

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.3.29](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.29)

УДК 539.42

ТРЕХТОЧЕЧНЫЙ ИЗГИБ ОБРАЗЦОВ С ЭКСЦЕНТРИЧНОЙ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ СМЕШАННОМ НАГРУЖЕНИИ

В.Д. Кургузов^{1,2}, А.Г. Демешкин¹, Д.А. Кузнецов¹¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская Федерация

Возникновение трещин в элементах конструкций при их эксплуатации обусловлено либо деградацией материала, либо наличием скрытых дефектов. Вследствие этого конструкция может выйти из строя при более низких внешних нагрузках и раньше предполагаемого срока службы. Разрушение конструкции по причине роста имеющихся трещин происходит, как правило, при смешанном нагружении. С целью изучения механизма такого разрушения в работе предложен образец эксцентричной балки прямоугольного поперечного сечения с надрезом (трещиной) и рассмотрено его поведение при асимметричном изгибном нагружении. Смешанные моды деформаций I и II получаются сдвигом либо трещины, либо точки приложения внешней нагрузки. Методом конечных элементов рассчитаны коэффициенты интенсивности напряжений, отвечающие I и II модам разрушения, а также T -напряжения при различных геометрических параметрах балки и условиях ее нагружения. Варьировались отношения к ширине балки длин надреза и пролета. Проведен анализ известных способов вычисления T -напряжений. В ближайшем к вершине трещины конечном элементе выявлены сильные осцилляции смещений, которые не упоминаются в литературе, поэтому для определения T -напряжений с максимально возможной точностью предложено находить их по смещениям при отсечении ближайших к вершине трещины 3–4 узлов. Проведены экспериментальные исследования вязкости разрушения сферопласта и полиметилметакрилата в смешанном режиме. Для каждого типа нагружения и геометрии балки испытано 3–5 одинаковых образцов при статической нагрузке до полного разрушения. При этом фиксировались угол инициации трещины и критическая нагрузка. Для прогнозирования направления разрушения и величины критической нагрузки использовался обобщенный критерий максимальных растягивающих напряжений, учитывающий второй (несингулярный) член напряжений в разложении Вильямса. Полученные результаты демонстрируют хорошее совпадение экспериментальных значений критических нагрузок с найденными численно. Погрешность при расчете угла инициации трещины не превышает 5%.

Ключевые слова: механика разрушения, смешанное нагружение, трехточечный изгиб, T -напряжение, метод конечных элементов

THREE-POINT BENDING OF ECCENTRIC EDGE CRACK SPECIMENS UNDER MIXED MODE LOADING

V.D. Kurguzov^{1,2}, A.G. Demeshkin¹ and D.A. Kuznetsov¹¹Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation²Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

The occurrence of cracks in structural elements during their operation is due to the degradation of the material or the presence of hidden defects. Because of this, the structure can fail at lower external loads and before reaching its service life limit. As a rule, the failure of the structure caused by the growth of nucleated cracks develops under mixed loading. In this paper, to study such failure mechanism, a specimen of an eccentric beam of rectangular cross-section with a notch (crack) is investigated and its behavior is considered under asymmetric bend loading. Mixed strain modes I/II are obtained by shifting either the crack or the point of external load application. The finite element method was used to calculate stress intensity factors for I and II fracture modes, as well as T -stresses for various geometrical parameters of the beam and loading conditions. The ratios of the crack length to the width of the beam and the length of the span to the width were varied. An analysis of known methods for calculating T -stresses was carried out. The analysis showed that, in the finite element closest to the crack tip, there are strong oscillations of displacements, which are not described in the literature. Therefore, in order to find T -stresses with the highest possible accuracy, it is suggested to determine them from displacements by cutting off 3–4 nodes closest to the crack tip. Experimental studies on the fracture toughness of spheroplast and polymethyl methacrylate in a mixed mode were performed. For each type of loading and beam geometry, 3–5 identical specimens were tested. The tests were carried out under static load until the complete fracture of the specimens. In all experiments, the crack initiation angle and the critical load were recorded. The direction of fracture and the critical load magnitude were predicted by applying a generalized maximum tensile stress criterion that takes into account the second (nonsingular) stress term in the Williams expansion. The results obtained demonstrate that the experimental and numerical values of critical loads are in good agreement. The error in determining the crack initiation angle does not exceed 5%.

Key words: fracture mechanics, mixed mode loading, three-point bend, T -stress, finite element analysis

1. Введение

Хорошо известно, что разрушение элементов конструкций вследствие роста имеющихся внутри них трещин часто происходит при нагружении смешанного типа, а не по причине чистой моды деформации. Определение направления распространения трещины и величины критической нагрузки, которая соответствует наименьшему сопротивлению разрушению элемента конструкции с трещинами, являются двумя основными проблемами механики разрушения при смешанном нагружении. Исследование процесса разрушения в смешанном режиме деформирования с целью получения эффективных параметров, управляющих ростом трещины, осуществляется обычно путем проведения экспериментов на модельных материалах и с помощью подходящих методов испытаний. Для исследования разрушения хрупких и почти

изотропных материалов, таких как керамика [1–5], стекло [6, 7], полиметилметакрилат (ПММА) и другие полимеры [8–12], горные породы [13–16], графит [17, 18], оконное стекло [19] и другие, были разработаны различные тестовые конфигурации образцов.

Выбор релевантного метода и подходящей геометрии объектов для экспериментов по определению вязкости разрушения важен для достижения достоверных и точных данных по трещиностойкости изучаемого материала. Соответственно, двумя основными требованиями являются простота изготовления образцов и простота испытаний данного материала на вязкость разрушения. В зависимости от материала используются образцы в форме прямоугольной балки, диска, полукруглого диска, треугольной пластины или другой геометрии, подверженные различным типам нагрузок, которые наиболее подходят для изучения конкретного материала. Например, прямоугольные балки, подвергаемые изгибной нагрузке, применяются для испытаний на вязкость разрушения керамических и полимерных материалов [1–12, 20–23], в то же время разрушение горных пород проверяется методом бразильской пробы — сжатием цилиндрического образца по диаметру [5, 13, 14, 17, 24–26].

Наибольшее распространение получили испытания балок по схеме трех- и четырехточечного изгиба. Так, например, в [27] при четырехточечном нагружении в смешанном режиме исследована вязкость разрушения в двух направлениях (параллельном и перпендикулярном внешнему воздействию) обжаренного поликристаллического вольфрама. Авторы [28–30] изучали асимметричный четырехточечный изгиб для определения разрушения алюминия 5083 [28], четырех марок металлических сплавов [29] и вязкой стали HY100 [30] в смешанном режиме I+II. В работе [31] использована трех- и четырехточечная геометрия испытаний на изгиб балок из ПММА с трещинами для исследования в смешанном режиме I+II вязкости разрушения и траектории разрушения. Аналогичный анализ выполнен в [32] для получения характеристик разрушения эпоксидной смолы в смешанном режиме I+II на примере асимметричных прямоугольных балок в условиях трех- и четырехточечного изгиба.

В [33] отмечаются некоторые проявляющиеся на практике недостатки испытательных образцов-балок, рассмотренных в [27–32]. Во-первых, эксцентричная балка с надрезом, подвергаемая трехточечному изгибному нагружению, не способна к полному и законченному смешанному деформированию, особенно в случаях нагружения по II моде. Во-вторых, одновременное применение четырех нагрузочных роликов на верхней и нижней кромках балки организовать непросто. Требуется точная настройка испытательной оснастки, а также тщательное изготовление балки для получения двух параллельных плоских кромок, верхней и нижней. В противном случае образец будет нагружаться тремя первыми контактирующими роликами, что приведет к нежелательным прогибам. Кроме того, образцы балок с трех- и четырехточечным изгибом, использованные в [27–32], имеют большое отношение сторон (длины к ширине), то есть для подготовки тестируемого образца необходим большой объем материала.

Для преодоления проблем, связанных со стандартными испытательными образцами изгибаемой балки, в настоящем исследовании использована простая конфигурация — балка прямоугольного поперечного сечения с эксцентрично расположенной краевой трещиной. Преимущества такого образца заключаются в том, что его несложно изготовить и установить в испытательную машину. Толщина образца выбирается такой, чтобы были обеспечены условия плоской деформации. Напряженно-деформированное состояние (НДС) образца анализируется сначала численно (методом конечных элементов рассчитываются параметры разрушения при различных смешанных модах), затем проверяется его практическая пригодность (проводится серия экспериментов по определению вязкости разрушения в смешанном режиме как хорошо известного хрупкого материала ПММА, так и нового, ранее не исследованного материала — сферопласта. Наконец, по результатам, полученным в ходе испытаний, предсказываются параметры разрушения с использованием обобщенного критерия максимальных окружных напряжений.

2. Моделирование трехточечного изгиба методом конечных элементов (МКЭ)

Рисунок 1 иллюстрирует схему испытаний образца-балки прямоугольного поперечного сечения с краевой трещиной, с помощью которого анализируется разрушение по смешанной моде I+II. Изображаются два вида экспериментов: эксцентричная трещина и асимметричная нагрузка. Приняты следующие обозначения: L — длина образца, S — расстояние между опорами (длина пролета), W — ширина образца, t — толщина, a — длина трещины, s — расстояние от трещины до линии симметрии образца, p — расстояние от точки приложения нагрузки до линии симметрии образца. Чтобы обеспечить выполнение условий плоской деформации, на длину и толщину балки накладывается ограничение: $W = 2t$.

Подобные образцы широко применяются в экспериментальной механике разрушения для определения характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) различных материалов. Изменяя геометрию образца и/или место приложения нагрузки, можно влиять на состояние смешанных мод в вершине трещины и ожидать, что при деформировании возникнут различные комбинации нормального отрыва и поперечного сдвига. Действительно, сдвиг положения трещины либо места приложения нагрузки ведут к нарушению симметрии задачи, и чтобы контролировать деформации берегов трещины, требуется рассмотрение смешанного режима растяжения и сдвига. Варьируется только один из двух геометрических параметров: s или p , второй полагается равным нулю.

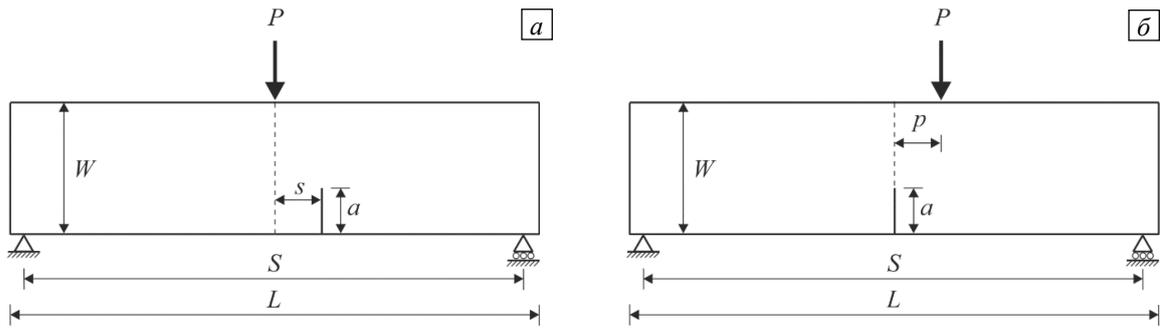


Рис. 1. Схема трехточечного изгиба образца с краевой трещиной: эксцентричная трещина (а), асимметричная нагрузка (б)

В случае смешанной моды I+II разрушения компоненты напряжений в окрестности вершины трещины в изотропном упругом материале, когда учитываются только два члена разложения в ряды Вильямса, представляются в виде [34]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + T + O(r^{1/2}), \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(r^{1/2}), \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + O(r^{1/2}), \end{aligned} \quad (1)$$

где r, θ, x, y — полярные и декартовы координаты, отсчитываемые от вершины трещины в направлении ее роста, K_I и K_{II} — коэффициенты интенсивности напряжений (КИН), отвечающие I и II модам разрушения, T — несингулярный член поля напряжений (так называемое T -напряжение).

КИН K_I и K_{II} в образце можно представить в виде:

$$K_I = \frac{P}{Wt} \sqrt{\pi a} Y_I \left(\frac{a}{W}, \frac{S}{W} \right), \quad K_{II} = \frac{P}{Wt} \sqrt{\pi a} Y_{II} \left(\frac{a}{W}, \frac{S}{W} \right), \quad (2)$$

где Y_I, Y_{II} — геометрические коэффициенты, соответствующие I и II модам, которые являются функциями относительных длин трещины a/W и пролета S/W . Хорошо известно, что T -напряжение, то есть. первый несингулярный член асимптотики поля напряжений в окрестности вершины трещины, наряду с КИН K_I и K_{II} , также играет важную роль в процессе разрушения по смешанной моде. T -напряжение отражает степень стеснения деформаций перед фронтом трещины, действует в плоскости трещины в направлении ее возможного распространения и может быть как растягивающим, так и сжимающим. Для образца изгибаемой балки оно записывается как

$$T = \frac{P}{Wt} T_* \left(\frac{a}{W}, \frac{S}{W} \right), \quad (3)$$

где T_* — безразмерный геометрический коэффициент.

Для определения критических КИН (соответствующих значениям вязкости разрушения по I и II модам), а также для исследования разрушения образца при смешанном нагружении для разных геометрий необходимо вычислить три геометрических параметра разрушения: Y_I, Y_{II} и T_* . Анализ НДС образца в различных случаях смешанных мод выполнялся МКЭ в пакете прикладных программ MSC.Marc [35]. КЭ модели образца создавались с использованием 36÷80 тыс. 8-узловых квадратичных элементов, а для повышения точности численных результатов область вблизи вершины трещины покрывалась элементами сингулярного типа. Сингулярный элемент конструировался путем сдвига промежуточного узла на четверть длины ребра элемента к вершине трещины. На рисунке 2 показаны два типа расчетной сетки в окрестности вершины трещины: прямоугольная и радиальная. У вершины трещины размер прямоугольного элемента равнялся 0,05 мм, что составляет 1/200 длины трещины, размер радиального элемента был в два раза меньше. Область сгущения радиальной сетки имела радиус 0,5 мм. В ближайшем к вершине кольце элементов использовались треугольные 6-узловые элементы, по окружности кольцо разбивалось на 48 элементов. Расчеты показали незначительную разницу в результатах, полученных на прямоугольной и радиальных сетках (при единичной нагрузке $K_I = 0,24017$ на прямоугольной сетке и $K_I = 0,24038$ на радиальной).

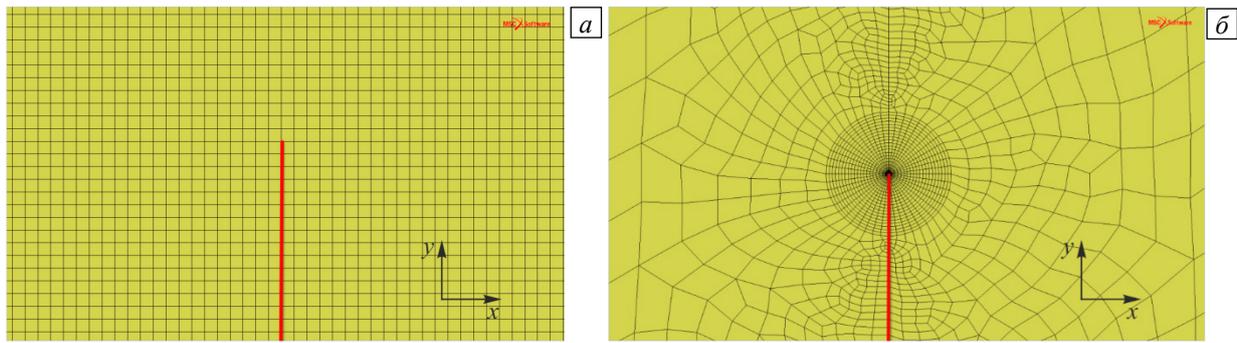


Рис. 2. Фрагменты расчетной сетки в окрестности вершины трещины при разном разбиении: прямоугольное (а), радиальное (б); сплошная линия изображает трещину

Геометрические параметры a/W , S/W и параметры нагрузки рассматривались в широком диапазоне значений. Для проведения КЭ анализа были выбраны следующие размеры: $L = 80$ мм, $S = 72 \div 76$ мм, $W = 18 \div 20$ мм и $t = 8,3 \div 9$ мм. Относительная длина трещины a/W варьировалась от 0,3 до 0,6. Материал моделей принят линейно-упругим изотропным с механическими свойствами: $E = 3$ ГПа — модуль Юнга и $\nu = 0,35 \div 0,36$ — коэффициент Пуассона. В результате выполнения статического расчета с приложенной единичной нагрузкой $P = 1$ Н и вычисления J -интеграла для каждого анализируемого образца найдены значения K_I , K_{II} и T . Для инвариантного J -интеграла в случае плоской деформации учитывалось, что он связан с K_I , K_{II} соотношением $JE' = K_I^2 + K_{II}^2$, где $E' = E/(1-\nu^2)$. В процедуре численного интегрирования контурный J -интеграл преобразовывался в интеграл по площади, интегрирование велось по кольцу элементов, окружающих вершину трещины, напряжения вычислялись внутри элементов в точках гауссовых квадратур. В расчетах использовались 4 контура интегрирования, результаты для 3-го и 4-го контуров отличались незначительно. Разделение J -интеграла на I и II моды в коде MSC.Marc базируется на методе Ши–Асаро [36].

Рассмотрены два случая нагружения, вызывающие разрушение по смешанной моде:

1. Точка приложения нагрузки не меняла местоположения, направление действия сосредоточенной силы P совпадало с осью симметрии балки, трещина же смещалась на расстояние s от оси симметрии образца в пределах от 2,5 мм до 30 мм с шагом 2,5 мм.

2. Трещина располагалась на оси симметрии балки, точка приложения нагрузки смещалась на расстояние p от середины образца, которое возрастало от 2,5 мм до 30 мм с шагом 2,5 мм.

Результаты расчетов представлены на рисунке 3, где приведены зависимости Y_I и Y_{II} от расстояний s и p . Как видно из рисунка, графики $Y_I(s)$ и $Y_I(p)$ совпадают с высокой степенью точности — при смещении трещины (либо нагрузки) на одно и то же расстояние сопротивление разрушению образца по моде I одинаково.

Теперь необходимо поговорить о вычислении T -напряжения. Обзор литературы показывает, что в большинстве случаев при получении T -напряжения рассматривается простая как геометрия исследуемой области, так и вид нагрузки [37–39]. В работах [40, 41] T -напряжение прямо рассчитывается с помощью МКЭ. Показано, что для I моды разрушения более надежные результаты с меньшим измельчением сетки достигаются, если используются узловые смещения берегов трещины. В [42, 43] предлагаются подходы к расчету T -напряжения для любой нагрузки смешанного режима I+II без необходимости расчета КИН. Предложенные подходы дают результаты, хорошо согласующиеся с аналитическими результатами.

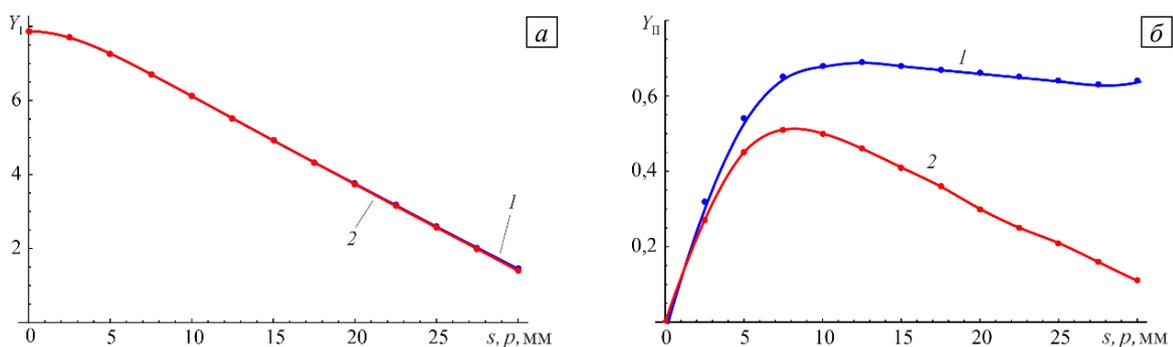


Рис. 3. Зависимости $Y_I(s)$, $Y_I(p)$ (а) и $Y_{II}(s)$, $Y_{II}(p)$ (б); сдвиг трещины (кривая 1), сдвиг нагрузки (2)

Из асимптотики поля напряжений (1) следует, что при нагружении по I моде T -напряжение может быть установлено по формулам:

$$T = \sigma_x - \sigma_y \quad \text{при } \theta = 0 \quad \text{либо} \quad T = \sigma_x \quad \text{при } \theta = \pm \pi, \quad (4)$$

то есть по компонентам напряжений на продолжении трещины $\theta = 0$ или на ее берегах $\theta = \pm \pi$. Однако такой способ менее надежен, чем вычисление T -напряжения по смещениям, так как компоненты напряжений определяются внутри элементов, а их значения в узлах находятся путем экстраполяции. Но при отыскании T -напряжения по смещениям следует помнить, что берега трещины свободны от нагрузок и закон Гука для малых деформаций дает:

$$\sigma_x = E' \varepsilon_x = E' \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (5)$$

где ε_x и u_x — параллельные трещине деформация и перемещение. На берегах трещины $\theta = \pm \pi$ из (4) и (5) следует:

$$T = E' \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (6)$$

Поскольку T — это константа, то замена производной $\partial u_x / \partial x$ разностным отношением $(u_x(x) - u_x(0)) / x$ позволяет записать ее в виде:

$$T = E' \frac{u_x(x) - u_x(0)}{x}, \quad (7)$$

где $u_x(0)$ обозначает перемещение u_x в вершине трещины.

В случае смешанного нагружения (наличия I моды, либо II моды, либо обеих) в любом радиальном направлении от вершины трещины существует сингулярное слагаемое. Поэтому сингулярный член в σ_x никогда не исчезнет, и вышеописанный метод будет непригоден. Тем не менее, T -напряжение можно установить, если воспользоваться свойствами симметрии I моды и антисимметрии II моды и находить напряжение напрямую, без вычисления КИН.

Так, если напряжения одной половины образца с трещиной добавить к напряжениям другой половины, то напряжения II моды исчезнут, а напряжения I моды удвоятся. Вследствие такого приема, подобно I моде нагружения, T -напряжение может быть определено по любому направлению из вершины трещины непосредственно по результатам конечно-элементного анализа. Наиболее удобными направлениями являются $\theta = \pm \pi$. Поскольку, в методе смещений (5)–(7), требуется только одна компонента напряжений, то

$$T = \frac{1}{2} [(\sigma_x)_{\theta=-\pi} + (\sigma_x)_{\theta=\pi}], \quad (8)$$

или

$$T = \frac{1}{2x} E' [u_x(x, -\pi) + u_x(x, +\pi) - 2u_x(0)]. \quad (9)$$

На рисунке 4а представлено типичное распределение смещений в малой окрестности вершины трещины на одном из ее берегов; по оси абсцисс отложено расстояние от вершины трещины. Как видно, в ближайшем

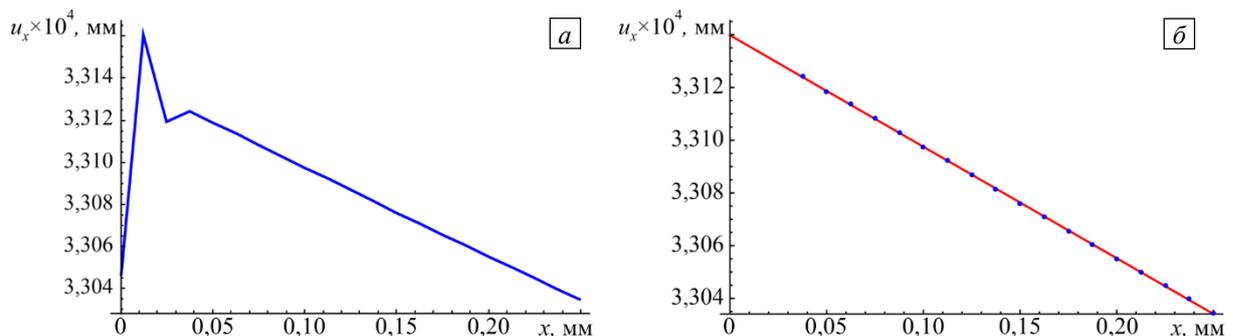


Рис. 4. Типичное распределение смещений на берегах трещины (а), аппроксимация методом наименьших квадратов (б)

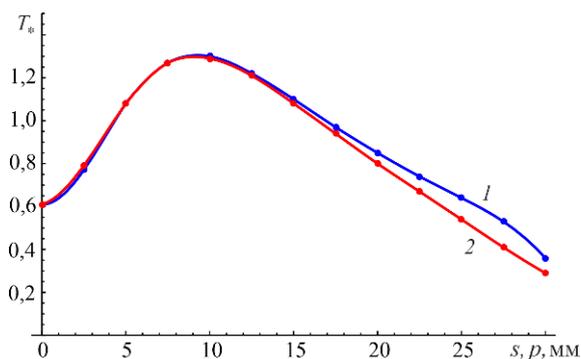


Рис. 5. Зависимости $T_*(s)$, $T_*(p)$: сдвиг трещины (кривая 1) сдвиг нагрузки (2)

балках выполнен расчет безразмерного геометрического коэффициента T_* в зависимости от расстояний s и p (см. Рис. 5). Из рисунка следует, что в эксцентричных балках степень стеснения деформаций в окрестности вершины трещины примерно одинакова. Исследовано и влияние комбинации мод I и II на разрушение образцов, которое характеризуется параметром смешанности мод (mode mixity) или коэффициентом смешанности нагружения M_e :

$$M_e = (2/\pi) \operatorname{arctg}(K_I/K_{II}). \quad (10)$$

Значения M_e изменяются в пределах от 1 (чистая мода I) до 0 (чистая мода II). На рисунке 6а представлены графики его зависимости от расстояний s и p . Как видно, используемые схемы нагружения образцов не позволяют получить смещения мод, близкие к моде II: минимальные значения M_e при сдвиге трещины 0,75, при сдвиге нагрузки 0,95.

Степень влияния несингулярного члена T , в сравнении с сингулярными коэффициентами K_I и K_{II} , на процесс разрушения по смешанному типу в литературе часто характеризуется параметром B , называемым коэффициентом двухосности, который определяется как

$$B = T\sqrt{\pi a}/K_e, \quad (11)$$

где a — длина трещины, $K_e = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$ — эффективный КИН.

Рисунок 6б содержит вариации B для различных геометрических условий и условий нагружения анализируемых образцов. Чем выше значение параметра B в образце, тем более важную роль играет T -напряжение в разрушении по смешанному типу. Величина коэффициента двухосности зависит от геометрии и условий нагружения испытываемого образца. Выполненный обзор литературы показывает, что этот параметр не достигает больших значений в таких конфигурациях задачи, как четырехточечный изгиб балки с краевой трещиной или нагруженная по диагонали квадратная пластина. Его значение меньше 1 для многих тестируемых образцов, в том числе для образца вида изгибаемой эксцентричной балки, для которого значение B изменяется в диапазоне от 0,075 до 0,25 для различных расположений трещины и внешней нагрузки. Это говорит о малом влиянии T -напряжения при смешанном разрушении материалов, испытываемых на таких образцах.

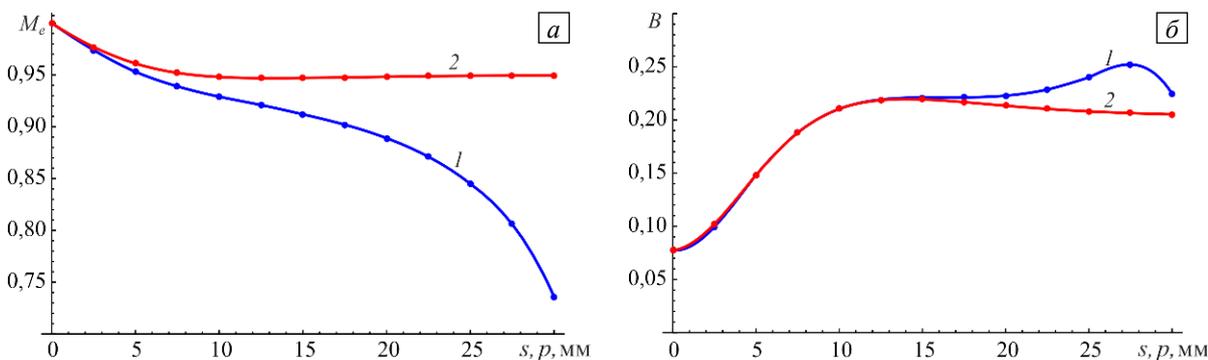


Рис. 6. Зависимости $M_e(s)$, $M_e(p)$ (а) и $B(s)$, $B(p)$ (б); сдвиг трещины (кривая 1), сдвиг нагрузки (2)

к вершине элементе наблюдаются сильные осцилляции решения, причем такая картина характерна и для прямоугольного разбиения на элементы, и для радиального. Поэтому из рассмотрения исключаются три сеточных узла слева, а в остальных узлах сетки оставляются только те смещения, которые «хорошо» ложатся на прямую линию. Ее уравнение находится методом наименьших квадратов. Аппроксимирующая прямая показана на рисунке 4б, точки — значения смещений в узлах конечно-элементной сетки, тангенс угла ее наклона к оси абсцисс — это и есть разностное отношение в (7).

Для оценки напряжений в эксцентричных

3. Экспериментальные исследования вязкости разрушения

Для определения вязкости разрушения конкретного материала при смешанном нагружении брались сферопласт и полиметилметакрилат (ПММА).

Сферопласт представляет собой пористо-армированный композит со стеклянными микросферами в качестве наполнителя. Средний диаметр микросфер 0,02 мм, толщина стенок примерно 0,001 мм, объемная доля сферических включений составляет около 60%. Ввиду сложности структуры материала механизм его разрушения зависит от многих факторов и может меняться при изменении условий нагружения. При нормальных температурах сферопласт обнаруживает хрупкий тип разрушения, его $(\sigma - \varepsilon)$ -диаграмма деформирования остается практически линейной вплоть до разрушения.

ПММА является хорошо известным испытательным материалом, используемым в лабораторных исследованиях вязкости хрупкого разрушения из-за его однородного и хрупкого поведения, а также других преимуществ, таких как низкая стоимость, прозрачность, простота резки, а также удобство введения острых трещин в образцы для испытаний на разрушение. Из листового ПММА толщиной 8,3÷9 мм вырезались прямоугольные образцы, размеры которых приведены в предыдущем разделе. Для каждого типа нагружения и геометрии изготавливались 3–5 одинаковых образцов. Испытания на разрушение проводились при статической нагрузке и комнатной температуре со скоростью перемещения траверсы 1 мм/мин.

Предварительно осуществлялись эксперименты на одноосное растяжение, в которых определялись модуль упругости E , коэффициент Пуассона ν и предел прочности материала на растяжение σ_t .

Таблица. Свойства материалов

Параметр Материал	E , ГПа	ν	σ_t , МПа	K_{Ic} , МПа·м ^{1/2}
Сферопласт	3,0	0,36	16,5	1,12
ПММА	3,0	0,35	54,0	1,74

В отдельном тесте на симметричный трехточечный изгиб находилась трещиностойкость K_{Ic} . Механические свойства материалов приведены в таблице.

На рисунке 7 демонстрируются разрушенные образцы из разных материалов с различным расположением исходных трещин. Судя по фотографиям, разрушение всех образцов начиналось с вершины трещины. Однако, в зависимости от смешанности мод (от сдвига либо трещины, либо нагрузки), при разрушении наблюдаются отличающиеся траектории трещин. При увеличении сдвига исходной трещины происходит большее отклонение траектории трещины от вертикали, что приводит к росту величины угла зарождения трещины за счет движения к чистой моде II. Это свидетельствует о заметном влиянии смешанной моды (или вклада сдвиговой моды II) на разрушение испытанных образцов.

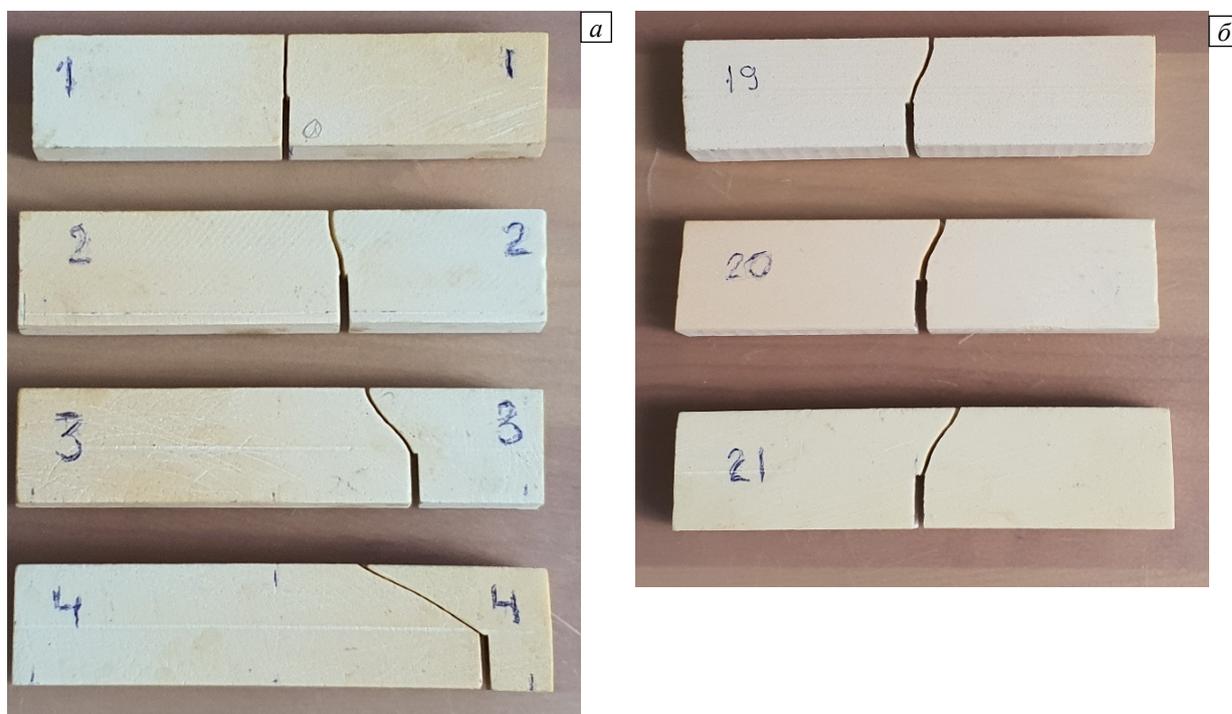


Рис. 7. Разрушенные образцы из сферопласта (а, б) и ПММА (в, г); сдвиг трещины (а, в), сдвиг нагрузки (б, г)

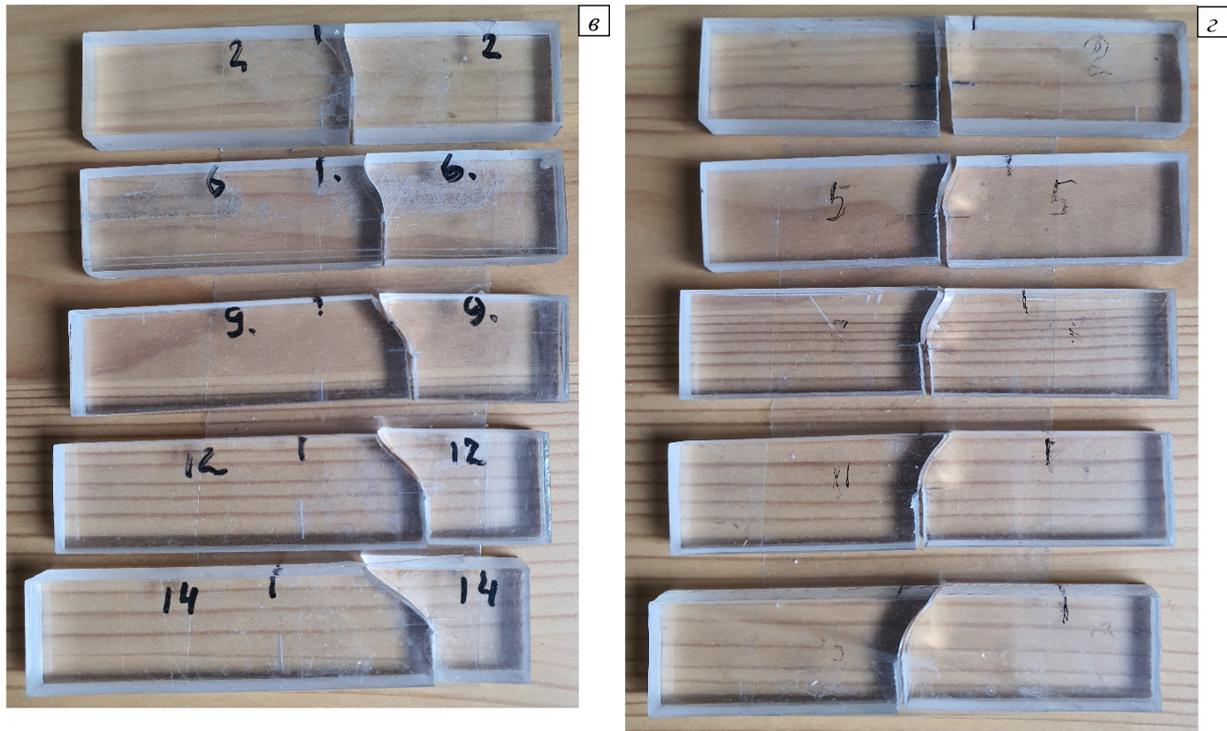


Рис. 7. Продолжение

4. Критерий хрупкого разрушения

Для изучения характеристик разрушения тестируемых материалов и демонстрации практических возможностей образцов из них использовались критерий максимальных растягивающих напряжений (MTS) и обобщенный критерий максимальных растягивающих напряжений (GMTS) как наиболее распространенные [5, 7, 8, 13, 17, 22, 23, 31, 33]. Они применимы к широкому классу хрупких и квазихрупких материалов, таких как горные породы, керамика, полиметилметакрилат, графит. Критерий GMTS — это модификация критерия MTS, учитывающая влияние T -напряжения. Трещина, согласно критерию GMTS, зарождается в направлении θ_0 , для которого тангенциальное напряжение σ_θ имеет максимальное значение. Кроме того, трещина начинает распространяться при тангенциальном напряжении σ_θ вдоль θ_0 , достигающем критического значения σ_t на критическом расстоянии r_c от вершины трещины:

$$\left. \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0, \quad \sigma_\theta(r_c, \theta_0) = \sigma_t. \quad (12)$$

Окружное напряжение σ_θ для линейно-упругого материала в окрестности вершины трещины в случае смешения мод I и II записывается в виде:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left(K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) + T \sin^2 \theta + O(r^{1/2}). \quad (13)$$

Члены более высокого порядка $O(r^{1/2})$ вблизи вершины трещины можно считать пренебрежимо малыми. После дифференцирования (12) по θ и приравнивания результата нулю, согласно (12), получается следующее уравнение относительно угла зарождения трещины θ_0 :

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{16}{3} T \sqrt{2\pi r_c} \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0. \quad (14)$$

С учетом представления КИН K_I , K_{II} (2) и T -напряжений (3), уравнение (14) преобразуется к виду:

$$Y_I \sin \theta_0 + Y_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) - \frac{16}{3} T_* \beta \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0, \quad (15)$$

где $\beta = \sqrt{2r_c/a}$. Если угол θ_0 , (15) подставить в (13), то условие разрушения (12) запишется как

$$\sqrt{2\pi r_c} \sigma_t = K_I \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} + \sqrt{2\pi r_c} T \sin^2 \theta_0. \tag{16}$$

Уравнение (16) должно выполняться во всем диапазоне смешанного нагружения, а также при чистых модах I и II. Для чистой моды разрушения I, то есть когда $K_{II} = 0$, $K_I = K_{Ic}$ и $\theta_0 = 0$, уравнение (16) приводит к формуле:

$$\sqrt{2\pi r_c} \sigma_t = K_{Ic}. \tag{17}$$

Подстановка (17) в (16) дает выражение:

$$K_{Ic} = \frac{P_f}{Wt} \sqrt{\pi a} \left(Y_I \cos^3 \frac{\theta_0}{2} - 3Y_{II} \cos^2 \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} + \beta T_* \sin^2 \theta_0 \right), \tag{18}$$

где P_f — критическая нагрузка.

Предел прочности на одноосное растяжение — σ_t , и критический КИН (трещиностойкость) по I моде — K_{Ic} , являются константами материала, которые подлежат экспериментально определению. Критическое расстояние r_c примерно равно размеру зоны предразрушения перед вершиной трещины и оценивается обычно через параметры разрушения K_{Ic} , σ_t по формуле, следующей из (17):

$$r_c = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_t} \right)^2. \tag{19}$$

Для сравнения критических нагрузок, предсказанных с использованием критерия GMTS (18), с результатами испытанием образцов из сферопласта и оргстекла на рисунке 8 приведены зависимости критической нагрузки P_f при разных положениях надреза и места приложения внешней силы. В испытаниях сферопласта наблюдается сильное расхождение расчета с экспериментом при больших смещениях (на 30 мм) как надреза, так и точки приложения нагрузки, что можно объяснить сложностью симметричной установки на опоры испытательной машины для протяженных балок с большим эксцентриситетом. Для испытаний ПММА изготавливались образцы двух видов: из листового оргстекла (ПММА-1) и блока (ПММА-2). Балки, вырезаемые из листа, имели ту же толщину, что и лист и обработке подвергались только их боковые поверхности. При нарезке из массивного блока образцы требовали обработки в трех плоскостях.

Выше в таблице механические характеристики приведены для ПММА-1. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона, предел прочности ПММА-2 те же (в пределах погрешности экспериментального измерения); немного отличается трещиностойкость $1,62 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$. Размеры образцов также были другими: из ПММА-1 $L = 80 \text{ мм}$, $S = 72 \text{ мм}$, $W = 18,4 \text{ мм}$, $t = 9 \text{ мм}$, $a = 8,8 \text{ мм}$, из ПММА-2 $L = 76 \text{ мм}$, $S = 68 \text{ мм}$, $W = 17 \text{ мм}$, $t = 8,3 \text{ мм}$, $a = 8,2 \text{ мм}$. Результаты для ПММА, по сравнению со сферопластом, оказались заметно лучше. Графики на рисунке 8а-г демонстрируют хорошее совпадение экспериментальных точек с численным расчетом. Как видно из рисунка 8, критерий GMTS дает консервативную оценку критической нагрузки для всех испытанных материалов и всех видов нагружения. Следует отметить, что величины угла инициации трещины, определяемые как (15), совпадают с экспериментальными значениями с погрешностью до 5%, то есть с очень высокой точностью даже при сдвиге трещины на 30 мм.

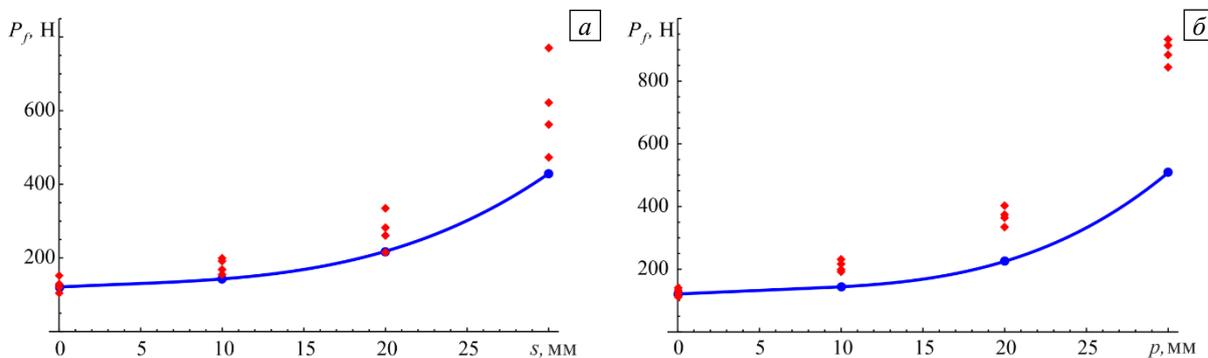


Рис. 8. К сравнению критических нагрузок, предсказанных с использованием критерия GMTS, и результатов испытаний образцов из разных материалов: сферопласт (а, б); ПММА-1 (в, г); ПММА-2 (д, е): сдвиг трещины (а, в, д), сдвиг нагрузки (б, г, е); компьютерный расчет (точки), данные эксперимента (ромбики)

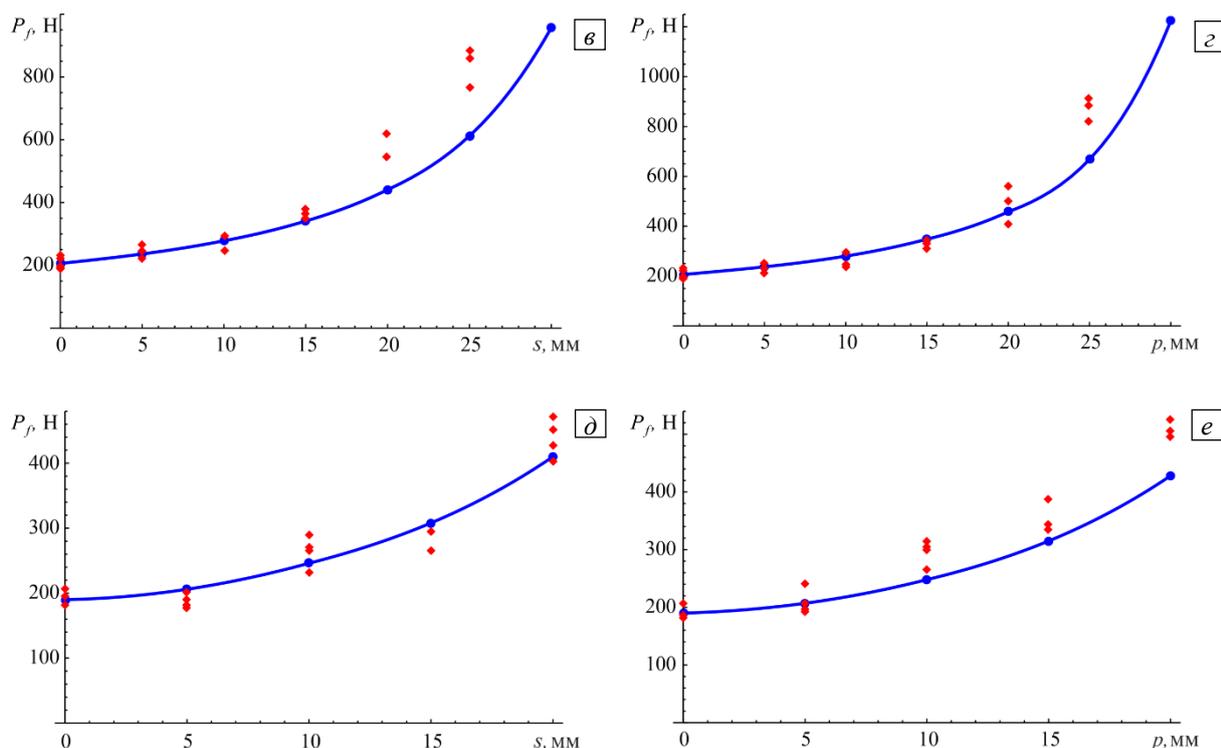


Рис. 8. Продолжение

5. Заключение

В настоящей работе предложен образец в виде эксцентричной балки прямоугольного поперечного сечения с надрезом (трещиной). Для исследования разрушения в смешанном режиме I+II балка подвергается асимметричному трехточечному изгибу. Преимущество данного образца в сравнении с образцом, имеющим наклонные трещины, заключается в простоте его изготовления. С помощью МКЭ получены величины параметров разрушения: КИН, T -напряжение и параметр двухосности B , при разных геометрических условиях и условиях нагружения (то есть при a/W , S/W). Путем численного анализа и сравнения с доступными аналитическими решениями установлено, что для точного определения T -напряжения необходимо, во-первых, вычислять по смещениям и, во-вторых, не принимать во внимание в конечно-элементной сетке ближайшие к вершине трещины 3–4 узла, где наблюдается сильная осцилляция решения.

С использованием предложенного образца проведены исследования вязкости разрушения сферопласта и ПММА в смешанном режиме. Обобщенный критерий максимальных растягивающих напряжений успешно применен для прогнозирования направления распространения (или зарождения) трещины и величины критической нагрузки. Следует признать, что, несмотря на простоту геометрии и создания нагружения, предложенная форма образца не охватывает весь диапазон смещения мод (от чистой моды I до чистой моды II). Однако, учитывая хорошую согласованность полученных численных и экспериментальных результатов как между собой, так и с предсказаниями критерия разрушения, этот образец может быть предложен для испытаний с целью изучения разрушения смешанного типа в технических материалах, таких как сферопласт, оргстекло, эбонит, гетинакс, при наклонных надрезах (трещинах).

Литература

1. Suresh S., Shih C.F., Morrone A., O'Dowd N.P. Mixed-mode fracture toughness of ceramic materials // J. Am. Ceram. Soc. 1990. Vol. 73. P. 1257-1267. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1990.tb05189.x>
2. Fett T., Gerteisen G., Hahnenberger S., Martin G., Munz D. Fracture tests for ceramics under mode-I, mode-II and mixed-mode loading // J. Eur. Ceram. Soc. 1995. Vol. 15. P. 307-312. [https://doi.org/10.1016/0955-2219\(95\)90353-K](https://doi.org/10.1016/0955-2219(95)90353-K)
3. Tikare V., Choi S.R. Combined mode I-mode II fracture of 12-mol%-ceria-doped tetragonal zirconia polycrystalline ceramic // J. Am. Ceram. Soc. 1997. Vol. 80. P. 1624-1626. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1997.tb03030.x>
4. Choi S.R., Zhu D., Miller R.A. Fracture behavior under mixed-mode loading of ceramic plasma-sprayed thermal barrier coatings at ambient and elevated temperatures // Eng. Fract. Mech. 2005. Vol. 72. P. 2144-2158. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.01.010>
5. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R. Analysis of fracture initiation angle in some cracked ceramics using the generalized maximum tangential stress criterion // Int. J. Solids Struct. 2012. Vol. 49. P. 1877-1883. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.03.029>

6. Li M., Sakai M. Mixed-mode fracture of ceramics in asymmetric four-point bending: Effect of crack-face grain interlocking/bridging // J. Am. Ceram. Soc. 1996. Vol. 79. P. 2718-2726. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1996.tb09037.x>
7. Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. Mixed mode fracture in soda lime glass analyzed by using the generalized MTS criterion // Int. J. Solids Struct. 2009. Vol. 46. P. 311-321. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.08.035>
8. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R. Geometry effects on fracture behaviour of polymethyl methacrylate // Mater. Sci. Eng. 2010. Vol. 527. P. 526-530. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.08.055>
9. Araki W., Nemoto K., Adachi T., Yamaji A. Fracture toughness for mixed mode I/II of epoxy resin // Acta Mater. 2005. Vol. 53. P. 869-875. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2004.10.035>
10. He M.Y., Hutchinson J.W. Asymmetric four-point crack specimen // J. Appl. Mech. 2000. Vol. 67. P. 207-209. <https://doi.org/10.1115/1.321168>
11. Maccagno T.M., Knott J.F. The fracture behaviour of PMMA in mixed modes I and II // Eng. Fract. Mech. 1989. Vol. 34. P. 65-86. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(89\)90243-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(89)90243-9)
12. Ayatollahi M.R., Shadlou S., Shokrieh M.M. Mixed mode brittle fracture in epoxy/multi-walled carbon nanotube nanocomposites // Eng. Fract. Mech. 2011. Vol. 78. P. 2620-2632. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.06.021>
13. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R., Smith D.J., Pavier M.J. Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading // Eng. Fract. Mech. 2010. Vol. 77. P. 2200-2212. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.03.009>
14. Erarslan N., Williams D.J. Mixed-mode fracturing of rocks under static and cyclic loading // Rock Mech. Rock Eng. 2013. Vol. 46. P. 1035-1052. <https://doi.org/10.1007/s00603-012-0303-5>
15. Aliha M.R.M., Hosseinpour G.R., Ayatollahi M.R. Application of cracked triangular specimen subjected to three-point bending for investigating fracture behavior of rock materials // Rock Mech. Rock Eng. 2013. Vol. 46. P. 1023-1034. <https://doi.org/10.1007/s00603-012-0325-z>
16. Wang C., Zhu Z.M., Liu H.J. On the I-II mixed mode fracture of granite using four-point bend specimen // Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct. 2016. Vol. 39. P. 1193-1203. <https://doi.org/10.1111/ffe.12422>
17. Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. Mixed mode fracture analysis of polycrystalline graphite – A modified MTS criterion // Carbon. 2008. Vol. 46. P. 1302-1308. <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2008.05.008>
18. Mirsayar M.M., Berto F., Aliha M.R.M., Park P. Strain-based criteria for mixed-mode fracture of polycrystalline graphite // Eng. Fract. Mech. 2016. Vol. 156. P. 114-123. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.02.011>
19. Smetannikov O.Y., Kashnikov Y.A., Ashikhmin S.G., Kukhtinskiy A.E. Numerical model of fracture growth in hydraulic re-fracturing // Frattura ed Integrità Strutturale. 2019. Vol. 49. P. 140-155. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.49.16>
20. Mirsayar M.M., Park P. The role of T-stress on kinking angle of interface cracks // Mater. Des. 2015. Vol. 80. P. 12-19. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2015.05.007>
21. Lin Q., Bian X., Pan P.-Z., Gao Y., Lu Y. Criterion of local symmetry visualized in small eccentric single edge notched bend (E-SENB) rock specimens // Eng. Fract. Mech. 2021. Vol. 248. 107709. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.107709>
22. Shahani A.R., Tabatabaei S.A. Effect of T-stress on the fracture of a four point bend specimen // Mater. Des. 2009. Vol. 30. P. 2630-2635. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2008.10.031>
23. Li Y., Dong S., Pavier M.J. Measurement of the mixed mode fracture strength of green sandstone using three-point bending specimens // Geomech. Eng. 2020. Vol. 20. P. 9-18. <https://doi.org/10.12989/gae.2020.20.1.009>
24. Ефимов В.П. Измерение прочности на растяжение бразильским методом // ФТПРПИ. 2021. № 6. С. 49-60. <https://doi.org/10.15372/FTPRPI20210605>
25. Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. Wide range data for crack tip parameters in two disc-type specimens under mixed mode loading // Comput. Mater. Sci. 2007. Vol. 38. P. 660-670. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2006.04.008>
26. Torabi A.R., Etesam S., Sapora A., Cornetti P. Size effects on brittle fracture of Brazilian disk samples containing a circular hole // Eng. Fract. Mech. 2017. Vol. 186. P. 496-503. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.11.008>
27. Margevicius R.W., Riedle J., Gumbsch P. Fracture toughness of polycrystalline tungsten under mode I and mixed mode I/II loading // Mater. Sci. Eng. 1999. Vol. 270. P. 197-209. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(99\)00252-X](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(99)00252-X)
28. Ravichandaran R., Thanigaiyarasu G. Mixed-mode fracture analysis of aluminum alloy 5083 subjected to four point bending // J. Appl. Sci. 2011. Vol. 11. P. 2214-2219. <https://doi.org/10.3923/jas.2011.2214.2219>
29. Maccagno T.M., Knott J.F. The low temperature brittle fracture behaviour of steel in mixed modes I and II // Eng. Fract. Mech. 1991. Vol. 38. P. 111-128. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(91\)90076-D](https://doi.org/10.1016/0013-7944(91)90076-D)
30. Bhattacharjee D., Knott J.F. Ductile fracture in HY100 steel under mixed mode I/mode II loading // Acta Metall. Mater. 1994. Vol. 42. P. 1747-1754. [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(94\)90385-9](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)90385-9)
31. Pereira S.A.G., Tavares S.M.O., de Castro P.M.S.T. Mixed mode fracture: Numerical evaluation and experimental validation using PMMA specimens // Frattura ed Integrità Strutturale. 2019. Vol. 49. P. 412-428. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.49.40>
32. Zappalorto M., Salviato M., Quaresimin M. Mixed mode (I+II) fracture toughness of polymer nanoclay nanocomposites // Eng. Fract. Mech. 2013. Vol. 111. P. 50-64. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2013.09.006>
33. Mousavi S.S., Aliha M.R.M., Imani D.M. On the use of edge cracked short bend beam specimen for PMMA fracture toughness testing under mixed-mode I/II // Polymer Test. 2020. Vol. 81. 106199. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2019.106199>
34. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // J. Appl. Mech. 1957. Vol. 24. P. 109-114. <https://doi.org/10.1115/1.4011454>
35. MARC 2020. Volume A: Theory and User Information. MSC Software Corporation, 2020. 1061 p.
36. Shih C.F., Asaro R. J. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part I – Small scale yielding // J. Appl. Mech. 1988. Vol. 55. P. 299-316. <https://doi.org/10.1115/1.3173676>
37. Wang X. Elastic T-stress for cracks in test specimens subjected to non-uniform stress distributions // Eng. Fract. Mech. 2002. Vol. 69. P. 1339-1352. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00149-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00149-7)
38. Gupta M., Alderliesten R., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics // Eng. Fract. Mech. 2015. Vol. 134. P. 218-241. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>

39. Тырымов А.А. Численное моделирование Т-напряжений и коэффициента биаксиальности напряжений для образца с центральной трещиной при смешанных граничных условиях // Вычисл. мех. сплош. сред. 2020. Т. 13, № 4. С. 393-401. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.4.30>
40. Ayatollahi M.R., Pavier M.J., Smith D.J. Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading // *Int. J. Fract.* 1998. Vol. 91. P. 283-298. <https://doi.org/10.1023/A:1007581125618>
41. Wang X., Lewis T., Bell R. Estimations of the T-stress for small cracks at notches // *Eng. Fract. Mech.* 2006. Vol. 73. P. 366-375. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.06.009>
42. Nazarali Q., Wang X. The effect of T-stress on crack-tip plastic zones under mixed-mode loading conditions // *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.* 2011. Vol. 34. P. 792-803. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2011.01573.x>
43. Acanfora M., Gallo P., Razavi S.M.J., Ayatollahi M.R., Berto F. Numerical evaluation of T-stress under mixed mode loading through the use of coarse meshes // *Физ. мезомех.* 2018. Т. 21, № 1. С. 30-40. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-11005>

References

1. Suresh S., Shih C.F., Morrone A., O'Dowd N.P. Mixed-mode fracture toughness of ceramic materials. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1990, vol. 73, pp. 1257-1267. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1990.tb05189.x>
2. Fett T., Gerteisen G., Hahnenberger S., Martin G., Munz D. Fracture tests for ceramics under mode-I, mode-II and mixed-mode loading. *J. Eur. Ceram. Soc.*, 1995, vol. 15, pp. 307-312. [https://doi.org/10.1016/0955-2219\(95\)90353-K](https://doi.org/10.1016/0955-2219(95)90353-K)
3. Tikare V., Choi S.R. Combined mode I-mode II fracture of 12-mol%-ceria-doped tetragonal zirconia polycrystalline ceramic. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1997, vol. 80, pp. 1624-1626. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1997.tb03030.x>
4. Choi S.R., Zhu D., Miller R.A. Fracture behavior under mixed-mode loading of ceramic plasma-sprayed thermal barrier coatings at ambient and elevated temperatures. *Eng. Fract. Mech.*, 2005, vol. 72, pp. 2144-2158. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.01.010>
5. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R. Analysis of fracture initiation angle in some cracked ceramics using the generalized maximum tangential stress criterion. *Int. J. Solids Struct.*, 2012, vol. 49, pp. 1877-1883. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.03.029>
6. Li M., Sakai M. Mixed-mode fracture of ceramics in asymmetric four-point bending: Effect of crack-face grain interlocking/bridging. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1996, vol. 79, pp. 2718-2726. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1996.tb09037.x>
7. Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. Mixed mode fracture in soda lime glass analyzed by using the generalized MTS criterion. *Int. J. Solids Struct.*, 2009, vol. 46, pp. 311-321. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.08.035>
8. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R. Geometry effects on fracture behaviour of polymethyl methacrylate. *Mater. Sci. Eng.*, 2010, vol. 527, pp. 526-530. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.08.055>
9. Araki W., Nemoto K., Adachi T., Yamaji A. Fracture toughness for mixed mode I/II of epoxy resin. *Acta Mater.*, 2005, vol. 53, pp. 869-875. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2004.10.035>
10. He M.Y., Hutchinson J.W. Asymmetric four-point crack specimen. *J. Appl. Mech.*, 2000, vol. 67, pp. 207-209. <https://doi.org/10.1115/1.321168>
11. Maccagno T.M., Knott J.F. The fracture behaviour of PMMA in mixed modes I and II. *Eng. Fract. Mech.*, 1989, vol. 34, pp. 65-86. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(89\)90243-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(89)90243-9)
12. Ayatollahi M.R., Shadlou S., Shokrieh M.M. Mixed mode brittle fracture in epoxy/multi-walled carbon nanotube nanocomposites. *Eng. Fract. Mech.*, 2011, vol. 78, pp. 2620-2632. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2011.06.021>
13. Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R., Smith D.J., Pavier M.J. Geometry and size effects on fracture trajectory in a limestone rock under mixed mode loading. *Eng. Fract. Mech.*, 2010, vol. 77, pp. 2200-2212. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2010.03.009>
14. Erarslan N., Williams D.J. Mixed-mode fracturing of rocks under static and cyclic loading. *Rock Mech. Rock Eng.*, 2013, vol. 46, pp. 1035-1052. <https://doi.org/10.1007/s00603-012-0303-5>
15. Aliha M.R.M., Hosseinpour G.R., Ayatollahi M.R. Application of cracked triangular specimen subjected to three-point bending for investigating fracture behavior of rock materials. *Rock Mech. Rock Eng.*, 2013, vol. 46, pp. 1023-1034. <https://doi.org/10.1007/s00603-012-0325-z>
16. Wang C., Zhu Z.M., Liu H.J. On the I-II mixed mode fracture of granite using four-point bend specimen. *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2016, vol. 39, pp. 1193-1203. <https://doi.org/10.1111/ffe.12422>
17. Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. Mixed mode fracture analysis of polycrystalline graphite – A modified MTS criterion. *Carbon*, 2008, vol. 46, pp. 1302-1308. <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2008.05.008>
18. Mirsayar M.M., Berto F., Aliha M.R.M., Park P. Strain-based criteria for mixed-mode fracture of polycrystalline graphite. *Eng. Fract. Mech.*, 2016, vol. 156, pp. 114-123. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2016.02.011>
19. Smetannikov O.Y., Kashnikov Y.A., Ashikhmin S.G., Kukhtinskiy A.E. Numerical model of fracture growth in hydraulic re-fracturing. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2019, vol. 49, pp. 140-155. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.49.16>
20. Mirsayar M.M., Park P. The role of T-stress on kinking angle of interface cracks. *Mater. Des.*, 2015, vol. 80, pp. 12-19. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2015.05.007>
21. Lin Q., Bian X., Pan P.-Z., Gao Y., Lu Y. Criterion of local symmetry visualized in small eccentric single edge notched bend (E-SEN) rock specimens. *Eng. Fract. Mech.*, 2021, vol. 248, 107709. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.107709>
22. Shahani A.R., Tabatabaei S.A. Effect of T-stress on the fracture of a four point bend specimen. *Mater. Des.*, 2009, vol. 30, pp. 2630-2635. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2008.10.031>
23. Li Y., Dong S., Pavier M.J. Measurement of the mixed mode fracture strength of green sandstone using three-point bending specimens. *Geomech. Eng.*, 2020, vol. 20, pp. 9-18. <https://doi.org/10.12989/gae.2020.20.1.009>
24. Efimov V.P. Brazilian tensile strength testing. *J. Min. Sci.*, 2021, vol. 57, pp. 922-932. <https://doi.org/10.1134/S1062739121060053>
25. Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M. Wide range data for crack tip parameters in two disc-type specimens under mixed mode loading. *Comput. Mater. Sci.*, 2007, vol. 38, pp. 660-670. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2006.04.008>

26. Torabi A.R., Etesam S., Sapora A., Cornetti P. Size effects on brittle fracture of Brazilian disk samples containing a circular hole. *Eng. Fract. Mech.*, 2017, vol. 186, pp. 496-503. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.11.008>
27. Margevicius R.W., Riedle J., Gumbsch P. Fracture toughness of polycrystalline tungsten under mode I and mixed mode I/II loading. *Mater. Sci. Eng.*, 1999, vol. 270, pp. 197-209. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(99\)00252-X](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(99)00252-X)
28. Ravichandaran R., Thanigaiyarasu G. Mixed-mode fracture analysis of aluminum alloy 5083 subjected to four point bending. *J. Appl. Sci.*, 2011, vol. 11, pp. 2214-2219. <https://doi.org/10.3923/jas.2011.2214.2219>
29. Maccagno T.M., Knott J.F. The low temperature brittle fracture behaviour of steel in mixed modes I and II. *Eng. Fract. Mech.*, 1991, vol. 38, pp. 111-128. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(91\)90076-D](https://doi.org/10.1016/0013-7944(91)90076-D)
30. Bhattacharjee D., Knott J.F. Ductile fracture in HY100 steel under mixed mode I/mode II loading. *Acta Metall. Mater.*, 1994, vol. 42, pp. 1747-1754. [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(94\)90385-9](https://doi.org/10.1016/0956-7151(94)90385-9)
31. Pereira S.A.G., Tavares S.M.O., de Castro P.M.S.T. Mixed mode fracture: Numerical evaluation and experimental validation using PMMA specimens. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2019, vol. 49, pp. 412-428. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.49.40>
32. Zappalorto M., Salviato M., Quaresimin M. Mixed mode (I+II) fracture toughness of polymer nanoclay nanocomposites. *Eng. Fract. Mech.*, 2013, vol. 111, pp. 50-64. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2013.09.006>
33. Mousavi S.S., Aliha M.R.M., Imani D.M. On the use of edge cracked short bend beam specimen for PMMA fracture toughness testing under mixed-mode I/II. *Polymer Test.*, 2020, vol. 81, 106199. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2019.106199>
34. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.*, 1957, vol. 24, pp. 109-114. <https://doi.org/10.1115/1.4011454>
35. MARC 2020. Volume A: Theory and User Information. MSC Software Corporation, 2020. 1061 p.
36. Shih C.F., Asaro R. J. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces: Part I – Small scale yielding. *J. Appl. Mech.*, 1988, vol. 55, pp. 299-316. <https://doi.org/10.1115/1.3173676>
37. Wang X. Elastic T-stress for cracks in test specimens subjected to non-uniform stress distributions. *Eng. Fract. Mech.*, 2002, vol. 69, pp. 1339-1352. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00149-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00149-7)
38. Gupta M., Alderliesten R., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics. *Eng. Fract. Mech.*, 2015, vol. 134, pp. 218-241. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>
39. Түрүмов А.А. Numerical simulation of T-stresses and stress biaxiality factor for a centrally cracked specimen under mixed boundary conditions. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2020, vol. 13, no. 4, pp. 393-401. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.4.30>
40. Ayatollahi M.R., Pavier M.J., Smith D.J. Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading. *Int. J. Fract.*, 1998, vol. 91, pp. 283-298. <https://doi.org/10.1023/A:1007581125618>
41. Wang X., Lewis T., Bell R. Estimations of the T-stress for small cracks at notches. *Eng. Fract. Mech.*, 2006, vol. 73, pp. 366-375. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.06.009>
42. Nazarali Q., Wang X. The effect of T-stress on crack-tip plastic zones under mixed-mode loading conditions. *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2011, vol. 34, pp. 792-803. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2011.01573.x>
43. Acanfora M., Gallo P., Razavi S.M.J., Ayatollahi M.R., Berto F. Numerical evaluation of T-stress under mixed mode loading through the use of coarse meshes. *Phys. Mesomech.*, 2018, vol. 21, pp. 124-134. <https://doi.org/10.1134/S1029959918020054>

Поступила в редакцию 07.12.2022; после доработки 26.03.2023; принята к опубликованию 27.03.2023

Сведения об авторах

Кургузов Владимир Дмитриевич, дфмн, проф., гнс, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (ИГиЛ СО РАН), 630090, г. Новосибирск, пр-т Лаврентьева, д. 15; e-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

Демешкин Александр Григорьевич, кфмн, снс, ИГиЛ СО РАН; e-mail: demeshkin@hydro.nsc.ru

Кузнецов Денис Александрович, асп., ИГиЛ СО РАН; e-mail: kuznetsova81@yandex.ru