

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.3.25](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.3.25)

УДК 539.4

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПЛОСКОГО АРМИРОВАННОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

Построено полное решение задачи о втором предельном состоянии плоских армированных дисков, вращающихся в установившемся режиме. Конструкции жестко закреплены на внутреннем контуре (на валу) и могут иметь лопатки, прикрепленные к внешнему контуру. Материалы компонентов композиции являются жесткопластическими с возможно разными пределами текучести при растяжении и сжатии. Связующий материал полотна диска может обладать цилиндрической анизотропией. Для структур армирования характерна осевая и радиальная симметрия. Механическое поведение композиции описывается соотношениями структурной модели, учитывающей двумерное напряженное состояние во всех компонентах. Рассмотрены гладкие и кусочно-линейные критерии текучести композиции полотна диска при учете неоднородности структуры армирования и переменности толщины конструкции. Показано, что в общем случае армирования задача оценки несущей способности композитных дисков сводится к численному решению одного нелинейного функционального уравнения относительно предельной угловой скорости их вращения. Для дисков с радиальной, окружной и радиально-окружной структурами армирования получено полное решение задачи в аналитической форме. При этом ортотропный материал связующего подчиняется ассоциированному закону течения, определяемому модифицированным критерием текучести Трески–Ху. Для однородных дисков постоянной толщины проведено сравнение предельных угловых скоростей вращения, рассчитанных по первому и второму предельным состояниям. Продемонстрировано, что армирование позволяет существенно увеличить несущую способность дисков по сравнению с аналогичными конструкциями той же массы, но изготовленными, из традиционных конструкционных материалов, в частности, из высокопрочной стали. Наибольшую несущую способность дискам обеспечивает радиально-окружная структура армирования. Выявлено, что в композитных дисках, находящихся в предельном состоянии, в окрестности внутреннего контура может возникнуть жесткая кольцевая подобласть.

Ключевые слова: вращающиеся диски, армирование волокнами, жесткопластическая модель, второе предельное состояние, несущая способность, разносопротивляемость, анизотропия, полное решение

BUILDING A COMPLETE SOLUTION TO THE PROBLEM OF DETERMINING THE BEARING CAPACITY OF A FLAT REINFORCED ROTATING DISK

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

A complete solution to the problem of the second limiting state of flat reinforced discs rotating in the stationary regime is constructed. The structures are rigidly fixed to the inner contour (shaft mounted) and can have blades attached to the outer contour. The components of the composition are made of rigid-plastic materials and can have different tensile and compression yield stresses. The binder material of the disk can have cylindrical anisotropy. The characteristic feature of the reinforcement structures is the axial and radial symmetry. The mechanical behavior of the composition is described by the relations of the structural model that takes into account a two-dimensional stress state in all components. Smooth and piecewise-linear criteria for the yield stress of the disk material composition are investigated taking into account the heterogeneity of the structure of reinforcement structure and thickness variability. It is shown that in the general case of reinforcement, the problem of estimation of the bearing capacity of the composite discs is reduced to the numerical solution of one nonlinear functional equation for the threshold velocity of their rotation. For disks with radial, circular and radial-circular reinforcement structures, a complete solution to the problem is obtained in the analytical form. In this case, the orthotropic material of the binder obeys the associated flow rule determined by the modified Tresca–Hu yield criterion. For homogeneous discs of constant thickness, a comparison of the threshold angular velocities calculated for the first and second limiting state is carried out. It is shown that reinforcement of the disks considerably increases its bearing capacity compared to similar disk designs, which have the same mass but are made of traditional structural materials, in particular, high-strength steel. The highest bearing capacity of the discs is ensured by the radial-circular reinforcement. It is demonstrated that in the limiting state of the composite discs, a rigid circular region may appear in the vicinity of the internal contour.

Key words: rotating discs, fiber reinforcement, rigid-plastic model, second limiting state, bearing capacity, different-resistant, anisotropy, complete solution

1. Введение

К наиболее нагруженным элементам современных изделий машиностроения относятся вращающиеся диски газотурбинных двигателей и компрессоров высокого давления [1–3], а также накопители механической энергии — маховики [4]. Поэтому актуальна проблема моделирования и расчета механического поведения таких элементов [1–3, 5–13]. Подавляющее число публикаций по этой теме посвящено определению предельных значений угловых скоростей вращения дисков из традиционных конструкционных однородных материалов при их линейно-упругом, упругопластическом или жесткопластическом деформировании [1–3, 5, 6, 9, 11, 13]; реже рассматриваются армированные диски и маховики [4, 7, 8, 10, 12]. Так как к дискам газотурбинных двигателей предъявляются повышенные требования, направленные на уменьшение их массы, то перспективным представляется изготовление их

именно из композиционных материалов (КМ), которые, как правило, обладают высокой удельной прочностью [4, 14–16].

Моделирование упругого поведения дисков и маховиков целесообразно в случаях, когда реальная конструкция эксплуатируется в условиях повторяющегося нагружения [1–4, 7, 8, 10, 12, 13]. Это позволяет свести к минимуму малоцикловую усталость таких элементов. Решая соответствующие упругие задачи, можно рассчитать предельную скорость вращения КМ-дисков и маховиков только по I-му (упругому) предельному состоянию, когда лишь в отдельных точках конструкции и только в некоторых компонентах композиции эквивалентное напряжение впервые достигает значения, равного пределу текучести (для повышения несущей способности вращающихся дисков можно прибегнуть к процедуре автофретирования, однако подобные расчеты до настоящего времени проводились только для однородных дисков [13]). Анализ же экспериментальных данных свидетельствует [4, 14–16], что при упругом деформировании всех компонентов КМ высокая прочность волокон используется неэффективно: так, в арматуре эквивалентные напряжения, как правило, не превышают 10–20% от их предела текучести.

Следовательно, при проектировании КМ-изделий разового назначения, особенно тех, которые должны иметь минимальную массу, расчет целесообразно осуществлять по второму предельному состоянию, когда в целых подобластях конструкции пластическое течение развивается неестественно во всех компонентах композиции. Аналогичные исследования необходимо проводить и для конструкций многоразового назначения с целью оценки их максимальной несущей способности при работе в нештатных ситуациях. Такой анализ предельного состояния КМ-дисков можно выполнить на основе модели жесткопластического деформирования всех компонентов композиции [5, 6, 17, 18]. Найденные таким образом предельные скорости вращения дисков будут существенно больше тех, что рассчитаны по I-му предельному состоянию [1–4, 7, 8, 10, 12].

При решении проблемы оценки несущей способности вращающихся КМ-дисков необходимо: 1) построить поверхности (или кривые) текучести для компонентов их композиций; 2) разработать метод решения краевой задачи их жесткопластического деформирования. Проблема расчета кривых и поверхностей текучести многонаправленно армированных волокнистых слоев и сред рассмотрена в [19–23]. В работах [21–23] приведен краткий обзор публикаций по этой тематике. Полное решение жесткопластической задачи удастся получить лишь в редких случаях [24, 25]. Особенно это касается изделий со сложными (неоднородными) структурами армирования, к которым относятся и КМ-диски [4]. Построение таких полных решений имеет особую теоретическую ценность, так как они служат эталонами для проверки решений, установленных какими-либо численными методами [25].

В связи со всем вышеизложенным настоящее исследование посвящено построению полного решения задачи определения предельной скорости вращения плоских, осесимметрично армированных дисков из жесткопластических материалов и исследованию влияния на эту скорость параметров армирования.

2. Основные предположения и постановка задачи

Рассмотрим тонкий диск постоянной или переменной толщины $H(r)$ (где r — полярный радиус), внутренняя и внешняя цилиндрические поверхности которого имеют радиусы r_0 и r_1 , $r_0 < r_1$ (Рис. 1). Срединная поверхность диска — плоскость. На внутреннем контуре ($r = r_0$) диск жестко соединен с недеформируемым валом. К внешнему контуру ($r = r_1$) вращающегося диска могут быть приложены внешние центробежные силы от действия лопаток и разрезной замковой части [1, 3, 13]. Полотно диска осесимметрично армировано четным числом $K = 2M$ семейств волокон. Обозначим через μ_k и ψ_k плотности и углы армирования непрерывными волокнами k -го семейства ($1 \leq k \leq K$). Угол армирования отсчитывается от радиального направления r (см. рисунок 1а, где показан угол армирования первым семейством волокон ψ_1 при $K = 2$). Предполагаем, что все семейства волокон можно разбить на M пар так, что в каждой паре арматура разных семейств будет изготовленной из одного и того же материала, уложенной с одинаковыми плотностями ($\mu_{2k-1}(r) = \mu_{2k}(r)$) и симметрично относительно радиального направления r : $\psi_{2k-1}(r) = -\psi_{2k}(r)$, $1 \leq k \leq M$ (см. Рис. 1а, где $M = 1$). При $\psi_{2k-1}(r) = -\psi_{2k}(r) \rightarrow 0$ соответствующая пара семейств волокон вырождается в одно радиальное семейство, а при $\psi_{2k-1}(r) = -\psi_{2k}(r) \rightarrow \pi/2$, $r_0 \leq r \leq r_1$ — в окружное семейство армирования.

Таким образом, приведенный на рисунке 1 пример включает в себя, как частные случаи, армирование в радиальном, окружном или радиально-окружном (Рис. 1б) направлениях. Возможно и совместное многонаправленное армирование по спиральным траекториям, как на рисунке 1а, и в радиальном и окружном направлениях, как на рисунке 1б. Получающаяся структура армирования является совмещением структур, изображенных на рисунке 1а и 1б. Структуры армирования по толщине дисков однородны. В общем случае материал связующего может обладать цилиндрической анизотропией.

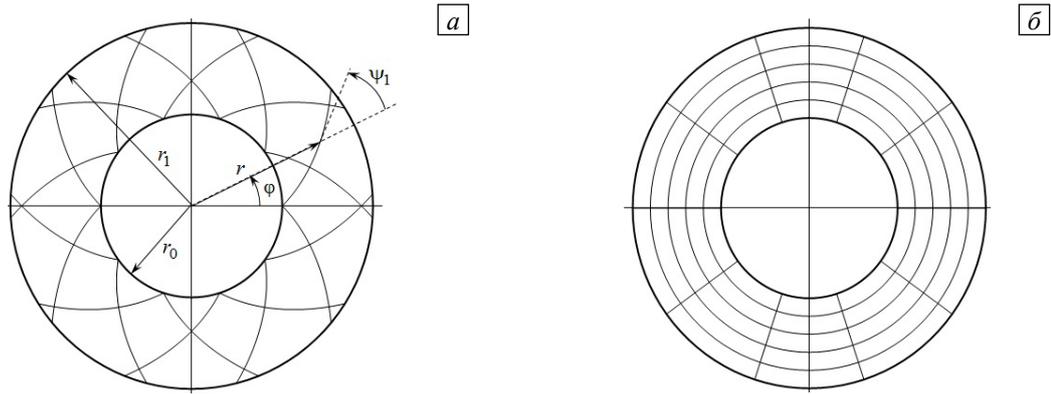


Рис. 1. Структуры армирования полотна диска: спиральная (а); радиально-окружная (б)

Оси анизотропии совпадают с радиальным (r), окружным (φ) и поперечным (z) направлениями (ось z перпендикулярна плоскости диска, Рис. 1). Все компоненты композиции могут иметь разные пределы текучести при растяжении и сжатии.

Учитывая особенности традиционных технологий изготовления армирующих волокон, предполагаем, что они имеют постоянные поперечные сечения и непрерывны (обрываются только на контурах радиусов r_0 и r_1). Поэтому при осесимметричной укладке волокон (см. Рис. 1) плотность армирования волокнами k -го семейства, уложенными по любым спиральным траекториям, определяется так [26]:

$$\begin{aligned} \mu_k(r) &= H_0 r_0 \mu_k^0 \cos \psi_k^0 / [H(r) r \cos \psi_k(r)], \quad r_0 \leq r \leq r_1, \\ H_0 &\equiv H(r_0), \quad \mu_k^0 \equiv \mu_k(r_0), \quad \psi_k^0 \equiv \psi_k(r_0), \quad \psi_k^0 \neq \pi/2, \quad 1 \leq k \leq K, \end{aligned} \quad (1)$$

где μ_k^0 — плотность армирования, заданная на внутреннем контуре $r=r_0$. В случае радиального армирования в (1) нужно принять $\psi_k^0 = \psi_k \equiv 0$. При окружном армировании $\psi_k^0 = \psi_k \equiv \pi/2$, поэтому выражение (1) приводит к неопределенности типа $0/0$, и плотность армирования окружного семейства μ_k может быть произвольной неотрицательной функцией полярного радиуса r , удовлетворяющей следующему физическому ограничению: суммарная плотность армирования $\mu_\Sigma(r)$ в каждой точке полотна диска должна быть меньше предельно допустимого значения μ_m :

$$\mu_\Sigma(r) \equiv \sum_{k=1}^K \mu_k(r) \leq \mu_m = \text{const} < 1 \quad (\mu_k(r) \geq 0, \quad 1 \leq k \leq K), \quad r_0 \leq r \leq r_1. \quad (2)$$

Многонаправленное армирование волокнами круглого поперечного сечения характеризуется максимальным теоретическим значением $\mu_m = 0,78$ [27]; на практике обычно берется $\mu_m = 0,7$ [28].

Исследуем далее лишь случай осесимметричного растяжения диска в стационарном режиме вращения под действием центробежных сил, так как это главный этап определения его прочности. Для расчета полотна диска воспользуемся традиционными гипотезами [1–4, 13], в частности, предположим, что в нем реализуется обобщенное плоское напряженное состояние. При указанных свойствах материала связывающей матрицы, особенностях структур армирования, видах нагружения, закрепления и геометрии вращающегося диска в нем отсутствуют изгиб и скручивание, поэтому направления главных напряжений и деформаций (а также их скоростей) как в связующем, так и в композиции совпадают с радиальным, окружным и поперечным направлениями, и решение задачи е зависит от координат φ и z . При сделанных предположениях уравнение равновесия элемента полотна армированного диска, вращающегося в установившемся режиме с постоянной угловой скоростью ω , имеет вид [1, 3, 13]:

$$(rT_1(r))_{,r} - T_2(r) = -H(r)\rho(r)r^2\omega^2, \quad r_0 < r < r_1. \quad (3)$$

Здесь:

$$T_i(r) = H(r)\sigma_i(r) \quad (i=1,2), \quad \rho(r) = \mu_0(r)\rho_0 + \sum_{k=1}^K \mu_k(r)\rho_k, \quad \mu_0(r) = 1 - \sum_{k=1}^K \mu_k(r); \quad (4)$$

$(\cdot)_{,r} \equiv d(\cdot)/dr$; σ_1, σ_2 — радиальное и окружное усредненные напряжения в композиции полотна диска; ρ_0, ρ_k — объемная плотность связующего и арматуры k -го семейства; ρ — объемная плотность композиции.

Так как рассматривается предельное состояние полотна диска из жесткопластического материала, то в точках пластического течения напряжения σ_1 и σ_2 должны удовлетворять критерию текучести композиции:

$$f(\sigma_1, \sigma_2; r) = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (5)$$

где f — известная функция текучести, которая может явно зависеть от r , так как в общем случае структура армирования диска неоднородна в радиальном направлении (см. Рис. 1 и соотношения (1)). Используя первые выражения из (4), условие текучести (5) можно переписать так:

$$f\left(\frac{H(r)\sigma_1}{H(r)}, \frac{H(r)\sigma_2}{H(r)}; r\right) \equiv f_T(T_1, T_2; r) = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (6)$$

где f_T — известная функция текучести, выраженная через мембранные усилия T_1 и T_2 в полотне диска.

В предельном состоянии вращающегося диска имеют место кинематические соотношения [1, 3, 13]:

$$\xi_1(r) = v_{,r}(r), \quad \xi_2(r) = v(r)/r, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (7)$$

и выполняется условие совместности скоростей деформаций:

$$\xi_{2,r} = (\xi_1 - \xi_2)/r, \quad r_0 < r < r_1. \quad (8)$$

Здесь v — скорость перемещения точек диска в радиальном направлении r ; ξ_1 , ξ_2 — скорости деформаций полотна диска в радиальном и окружном направлениях.

Пластическое течение материала диска ассоциируется с кривой текучести (5), поэтому справедливы равенства [17, 18, 25]:

$$\xi_i(r) = \lambda(r) f_{,i}(\sigma_1, \sigma_2; r), \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

где $f_{,i} \equiv \partial f / \partial \sigma_i$, λ — неопределенный множитель, причем $\lambda > 0$ в точках пластического течения и $\lambda = 0$ в абсолютно жестких подобластях диска, в которых пластическое течение отсутствует.

Так как на внутреннем контуре $r = r_0$ диск жестко скреплен с недеформируемым валом, имеет место граничное условие:

$$v(r_0) = 0. \quad (10)$$

Как уже отмечалось, к внешнему контуру диска может быть приложена равномерно распределенная по окружности $r = r_1$ внешняя сила, действующая в радиальном направлении r и порожденная центробежным действием на диск лопаток и разрезной замковой части обода [1, 3, 13]. Интенсивность этой суммарной погонной силы $T_1^1 = T_1(r_1)$ предполагается равномерно распределенной по площади $H \times 1$ наружной цилиндрической поверхности диска [1, 3, 13]. Величина T_1^1 зависит от ω^2 , формы, размеров, структуры армирования лопаток и конструктивного исполнения замковой части обода диска. В первом приближении лопатку допустимо рассматривать как прямолинейный стержень постоянной толщины H_* (измеряемой в направлении оси вращения z диска) и длиной l [1], возможно, продольно армированный одним семейством волокон. Так как на элемент лопатки действует центробежная сила, то, используя метод сечений, легко определить радиальную силу в корневом сечении лопатки. Поэтому в первом приближении статическое граничное условие на внешнем контуре диска запишем так:

$$T_1(r_1) = T_1^1 \equiv \bar{T}_1^1 \omega^2, \quad \bar{T}_1^1 \equiv \frac{1}{2} H_* (\mu_0^* \rho_0^* + \mu_* \rho_*) (r_2^2 - r_1^2), \quad \mu_0^* = 1 - \mu_*, \quad r_2 = r_1 + l, \quad (11)$$

где ρ_0^* , ρ_* — объемная плотность материалов связующего и арматуры лопатки, $\mu_* = \text{const} \geq 0$ — плотность армирования лопатки.

З а м е ч а н и е 1. Влияние разрезной замковой части обода диска можно учесть либо введением дополнительного слагаемого в выражении для \bar{T}_1^1 , либо за счет формального изменения в (11) величин ρ_0^* и ρ_* (или l , или H_*). Значения таких поправок зависят от конструктивных особенностей замков. В рамках настоящего исследования учет этих поправок не принципиален, так как значение \bar{T}_1^1 в (11) можно считать начально заданным [1, 3, 13].

Таким образом, для определения несущей способности вращающегося КМ-диска по второму предельному состоянию необходимо решить задачу, описываемую уравнениями (3), (5)–(9), при учете граничных условий (10), (11) и выражений (1), (4).

$$f_2(\sigma_1, \sigma_2; r_0) = 0. \quad (16)$$

Система, состоящая из уравнений (5) (при $r = r_0$) и (16), позволяет определить значения напряжений σ_1 и σ_2 в точке A на внутреннем контуре диска. Эти напряжения обозначим как σ_1^A и σ_2^A . Но решение системы (5), (16) не единственно: этим уравнениям удовлетворяют и координаты точки C на рисунке 2а. Для однозначного выбора значений σ_1^A , σ_2^A (из всего множества решений системы) необходимо учитывать неравенство $\sigma_1^A > 0$. Если напряжение σ_1^A при $r = r_0$ уже однозначно найдено из решения системы (5), (16), то, используя первое равенство из (4) и выражение (13), легко установить искомое краевое условие для уравнения (14):

$$\bar{T}_1(r_0) = r_0 H(r_0) \sigma_1^A(r_0). \quad (17)$$

Таким образом, при заданном параметре нагружения $\omega^2 > 0$ нелинейное ОДУ (14) с учетом (17) может быть численно проинтегрировано, например, методами Рунге–Кутты [29, 30]. После того на внешнем контуре полотна диска ($r = r_1$) вычисляем значение \bar{T}_1 , которое зависит от ω^2 : $\hat{T}_1^1(\omega^2) = \bar{T}_1(r_1; \omega^2)$. Далее, умножая граничное условие (11) справа и слева на r_1 , при учете (13) получаем разрешающее уравнение относительно ω^2 :

$$\hat{T}_1^1(\omega^2) = r_1 \bar{T}_1^1 \omega^2. \quad (18)$$

Подобрав параметр нагружения ω^2 так, чтобы выполнялось равенство (18) при учете уравнения (14) и краевого условия (17), найдем предельную угловую скорость вращения КМ-диска ω , рассчитанную по второму предельному состоянию.

Однако эта задача является существенно нелинейной. Для отыскания ее решения необходимо использовать итерационную процедуру. Структура уравнения (18) свидетельствует о том, что для его решения применим не только метод Ньютона, но и метод Эйткена [31], имеющий более высокий порядок сходимости. Действительно, если известно некоторое n -е приближение ω_n^2 корня уравнения (18), то по формуле (18) можно последовательно определить промежуточные значения $\bar{\omega}_n^2 = \hat{T}_1^1(\omega_n^2) / (r_1 \bar{T}_1^1)$ и $\bar{\bar{\omega}}_n^2 = \hat{T}_1^1(\bar{\omega}_n^2) / (r_1 \bar{T}_1^1)$. Тогда, согласно методу Эйткена, следующее — $(n+1)$ -е, приближение корня уравнения (18) вычисляется так [31]: $\omega_{n+1}^2 = (\omega_n^2 \bar{\bar{\omega}}_n^2 - \bar{\omega}_n^2 \bar{\omega}_n^2) / (\omega_n^2 - 2\bar{\omega}_n^2 + \bar{\bar{\omega}}_n^2)$. Аналогично, по значениям ω_n^2 , ω_{n+1}^2 ($\equiv \bar{\omega}_n^2$) и ω_{n+2}^2 ($\equiv \bar{\bar{\omega}}_n^2$) (при указанных тождественных заменах) и так далее могут быть осуществлены итерации более высоких порядков.

Предположим, что уравнение (18) уже решено, то есть известно входящее в него значение ω^2 , тогда, интегрируя (14) при этом значении и учитывая (17), определим искомую функцию $\bar{T}_1(r)$. Затем по формулам (12) и (13) вычислим мембранные усилия $T_1(r)$ и $T_2(r)$, а на основании первого соотношения из (4) — усредненные напряжения $\sigma_1(r)$ и $\sigma_2(r)$ (где $r_0 \leq r \leq r_1$) в предельном состоянии КМ-диска. Далее, исключим из соотношений (9) параметр λ (принимая во внимание, что в состоянии пластического течения $\lambda > 0$), тогда при учете выражений (7) получим

$$f_{,2} v_{,r}(r) - f_{,1} v(r) / r = 0, \quad r_0 < r < r_1. \quad (19)$$

Так как напряжения σ_1 и σ_2 уже установлены, а зависимость функции текучести f от σ_1 и σ_2 известна, то равенство (19) — это линейное ОДУ 1-го порядка относительно $v(r)$ — радиальной скорости перемещения точек полотна КМ-диска в его предельном состоянии, которому соответствует краевое условие (10). Согласно (16) в случае гладкой функции текучести f в уравнении (19) коэффициент при производной $v_{,r}(r)$ равен нулю только в предельных точках A и C на кривой текучести (см. Рис. 2а). Элементарным решением краевой задачи (10) и (19) является $v(r) \equiv 0$ ($r_0 \leq r \leq r_1$). Однако оно не удовлетворяет ассоциированному закону течения (9) при кинематических условиях (7) в предельном состоянии КМ-диска, когда параметр $\lambda(r) > 0$.

В силу того, что на внутреннем контуре $r = r_0$ напряженное состояние в композиции диска соответствует точке A (см. Рис. 2а), в которой справедливо условие (16), ОДУ (19) вырождается в функциональное равенство, то есть на плоскости решения (r, v) точка с координатами $r = r_0$ и $v(r_0) = 0$

является особой точкой ОДУ (19), через которую проходит бесконечное множество решений краевой задачи (10), (19) [32]. Для получения одного из таких нетривиальных решений достаточно задать краевое условие, отличное от (10), а именно:

$$v(r_0 + \varepsilon) = v_\varepsilon > 0, \tag{20}$$

где ε и v_ε — достаточно произвольные положительные величины, причем значение $\varepsilon \in (0, r_1 - r_0)$ выбирается так, чтобы, в отличие от (16), выполнялось неравенство: $f_{,2}(\sigma_1, \sigma_2; r_0 + \varepsilon) \neq 0$. Тогда решение краевой задачи (19), (20) будет следующим [32]:

$$v(r) = v_\varepsilon \exp \int_{r_0 + \varepsilon}^r \frac{f_{,1}(\sigma_1(s), \sigma_2(s); s)}{f_{,2}(\sigma_1(s), \sigma_2(s); s)} ds, \quad r_0 \leq r \leq r_1. \tag{21}$$

Задав в (21) $v_\varepsilon = 0$, приходим к обсуждавшемуся выше тривиальному решению краевой задачи (10), (19). Параметр $v_\varepsilon > 0$ в выражении (21) остается неопределенным. Это связано с тем, что параметр $\lambda > 0$ в ассоциированном законе течения (9) при соотношениях (7) также не установлен (подробнее см. ниже).

З а м е ч а н и е 3. Так как функция текучести f предполагается гладкой по аргументам σ_1 и σ_2 , производная $f_{,2}$ является непрерывной функцией этих же переменных. Но тогда, согласно (16), в малой окрестности внутреннего контура диска ($r = r_0$) коэффициент при производной $v_{,r}(r)$ в уравнении (19) будет иметь малые по модулю значения, то есть уравнение (19) является жестким (сингулярно возмущенным), поэтому его решение в окрестности точки r_0 будет обладать ярко выраженным краевым эффектом [30], причем в силу равенства (16) $|v_{,r}(r_0 + 0)| \rightarrow \infty$. Поэтому поведение функции $v(r)$ в окрестности внутреннего контура диска ($r = r_0$) подобно скачку. Следовательно, при численном способе нахождения интеграла в выражении (21) в окрестности точки r_0 в подынтегральной функции целесообразно предварительно выделить ее особенность [31].

Для определения параметра λ в ассоциированном законе течения композиции диска подставим соотношения (9) в условие совместности деформаций (8), тогда получим:

$$f_{,2} \lambda_{,r}(r) + \left[(f_{,2})_{,r} - (f_{,1} - f_{,2})/r \right] \lambda(r) = 0, \quad r_0 < r < r_1, \tag{22}$$

где коэффициенты при $\lambda_{,r}(r)$ и $\lambda(r)$ — уже известные функции переменной r . Равенство (22) есть линейное ОДУ 1-го порядка относительно $\lambda(r)$. Оно имеет ту же особенность, что и (19), поэтому для его интегрирования в точке $r = r_0 + \varepsilon$, по аналогии с (20), следует задать краевое условие:

$$\lambda(r_0 + \varepsilon) = \lambda_\varepsilon > 0, \tag{23}$$

где λ_ε — произвольное положительное число.

Решение краевой задачи (22), (23) имеет вид [32]:

$$\lambda(r) = \lambda_\varepsilon \exp \int_{r_0 + \varepsilon}^r \frac{f_{,1}(\sigma_1(s), \sigma_2(s); s) - f_{,2}(\sigma_1(s), \sigma_2(s); s) - s [f_{,2}(\sigma_1(s), \sigma_2(s); s)]_{,s}}{s f_{,2}(\sigma_1(s), \sigma_2(s); s)} ds, \quad r_0 \leq r \leq r_1. \tag{24}$$

Свободные параметры v_ε и λ_ε в равенствах (21) и (24) связаны ассоциированным законом течения. Действительно, рассмотрим второе соотношение из (9) в точке $r = r_0 + \varepsilon$ и подставим в него второе выражение из (7), тогда получим

$$v_\varepsilon = \lambda_\varepsilon (r_0 + \varepsilon) f_{,2}(\sigma_1(r_0 + \varepsilon), \sigma_2(r_0 + \varepsilon); r_0 + \varepsilon). \tag{25}$$

В равенстве (25) можно произвольно задать либо $v_\varepsilon > 0$, либо $\lambda_\varepsilon > 0$, тогда оставшийся параметр вычисляется из этого уравнения.

Таким образом, построено полное решение задачи о предельном состоянии вращающегося КМ-диска с лопатками для гладкой функции текучести его композиции. Основная трудность решения этой задачи заключается в отыскании корня ω^2 нелинейного функционального уравнения (18). Из формулы (1) видно, что, например, при постоянной толщине полотна диска $H(r) = H_0$ и армировании его

по логарифмическим спиралям: $\psi_k(r) = \psi_k^0 = \text{const}$ (см. Рис. 1а), в частности в радиальном направлении ($\psi_k(r) \equiv 0$), плотность армирования монотонно убывает ($\mu_k(r) = \mu_k^0 r_0 / r$).

И в более общем случае аналогично из (1) следует, что зависимость $\mu_k(r)$ монотонно убывает, если функция $rH(r)\cos\psi_k(r)$ является возрастающей при $r_0 \leq r \leq r_1$. Следовательно, может оказаться, что в окрестности внутреннего контура $r = r_0$ диск излишне усилен (например, за счет структуры армирования или распределения толщины полотна диска $H(r)$), в результате чего в предельном состоянии пластическому течению будет подвержен не весь КМ-диск (при $r_0 \leq r \leq r_1$), а только его часть, примыкающая к внешнему контуру, то есть течение будет развиваться лишь в точках $r \in [r_*, r_1]$, где $r_0 < r_* < r_1$. Тогда все приведенные выше соотношения остаются в силе, в них лишь необходимо r_0 заменить r_* . Искомое же значение r_* при этом определяется из условия: при истинном r_* предельная угловая скорость вращения диска ω достигает своего минимума.

Как уже отмечалось выше, рассматриваемая задача о предельном равновесии КМ-диска является существенно нелинейной (см. уравнение (18)), поэтому для ее решения необходимо организовать некоторый итерационный процесс. Для этого прежде всего нужно «удачно» задать начальные приближения величин r_* и ω^2 , которые лежали бы достаточно близко к их искомым значениям.

В связи с этой традиционной проблемой «удачного» задания начальных приближений для решения исследуемой задачи целесообразно воспользоваться идеей метода продвижения по параметру задачи. В качестве такого параметра выберем координату r_* , отделяющую в предельном состоянии абсолютно жесткую область полотна диска ($r_0 \leq r < r_*$) от области его пластического течения ($r_* \leq r \leq r_1$). При этом двигаться будем от внешнего контура диска $r = r_1$ к его внутреннему контуру $r = r_0$, задавая последовательно значения $r_*^{(n+1)} = r_*^{(n)} - h$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $h > 0$ — малый шаг продвижения по параметру r_* , n — номер шага, причем $r_*^{(0)} = r_1$. Шаг h может быть переменным и равным или кратным малому шагу численного интегрирования красовой задачи (14), (17) при замене r_0 параметром $r_*^{(n)}$. Если на n -м шаге по параметру r_* (то есть при $r_* = r_*^{(n)}$) получим значение ω_n^2 , удовлетворяющее с требуемой точностью уравнению (18), то это значение ω_n^2 может быть начальным приближением для следующего шага итераций по параметру r_* (при $r_* = r_*^{(n+1)}$).

Для определения значения ω_1^2 на первом ($n = 1$) шаге по параметру r_* (то есть при $r_*^{(1)} = r_1 - h$) можно использовать следующий подход:

– формально интегрируем уравнение (14) на отрезке $r \in [r_*^{(1)}, r_1]$:

$$\bar{T}_1(r) - \bar{T}_1^* - \int_{r_*^{(1)}}^r F(\bar{T}_1(s); s) ds = -R(r)\omega_1^2, \quad r_*^{(1)} \leq r \leq r_1, \quad (26)$$

где, по аналогии с (17),

$$\bar{T}_1^* \equiv r_*^{(1)} H(r_*^{(1)}) \sigma_1^A(r_*^{(1)}), \quad R(r) \equiv \int_{r_*^{(1)}}^r H(s) \rho(s) s^2 ds; \quad (27)$$

– согласно равенствам (27) величина \bar{T}_1^* и функция $R(r)$ в уравнении (26) известны. Рассмотрим соотношение (26) в точке $r = r_1$ и интеграл в нем вычислим приближенно, по формуле трапеций [30]. Тогда, учитывая введенное ранее обозначение $\hat{T}_1^1(\omega^2) = \bar{T}_1(r_1; \omega^2)$ (см. (18) и выше), получим:

$$\hat{T}_1^1(\omega_1^2) - \bar{T}_1^* - \frac{h}{2} [F(\bar{T}_1^*; r_*^{(1)}) + F(\hat{T}_1^1(\omega_1^2); r_1)] = -R(r_1)\omega_1^2, \quad (28)$$

где значения \bar{T}_1^* и $R(r_1)$ известны из (27);

– учтем в уравнении (28) соотношение (18), тогда окончательно будем иметь:

$$[r_1 \bar{T}_1^1 + R(r_1)] \omega_1^2 - \frac{h}{2} F(r_1 \bar{T}_1^1 \omega_1^2; r_1) - \bar{T}_1^* - \frac{h}{2} F(\bar{T}_1^*; r_*^{(1)}) = 0, \quad (29)$$

где величина \bar{T}_1^1 известна из (11).

Равенство (29) — это нелинейное функциональное уравнение относительно величины ω_1^2 , определяемой на первом шаге по параметру r_* . Решив это уравнение, можем далее осуществить продвижение по параметру r_* , как это было описано выше. Структура первого слагаемого в уравнении (29) свидетельствует о том, что для его решения можно использовать итерационный метод Эйткена [31].

3.1. Построение полного решения при полиномиальном критерии текучести КМ полотна диска

При рассматриваемых структурах армирования диска (см. Рис. 1) создается ортотропная композиция его полотна, причем главные оси анизотропии совпадают с радиальным r , окружным φ и поперечным z направлениями. Предположим, что в каждой точке диска ($r_0 \leq r \leq r_1$) функция текучести f его ортотропного КМ является квадратичной, тогда в главных осях анизотропии критерий текучести (5) примет вид [33]:

$$f(\sigma_1, \sigma_2; r) \equiv a_{11}\sigma_1^2 + a_{12}\sigma_1\sigma_2 + a_{22}\sigma_2^2 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 - 1 = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (30)$$

где $a_{ij} = a_{ij}(r)$, $b_i = b_i(r)$ ($i, j = 1, 2$) — известные функции полярного радиуса r , установленные, например, из эксперимента и зависящие от структуры армирования и пластических свойств компонентов композиции. Если в каждой точке полотна диска определены пределы текучести на растяжение $\sigma_i^+ > 0$ и сжатие $\sigma_i^- > 0$ ($i = 1, 2$), а также известно значение τ предельных значений напряжений σ_1 и σ_2 , приводящих к пластическому течению КМ при чистом сдвиге, когда оси системы координат повернуты вокруг оси z на угол $\pi/4$ относительно главных осей анизотропии КМ, то есть

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau > 0, \quad (31)$$

то коэффициенты в соотношении (30) выражаются так [33]:

$$a_{ii} = \frac{1}{\sigma_i^+ \sigma_i^-}, \quad b_i = \frac{1}{\sigma_i^+} - \frac{1}{\sigma_i^-} \quad (i = 1, 2), \quad a_{12} = a_{11} + a_{22} + \frac{b_1 - b_2}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}. \quad (32)$$

Если КМ полотна диска одинаково сопротивляется растяжению и сжатию ($\sigma_i^+ = \sigma_i^-$), то согласно (32) получим: $b_i = 0$ ($i = 1, 2$), и равенство (30) при учете (31) редуцируется в критерий текучести Мизеса–Хилла [33]. Из постулата Друккера [17, 18] следует, что коэффициенты a_{11} , a_{22} и a_{12} в равенстве (30) должны удовлетворять требованию положительной определенности соответствующей квадратичной формы, то есть кривая текучести, отвечающая уравнению (30) при учете (31) и (32), является эллипсом.

Равенство (6) в случае критерия текучести (30) принимает вид:

$$f_T(T_1, T_2; r) \equiv A_{11}T_1^2 + A_{12}T_1T_2 + A_{22}T_2^2 + B_1T_1 + B_2T_2 - 1 = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (33)$$

где

$$A_{ij}(r) = \frac{a_{ij}(r)}{H^2(r)}, \quad B_i(r) = \frac{b_i(r)}{H(r)}, \quad i, j = 1, 2, \quad r_0 \leq r \leq r_1. \quad (34)$$

Так как толщина полотна диска положительна ($H(r) > 0$), из (34) следует, что на плоскости (T_1, T_2) кривая, описываемая уравнением (33), также является эллипсом. Согласно равенству (12), выразим из (33) мембранное усилие T_2 через T_1 , рассматривая при этом равенство (33) как квадратное уравнение относительно T_2 . Тогда при учете выражения (13) получим:

$$T_2(r) = \frac{1}{2A_{22}} \left[\sqrt{(\bar{A}_{12}\bar{T}_1 + B_2)^2 - 4A_{22}(\bar{A}_{11}\bar{T}_1^2 + \bar{B}_1\bar{T}_1 - 1)} - \bar{A}_{12}\bar{T}_1 - B_2 \right], \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (35)$$

где

$$\bar{A}_{11}(r) = \frac{A_{11}(r)}{r^2}, \quad \bar{A}_{12}(r) = \frac{A_{12}(r)}{r}, \quad \bar{B}_1(r) = \frac{B_1(r)}{r}, \quad r_0 \leq r \leq r_1. \quad (36)$$

В выражении (35) перед радикалом выбран знак «+», так как в предельном состоянии напряженное состояние композиции полотна диска соответствует «верхней» дуге ABC на кривой текучести КМ (см. Рис. 2a). Правая часть соотношения (35) при учете (36) представляет собой выражение для функции F в равенстве (12) в конкретном случае критерия текучести КМ вида (30).

Для определения координаты точки A (см. Рис. 2а), согласно (16), продифференцируем (30) по σ_2 , тогда получим:

$$2a_{22}^0\sigma_2 + a_{12}^0\sigma_1 + b_2^0 = 0, \quad (37)$$

где в силу выражения (17) принято:

$$a_{12}^0 \equiv a_{12}(r_0), \quad a_{22}^0 \equiv a_{22}(r_0), \quad b_2^0 \equiv b_2(r_0). \quad (38)$$

На основании постулата Друккера $a_{22}^0 \neq 0$, поэтому из (37) следует, что

$$\sigma_2 = -\frac{a_{12}^0}{2a_{22}^0}\sigma_1 - \frac{b_2^0}{2a_{22}^0}. \quad (39)$$

После подстановки (39) в условие текучести (30) при учете обозначений, аналогичных (38), будем иметь:

$$a_{11}^0\sigma_1^2 - \frac{a_{12}^0}{2a_{22}^0}(a_{12}^0\sigma_1 + b_2^0)\sigma_1 + \frac{1}{4a_{22}^0}(a_{12}^0\sigma_1 + b_2^0)^2 + b_1^0\sigma_1 - \frac{b_2^0}{2a_{22}^0}(a_{12}^0\sigma_1 + b_2^0) - 1 = 0. \quad (40)$$

Равенство (40) — это квадратное уравнение относительно напряжения σ_1 , которое является абсциссами точек A и C на кривой текучести КМ (см. Рис. 2а) при $r = r_0$. Наибольший корень этого уравнения соответствует точке A и определяет значение σ_1^A , входящее в краевое условие (17). После вычисления σ_1^A нелинейная краевая задача (14), (17) при учете (35), (36) и некотором значении ω^2 может быть численно проинтегрирована [29, 30].

Конкретный вид коэффициентов в линейных ОДУ (19) и (22) можно получить, если продифференцировать функцию текучести f , имеющую вид (30). Дальнейшее решение рассматриваемой задачи строится так, как описано ранее для общего случая гладкого критерия текучести КМ.

Выше анализ осуществляется при квадратичном критерии текучести КМ полотна диска (30), которому отвечает кривая текучести в виде эллипса. Однако кривые текучести многонаправленно армированных сред могут отличаться от эллипса. Так, кривая, изображенная на рисунке 2а, рассчитана по структурным формулам из [23] и соответствует перекрестно-угловому армированию (см. Рис. 1а) титанового сплава Бета-III [14, 16] двумя семействами стальной проволоки марки У8А [16] (см. кривую 1 на Рис. 5а в [23]). При этом плотности армирования $\mu_1 = \mu_2 = 0,2$, углы армирования $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/8$, а кривые текучести (эллипсы) материалов компонентов композиции определяются критерием текучести Мизеса. Очевидно, что кривая на рисунке 2а не может быть удовлетворительно аппроксимирована эллипсом. Этот же результат справедлив и для других расчетных кривых текучести разных композиций, изображенных на рисунках 5 и 6 в [23]. Следовательно, для адекватного описания пластического течения КМ в ряде случаев целесообразно аппроксимировать его функцию текучести полиномом от σ_1 и σ_2 не 2-го (как в (30)), а 4-го порядка [33]:

$$f(\sigma_1, \sigma_2; r) \equiv a_{40}\sigma_1^4 + a_{31}\sigma_1^3\sigma_2 + a_{22}\sigma_1^2\sigma_2^2 + a_{13}\sigma_1\sigma_2^3 + a_{04}\sigma_2^4 + b_{30}\sigma_1^3 + b_{21}\sigma_1^2\sigma_2 + b_{12}\sigma_1\sigma_2^2 + b_{03}\sigma_2^3 + c_{20}\sigma_1^2 + c_{11}\sigma_1\sigma_2 + c_{02}\sigma_2^2 + d_{10}\sigma_1 + d_{01}\sigma_2 - 1 = 0, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (41)$$

где, как и в (30), все коэффициенты ($a_{ij} = a_{ij}(r)$ и так далее) являются известными функциями полярного радиуса r .

Преобразуя равенство (41) по аналогии с (33) и (34), получим выражение для функции $f_T(T_1, T_2; r)$ в равенстве (6), которая представляет собой полином 4-го порядка относительно мембранных усилий T_1 и T_2 . Рассматривая при этом уравнение (6) как уравнение 4-го порядка относительно T_2 , и применяя формулы Кардано [34], можно в явном виде записать зависимость (12), которая в силу громоздкости здесь не приводится. Для однозначного выбора корня указанного уравнения необходимо учитывать, что он должен принадлежать «верхней» части кривой текучести ABC (см. Рис. 2а). В остальном решение исследуемой задачи при использовании критерия текучести (41) строится так же, как описано выше.

3.2. Построение полного решения при кусочно-линейном критерии текучести КМ полотна диска

Предположим, что в каждой точке полотна диска ($r_0 \leq r \leq r_1$) кривая текучести его КМ является кусочно-линейной, то есть представляет собой многозвенную линию, выпуклую в силу постулата Друккера (Рис. 2б). Каждый прямолинейный участок этой линии соотносится со своим режимом пластического течения. Согласно Замечанию 2, последовательно обозначим точки изломов на этой кривой как A_n

($0 \leq n \leq N$) и обойдем ее против часовой стрелки, начиная от крайней правой точки $A_0 \equiv A$ и заканчивая крайней левой точкой $A_N \equiv C$. Режим, соответствующий отрезку $A_{n-1}A_n$, будем называть n -м режимом текучести КМ полотна диска. Связь между главными напряжениями в композиции σ_1 и σ_2 при n -м режиме течения определяется равенством:

$$A_{n-1}A_n : \frac{\sigma_1 - s_1^{(n-1)}}{\Delta_1^{(n)}} - \frac{\sigma_2 - s_2^{(n)}}{\Delta_2^{(n)}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta_2^{(n)}\sigma_1 - \Delta_1^{(n)}\sigma_2 - \Delta_n = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (42)$$

где

$$\Delta_n = \Delta_2^{(n)}s_1^{(n-1)} - \Delta_1^{(n)}s_2^{(n)} + \Delta_1^{(n)}\Delta_2^{(n)}, \quad \Delta_i^{(n)} = s_i^{(n)} - s_i^{(n-1)}, \quad s_i^{(n)} \equiv \sigma_i(A_n), \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (43)$$

$s_i^{(n)}$ — координаты точки A_n , которые в силу неоднородности структуры армирования в общем случае зависят от полярного радиуса r , поэтому и величины Δ_n , $\Delta_i^{(n)}$ ($i = 1, 2$, $1 \leq n \leq N$) являются функциями переменной r . По аналогии с равенством (6) и при учете обозначений (13) уравнение (42) целесообразно переписать в виде:

$$A_{n-1}A_n : \bar{\Delta}_2^{(n)}\bar{T}_1 - \bar{\Delta}_1^{(n)}T_2 - \Delta_n = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (44)$$

где

$$\bar{\Delta}_1^{(n)}(r) = \frac{\Delta_1^{(n)}(r)}{H(r)}, \quad \bar{\Delta}_2^{(n)}(r) = \frac{\Delta_2^{(n)}(r)}{rH(r)}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (45)$$

Согласно равенствам (43) и (45), коэффициенты в соотношении (44) — известные функции полярного радиуса r . Из уравнения (44) следует выражение:

$$A_{n-1}A_n : T_2(r) = \frac{\bar{\Delta}_2^{(n)}}{\bar{\Delta}_1^{(n)}}\bar{T}_1(r) - \frac{\Delta_n}{\bar{\Delta}_1^{(n)}}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (46)$$

где правая часть конкретизирует функцию F в равенстве (12) при n -м режиме пластического течения КМ. Подставим (46) в уравнение (14), тогда будем иметь:

$$A_{n-1}A_n : \bar{T}_{1,r}(r) - \frac{\bar{\Delta}_2^{(n)}}{\bar{\Delta}_1^{(n)}}\bar{T}_1(r) = -\frac{\Delta_n}{\bar{\Delta}_1^{(n)}} - H\rho r^2\omega^2, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (47)$$

Таким образом, при n -м прямолинейном режиме течения выполняется линейное ОДУ 1-го порядка (47). Его интеграл имеет вид [32]:

$$A_{n-1}A_n : \bar{T}_1(r) = \bar{T}_{10}^{(n)} \exp \int_{r_0^{(n)}}^r \frac{\bar{\Delta}_2^{(n)}(t)}{\bar{\Delta}_1^{(n)}(t)} dt - \int_{r_0^{(n)}}^r \left(\frac{\Delta_n(s)}{\bar{\Delta}_1^{(n)}(s)} + H(s)\rho(s)s^2\omega^2 \right) \exp \left[\int_s^r \frac{\bar{\Delta}_2^{(n)}(t)}{\bar{\Delta}_1^{(n)}(t)} dt \right] ds, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (48)$$

где $\bar{T}_{10}^{(n)} \equiv \bar{T}_1(r_0^{(n)})$; $r_0^{(n)}$ — значение полярного радиуса r , при котором произошел переход в n -й режим пластического течения $A_{n-1}A_n$. Значение силового фактора $\bar{T}_{10}^{(n)}$ определяется тем, из какого режима течения (предыдущего $(n-1)$ -го или последующего $(n+1)$ -го) произошел переход в текущий — n -й режим.

Для выявления условий перехода из одного режима течения в другой рассмотрим произвольный n -й режим пластического течения полотна диска в окрестности точки $r \in [r_0, r_1]$. Предполагаем: в процессе интегрирования из равенства (48) получили, что при некотором $r = r_1^{(n)} > r_0^{(n)}$ функция \bar{T}_1 достигает значения, соответствующего точке A_n на кривой текучести (см. Рис. 2б), то есть, согласно выражениям (4), (13) и (43), имеем:

$$\bar{T}_1(r_1^{(n)}) = r_1^{(n)}H(r_1^{(n)})s_1^{(n)}. \quad (49)$$

Возникает вопрос: произойдет ли при $r > r_1^{(n)}$ переход в новый — $(n+1)$ -й, режим течения или нет? Для ответа на него необходимо сравнить производные $s_{1,r}^{(n)}$ и $\sigma_{1,r}$ в точке $r_1^{(n)}$. Значение первой из них известно, так как известна зависимость $s_1^{(n)} = s_1^{(n)}(r)$, а вторая производная определяется по значению производной $\bar{T}_{1,r}(r_1^{(n)})$, которое следует из уравнения (47) при рассмотрении его в точке $r_1^{(n)}$. Далее в рассуждениях предполагаем, что значение $\bar{T}_{1,r}(r_1^{(n)})$ уже установлено. Продифференцируем равенство

(13) при учете первого соотношения из (4), тогда получим: $rH\sigma_{1,r} + r\sigma_1 H_{,r} + H\sigma_1 = \bar{T}_{1,r}$. Отсюда, учитывая (4) и (13), найдем при $r = r_1^{(n)}$ искомую производную:

$$\sigma_{1,r}(r_1^{(n)}) = (rH)^{-1} \left[\bar{T}_{1,r} - ((\ln H)_{,r} + r^{-1}) \bar{T}_1 \right] \Big|_{r=r_1^{(n)}}, \quad (50)$$

где правая часть известна в силу равенства (49), значения $\bar{T}_{1,r}(r_1^{(n)})$, вычисленного из (47), и начально заданной функции $H(r)$.

Из сравнения известных значений производных $\sigma_{1,r}(r_1^{(n)})$ и $s_{1,r}^{(n)}(r_1^{(n)})$ вытекает:

$$\sigma_{1,r}(r_1^{(n)}) < s_{1,r}^{(n)}(r_1^{(n)}) \Rightarrow A_{n-1}A_n \rightarrow A_nA_{n+1}; \quad (51)$$

$$\sigma_{1,r}(r_1^{(n)}) \geq s_{1,r}^{(n)}(r_1^{(n)}) \Rightarrow A_{n-1}A_n \rightarrow A_{n-1}A_n. \quad (52)$$

Таким образом, при выполнении неравенства (51) и учете (50) в точке $r_1^{(n)}$ осуществляется переход в новый — $(n+1)$ -й, режим пластического течения A_nA_{n+1} . Следовательно, в формуле (48) нужно поменять n на $n+1$ и задать $r_0^{(n+1)} = r_1^{(n)}$ и $\bar{T}_{10}^{(n+1)} = \bar{T}_1(r_1^{(n)})$. Если же справедливо неравенство (52), переход в новый — $(n+1)$ -й, режим течения не происходит, и при $r > r_1^{(n)}$ остается справедливой формула (48).

При нахождении в процессе интегрирования из равенства (48) при некотором $r = r_1^{(n)} > r_0^{(n)}$ значения функции \bar{T}_1 , соответствующего точке A_{n-1} , в n -м режиме течения (см. Рис. 2б) вместо (49) будем иметь:

$$\bar{T}_1(r_1^{(n)}) = r_1^{(n)} H(r_1^{(n)}) s_1^{(n-1)}. \quad (53)$$

И тогда необходимо сравнить значения производных $s_{1,r}^{(n-1)}$ и $\sigma_{1,r}$ в точке $r_1^{(n)}$. При этом, по аналогии с (51) и (52), с учетом (50) и (53) получим:

$$\sigma_{1,r}(r_1^{(n)}) > s_{1,r}^{(n-1)}(r_1^{(n)}) \Rightarrow A_{n-1}A_n \rightarrow A_{n-2}A_{n-1}; \quad (54)$$

$$\sigma_{1,r}(r_1^{(n)}) \leq s_{1,r}^{(n-1)}(r_1^{(n)}) \Rightarrow A_{n-1}A_n \rightarrow A_{n-1}A_n. \quad (55)$$

Следовательно, при неравенстве (54) в точке $r_1^{(n)}$ имеет место переход в новый — $(n-1)$ -й, режим пластического течения $A_{n-2}A_{n-1}$. В этом случае в формуле (48) при $r > r_1^{(n)}$ нужно поменять n на $n-1$ и задать $r_0^{(n-1)} = r_1^{(n)}$ и $\bar{T}_{10}^{(n-1)} = \bar{T}_1(r_1^{(n)})$. При выполнении же неравенства (55) переход в новый — $(n-1)$ -й, режим течения не происходит, и при $r > r_1^{(n)}$ остается справедливой формула (48).

В малой окрестности внутреннего контура ($r > r_0$) реализуется первый режим течения ($n=1$), а при $r = r_0$ — режим, соответствующий точке $A_0 = A$ (см. Рис. 2б), поэтому при $n=1$ в выражении (48) следует задать $r_0^{(1)} = r_0$ и $\bar{T}_{10}^{(1)} = \bar{T}_1(r_0) = r_0 H(r_0) s_1^{(0)}(r_0)$ (см. (4), (13) и (43)). Далее, при известном ω^2 функция $\bar{T}_1(r)$ вычисляется по описанной выше схеме с учетом переходов из одних режимов течения в другие.

Несмотря на то что для каждого n -го режима пластического течения функцию $\bar{T}_1(r)$ удалось записать в явном виде (см. (48)), в общем случае кусочно-линейной кривой текучести КМ полотна диска (см. Рис. 2б) задача определения его предельного состояния по-прежнему остается нелинейной, поэтому решать ее нужно итерационно, например методом продвижения по параметру r_* , как это было описано выше при гладкой функции текучести f .

Согласно равенствам (7), (9) и (10), на внутреннем контуре диска ($r = r_0$) в КМ реализуется режим пластического течения, соответствующий точке $A_0 = A$ на кусочно-линейной кривой текучести композиции (см. Рис. 2б). Так как эта точка является угловой, в ней не определена однозначно нормаль к кривой текучести КМ, поэтому при $r = r_0$ коэффициенты в уравнении (19) также однозначно не известны. Следовательно, на плоскости (r, v) точка с координатами $r = r_0$ и $v = 0$ (см. (10)) по-прежнему является особой для уравнения (19). В силу этого, как и в случае гладкой кривой текучести КМ, нетривиальное решение уравнения (19) нужно строить в виде (21). При этом в пределе $r \rightarrow r_0 + 0$ получим некоторое значение $v_0 = v(r_0 + 0) > 0$, отличное от начального значения (10), то есть на внутреннем контуре диска

($r = r_0$) имеет место скачок радиальной скорости пластического течения v (см. Замечание 3). Аналогичной особенностью обладает и уравнение (22), поэтому его нетривиальное решение должно иметь вид (24) при выполнении равенства (25). При этом в соотношениях (21), (24) и (25) целесообразно осуществить предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда производные $f_{,1}$ и $f_{,2}$ нужно вычислять при 1-м режиме течения ($n = 1$).

При некоторых видах кусочно-линейной аппроксимации кривой текучести на ней могут появиться вертикальные режимы течения (см. Рис. 2б при $\alpha \rightarrow 0$). Например, это имеет место при использовании критериев Треска, Ху [35] и их модификаций (см. Рис. 2в). При наличии правого вертикального режима (см. отрезок $A_{-1}A_0$ на Рис. 2в) в предыдущих рассуждениях в качестве точки A_0 следует выбрать верхнюю точку этого режима. Аналогично, при наличии левого вертикального режима на кривой текучести (см. отрезок A_2A_3 на Рис. 2в) в предыдущих рассуждениях в качестве точки A_N нужно также брать верхнюю точку этого режима (точку A_2 на Рис. 2в, где $N = 2$). Это обусловлено тем, что вертикальные режимы в предельном состоянии вращающегося диска вообще не могут реализоваться. Чтобы доказать это, предположим обратное: пусть на некотором отрезке $r \in [r_0^*, r_1^*]$ ($r_0 \leq r_0^* < r_1^* \leq r_1$) имеет место, например, пластическое течение в режиме $A_{-1}A_0$ (см. Рис. 2в). Тогда, согласно ассоциированному закону течения (9), на этом отрезке имеем (см. (7)):

$$\xi_1 = v_{,r}(r) > 0, \quad \xi_2 = v(r)/r = 0, \quad r_0^* \leq r \leq r_1^*. \tag{56}$$

Из второго равенства в (56) следует $v(r) \equiv 0$ ($r_0^* \leq r \leq r_1^*$), но тогда в предельном состоянии на этом отрезке невозможно выполнение первого строгого неравенства из (56). Это противоречие и доказывает невозможность реализации вертикального режима $A_{-1}A_0$. Следовательно, точка A_0 может быть только верхней точкой правого вертикального режима на кусочно-линейной кривой текучести. Аналогичные рассуждения справедливы и для левого вертикального режима (см. отрезок A_2A_3 на Рис. 2в). При этом в первом соотношении из (56) необходимо лишь знак «>» заменить знаком «<». Согласно предыдущему рассуждению и Замечанию 2, точка A_N может быть только верхней точкой левого вертикального режима (см. точку A_2 на Рис. 2в).

Таким образом, в настоящем разделе построено полное решение задачи определения предельного состояния вращающегося КМ-диска с лопатками при кусочно-линейной кривой текучести композиции. Основная трудность решения этой задачи по-прежнему заключается в отыскании корня ω^2 нелинейного функционального уравнения (18).

3.3. Полное решение при радиально-окружном армировании полотна диска

Рассмотрим частный, но важный с практической точки зрения случай армирования. Пусть полотно диска усилено двумя ($K = 2$) семействами волокон: первое семейство уложено в радиальном направлении ($\psi_1(r) \equiv 0$), а второе семейство — в окружном направлении ($\psi_2(r) \equiv \pi/2$, $r_0 \leq r \leq r_1$). Арматура разных семейств может быть изготовлена из разных материалов. При такой структуре армирования полотна вращающегося диска (см. Рис. 1б) волокна уложены по направлениям главных напряжений, поэтому такой тип армирования считается рациональным [28].

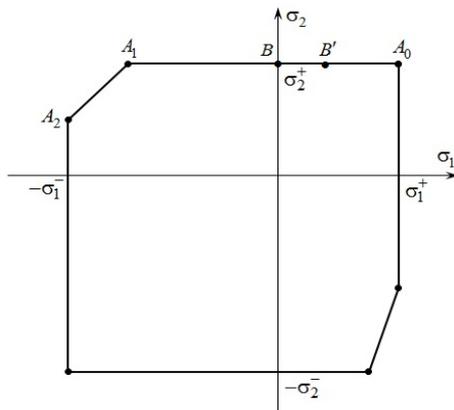


Рис. 3. Кривая текучести полотна диска с радиально-окружной структурой армирования

Предположим, что пластическое течение ортотропного связующего материала ассоциировано с кусочно-линейной кривой текучести, соотносящейся с модифицированным критерием текучести Треска–Ху (см. Рис. 2в). Пусть $\sigma_{[k]}^+$, $\sigma_{[k]}^-$ — пределы текучести материала волокон k -го семейства при растяжении и сжатии ($\sigma_{[k]}^\pm > 0$, $k = 1, 2$); $\sigma_{mi}^\pm > 0$ — пределы текучести связующего при растяжении (+) и сжатии (–) в радиальном ($i = 1$) и окружном ($i = 2$) направлениях. При $\sigma_{m1}^+ = \sigma_{m2}^+$ и $\sigma_{m1}^- = \sigma_{m2}^-$ получим критерий текучести Ху [35] для изотропного связующего материала, по разному сопротивляющегося растяжению и сжатию.

В соответствии со структурными формулами (6.1), (6.2) и (6.5) из [22], кривая текучести полотна диска с радиально-окружной структурой армирования имеет вид шестиугольника (Рис. 3). Представляющие в данном исследовании интерес угловые точки A_0 , A_1 и A_2 этой кривой имеют следующие координаты [22]:

$$\begin{aligned}
A_0: \quad s_1^{(0)} &= \bar{\sigma}_{r1}^+ + \bar{\sigma}_{m1}^+ \equiv \sigma_1^+ > 0, \quad s_2^{(0)} = \bar{\sigma}_{r2}^+ + \bar{\sigma}_{m2}^+ \equiv \sigma_2^+ > 0; \\
A_1: \quad s_1^{(1)} &= -\bar{\sigma}_{r1}^- < 0, \quad s_2^{(1)} = \bar{\sigma}_{r2}^+ + \bar{\sigma}_{m2}^+ \equiv \sigma_2^+ > 0; \\
A_2: \quad s_1^{(2)} &= -\bar{\sigma}_{r1}^- - \bar{\sigma}_{m1}^- \equiv -\sigma_1^- < 0, \quad s_2^{(2)} = \bar{\sigma}_{r2}^+ > 0,
\end{aligned} \tag{57}$$

где использованы обозначения (43) и следующие:

$$\bar{\sigma}_{mi}^\pm \equiv (1 - \mu_i) \sigma_{mi}^\pm, \quad \bar{\sigma}_{ri}^\pm \equiv \mu_i \sigma_{ri}^\pm, \quad i = 1, 2. \tag{58}$$

Согласно (1), плотность армирования μ_1 радиального семейства волокон ($k=1$) зависит от r . Как уже отмечалось выше, плотность армирования окружным семейством μ_2 также может быть заданной функцией r , поэтому на основании выражений (58) заключаем, что координаты точек A_0 , A_1 и A_2 на кривой текучести полотна диска тоже обуславливаются полярным радиусом r ; как и введенные в (57) величины σ_1^\pm и σ_2^\pm .

Так как в предельном состоянии вращающийся диск в окрестности внешнего контура $r=r_1$ растягивается, то при отсутствии лопаток (при $\bar{T}_1^1=0$; см. (11)) на внешнем контуре напряжение в радиальном направлении $\sigma_1(r_1)$ нулевое. Поэтому при $\bar{T}_1^1=0$ на внешнем контуре напряженное состояние в диске соответствует точке B на рисунке 3. Очевидно, что при наличии лопаток $T_1(r_1) \equiv T_1^1 = H(r_1)\sigma_1(r_1) > 0$ (см. (4), (11)) и напряженное состояние на внешнем контуре в предельном состоянии соотносится с некоторой промежуточной точкой B' , лежащей на отрезке AB на рисунке 3. Из предыдущего анализа уже известно, что на внутреннем контуре диска ($r=r_0$) реализуется режим пластического течения, отвечающий точке A_0 , поэтому естественно предположить: во всех точках диска с радиально-окружной (в частности, радиальной или окружной) структурой армирования имеет место только горизонтальный режим пластического течения A_0A_1 , для которого напряжение $\sigma_2^+(r)$ — известная функция, вычисляемая по формуле (57) при учете (58).

Проинтегрируем уравнение (14) при краевом условии (17), принимая во внимание, что в $F(\bar{T}_1(r); r) = H(r)\sigma_2^+(r)$ (см. (12), (13)) и $\sigma_1^A(r_0) \equiv \sigma_1^+(r_0)$, где σ_1^+ , σ_2^+ известны из (57). Тогда с учетом (13) получим:

$$rT_1(r) = r_0H(r_0)\sigma_1^+(r_0) + \int_{r_0}^r H(s)\sigma_2^+(s)ds - \omega^2 \int_{r_0}^r H(s)\rho(s)s^2ds, \quad r_0 \leq r \leq r_1. \tag{59}$$

Рассмотрим равенство (59) на внешнем контуре диска ($r=r_1$) вместе с краевым условием (11), после чего придем к уравнению:

$$\left[r_1\bar{T}_1^1 + \int_{r_0}^{r_1} H(r)\rho(r)r^2dr \right] \omega^2 = r_0H(r_0)\sigma_1^+(r_0) + \int_{r_0}^{r_1} H(r)\sigma_2^+(r)dr, \tag{60}$$

где правая часть и выражение, заключенное в квадратные скобки, имеют известные значения. Из соотношения (60) однозначно определяется предельное значение угловой скорости вращения ω диска с радиально-окружной структурой армирования.

В режиме A_0A_1 (см. Рис. 3) имеем: $f_{,1}=0$ и $|f_{,2}| \rightarrow \infty$, поэтому из соотношения (21) следует, что $v(r) = v_\varepsilon = \text{const} > 0$ ($r_0 < r \leq r_1$). При этом, согласно (10), на внутреннем контуре диска ($r=r_0$) по-прежнему имеет место разрыв скорости v , и в бесконечно малой окрестности внутреннего контура в полотне КМ-диска реализуется пластическое состояние, аналогичное пластическому шарниру. В этом случае из равенства (24) вытекает, что $\lambda(r) = \lambda_\varepsilon(r_0 + \varepsilon)/r$, где λ_ε — неопределенный множитель.

Построенное полное решение задачи определения предельного состояния вращающегося диска с радиально-окружной структурой армирования справедливо, если во всем КМ-диске пластическое состояние соответствует режиму течения A_0A_1 (см. Рис. 3). Поэтому после вычисления из (60) значения ω^2 с использованием формулы (59) необходимо проверить, действительно ли при полученном значении ω^2 нигде в диске ($r_0 < r \leq r_1$) не происходит переход на наклонный режим течения A_1A_2 . Если окажется, что такой переход все-таки имеет место, то для построения полного решения исследуемой задачи необходимо прибегать к общему алгоритму, описанному в разделе 2.2. При этом значение ω , определяемое равенством (60), можно считать начальным приближением к предельной угловой скорости вращения КМ-диска.

4. Обсуждение результатов расчетов

Рассмотрим конструкцию, состоящую из диска, ограниченного контурами радиусов $r_0 = 5$ см и $r_1 = 19,75$ см, и лопаток длиной $l = 11,4$ см [1] и толщиной $H_* = 5$ мм (см. (11)). Полотно диска может быть однородным, изготовленным из изотропного магниевого сплава МА2 ($\sigma_{m1}^+ = \sigma_{m2}^+ = 151$ МПа, $\sigma_{m1}^- = \sigma_{m2}^- = 113$ МПа и $\rho_0 = 1740$ кг/м³ [16, 36]) или из стали марки 35ХГСНА ($\sigma_{m1}^+ = \sigma_{m2}^+ = 1554$ МПа, $\sigma_{m1}^- = \sigma_{m2}^- = 1754$ МПа и $\rho_0 = 7800$ кг/м³ [16, 36]), а также композитным, состоящим из магниевого связующего (сплав марки МА2) и одного или двух семейств углеродных волокон Торнел-400 ($\sigma_{[k]}^+ = \sigma_{[k]}^- = 2750$ МПа и $\rho_k = 1780$ кг/м³, $k = 1, 2$ [16]). Лопатки выполнены из магниевого сплава МА2 и продольно армированы углеродными волокнами Торнел-400 с плотностью армирования $\mu_* = 0,6$ (см. (11)). Согласно Замечанию 1, для учета влияния разрезной замковой части обода диска в формуле (11) объемная плотность связующего лопатки формально увеличена и принята равной $\rho_0^* = 2700$ кг/м³ (а не $\rho_0^* = 1740$ кг/м³, как указано выше для сплава МА2).

Далее в настоящем исследовании в основном будем иметь дело с дисками постоянной толщины ($H = \text{const}$). Толщину однородного изотропного диска из магниевого сплава МА2 принимаем равной $H = 8$ мм. Масса такого диска

$$m_e = 1,596 \text{ кг} \quad (61)$$

считается эталонной. Толщину дисков из других материалов (в том числе армированных) зададим так, чтобы их масса m равнялась эталонной ($m = m_e$).

Прежде всего целесообразно сравнить угловые скорости вращения диска, рассчитанные по I-му (ω_1) и II-му (ω_{II}) предельным состояниям. При этом значение ω_{II} определяется по формулам раздела 3. Для отыскания же величины ω_1 необходимо построить решение рассматриваемой задачи при упругом деформировании полотна диска. В случае однородного изотропного вращающегося диска постоянной толщины напряжения в нем имеют выражения [1, 3]:

$$\sigma_i(r; \omega) \equiv \bar{\sigma}_i(r) \rho_0 \omega^2 \quad (i = 1, 2),$$

$$\bar{\sigma}_1(r) = -\frac{3+\nu}{8} r^2 + (1+\nu)C_1 - (1-\nu)\frac{C_2}{r^2}, \quad \bar{\sigma}_2(r) = -\frac{1+3\nu}{8} r^2 + (1+\nu)C_1 + (1-\nu)\frac{C_2}{r^2}, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (62)$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования, которые находятся из граничных условий, то есть из системы уравнений:

$$C_1 + \frac{1}{r_0^2} C_2 = \frac{r_0^2}{8}, \quad (1+\nu)C_1 - \frac{1-\nu}{r_1^2} C_2 = \frac{\bar{T}_1^1}{H\rho_0} + \frac{3+\nu}{8} r_1^2; \quad (63)$$

ν — коэффициент Пуассона материала диска, величина \bar{T}_1^1 определена в (11).

Для однородных металлических дисков в качестве условия текучести их материалов используем критерий Ху [35] (см. Рис. 2б). Расчеты показали, что для металлических дисков (при $\nu = 0,3$) зависимости $\bar{\sigma}_1(r)$ и $\bar{\sigma}_2(r)$ являются положительными, поэтому, следуя критерию текучести Ху и учитывая соотношения (62) и (63), получим следующие выражения для предельной угловой скорости вращения:

$$\omega^2(r) = \begin{cases} \sigma_{m1}^+ / (\rho_0 \bar{\sigma}_1(r)), & \bar{\sigma}_1(r) \geq \bar{\sigma}_2(r), \\ \sigma_{m1}^+ / (\rho_0 \bar{\sigma}_2(r)), & \bar{\sigma}_1(r) < \bar{\sigma}_2(r), \end{cases} \quad r_0 \leq r \leq r_1. \quad (64)$$

При расчете диска по I-му предельному состоянию из всех значений (64) необходимо выбрать наименьшее:

$$\omega_1 = \min_r \sqrt{\omega^2(r)}, \quad r_0 \leq r \leq r_1. \quad (65)$$

Для рассматриваемых металлических дисков пластическое состояние впервые достигается на внутреннем контуре $r = r_0$. Предельные напряжения $\sigma_1(r_0; \omega_1)$ и $\sigma_2(r_0; \omega_1)$ при этом определяют точку, лежащую на вертикальном отрезке $A_{-1}A_0$ кривой текучести материала (см. Рис. 2б).

В таблице приведены значения предельных угловых скоростей вращающихся металлических дисков

$$n = 30\omega/\pi, \text{ об/мин}, \quad (66)$$

рассчитанные по I-му предельному состоянию (n_1), то есть по формулам (64) и (65), и по II-му предельному состоянию (n_{II}), то есть по формуле (60). При этом оказалось, что во втором случае пластическое течение развивается во всем диске ($r_0 \leq r \leq r_1$). Из таблицы видно, что в дисках без лопаток значения n_{II} превышают n_1 на 33,2%, а в дисках с лопатками — на 26,2%. Следовательно, как и отмечалось в разделе 1 (во Введении), расчет по I-му предельному состоянию в действительности существенно занижает величину предельной нагрузки, которую способна выдержать конструкция, по сравнению рассчитанной по II-му предельному состоянию.

Таблица. Предельные угловые скорости вращения металлических дисков постоянной толщины

Материал диска	Толщина H , мм	Без лопаток		С лопатками	
		n_1 , об/мин	n_{II} , об/мин	n_1 , об/мин	n_{II} , об/мин
Сплав МА2	8,0	18672	24873	11889	14999
Сталь 35ХГСНА	1,785	28291	37691	18014	22727

Далее проанализируем несущую способность вращающихся КМ-дисков по II-му предельному состоянию. Рассмотрим три вида структуры армирования полотна диска:

1. Радиальное армирование ($\psi_1 \equiv 0$); плотность армирования μ_1 зависит от r и определяется по формуле (1);
2. Окружное армирование ($\psi_1 \equiv \pi/2$); плотность армирования принимается постоянной $\mu_1(r) = \mu_1^0 = \text{const}$ ($r_0 \leq r \leq r_1$);
3. Радиально-окружное армирование ($\psi_1 \equiv 0$, $\psi_2 \equiv \pi/2$); плотность армирования в радиальном направлении μ_1 вычисляется по формуле (1), а в окружном направлении находится так: $\mu_2(r) = \mu_1^0 - \mu_1(r)$, при этом $\mu_2(r) = \mu_1^0 = \text{const}$ (см. (2) при $K = 2$).

На рисунке 4 изображены зависимости n (см. (66)) от величины μ_1^0 (см. (1)) для КМ-дисков без лопаток (Рис. 4а) и с лопатками (Рис. 4б). Изменение величины μ_1^0 в пределах от 0 до 0,7 гарантирует выполнение физического ограничения (2) при всех перечисленных структурах армирования. Номера кривых на рисунке 4 совпадают с номерами структур армирования. Штриховые линии l' рассчитаны для дисков переменной толщины (подробнее см. ниже), остальные кривые — для дисков постоянной толщины H , которая зависит от μ_1^0 и подобрана так, что масса КМ-диска m имеет эталонное значение (61). Случаи $\mu_1^0 = 0$ соответствуют однородным изотропным дискам из магниевого сплава МА2. Для таких дисков постоянной толщины значения $n = n_{II}$ приведены в таблице.

Все кривые на рисунке 4 (за исключением кривой 2 на Рис. 4б) монотонно возрастают. Это означает, что армирование магниевого диска действительно приводит к увеличению его несущей способности, причем при некоторых структурах армирования предельная угловая скорость вращения диска увеличивается в разы (ср. ординаты правых и левых точек на кривых 3) и может существенно превосходить аналогичную величину для стального диска той же массы (ср. ординаты правых точек на кривых 3 и значения n_{II} , приведенные в таблице для диска из стали 35ХГСНА).

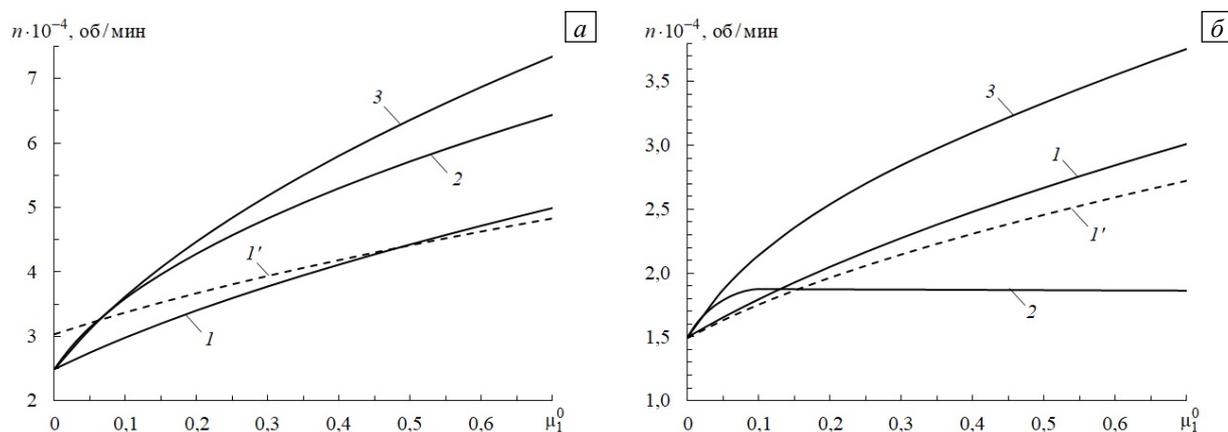


Рис. 4. Зависимость предельной угловой скорости вращения диска от плотности армирования первым семейством волокон на внутреннем контуре его полотна: диск без лопаток (а); диск с лопатками (б)

Сопоставление ординат точек кривых с одинаковыми номерами на рисунке 4а и 4б показывает, что наличие лопаток значительно снижает предельную угловую скорость вращения КМ-диска. Более того, наличие/отсутствие лопаток может приводить даже к качественно разному поведению зависимостей $n(\mu_1^0)$ при некоторых структурах армирования (ср. поведение кривых 2 на Рис. 4а и 4б). При этом структуры армирования, обеспечивающие высокую несущую способность КМ-дисков без лопаток, могут оказаться неэффективными для дисков с лопатками. Из трех рассматриваемых структур армирования такой особенностью обладает структура с окружным армированием: на рисунке 4а кривая 2 лежит ниже только кривой 3, а на рисунке 4б кривая 2 при $\mu_1^0 > 0,15$ лежит ниже всех остальных кривых. Из всех структур армирования наибольшую несущую способность КМ-дискам как при наличии, так и в отсутствие лопаток обеспечивает радиально-окружная структура (см. кривые 3 на Рис. 4).

Как уже отмечалось в разделе 3, в предельном состоянии КМ-дисков в окрестности внутреннего контура $r = r_0$ могут возникать абсолютно жесткие подобласти ($r_0 \leq r < r_*$, где r_* — радиус внешней границы этой области). В связи с этим на рисунке 5 изображены зависимости $r_*(\mu_1^0)$ для КМ-дисков без лопаток (Рис. 5а) и с лопатками (Рис. 5б). Номера кривых на рисунке 5 имеют тот же смысл, что и на рисунке 4. Горизонтальные прямые 1 на рисунках 5а и 5б свидетельствуют, что в диске с радиальной структурой армирования при всех значениях μ_1^0 в предельном состоянии пластическое течение развивается во всем полотне диска как при отсутствии, так и при наличии лопаток. Аналогично, горизонтальная прямая 3 на рисунке 5а свидетельствует, что при радиально-окружном армировании в предельном состоянии течет все полотно диска без лопаток. Во всех остальных случаях либо при всех значениях μ_1^0 (см. кривую 1' на Рис. 5а и кривые 1', 2 на Рис. 5б), либо при некоторых значениях μ_1^0 (см. кривую 2 на Рис. 5а и кривую 3 на Рис. 5б) в предельном состоянии в окрестности внутреннего контура образуется жесткая подобласть (при этом $r_* > 0,5$ см).

Поведение кривой 2 на рисунке 5б при $\mu_1^0 \geq 0,1$ и кривой 3 при $\mu_1^0 \geq 0,35$ показывает, что при указанных значениях μ_1^0 в дисках с лопатками при окружном и радиально-окружном армировании пластическое течение в предельном состоянии развивается в бесконечно узкой области вблизи внешнего контура полотна ($r_* \rightarrow r_1$). При этом происходит как бы отрыв лопаток и разрезной замковой части диска от его полотна, которое не деформируется. В этих случаях интегралы в уравнении (60) равны нулю (в силу $r_0 \equiv r_* \rightarrow r_1$) и решение рассматриваемой задачи определяется только первыми слагаемыми в обеих частях равенства (60), причем в левой части соотношения (60) величина $\bar{T}_1^{-1} r_1$ фиксированная (не зависит от μ_1^0), а первое слагаемое в правой части обуславливается μ_1^0 . Согласно равенствам (57) и (58), при окружном армировании напряжение $\sigma_1^+ = \sigma_{m1}^+ = \text{const}$ (не связано с μ_1^0), а толщина полотна диска $H(r_*) = H_0$ незначительно убывает при увеличении μ_1^0 и обеспечивает постоянство массы диска (ее эталонное значение (61)). Уменьшение $H(r_*)$ с увеличением μ_1^0 является следствием того, что объемная плотность волокон Торнел-400 несколько больше, чем аналогичная величина у связующего материала из магниевого сплава МА2. Таким образом, согласно поведению кривой 2 на рисунке 5б, в диске с лопатками и окружной структурой армирования полотна при $\mu_1^0 \geq 0,1$ множитель при ω^2 в (60) не зависит от μ_1^0 , а правая часть в (60) монотонно, но незначительно убывает с увеличением μ_1^0 , поэтому кривая $n(\mu_1^0)$ при этом достигает максимума в точке $\mu_1^0 = 0,1$, а при $\mu_1^0 > 0,1$ визуально почти незаметно убывает. Это и объясняет специфику поведения кривой 2 на рисунке 4б.

Выше рассмотрены КМ-диски постоянной толщины ($H(r) = H_0, r_0 \leq r \leq r_1$). При этом кривая 2 на рисунке 4а оказалась лежащей существенно выше кривой 1. Но кривая 2 соответствует окружной структуре армирования, которая является однородной:

$$\mu_1(r) = \mu_1^0 = \text{const}, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (67)$$

а кривая 1 — радиальной структуре, которая неоднородна: $\mu_1(r) = r_0 \mu_1^0 / r$ (см. (1) при $\psi_1(r) \equiv 0$). Следовательно, несмотря на то, что при одних и тех же значениях μ_1^0 массы m дисков с радиальной и окружной структурами армирования одинаковы и равны эталонному значению (61), общий расход арматуры в них существенно разный: диски с окружной структурой армирования содержат примерно в 2,46 раза больший, по сравнению с радиально-армированными дисками, объем волокон. Важно, что во всех приведенных выше расчетах при фиксированных значениях $\mu_1^0 > 0$ общий расход волокон в дисках с окружной и радиально-окружной структурами армирования одинаков, но он значительно больше расхода

волокон при радиальном армировании. В связи с этим целесообразно исследовать несущую способность КМ-дисков с радиальной структурой армирования в предположении, что она однородна, как и при окружном армировании (см. (67)). Этому можно добиться за счет профилирования радиально-армированного полотна диска, заключающегося в следующем: из соотношения (1) при учете (67) и $\psi_1 \equiv 0$ получаем выражение для искомой толщины диска:

$$H(r) = r_0 H_0 / r, \quad r_0 \leq r \leq r_1. \quad (68)$$

При этом для каждого $\mu_1^0 \in [0; 0,7]$ значение H_0 подбираем так, чтобы масса диска имела эталонное значение (61). Согласно равенству (68), толщина полотна диска с радиальной структурой армирования монотонно убывает по радиусу r , что, как правило, и имеет место на практике [1, 3].

Штриховые кривые I' на рисунках 4 и 5 соответствуют именно этому случаю профилированного диска (68) с однородной радиальной структурой армирования (67). Поведение кривых I' на рисунке 5 свидетельствует о том, что в предельном состоянии такого КМ-диска, как при отсутствии (Рис. 5а), так и при наличии (Рис. 5б) лопаток, вблизи внутреннего контура ($r_0 = 5$ см) образуется абсолютно жесткая подобласть при любых значениях $\mu_1^0 \in [0; 0,7]$. Кривая I' на рисунке 4б всюду лежит ниже кривой I , следовательно, для радиально-армированных дисков с лопатками их профилирование по формуле (68), по сравнению с дисками той же структуры и той же массы, но постоянной толщины (кривая I), является неэффективным. И это даже не смотря на то, что при фиксированных значениях μ_1^0 общий объем волокон в профилированном диске примерно в 2,46 раза больше, чем в диске постоянной толщины. На рисунке 4а кривая I' при $\mu_1^0 \in [0; 0,475]$ лежит выше кривой I , поэтому при малых плотностях армирования профилирование (68) радиально-армированного диска без лопаток приводит к увеличению его несущей способности по сравнению с диском постоянной толщины той же массы. Так, в частности, профилирование по формуле (68) однородного изотропного диска из магниевого сплава МА2 способствует увеличению его предельной угловой скорости вращения на 21,7% по сравнению с диском постоянной толщины (ср. ординаты точек кривых I и I' на рисунке 4а при $\mu_1^0 = 0$). Однако при плотностях армирования, близких к предельно допустимым ($\mu_1^0 \in (0,475; 0,7]$), кривая I' на рисунке 4а лежит ниже кривой I , поэтому при таких плотностях армирования профилирование по формуле (68) радиально-армированного диска без лопаток, по сравнению с дисками той же массы, но постоянной толщины, является таким же неэффективным, как и дисков с лопатками (см. Рис. 4б). Следовательно, результаты рационального профилирования дисков из однородных изотропных конструкционных материалов нельзя однозначно переносить на КМ-диски: для них необходим независимый поиск рациональных проектов с учетом как вида структуры армирования, так и характера распределения толщины полотна диска по радиусу r .

Как уже отмечалось, точки на кривых рисунка 5, у которых ординаты отличаются от значений $r_* = r_0 = 5$ см, свидетельствуют о том, что при соответствующих структурах армирования в предельном состоянии КМ-дисков вблизи их внутренних контуров образуются абсолютно жесткие подобласти ($r_0 \leq r < r_*$). Следовательно, окрестности внутренних контуров дисков становятся излишне усиленными, поэтому часть материала из этих подобластей целесообразно убирать и перераспределять его ближе к внешним контурам ($r \approx r_1$) с сохранением массы конструкции. Поиск рациональных и оптимальных проектов КМ-дисков по II-му предельному состоянию выходит за рамки настоящего исследования.

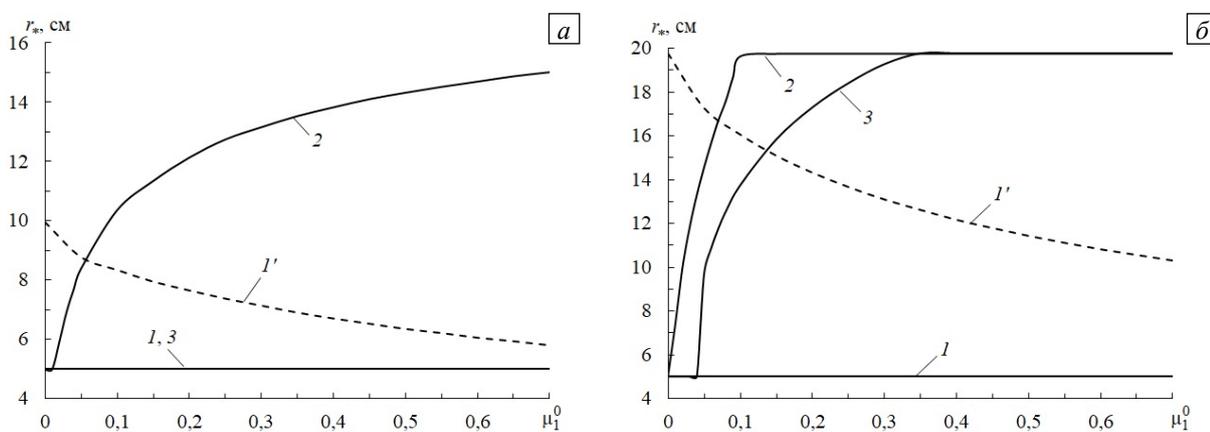


Рис. 5. Зависимость радиуса внешней границы жесткой подобласти в предельном состоянии полотна диска от плотности армирования первым семейством волокон на внутреннем контуре: диск без лопаток (а); диск с лопатками (б)

Все результаты, обсуждавшиеся выше, получены на основе формулы (60). Однако, как подчеркивалось в разделе 3.3, для обоснованного применения равенства (60) необходимо проверять выполнение следующего условия: в предельном состоянии КМ-диска напряженное состояние во всех его точках ($r_0 \leq r \leq r_1$) должно соответствовать горизонтальному режиму пластического течения A_0A_1 (см. Рис. 3). Для такой проверки нужно использовать первое выражение из (4) и соотношения (57)–(59). Как оказалось, во всех проделанных выше расчетах выход на наклонный режим течения A_1A_2 не наблюдался. Однако во многих расчетах обнаруживалось нарушение режима A_0A_1 в точке A_0 , то есть реализовалось неравенство:

$$\sigma_1(r) > \sigma_1^+(r), \quad r_0 < r \leq r_{**} \quad (r_{**} < r_1). \quad (69)$$

Анализ этих ситуаций показал: существование неравенства (69) свидетельствует о том, что в предельном состоянии КМ-диска вблизи его внутреннего контура возникает абсолютно жесткая подобласть, причем имеют место соотношения: $r_{**} < r_*$ и $r_{**} \approx r_*$, где r_* — радиус внешней границы жесткой подобласти.

5. Заключение

Разработана методика построения полного решения задачи определения несущей способности плоских композитных вращающихся дисков с лопатками по II-му предельному состоянию. Полотно дисков многонаправленно армировано по радиально-симметричным спиральным траекториям; в частности, в радиальном, окружном и радиально-окружном направлениях (предельные виды спирального армирования). При этом жесткопластические материалы композиции имеют разные пределы текучести при растяжении и сжатии, а материал связующего является цилиндрически анизотропным. Рассмотрены примеры гладких и кусочно-линейных кривых текучести материала композиции диска при учете неоднородности структуры армирования и переменности толщины полотна диска. Показано, что в общем случае армирования исследуемая проблема сводится к численному решению одного нелинейного функционального уравнения относительно предельной угловой скорости вращения диска.

Для частных, но практически важных видов армирования (радиальная, окружная и радиально-окружная структуры) получено полное решение задачи в аналитической форме. При этом механическое поведение материалов композиции описывается упрощенными соотношениями структурной модели с двумерным напряженным состоянием во всех компонентах, а пластическое течение в ортотропном связующем определяется модифицированным критерием текучести Треска–Ху.

Выполнено сравнение результатов расчетов для однородных металлических дисков постоянной толщины по I-му (упругость) и II-му (пластичность) предельным состояниям. Показано, что расчет по II-му предельному состоянию дает значение угловой скорости вращения диска примерно на 30% большее, чем при расчете по I-му предельному состоянию.

Исследовано влияние параметров армирования на предельное значение угловой скорости вращения жесткопластических дисков постоянной и переменной толщины, имеющих радиальную, окружную и радиально-окружную структуру укладки волокон. Проведенные расчеты показали, что структуры армирования, эффективные в отсутствие лопаток, могут оказаться неэффективными при их наличии (в частности, таким свойством обладает армирование в окружном направлении). Традиционное профилирование вращающихся дисков, изготовленных из однородных конструкционных материалов, может оказаться также неэффективным применительно к КМ-дискам даже при сохранении их массы и значительного увеличения общего расхода арматуры в них.

Из всех рассмотренных видов армирования наибольшую несущую способность вращающимся дискам как при наличии, так и в отсутствие лопаток обеспечивает радиально-окружная структура. Предельные угловые скорости вращения таких КМ-дисков могут в разы превосходить аналогичные величины для высокопрочных стальных дисков той же массы.

Обнаружено, что в предельном состоянии при многих структурах армирования в окрестности внутреннего контура полотна диска образуется абсолютно жесткая подобласть. Следовательно, изъятие материала из этой подобласти или его перераспределение по полотну позволяют или уменьшить массу диска или увеличить его несущую способность. Поэтому целесообразно осуществлять рациональное и оптимальное проектирование КМ-дисков по II-му предельному состоянию.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

Литература

1. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. III. Инерционные нагрузки. Колебания и ударные нагрузки. Выносливость. Устойчивость. М.: МАШГИЗ, 1959. 1120 с.
2. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наукова думка, 1973. 228 с.

3. Биргер И.А., Демьянушко И.В. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
4. Композиционные материалы: Справочник / Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
5. Lenard J., Haddow J.B. Plastic collapse speeds for rotating cylinders // Int. J. Mech. Sci. 1972. Vol. 14. P. 285-292. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90084-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90084-7)
6. Ma G., Hao H., Miyamoto Y. Limit angular velocity of rotating disc with unified yield criterion // Int. J. Mech. Sci. 2001. Vol. 43. P. 1137-1153. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00065-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00065-5)
7. Tahania M., Nosier A., Zabarjad S.M. Deformation and stress analysis of circumferentially fiber-reinforced composite disks // Int. J. Solid. Struct. 2005. Vol. 42. P. 2741-2754. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.09.041>
8. Koo K.-N. Mechanical vibration and critical speeds of rotating composite laminate disks // Microsyst. Technol. 2008. Vol. 14. P. 799-807. <https://doi.org/10.1007/s00542-007-0555-2>
9. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders // Int. J. Mech. Sci. 2010. Vol. 52. P. 1579-1587. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006>
10. Zheng Y., Bahaloo H., Mousanezhad D., Vaziri A., Nayeb-Hashemi H. Displacement and stress fields in a functionally graded fiber reinforced rotating disk with nonuniform thickness and variable angular velocity // J. Eng. Mater. Technol. 2017. Vol. 139. 031010. <https://doi.org/10.1115/1.4036242>
11. Faghih S., Jahed H., Behravesht S.B. Variable material properties (VMP) approach: A review on twenty years of progress // J. Pressure Vessel Technol. 2018. Vol. 140. 050803. <https://doi.org/10.1115/1.4039068>
12. Farukoğlu Ö.C., Korkut İ. On the elastic limit stresses and failure of rotating variable thickness fiber reinforced composite disk // ZAMM. 2021. Vol. 101. e202000356. <https://doi.org/10.1002/zamm.202000356>
13. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
14. Composites: State of art / Eds. L.W. Weeton, E. Scala. New York: Metallurgical Society of AIME, 1974. 365 p.
15. Справочник по композитным материалам / Под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988. Кн. 1. 448 с.
16. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
17. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2011. 707 с.
18. Chakrabarty J. Applied plasticity. Springer, 2010. 774 p.
19. Nemirovsky Yu.V., Resnikov B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement // Arch. Inż. Łąd. 1975. Vol. 21, No. 1. P. 57-67.
20. Mróz Z., Shamiev F.G. Simplified yield condition for fiber-reinforced plates and shells // Arch. Inż. Łąd. 1979. Vol. 25, No. 3. P. 463-476.
21. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Constructing yield loci for rigid-plastic reinforced plates considering the 2D stress state in fibers // Mech. Compos. Mater. 2019. Vol. 54. P. 697-718. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-9777-5>
22. Романова Т.П., Янковский А.П. Кусочно-линейные поверхности текучести перекрестно-армированной среды из разносопротивляющихся жесткопластических материалов при плоском напряженном состоянии // ПММ. 2020. Т. 84, № 6. С. 733-756. <https://doi.org/10.31857/S0032823520050082>
23. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Structural model for rigid-plastic yielding behavior of angle-ply reinforced composites of materials with different properties in tension and compression considering 2D stress state in all components // Mech. Adv. Mater. Struct. 2021. Vol. 28. P. 2151-2162. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1719561>
24. Jones N., Ich N.T. The load carrying capacities of symmetrically loaded shallow shells // Int. J. Solids Struct. 1972. Vol. 8. P. 1339-1351. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(72\)90083-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(72)90083-2)
25. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
26. Немировский Ю.В., Янковский А.П. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // МКМК. 1997. Т. 3, № 2. С. 20-40.
27. Ванин Г.А. Микромеханика композитных материалов. Киев: Наукова думка, 1985. 304 с.
28. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
29. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Физматгиз, 1959. 620 с.
30. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
31. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1966. 632 с.
32. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1970. 279 с.
33. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 500 с.
34. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1959. 431 с.
35. Hu L.W. Modified Tresca's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and applications // J. Franklin Inst. 1958. Vol. 265. P. 187-204. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(58\)90551-9](https://doi.org/10.1016/0016-0032(58)90551-9)
36. Ильюшин А.А. Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность. М.: Физматлит, 2004. 480 с.

References

1. Ponomarev S.D., Biderman V.L., Likharev K.K., Makushin V.M., Malinin N.N., Feodos'yev V.I. *Raschet na prochnost' v mashinostroyenii. T. III. Inertionnyye nagruzki. Kolebaniya i udarnyye nagruzki. Vynoslivost'. Ustoychivost'* [Calculations for strength in mechanical engineering. Vol. III. Inertial loads. Vibrations and shock loads. Endurance. Sustainability]. Moscow, MASHGIZ, 1959. 1120 p.
2. Grigorenko Ya.M. *Izotropnyye i anizotropnyye sloistyye obolochki vrashcheniya peremennoy zhestkosti* [Isotropic and anisotropic layered shells of rotation of variable rigidity]. Kyiv, Naukova dumka, 1973. 228 p.
3. Birger I.A., Dem'yanushko I.V. *Raschet na prochnost' vrashchayushchikhsya diskov* [Calculation for the strength of rotating disks]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1978. 247 p.

4. Vasil'yev V.V., Tarnopol'skiy Yu.M. (ed.) *Kompozitsionnyye materialy: Spravochnik* [Composite materials: Handbook]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1990. 512 p.
5. Lenard J., Haddow J.B. Plastic collapse speeds for rotating cylinders. *Int. J. Mech. Sci.*, 1972, vol. 14, pp. 285-292. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90084-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90084-7)
6. Ma G., Hao H., Miyamoto Y. Limit angular velocity of rotating disc with unified yield criterion. *Int. J. Mech. Sci.*, 2001, vol. 43, pp. 1137-1153. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00065-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00065-5)
7. Tahania M., Nosier A., Zebarjad S.M. Deformation and stress analysis of circumferentially fiber-reinforced composite disks. *Int. J. Solid. Struct.*, 2005, vol. 42, pp. 2741-2754. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.09.041>
8. Koo K.-N. Mechanical vibration and critical speeds of rotating composite laminate disks. *Microsyst. Technol.*, 2008, vol. 14, pp. 799-807. <https://doi.org/10.1007/s00542-007-0555-2>
9. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders. *Int. J. Mech. Sci.*, 2010, vol. 52, pp. 1579-1587. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006>
10. Zheng Y., Bahaloo H., Mousanezhad D., Vaziri A., Nayeb-Hashemi H. Displacement and stress fields in a functionally graded fiber reinforced rotating disk with nonuniform thickness and variable angular velocity. *J. Eng. Mater. Technol.*, 2017, vol. 139, 031010. <https://doi.org/10.1115/1.4036242>
11. Faghil S., Jahed H., Behraves S.B. Variable material properties (VMP) approach: A review on twenty years of progress. *J. Pressure Vessel Technol.*, 2018, vol. 140, 050803. <https://doi.org/10.1115/1.4039068>
12. Farukoğlu Ö.C., Korkut İ. On the elastic limit stresses and failure of rotating variable thickness fiber reinforced composite disk. *ZAMM*, 2021, vol. 101, e202000356. <https://doi.org/10.1002/zamm.202000356>
13. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1968. 400 p.
14. Weeton L.W., Scala E. (ed.) *Composites: State of art*. New York, Metallurgical Society of AIME, 1974. 365 p.
15. Lubin G. (ed.) *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. 786 p.
16. Karpinos D.M. (ed.) *Kompozitsionnyye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Reference Book]. Kyiv, Naukova dumka, 1985. 592 p.
17. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical theory of plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2011. 707 p.
18. Chakrabarty J. *Applied plasticity*. Springer, 2010. 774 p.
19. Nemirovsky Yu.V., Resnikov B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement. *Arch. Inzh. Lqd.*, 1975, vol. 21, no. 1, pp. 57-67.
20. Mróz Z., Shamiev F.G. Simplified yield condition for fiber-reinforced plates and shells. *Arch. Inzh. Lqd.*, 1979, vol. 25, no. 3, pp. 463-476.
21. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Constructing yield loci for rigid-plastic reinforced plates considering the 2D stress state in fibers. *Mech. Compos. Mater.*, 2019, vol. 54, pp. 697-718. <https://doi.org/10.1007/s11029-019-9777-5>
22. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Piecewise-linear yield loci of angle-ply reinforced medium of different-resisting rigid-plastic materials at 2D stress state. *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, pp. 1235-1252. <https://doi.org/10.3103/S0025654420080221>
23. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Structural model for rigid-plastic yielding behavior of angle-ply reinforced composites of materials with different properties in tension and compression considering 2D stress state in all components. *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2021, vol. 28, pp. 2151-2162. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1719561>
24. Jones N., Ich N.T. The load carrying capacities of symmetrically loaded shallow shells. *Int. J. Solids Struct.*, 1972, vol. 8, pp. 1339-1351. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(72\)90083-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(72)90083-2)
25. Yerkhov M.I. *Teoriya ideal'no plasticheskikh tel i konstruksiy* [Theory of ideally plastic bodies and structures]. Moscow, Nauka, 1978. 352 p.
26. Nemirovskiy Yu.V., Yankovskiy A.P. O nekotorykh osobennostyakh uravneniy obolochek, armirovannykh voloknami postoyannogo poperechnogo secheniya [Some features of the equations of shells reinforced with fibers of constant cross-section]. *MKMK – Journal on Composite Mechanics and Design*, 1997, vol. 3, no. 2, pp. 20-40.
27. Vanin G.A. *Mikromekhanika kompozitnykh materialov* [Micromechanics of composite materials]. Kyiv, Naukova dumka, 1985. 304 p.
28. Banichuk N.V., Kobelev V.V., Rikards R.B. *Optimizatsiya elementov konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov* [Optimization of structural elements made of composite materials]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1988. 224 p.
29. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychisleniy. T. 2* [Calculation methods. Vol. 2]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. 620 p.
30. Dekker K., Verwer J.G. *Stability of Runge–Kutta methods for stiff nonlinear differential equation*. Amsterdam-New York-Oxford, North-Holland, 1984. 307 p.
31. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychisleniy. T. 1* [Calculation methods. Vol. 1]. Moscow, Fizmatgiz, 1966. 632 p.
32. Petrovskiy I.G. *Leksii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Lectures on the theory of ordinary differential equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1970. 279 p.
33. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivleniye zhestkikh polimernykh materialov* [Resistance of rigid polymeric materials]. Riga, Zinatne, 1972. 500 p.
34. Kurosh A.G. *Kurs vysshey algebrы* [Higher algebra course]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. 431 p.
35. Hu L.W. Modified Tresks's yield condition and associated flow rules for anisotropic materials and applications. *J. Franklin Inst.*, 1958, vol. 265, pp. 187-204. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(58\)90551-9](https://doi.org/10.1016/0016-0032(58)90551-9)
36. П'юшин А.А. *Trudy (1946–1966). T. 2. Plastichnost'* [Proceedings (1946–1966). Vol. 2. Plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 480 p.

Поступила в редакцию 28.12.2022; после доработки 16.03.2023; принята к опубликованию 20.03.2023

Сведения об авторе

Янковский Андрей Петрович, дфмн, внс, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, 630090, Новосибирск, ул. Институтская, д. 4/1; e-mail: lab4nemir@rambler.ru