напряжений в окрестности особых точек, обсуждаются результаты расчёта поведения напряжений и показателей сингулярности напряжений в окрестности общей вершины рассматриваемых пространственных трещин и отмечаются характерные признаки в картинах поверхностных трещин и в зависимостях поведения напряжений.

2. Численный алгоритм анализа напряжений в окрестности вершин пространственных трещин

Идея применяемого в работе алгоритма определения степенной зависимости напряжений вблизи особых точек впервые изложена в [37] и исходит из предположения, что в достаточно малой окрестности особой точки поведение напряжений описывается одним слагаемым из представления (1). Тогда, согласно [29, 38], распределение напряжений вдоль линии, исходящей из особой точки, может быть выражено как

$$\sigma = A_1 r^{\lambda_1 - 1} + O(r^\lambda). \quad (2)$$

Здесь: r — расстояние от особой точки; A_1 — некоторая константа, называемая коэффициентом интенсивности сингулярности; λ_1 — параметр, характеризующий степень сингулярности напряжений; $O(r^\lambda)$ включает все члены с r^{λ_k} , где $k=2, 3, \dots$. При малых расстояниях r сингулярный член в уравнении (2) доминирует, и тогда это уравнение можно приближённо записать как $\sigma \sim A_1 r^{\lambda_1 - 1}$ или

$$\log \sigma = \log A_1 + (\lambda_1 - 1) \log r. \quad (3)$$

В настоящей работе для определения параметра λ_1 используется процедура метода конечных элементов (МКЭ) со сгущающимися к особым точкам расчётными сетками [39]. Для обнаружения зависимости (3) необходимо путём численных экспериментов найти такую дискретизацию, при которой в окрестности особой точки в ряде сеточных узлов $r_1^i, r_2^i, \dots, r_n^i$, расположенных на линии, исходящей из особой точки, с приемлемой точностью выполняются соотношения:

$$\lambda_1 - 1 \approx \log \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) / \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \approx \log \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3} \right) / \log \left(\frac{r_2}{r_3} \right) \approx \dots \approx \log \left(\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} \right) / \log \left(\frac{r_{n-1}}{r_n} \right). \quad (4)$$

Здесь: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — напряжения в узлах сетки r_1, r_2, \dots, r_n ; λ_1 — искомый показатель сингулярности напряжений. Данная зависимость позволяет вычислить значение λ_1 , определяющее в окрестности особой точки поведение напряжений.

3. Апробация алгоритма численного анализа напряжений в окрестностях особых точек

Описанный в разделе 2 алгоритм апробирован для различных типов особых точек в двумерных задачах, где наименьшее собственное значение является действительным числом [39]. В рассмотренных двумерных задачах отличие показателей сингулярности, найденных с помощью данной численной процедуры, от рассчитанных аналитически составляет не более 0.08%.

Для иллюстрации дополнительных аргументов в пользу достоверности результатов, полученных на основе численного алгоритма, в качестве примера возьмём трёхмерную задачу, связанную с определением поведения напряжений в вершине трещины, фронт которой перпендикулярен поверхности Oxy (Рис. 2а). Сингулярность напряжений оценим в точке O . Контур сферы на рисунке 2а представлен только для визуализации трещины в упругом полупространстве. В работе [40] эта задача решена численно, рассчитаны показатели сингулярности напряжений для изотропного и трансверсально-изотропного материалов (упругие характеристики см. в таблице 1).

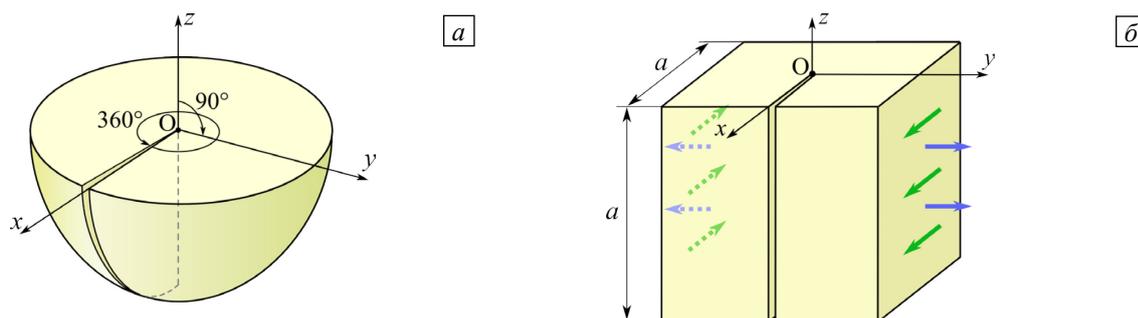


Рис. 2. Трещина, фронт которой перпендикулярен поверхности упругого полупространства (а) и соответствующая расчётная схема (б)

Таблица 1. Упругие характеристики материала [40]

Материал	E_i , МПа	G_{ij} , МПа	ν_{ij}
Изотропный	21000		0.3
Трансверсально-изотропный	$E_x = 130300$, $E_y = E_z = 9377$	$G_{xy} = G_{xz} = 4502$, $G_{yz} = 2865$	$\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = 0.33$

При использовании численного алгоритма в качестве расчётной схемы вместо упругого полупространства возьмём куб, размер граней которого в рассматриваемой задаче не имеет значения (Рис. 2б). При этом условия нормального разрыва трещины реализуются при задании на боковых гранях, параллельных плоскости Oxz , нормальных перемещений, а условия поперечного сдвига — при задании на этих же боковых гранях касательных перемещений, направленных параллельно оси Ox и противоположно относительно друг друга.

В таблице 2 для трещины в условиях нормального разрыва и поперечного сдвига представлены показатели сингулярности напряжений из работы [40] и рассчитанные согласно предлагаемому численному алгоритму, основанному на выделении из КЭ-решения асимптотики напряжений в соответствии с соотношениями (4). Отличие показателей сингулярности, полученных этими двумя методами, составляет не более 1.5%.

Таблица 2. Показатели сингулярности напряжений для трещины, фронт которой перпендикулярен поверхности упругого полупространства

Материал	λ_1 (поперечный сдвиг)		λ_2 (нормальный разрыв)	
	Численный алгоритм	[40]	Численный алгоритм	[40]
Изотропный	0.40	0.3929	0.55	0.5483
Трансверсально-изотропный	0.46	0.4543	0.52	0.5227

4. Результаты численных экспериментов

Для расчёта НДС в окрестности вершины нескольких пересекающихся трещин применялся МКЭ. Достоверность численных результатов обеспечивалась за счёт построения конечно-элементных сеток, сгущающихся к точке пересечения фронтов трёхмерных трещин, и выбором на основе численных экспериментов степени дискретизации, дающей необходимую точность решения. В качестве таких дискретизаций использовались конечно-элементные сетки, на которых выполнение естественных краевых условий вне трёх-четырёх элементов, примыкающих к особой точке, достигалось с погрешностью не более 1%.

В качестве первого примера рассмотрена задача, в которой две поверхностные трещины пересекаются под углом φ (Рис. 3а) и представляются как клиновидные математические разрезы с углом раствора 90° . Прямой угол выбран для того, чтобы глубина проникания трещин была одинаковой. В качестве расчётной схемы взят цилиндр (см. Рис. 3б). К боковой поверхности цилиндра приложено нормальное растягивающее усилие σ_0 . Вычисления выполнены при разных величинах угла φ и следующих значениях параметров: $h/R=6$; общая вершина находится на глубине $h/R=1$ от верхнего торца цилиндра, коэффициент Пуассона материала $\nu=0.3$.

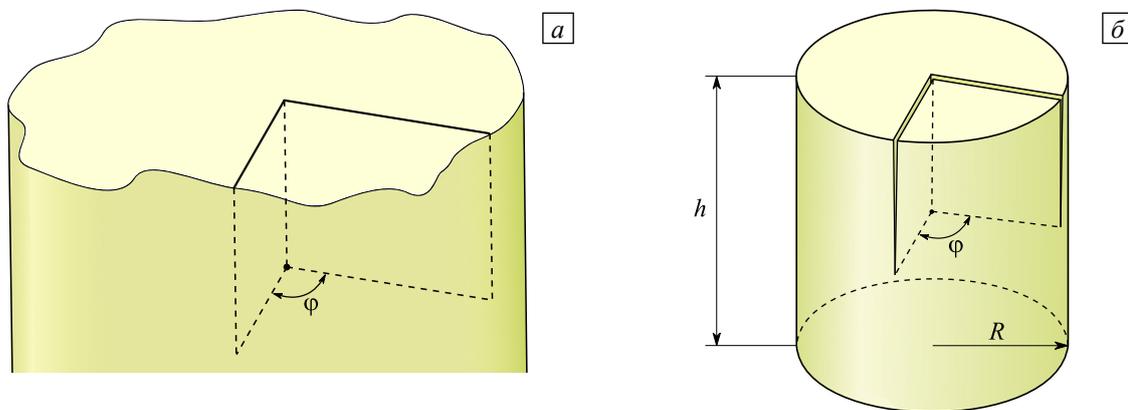


Рис. 3. Пересечение двух поверхностных трещин (а) и расчётная схема (б)

Для сравнения НДС вблизи вершины трещины можно использовать коэффициент интенсивности напряжений (КИН). Но, поскольку при варьировании угла φ геометрия вблизи общей вершины фронтов двух трещин меняется, переменной будет и размерность КИН. Сопоставлять же КИН с разными размерностями некорректно. Поэтому для сравнения НДС вблизи общей вершины фронтов нескольких трещин при разных углах φ удобнее использовать энергетическую характеристику — плотность энергии деформаций. Значения средней плотности энергии деформаций вычислены в фиксированном объёме малой сферы, центр которой размещается в общей вершине фронтов трещин и совпадает с началом прямоугольной системы координат $Oxyz$. Ось Oy направлена по оси цилиндра.

На рисунке 4 показана сфера из 2560 конечных элементов. Радиус сферы составляет $10^{-3}R$. Для иллюстрации на рисунке 5 приведены зависимости от угла φ средней плотности энергии деформаций

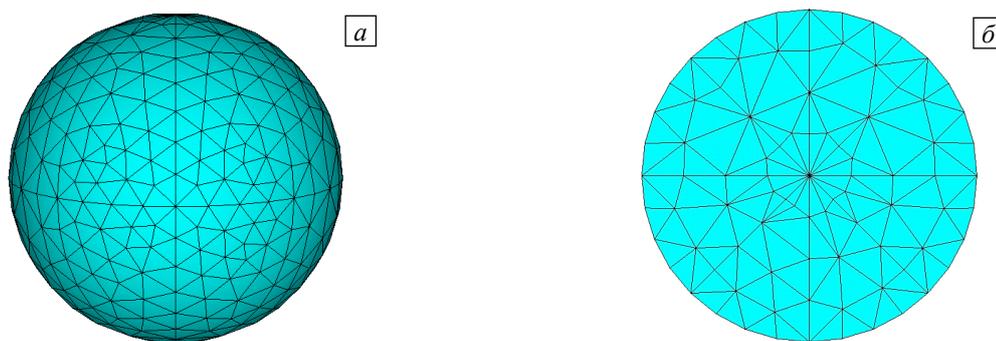


Рис. 4. Сфера радиусом $10^{-3}R$ (а) и её сечение (б)

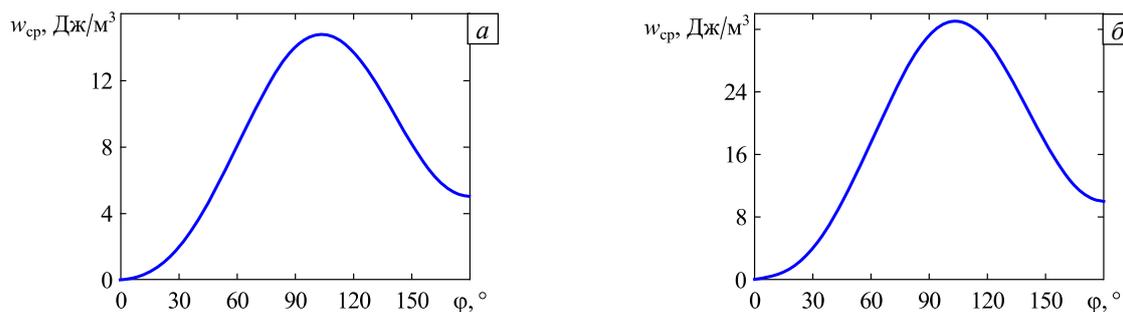


Рис. 5. Зависимость от угла φ средней плотности энергии деформаций между двумя трещинами: в сфере радиусом $10^{-3}R$ (а); в сфере радиусом $5 \cdot 10^{-4}R$ (б)

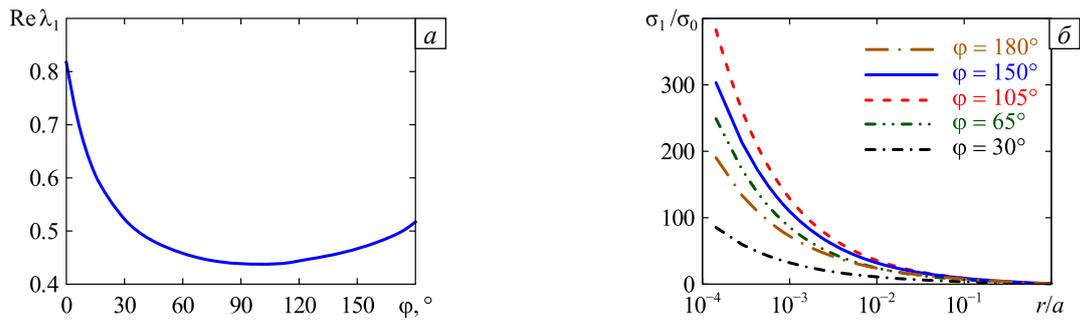


Рис. 6. Зависимость $Re\lambda_1$ от угла ϕ между двумя трещинами (а); распределение главных напряжений σ_1/σ_0 вдоль оси цилиндра в направлении от общей вершины при разных значениях угла ϕ (б)

w_{cp} для сферы радиусом $10^{-3}R$ и $5 \cdot 10^{-4}R$, а на рисунке 6а — зависимость от угла ϕ собственных значений λ_1 , полученных с помощью численного алгоритма, основанного на выделении из КЭ-решения асимптотики напряжений в соответствии с соотношениями (4). В силу симметрии задачи результаты представлены до значения $\phi = 180^\circ$. В качестве дополнительной информации на рисунке 6б для некоторых значений угла ϕ показаны распределения главных напряжений σ_1 вдоль оси цилиндра в направлении от общей вершины.



Рис. 7. Трещины на поверхности бетона с изломами под углом $\sim 100-110^\circ$ (см. кружки)

Из проведённых расчётов установлено, что максимумы средней плотности энергии деформаций в сфере при обоих радиусах располагаются между 100 и 110° , что позволяет говорить о том, что при угле из этого диапазона излом трещины наиболее вероятен. Вывод хорошо согласуется с картиной ломаной трещины на поверхности бетона (Рис. 7). Следует отметить, что при $\phi \rightarrow 0$ результаты для двух клиновидных трещин с углами раствора 90° приближаются к результатам для одной клиновидной трещины с углом раствора 90° как по величине средней плотности энергии деформаций, так и по значению показателя

сингулярности напряжений λ_1 . Сопоставив рисунки 5 и 6б, можно сделать вывод, что максимуму средней плотности энергии деформаций и максимальной концентрации напряжений отвечает одинаковый угол ϕ .

По аналогии с исследованием НДС в окрестности общей вершины двух пересекающихся трещин осуществлены численные эксперименты для различных конфигураций пересечения трёх и четырёх пространственных трещин. Для трёх трещин рассмотрены две конфигурации: Y (Рис. 8–10) и T (Рис. 11–13), а для четырёх трещин — X-конфигурация (Рис. 14–16). Геометрия конфигураций определяется углами между берегами соседних трещин. Для Y-конфигурации два угла равны $(\pi - \phi/2)$ и зависят от величины третьего угла — угла ϕ (Рис. 8б). В T-конфигурации один угол между трещинами всегда π , второй — ϕ , а третий — $(\pi - \phi)$ (Рис. 11б). Конфигурация X характеризуется двумя парами смежных углов. В одной паре углы равны ϕ , а в другой — $(\pi - \phi)$ (Рис. 14б).

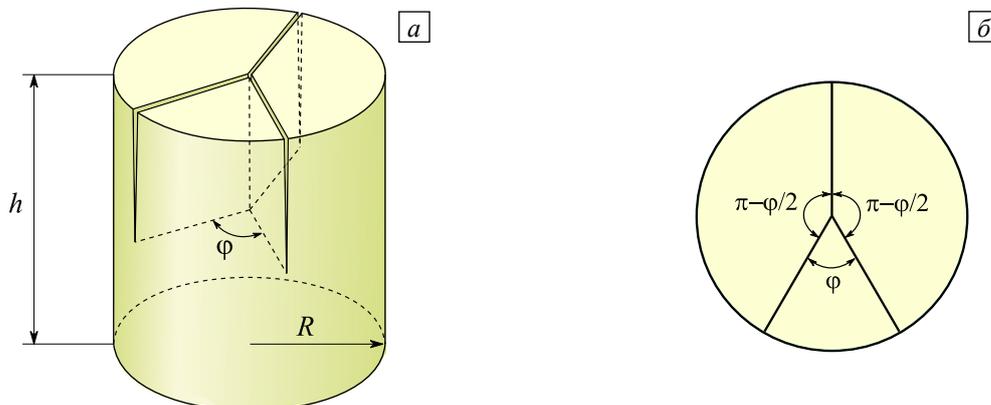


Рис. 8. Расчётная схема пересечения трёх трещин (Y-конфигурация) (а) и вид сверху на торец цилиндра (б)

Как и в задаче для двух трещин, при трёх трещинах в качестве расчётной схемы взят цилиндр, представленный рисунках 8а, 11а и 14а. К боковой поверхности цилиндра приложено нормальное растягивающее усилие σ_0 . Расчёты выполнены при разных φ и следующих параметрах: $h/R = 6$, коэффициент Пуассона материала $\nu = 0.3$. Для всех названных конфигураций вычислены зависимости от угла φ средней плотности энергии деформаций (Рис. 9, 12, 15) и собственных значений λ_1 (Рис. 10а, 13а, 16а), полученных с помощью численного алгоритма, основанного на выделении из КЭ-решения асимптотики напряжений в соответствии с соотношениями (4). Дополнительно для некоторых значений угла φ построены распределения главных напряжений σ_1 вдоль оси цилиндра в направлении от общей вершины (Рис. 10б, 13б, 16б).

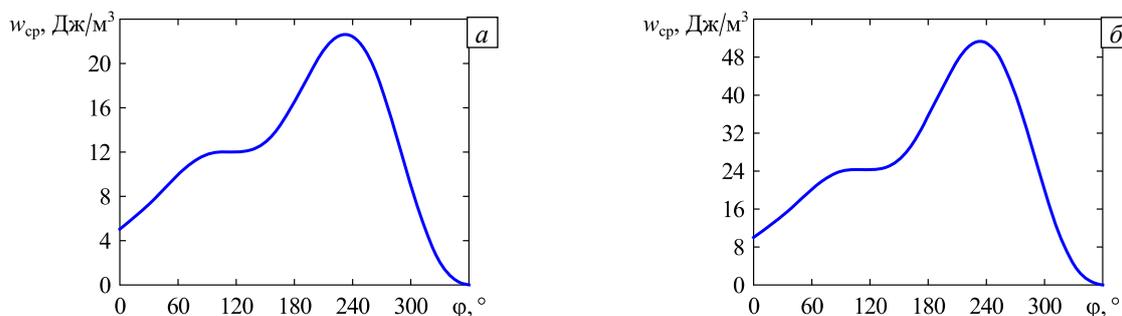


Рис. 9. Зависимость от угла φ средней плотности энергии деформаций при Y-конфигурации: в сфере радиусом $10^{-3}R$ (а); в сфере радиусом $5 \cdot 10^{-4}R$ (б)

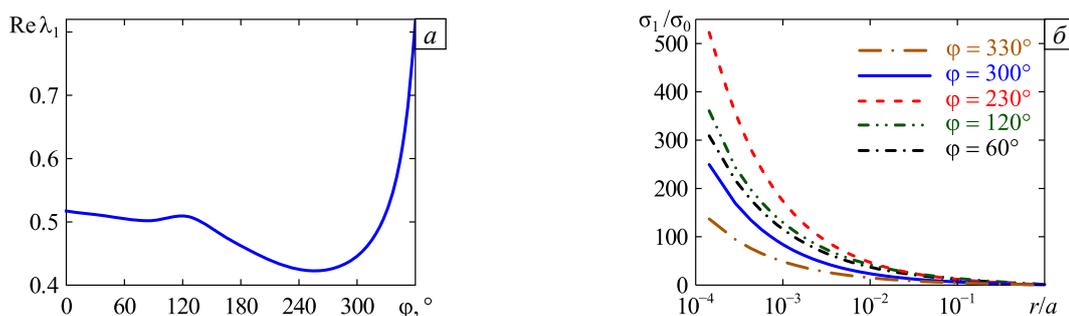


Рис. 10. Зависимость $\text{Re} \lambda_1$ от угла φ для Y-конфигурации трёх трещин (а); распределение главных напряжений σ_1/σ_0 вдоль оси цилиндра в направлении от общей вершины при различных значениях угла φ (б)

Проведённые расчёты позволили установить, что при Y-конфигурации локальные максимумы средней плотности энергии деформаций для сферы обоих радиусов располагаются между 110 и 115°. Это совпадает с наблюдаемой закономерностью, заключающейся в том, что углы между трещинами в основном лежат в диапазоне между 100 и 150° с пиком около 120° [10, 17, 19, 28]. Однако глобальным максимумам при обоих радиусах отвечают углы со значениями между 225 и 235°, и соответствующие им Y-конфигурации в картинах реальных сеток трещин не встречаются. Уровень средней плотности энергии деформаций, близкий к локальному максимуму и больший, характерен для угла φ от 100 до 290°, при этом два других угла ($\pi - \varphi/2$) будут находиться в диапазоне от 130 до 35°. Из сопоставления

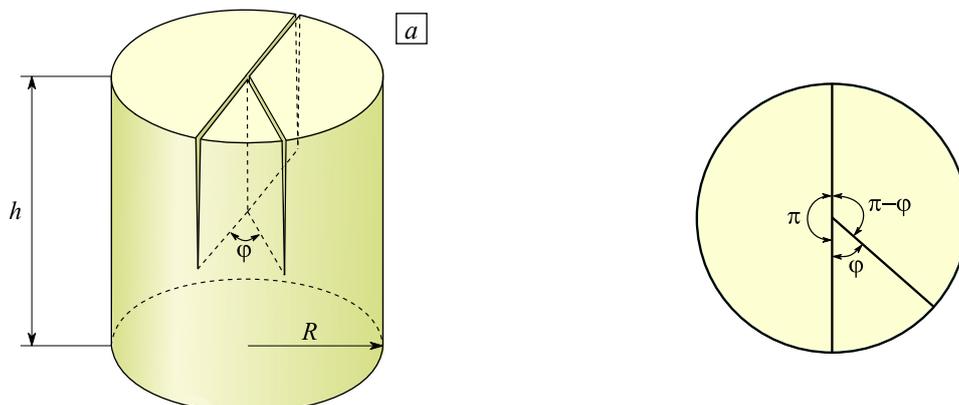


Рис. 11. Расчётная схема пересечения трёх трещин (Т-конфигурация) (а) и вид сверху на торец цилиндра (б)

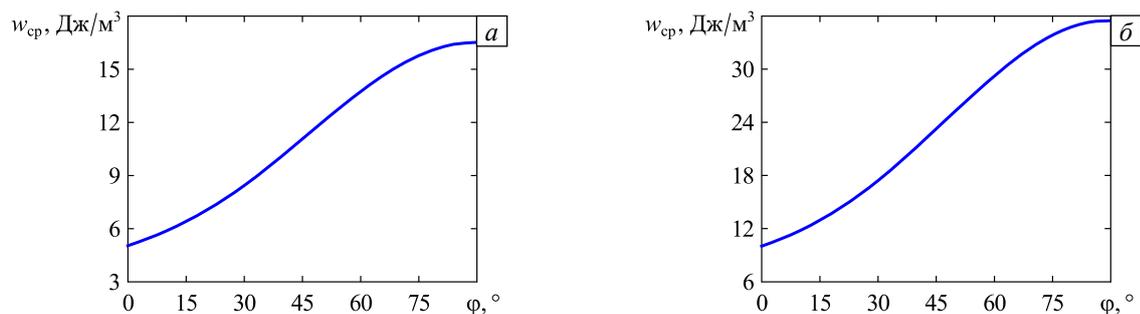


Рис. 12. Зависимости от угла φ средней плотности энергии деформаций при Т-конфигурации в сфере радиусом $10^{-3}R$ (а) и радиусом $5 \cdot 10^{-4}R$ (б)

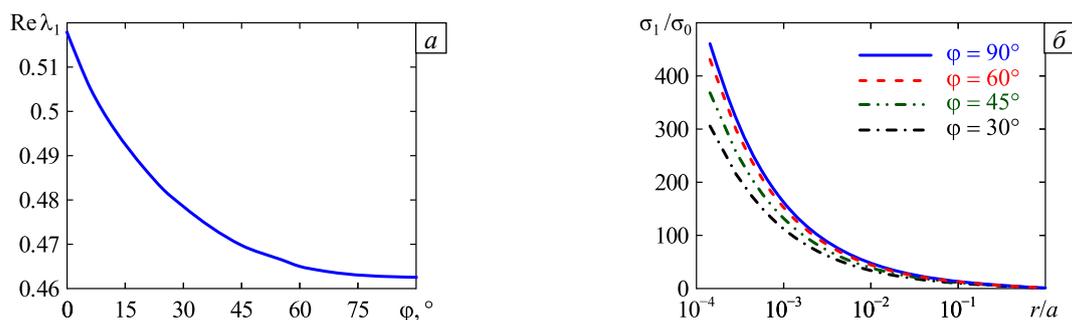


Рис. 13. Зависимость от угла φ величины $\text{Re} \lambda_1$ для трёх трещин (Т-конфигурация) (а); распределения главных напряжений σ_1/σ_0 вдоль оси цилиндра в направлении от общей вершины при разных значениях угла φ (б)

результатов на рисунках 9 и 10б следует, что обнаруженная для двух трещин качественная корреляция между средней плотностью энергии деформаций и асимптотикой главных напряжений вблизи общей вершины трёх трещин также имеет место и для Y-конфигурации.

В силу симметрии Т-конфигурации результаты на рисунках 12 и 13 представлены до значения $\varphi = 90^\circ$. Видно, что максимумам средней плотности энергии деформаций в сфере при обоих радиусах отвечает угол $\varphi = 90^\circ$ (то есть симметричная Т-конфигурация). Именно она встречается в картинах сеток поверхностных трещин [3, 4, 11, 19, 27] (см. Рис. 1б). Сопоставление результатов на рисунках 12 и 13 позволяет сделать вывод, что и для Т-конфигурации свойственна качественная корреляция между средней плотностью энергии деформаций и асимптотикой главных напряжений вблизи общей вершины.

При пересечении четырёх трещин с X-конфигурацией (Рис. 14) в силу симметрии последние результаты на рисунках 15 и 16 представлены до $\varphi = 90^\circ$. Проведенные расчёты позволили установить, что максимумы средней плотности энергии деформаций для сферы обоих радиусов и наименьшее значение показателя сингулярности располагаются при угле $\varphi = 90^\circ$ (когда все углы между четырьмя трещинами равны), что также совпадает с наблюдаемой закономерностью, заключающейся в том, что четыре трещины чаще сходятся под углом примерно 90° [2, 10, 19, 28]. Сопоставив рисунки 15 и 16, можно сделать вывод, что и для X-конфигурации имеет место качественная корреляция между средней плотностью энергии деформаций и асимптотикой главных напряжений вблизи общей вершины.

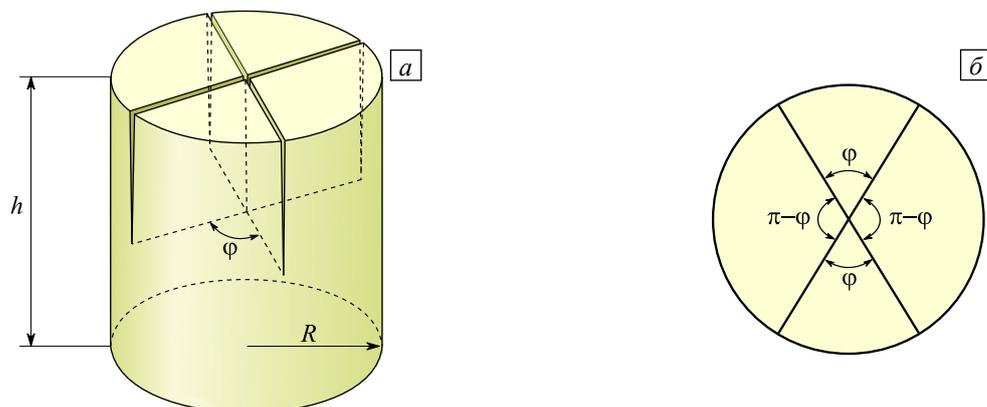


Рис. 14. Расчётная схема пересечения четырёх трещин (X-конфигурация) (а) и вид сверху на торец цилиндра (б)

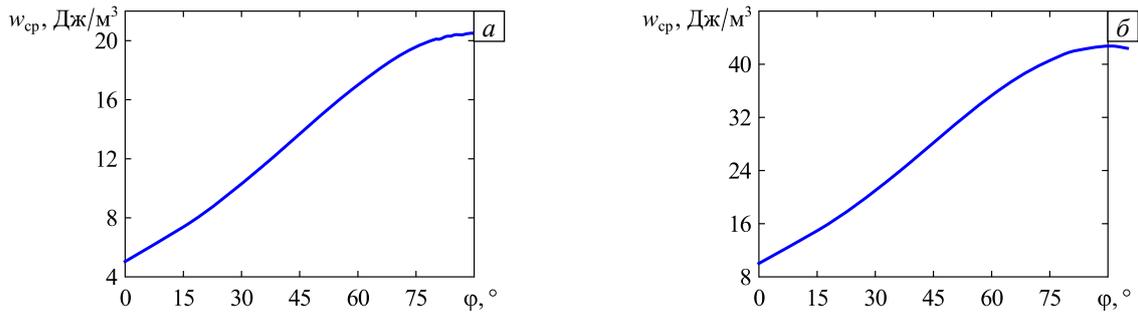


Рис. 15. Зависимость средней плотности энергии деформаций от угла φ для четырёх трещин в сфере с радиусом $10^{-3}R$ (а) и в сфере с радиусом $5 \cdot 10^{-4}R$ (б)

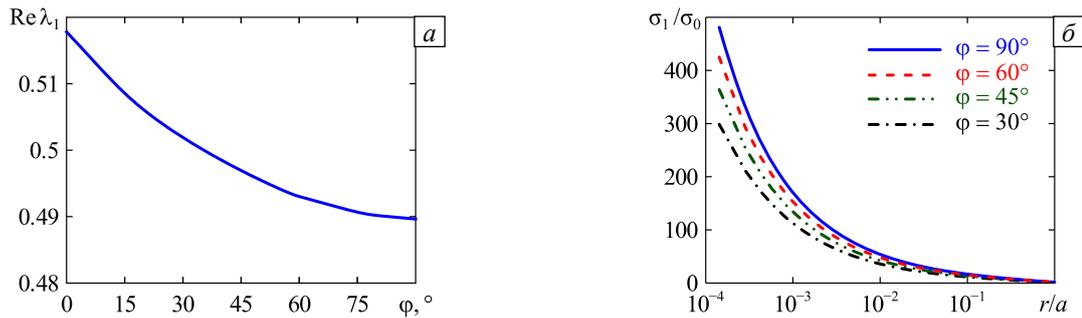


Рис. 16. Зависимость $\text{Re} \lambda_1$ от угла φ для X-конфигурации четырёх трещин (а); распределения главных напряжений σ_1/σ_0 вдоль оси цилиндра в направлении от общей вершины при различных значениях угла φ (б)

5. Заключение

Проведено сопоставление результатов численного моделирования пересечения двух, трёх, четырёх трещин на поверхности изотропного полупространства с реальными картинками сеток поверхностных трещин. Представлен численный алгоритм анализа напряжений в окрестности особых точек в трёхмерных телах. Разработанный алгоритм апробирован для различных типов особых точек в двумерных задачах и в трёхмерной задаче, связанный с оценкой поведения напряжений в точке выхода на поверхность перпендикулярного ей фронта одиночной пространственной трещины.

Продемонстрировано, что алгоритм позволяет рассчитать показатели сингулярности напряжений в общей вершине пространственных трещин. Для двух трещин, пересекающихся под углом φ , обнаружена корреляция между величиной угла излома линии сетки трещин на поверхности и значением угла φ , при котором достигается максимум средней плотности энергии деформаций в малой сфере, центр которой расположен в общей вершине. Для трёх трещин рассмотрены две наиболее распространённые конфигурации: Y и T.

Установлено, что для T-конфигурации максимуму средней плотности энергии деформаций и наименьшему значению показателя сингулярности отвечает угол $\varphi = 90^\circ$, что полностью соответствует симметричной T-конфигурации, встречающейся в реальных картинках поверхностных трещин. В случае Y-конфигурации глобальный максимум средней плотности энергии деформаций и наименьшее значение показателя сингулярности достигаются при определяющих конфигурацию значениях угла φ , которые не присутствуют в реальных картинах поверхностных трещин. Однако диапазон изменения угла $100 < \varphi < 290^\circ$, для которого характерен высокий уровень средней плотности энергии деформаций, полностью содержит в себе углы от 100 до 150°, присущие Y-конфигурациям реальных трещин.

Для X-конфигурации из четырёх трещин выявлено, что максимум средней плотности энергии деформаций и наименьшее значение показателя сингулярности имеют место, когда все углы между четырьмя трещинами равны. Это также совпадает с наблюдаемой в реальных картинах трещин закономерностью, что четыре трещины чаще сходятся под углом около 90° , то есть в симметричной \pm -конфигурации.

Во всех приведённых в работе задачах обнаружена прямая зависимость между средней плотностью энергии деформаций и асимптотикой главных напряжений вблизи общей вершины пространственных трещин.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края (проект № 20-41-596007).

Литература

1. *Huo Z., Peng J., Zhang J., Tang X., Li P., Ding J., Li Z., Liu Z., Dong Z., Lei Y., Wang X.* Factors influencing the development of diagenetic shrinkage macro-fractures in shale // *J. Pet. Sci. Eng.* 2019. Vol. 183. 106365. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106365>
2. *Scott G.J.T., Webster R., Nortcliff S.* An analysis of crack pattern in clay soil: its density and orientation // *J. Soil Sci.* 1986. Vol. 37, No. 4. P. 653-668. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2389.1986.tb00394.x>
3. *Velde B.* Structure of surface cracks in soil and muds // *Geoderma.* 1999. Vol. 93, No. 1-2. P. 101-124. [https://doi.org/10.1016/S0016-7061\(99\)00047-6](https://doi.org/10.1016/S0016-7061(99)00047-6)
4. *Tang C., Shi B., Liu C., Zhao L.* Influencing factors of geometrical structure of surface shrinkage cracks in clayey soils // *Eng. Geol.* 2008. Vol. 101, No. 3-4. P. 204-217. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2008.05.005>
5. *Tang C., Shi B., Liu C., Suo W.-B., Gao L.* Experimental characterization of shrinkage and desiccation cracking in thin clay layer // *Appl. Clay Sci.* 2011. Vol. 52, No. 1-2. P. 69-77. <https://doi.org/10.1016/j.clay.2011.01.032>
6. *Preston S., Griffiths B.S., Young I.M.* An investigation into sources of soil crack heterogeneity using fractal geometry // *Eur. J. Soil Sci.* 1997. Vol. 48, No. 1. P. 31-37. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2389.1997.tb00182.x>
7. *Liu B., Zhu C., Tang C.-S., Xie Y.-H., Yin L.-Y., Cheng Q., Shi B.* Bio-remediation of desiccation cracking in clayey soils through microbially induced calcite precipitation (MICP) // *Eng. Geol.* 2020. Vol. 264. 105389. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2019.105389>
8. *Tran D.K., Ralaizafisoarivony N., Charlier R., Mercatoris B., Léonard A., Toye D., Degré A.* Studying the effect of desiccation cracking on the evaporation process of a Luvisol – From a small-scale experimental and numerical approach // *Soil Tillage Res.* 2019. Vol. 193. P. 142-152. <https://doi.org/10.1016/j.still.2019.05.018>
9. *Somasundaram J., Lal R., Sinha N.K., Dalal R., Chitralekha A., Chaudhary R.S., Patra A.K.* Cracks and potholes in vertisols: Characteristics, occurrence, and management // *Adv. Agron.* 2018. Vol. 149. P. 93-159. <https://doi.org/10.1016/bs.agron.2018.01.001>
10. *Vogel H.-J., Hoffmann H., Roth K.* Studies of crack dynamics in clay soil: Studies of crack dynamics in clay soil // *Geoderma.* 2005. Vol. 125, No. 3-4. P. 203-211. <https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2004.07.009>
11. *Montigny A., Walwer D., Michaut C.* The origin of hierarchical cracks in floor-fractured craters on Mars and the Moon // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2022. Vol. 600. 117887. <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2022.117887>
12. *El-Maarry M.R., Kodikara J., Wijessoriya S., Markiewicz W.J., Thomas N.* Desiccation mechanism for formation of giant polygons on Earth and intermediate-sized polygons on Mars: Results from a pre-fracture model // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2012. Vol. 323-324. P. 19-26. <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2012.01.016>
13. *El-Maarry M.R., Watters W., McKeown N.K., Carter J., Noe Dobrea E., Bishop J.L., Pommerol A., Thomas N.* Potential desiccation cracks on Mars: A synthesis from modeling, analogue-field studies, and global observations // *Icarus.* 2014. Vol. 241. P. 248-268. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.06.033>
14. *Kadono T., Arakawa M.* Crack propagation in thin glass plates caused by high velocity impact // *Phys. Rev. E.* 2002. Vol. 65, No. 3. 035107. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.035107>
15. *Davydova M., Uvarov S.* Fractal statistics of brittle fragmentation // *Frat. ed Integrità Strutt.* 2013. Vol. 7, No. 24. P. 60-68. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.24.05>
16. *Bohn S., Pauchard L., Couder Y.* Hierarchical crack pattern as formed by successive domain divisions // *Phys. Rev. E.* 2005. Vol. 71, No. 4. 046214. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.046214>
17. *Korneta W., Mendiratta S.K., Menteiro J.* Topological and geometrical properties of crack patterns produced by the thermal shock in ceramics // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 57, No. 3. P. 3142-3152. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.3142>
18. *Leblouba M., Tarabin M., Zahri M.* Probabilistic analysis and simulation of crack propagation in concrete pavements and surfaces // *Sci. Rep.* 2022. Vol. 12, No. 1. 14157. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-18060-8>
19. *Le Roux S., Medjedoub F., Dour G., Rézai-Aria F.* Image analysis of microscopic crack patterns applied to thermal fatigue heat-checking of high temperature tool steels // *Micron.* 2013. Vol. 44. P. 347-358. <https://doi.org/10.1016/j.micron.2012.08.007>
20. *Giorgiutti-Dauphiné F., Pauchard L.* Painting cracks: A way to investigate the pictorial matter // *J. Appl. Phys.* 2016. Vol. 120, No. 6. 065107. <https://doi.org/10.1063/1.4960438>
21. *Léang M., Giorgiutti-Dauphiné F., Lee L.-T., Pauchard L.* Crack opening: from colloidal systems to paintings // *Soft Matter.* 2017. Vol. 13, No. 34. P. 5802-5808. <https://doi.org/10.1039/C7SM00985B>
22. *Bosco E., Suiker A.S.J., Fleck N.A.* Crack channelling mechanisms in brittle coating systems under moisture or temperature gradients // *Int. J. Fract.* 2020. Vol. 225, No. 1. P. 1-30. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00461-3>
23. *Murphy C.P., Bullock P.Y., Turner R.H.* The measurement and characterisation of voids in soil thin sections by image analysis. Part I. Principles and techniques // *Eur. J. Soil Sci.* 1977. Vol. 28. P. 498-508. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2389.1977.tb02258.x>
24. *Moreau É., Sardini P., Touchard G., Velde B.* 2D and 3D morphological and topological analysis of a clay soil // *Microsc. Microanal. Microstruct.* 1996. Vol. 7, No. 5-6. P. 499-504. <https://doi.org/10.1051/mm:1996151>
25. *Yang B., Yuan J.* Application of fractal theory to characterize desiccation cracks in contaminated clayey soils // *Arab. J. Geosci.* 2019. Vol. 12, No. 3. 85. <https://doi.org/10.1007/s12517-019-4274-7>
26. <https://www.europlanet-society.org/patterns-in-mars-crater-floors-give-picture-of-drying-lakes-eps0905/> (Дата обращения 23.05.2023)
27. *Ren J., Li X., Zhao K., Fu B., Jiang T.* Study of an on-line measurement method for the salt parameters of soda-saline soils based on the texture features of cracks // *Geoderma.* 2016. Vol. 263. P. 60-69. <https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2015.08.039>
28. *Shorlin K.A., de Bruyn J.R., Graham M., Morris S.W.* Development and geometry of isotropic and directional shrinkage-crack patterns // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61, No. 6. P. 6950-6957. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.6950>

29. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209-292.
30. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis // Appl. Mech. Rev. 2004. Vol. 57, No. 4. P. 251-298. <https://doi.org/10.1115/1.1762503>
31. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // Appl. Mech. Rev. 2004. Vol. 57, No. 5. P. 385-439. <https://doi.org/10.1115/1.1767846>
32. Mittelstedt C., Becker W. Free-edge effects in composite laminates // Appl. Mech. Rev. 2007. Vol. 60, No. 5. P. 217-245. <https://doi.org/10.1115/1.2777169>
33. Paggi M., Carpinteri A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // Appl. Mech. Rev. 2008. Vol. 61, No. 2. 020801. <https://doi.org/10.1115/1.2885134>
34. Erdogan F., Ozturk M. On the singularities in fracture and contact mechanics // J. Appl. Mech. 2008. Vol. 75, No. 5. 051111. <https://doi.org/10.1115/1.2936241>
35. Carpinteri A., Paggi M. Asymptotic analysis in linear elasticity: from the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today // Eng. Fract. Mech. 2009. Vol. 76, No. 12. P. 1771-1784. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.03.012>
36. Pook L.P. A 50-year retrospective review of three-dimensional effects at cracks and sharp notches // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. 2013. Vol. 36, No. 8. P. 699-723. <https://doi.org/10.1111/ffe.12074>
37. Raju I., Crews J.H. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates // Comput. Struct. 1981. Vol. 14, No. 1-2. P. 21-28. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90079-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90079-1)
38. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. 1952. Vol. 19, No. 4. P. 526-528. <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140730-111744170>
39. Корепанов В.В., Матвеев В.П., Федоров А.Ю., Шардаков И.Н. Численный анализ сингулярных решений двумерных задач несимметричной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 4. С. 50-58. (English version <https://doi.org/10.3103/S0025654413040067>)
40. Pageau S.S., Biggers S.B.Jr. Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1995. Vol. 38, No. 13. P. 2225-2239. <https://doi.org/10.1002/nme.1620381306>

References

1. Huo Z., Peng J., Zhang J., Tang X., Li P., Ding J., Li Z., Liu Z., Dong Z., Lei Y., Wang X. Factors influencing the development of diagenetic shrinkage macro-fractures in shale. *J. Pet. Sci. Eng.*, 2019, vol. 183, 106365. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106365>
2. Scott G.J.T., Webster R., Nortcliff S. An analysis of crack pattern in clay soil: its density and orientation. *J. Soil Sci.*, 1986, vol. 37, no. 4, pp. 653-668. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2389.1986.tb00394.x>
3. Velde B. Structure of surface cracks in soil and muds. *Geoderma*, 1999, vol. 93, no. 1-2, pp. 101-124. [https://doi.org/10.1016/S0016-7061\(99\)00047-6](https://doi.org/10.1016/S0016-7061(99)00047-6)
4. Tang C., Shi B., Liu C., Zhao L. Influencing factors of geometrical structure of surface shrinkage cracks in clayey soils. *Eng. Geol.*, 2008, vol. 101, no. 3-4, pp. 204-217. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2008.05.005>
5. Tang C., Shi B., Liu C., Suo W.-B., Gao L. Experimental characterization of shrinkage and desiccation cracking in thin clay layer. *Appl. Clay Sci.*, 2011, vol. 52, no. 1-2, pp. 69-77. <https://doi.org/10.1016/j.clay.2011.01.032>
6. Preston S., Griffiths B.S., Young I.M. An investigation into sources of soil crack heterogeneity using fractal geometry. *Eur. J. Soil Sci.*, 1997, vol. 48, no. 1, pp. 31-37. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2389.1997.tb00182.x>
7. Liu B., Zhu C., Tang C.-S., Xie Y.-H., Yin L.-Y., Cheng Q., Shi B. Bio-remediation of desiccation cracking in clayey soils through microbially induced calcite precipitation (MICP). *Eng. Geol.*, 2020, vol. 264, 105389. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2019.105389>
8. Tran D.K., Ralaizafisoloarivony N., Charlier R., Mercatoris B., Léonard A., Teye D., Degré A. Studying the effect of desiccation cracking on the evaporation process of a Luvisol – From a small-scale experimental and numerical approach. *Soil Tillage Res.*, 2019, vol. 193, pp. 142-152. <https://doi.org/10.1016/j.still.2019.05.018>
9. Somasundaram J., Lal R., Sinha N.K., Dalal R., Chitralakha A., Chaudhary R.S., Patra A.K. Cracks and potholes in vertisols: Characteristics, occurrence, and management. *Adv. Agron.*, 2018, vol. 149, pp. 93-159. <https://doi.org/10.1016/bs.agron.2018.01.001>
10. Vogel H.-J., Hoffmann H., Roth K. Studies of crack dynamics in clay soil: Studies of crack dynamics in clay soil. *Geoderma*, 2005, vol. 125, no. 3-4, pp. 203-211. <https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2004.07.009>
11. Montigny A., Walwer D., Michaut C. The origin of hierarchical cracks in floor-fractured craters on Mars and the Moon. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 2022, vol. 600, 117887. <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2022.117887>
12. El-Maarry M.R., Kodikara J., Wijessoriya S., Markiewicz W.J., Thomas N. Desiccation mechanism for formation of giant polygons on Earth and intermediate-sized polygons on Mars: Results from a pre-fracture model. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 2012, vol. 323-324, pp. 19-26. <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2012.01.016>
13. El-Maarry M.R., Watters W., McKeown N.K., Carter J., Noe Dobrea E., Bishop J.L., Pommerol A., Thomas N. Potential desiccation cracks on Mars: A synthesis from modeling, analogue-field studies, and global observations. *Icarus*, 2014, vol. 241, pp. 248-268. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2014.06.033>
14. Kadono T., Arakawa M. Crack propagation in thin glass plates caused by high velocity impact. *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 65, no. 3, 035107. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.035107>
15. Davydova M., Uvarov S. Fractal statistics of brittle fragmentation. *Frat. ed Integrità Strutt.*, 2013, vol. 7, no. 24, pp. 60-68. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.24.05>
16. Bohn S., Pauchard L., Couder Y. Hierarchical crack pattern as formed by successive domain divisions. *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, no. 4, 046214. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.046214>
17. Korneta W., Mendiratta S.K., Menteiro J. Topological and geometrical properties of crack patterns produced by the thermal shock in ceramics. *Phys. Rev. E*, 1998, vol. 57, no. 3, pp. 3142-3152. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.3142>

18. Leblouba M., Tarabin M., Zahri M. Probabilistic analysis and simulation of crack propagation in concrete pavements and surfaces. *Sci. Rep.*, 2022, vol. 12, no. 1, 14157. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-18060-8>
19. Le Roux S., Medjedoub F., Dour G., Rézaï-Aria F. Image analysis of microscopic crack patterns applied to thermal fatigue heat-checking of high temperature tool steels. *Micron*, 2013, vol. 44, pp. 347-358. <https://doi.org/10.1016/j.micron.2012.08.007>
20. Giorgiutti-Dauphiné F., Pauchard L. Painting cracks: A way to investigate the pictorial matter. *J. Appl. Phys.*, 2016, vol. 120, no. 6, 065107. <https://doi.org/10.1063/1.4960438>
21. Léang M., Giorgiutti-Dauphiné F., Lee L.-T., Pauchard L. Crack opening: from colloidal systems to paintings. *Soft Matter*, 2017, vol. 13, no. 34, pp. 5802-5808. <https://doi.org/10.1039/C7SM00985B>
22. Bosco E., Suiker A.S.J., Fleck N.A. Crack channelling mechanisms in brittle coating systems under moisture or temperature gradients. *Int. J. Fract.*, 2020, vol. 225, no. 1, pp. 1-30. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00461-3>
23. Murphy C.P., Bullock P.Y., Turner R.H. The measurement and characterisation of voids in soil thin sections by image analysis. Part I. Principles and techniques. *Eur. J. Soil Sci.*, 1977, vol. 28, pp. 498-508. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2389.1977.tb02258.x>
24. Moreau É., Sardini P., Touchard G., Velde B. 2D and 3D morphological and topological analysis of a clay soil. *Microsc. Microanal. Microstruct.*, 1996, vol. 7, no. 5-6, pp. 499-504. <https://doi.org/10.1051/mmm:1996151>
25. Yang B., Yuan J. Application of fractal theory to characterize desiccation cracks in contaminated clayey soils. *Arab. J. Geosci.*, 2019, vol. 12, no. 3, 85. <https://doi.org/10.1007/s12517-019-4274-7>
26. <https://www.europlanet-society.org/patterns-in-mars-crater-floors-give-picture-of-drying-lakes-eps0905/> (accessed 23 May 2023)
27. Ren J., Li X., Zhao K., Fu B., Jiang T. Study of an on-line measurement method for the salt parameters of soda-saline soils based on the texture features of cracks. *Geoderma*, 2016, vol. 263, pp. 60-69. <https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2015.08.039>
28. Shorlin K.A., de Bruyn J.R., Graham M., Morris S.W. Development and geometry of isotropic and directional shrinkage-crack patterns. *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 61, no. 6, pp. 6950-6957. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.6950>
29. Kondrat'ev V. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1967, vol. 16, pp. 227-313. <http://mi.mathnet.ru/eng/mmo186>
30. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis. *Appl. Mech. Rev.*, 2004, vol. 57, no. 4, pp. 251-298. <https://doi.org/10.1115/1.1762503>
31. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification. *Appl. Mech. Rev.*, 2004, vol. 57, no. 5, pp. 385-439. <https://doi.org/10.1115/1.1767846>
32. Mittelstedt C., Becker W. Free-edge effects in composite laminates. *Appl. Mech. Rev.*, 2007, vol. 60, no. 5, pp. 217-245. <https://doi.org/10.1115/1.2777169>
33. Paggi M., Carpinteri A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Appl. Mech. Rev.*, 2008, vol. 61, no. 2, pp. 020801. <https://doi.org/10.1115/1.2885134>
34. Erdogan F., Ozturk M. On the singularities in fracture and contact mechanics. *J. Appl. Mech.*, 2008, vol. 75, no. 5, 051111. <https://doi.org/10.1115/1.2936241>
35. Carpinteri A., Paggi M. Asymptotic analysis in linear elasticity: from the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today. *Eng. Fract. Mech.*, 2009, vol. 76, no. 12, pp. 1771-1784. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.03.012>
36. Pook L.P. A 50-year retrospective review of three-dimensional effects at cracks and sharp notches. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2013, vol. 36, no. 8, pp. 699-723. <https://doi.org/10.1111/ffe.12074>
37. Raju I., Crews J.H. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates. *Comput. Struct.*, 1981, vol. 14, no. 1-2, pp. 21-28. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90079-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90079-1)
38. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. Appl. Mech.*, 1952, vol. 19, no. 4, pp. 526-528. <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140730-111744170>
39. Korepanov V.V., Matveenko V.P., Fedorov A.Yu., Shardakov I.N. Numerical analysis of singular solutions of two-dimensional problems of asymmetric elasticity. *Mech. Solid.*, 2013, vol. 48, no. 4, pp. 397-404. <https://doi.org/10.3103/S0025654413040067>
40. Pageau S.S., Biggers S.B.Jr. Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1995, vol. 38, no. 13, pp. 2225-2239. <https://doi.org/10.1002/nme.1620381306>

Поступила в редакцию 01.07.2023; после доработки 25.07.2023; принята к опубликованию 25.07.2023