

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.2.22](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.2.22)

УДК 532.5.032

ТЕЧЕНИЕ СУСПЕНЗИИ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В КАНАЛЕ С ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

О.И. Скульский

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

На основе уравнений баланса импульса и массы с привлечением закона Дарси и уравнения для скорости оседания тяжелых частиц поставлена краевая задача нестационарного двумерного течения суспензии. В постановке учитывается влияние седиментации и утечки дисперсионной среды через пористые стенки. Для решения задачи предложена конечно-элементная модель течения суспензии и эволюции распределения концентрации твердых частиц в канале с пористыми стенками. Система дифференциальных уравнений краевой задачи записывалась в форме Галеркина с использованием схемы Кранка–Николсон, дискретизация расчетной области осуществлялась треугольными элементами. Полученная система алгебраических уравнений с ленточной структурой решалась методом Гаусса. Для согласования скоростей основного потока суспензии и скорости фильтрации жидкой фракции через стенки на каждом шаге по времени вводилась итерационная процедура. В качестве примера проведен расчет процесса транспортировки суспензии в плоском канале с оттоком дисперсионной среды через пористые стенки и нестационарным неоднородным распределением концентрации твердых частиц. Вычисления с осуществлялись с помощью оригинального пакета FEM FLOW, результаты выводились в графическом виде. Показано, что с течением времени, за счет утечек дисперсионной среды через пористые стенки, твердые частицы занимают все больший объем, их концентрация в канале повышается, эффективная вязкость растет, продвижение частиц замедляется. Расход суспензии при заданном на входе постоянном давлении падает и спустя некоторое время становится равным общему расходу утечек жидкой фазы через пористые стенки. Продвижение частиц прекращается, и этому моменту соответствует предельная длина заполнения канала частицами.

Ключевые слова: суспензия твердых частиц, численная модель, пористые стенки, влияние утечек, седиментация, длина заполнения

FLOW OF SUSPENSION OF SOLID PARTICLES IN A CHANNEL WITH POROUS WALLS

O.I. Skul'skiy

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

A boundary value problem for a nonstationary two-dimensional suspension flow is formulated based on the basis of the momentum and mass balance equations using the Darcy law and the equation for the settling rate of heavy particles. The proposed formulation takes into account the effect of sedimentation and leakage of the dispersion medium through porous walls. The solution of the problem is developed in the framework of the proposed finite element model describing the suspension flow and the evolution of the solid particle concentration distribution in a channel with porous walls. The system of differential equations of the boundary value problem is written in the Galerkin form using the Crank–Nicolson scheme, and discretization of the computational domain is carried out using triangular elements. The resulting system of algebraic equations written in band form is solved by the Gauss method. An iterative procedure is introduced to correlate the velocities of the main flow of the suspension and the seepage rate of the liquid fraction through the walls at each time step. As an example, the calculation of the process of transporting a suspension in a flat channel with an efflux of the dispersion medium through porous walls and a non-stationary inhomogeneous distribution of the solid particle concentration is presented. The calculations were carried out using the original FEM FLOW package; the results obtained were then presented in a graphical form. It is shown that in the course of time the leakage of the dispersion medium through the porous walls causes solid particles to occupy an increasing volume, the concentration of particles in the channel grows higher, the effective viscosity increases, the movement of particles slows down. The flow rate of the suspension at a given constant pressure at the inlet decreases, and after some time becomes equal to the total rate of liquid phase leakage through the porous walls. The movement of particles stops, and the time it happens corresponds to the maximum length of the channel filled with particles.

Key words: suspension of solid particles, numerical model, porous walls, leakage effect, sedimentation, fill length

1. Введение

Течение суспензий твердых частиц в каналах с пористыми стенками встречается в природе, в промышленности, в коммунальном хозяйстве и зависит от многих факторов. Его моделирование объединяет в себе описание течения суспензии с неньютоновской дисперсионной средой, фильтрационного оттока жидкости через пористые стенки канала, седиментацию — осаждение дисперсионной фазы под действием гравитации. Эти процессы, зачастую, взаимосвязаны, поэтому при создании численной модели, описывающей их, возникает необходимость в поиске компромисса между вычислительной сложностью алгоритмов и учитываемой степенью детализации. В работе [1, 2] представлена единая трактовка фундаментальных принципов двухфазного потока и показано, как применять эти принципы к различным гомогенным смесям, а также к разделенным потокам жидкость–жидкость, газ–твердое тело, жидкость–твердое тело и газ–жидкость.

Реологии суспензий и математическому моделированию их течений посвящено большое количество публикаций [3–13]. Отличительной особенностью концентрированных суспензий является увеличение эффективной вязкости с ростом концентрации твердых частиц и непрерывное или скачкообразное увеличение напряжений с ростом скорости сдвига.

В последнее время появился ряд работ, содержащих результаты экспериментальных исследований и теоретического моделирования реологических свойств высококонцентрированных суспензий, демонстрирующих скачкообразный отклик напряжений на плавное увеличение скорости сдвига [14–22]. При задании интенсивности напряжений кривая течения однозначна, но немонотонна и имеет S -образный вид. Такая реология возникает из-за фрикционного взаимодействия частиц. Дополнительные эффекты вносят неньютоновские свойства чистой дисперсионной среды. В статьях [23, 24] предложена и опробована реологическая модель, описывающая перечисленные выше эффекты. В работе [25] рассматривается задача о двухфазном течении диспергированной взвешенной жидкости в канале с проницаемыми стенками. Получено аналитическое решение для продольного перепада давления, функций тока и распределения скоростей методом возмущений, основанным на малом отношении ширины канала к длине.

Целью данного исследования является построение численной модели течения суспензии с нестационарным неоднородным распределением концентрации твердых частиц в канале с учетом седиментации и оттока дисперсионной среды через пористые стенки.

2. Постановка задачи

В общем случае течения концентрированных суспензий твердых частиц в неньютоновской дисперсионной среде описываются системой дифференциальных уравнений, в которой отражаются:

– законы сохранения импульса и массы

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla P + \nabla \cdot \left[\eta_{ef} (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \right] + \rho \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0; \quad (2)$$

– конвективно-диффузионный перенос

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla \phi) + \frac{\phi^* - \phi}{\tau}; \quad (3)$$

– скорость оттока жидкости через пористые стенки канала, определяемая по закону Дарси,

$$\mathbf{W} = -k_g \nabla P; \quad (4)$$

– скорость седиментации частиц, возрастающая с ростом их концентрации,

$$\mathbf{U} = 2r^2 (\rho_1 - \rho_2) \frac{\phi}{\phi^*} \frac{\mathbf{g}}{9\eta_{ef}}. \quad (5)$$

В уравнениях (1)–(5) приняты обозначения: t — время; P — давление; \mathbf{V} — вектор скорости суспензии; \mathbf{W} — вектор скорости фильтрации дисперсионной среды через пористые стенки; \mathbf{U} — вектор скорости седиментации дисперсной фазы; ∇ — оператор дифференцирования; η_{ef} — эффективная вязкость; ρ_1, ρ_2 — плотности фаз; λ — коэффициент диффузии; ϕ — объемная концентрация частиц; τ — время релаксации [26], которое требуется для уменьшения в e (~ 2.72) раз разности между фактическим (ϕ) и предельным (ϕ^*) значениями объемных долей частиц.

Простейшая реологическая модель суспензии, учитывающая возрастание вязкости при увеличении среднего напряжения, рассмотрена в работе [24], где получены аналитические выражения для распределения давления и профиля продольной скорости при напорном течении в плоском, круглом и кольцевом каналах. Для учета неньютоновских свойств дисперсионной среды в данной работе автором используется модификация этой реологической модели:

$$\eta_{ef} = \frac{\mu_0}{1 + a(S/S_0)^{b-1}} \exp \left(\varepsilon \frac{\phi}{\phi^* - \phi} \right), \quad (6)$$

где $S = \sqrt{(3/2)\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$ — интенсивность напряжения, ϕ, ϕ^* — локальная и предельная концентрации частиц, S_0, μ_0 — характерные значения интенсивности напряжения и вязкости, a, b — параметры модели, ε — подгоночный параметр.

Система (1)–(5) с реологическим уравнением (6) замыкается соответствующими начальными и граничными условиями. Задаются условия для скорости $\mathbf{V}_\Gamma = \mathbf{W}_\Gamma$ на неподвижных пористых стенках, а также условия Коши для напряжений на свободных границах: $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}$. Для концентрации

частиц ставятся условия первого ($\phi = \phi_\Gamma$) или третьего рода ($\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = h(\phi - \phi^*)$), где \mathbf{n} — нормаль к границе канала, h — коэффициент передачи.

3. Метод решения

Далее система дифференциальных уравнений (1)–(3) записывается в форме Галеркина:

$$\int_V \rho \Psi \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) - (\nabla \cdot \Psi) P + \nabla \Psi : \left[\eta_{ef} (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \right] dV = \int_S \Psi \cdot \mathbf{F} dS, \\ \int_V \Omega (\nabla \cdot \mathbf{V}) dV = 0, \\ \int_V \left[\Theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi \right) + \nabla \Theta \cdot (\lambda \nabla \phi) \right] dV + \int_V \Theta \frac{(\phi - \phi^*)}{\tau} dV = 0, \quad (7)$$

где $\Psi = \{\psi_x, \psi_y\}$, Ω , Θ — взвешивающие функции.

Система уравнений (7) для плоского канала принимает вид:

$$\int_0^L \int_0^h \left\{ \rho \psi_x \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} p + \eta_{ef} \left[2 \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] \right\} dx dy = F_x \int_0^h \psi_x dy, \\ \int_V \left[\Theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi + \mathbf{U} \cdot \nabla \phi \right) + \nabla \Theta \cdot (\lambda \nabla \phi) \right] dV + \int_V \Theta \frac{(\phi - \phi^*)}{\tau} dV = 0, \\ \int_0^L \int_0^h \Omega \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dx dy = 0, \\ \int_0^L \int_0^h \left[\Theta \frac{\partial \phi}{\partial t} + \Theta v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Theta (v_y + U_y) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx dy + \int_0^L \int_0^h \Theta \frac{(\phi - \phi^*)}{\tau} dx dy = 0. \quad (8)$$

Система (8) решалась с помощью конечно-элементной программы FEM FLOW [27], предназначенной для расчета течения вязкоупругой жидкости в каналах со свободной поверхностью, в которой аппроксимация по времени производится согласно разностной схеме Кранка–Николсон. Дискретизация расчетной области осуществлялась с помощью треугольных конечных элементов с линейной аппроксимацией компонент вектора скорости и концентрации, а давление и эффективная вязкость считались кусочно-постоянными в пределах четырехугольников, образуемых двумя треугольными элементами. При $t = 0$ в качестве начального условия принималось поле скорости и распределение давления, полученные в результате решения задачи стационарного течения чистой дисперсионной жидкости в канале с непроницаемыми стенками. На каждом последующем шаге по времени выполнялась итерационная процедура:

- по найденному на предыдущей итерации давлению на границах канала по формулам (4) вычислялись скорости оттока жидкости через пористые стенки — \mathbf{W} , которые использовались в дальнейшем как граничные условия для скорости суспензии \mathbf{V} ;
- по формулам (5) рассчитывалась скорость седиментации \mathbf{U} ;
- согласно формулам (6) находилась эффективная вязкость η_{ef} ;
- корректировались конвективные члены в системе (8);
- определялись расход поступающей на входе суспензии и суммарный расход утечек через пористые стенки;
- система алгебраических уравнений — дискретный аналог (8), решалась методом Гаусса для ленточных матриц.

Контроль сходимости итерационного процесса на текущем шаге по времени осуществлялся по эффективной вязкости. И если заданный критерий не был достигнут, совершался переход к следующему шагу по времени. Решение заканчивалось при выполнении равенства расходов основного потока и расхода утечек через пористые стенки.

4. Пример расчета течения суспензии в канале с пористыми стенками

Рассмотрим течение в плоском прямоугольном канале высотой $h = 1$ м и длиной $l = 100$ м. Будем считать, что ширина канала достаточна, для того чтобы не учитывать влияние боковых стенок.

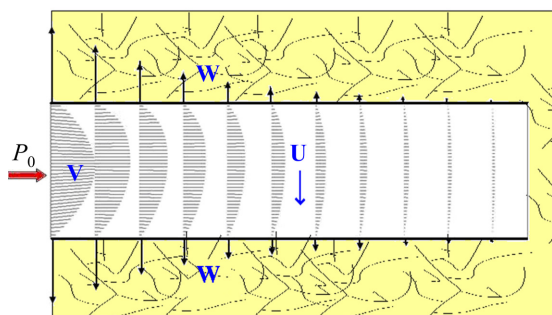


Рис. 1. Расчетная схема

Верхняя и нижняя границы канала окружены пористым слоем толщиной 0.1 м с коэффициентом фильтрации $K_f = 10^{-9}$ м⁴/нс. Во входном сечении канала задана поверхностная нагрузка, в числовом выражении равная давлению на входе: $P_0 = 10^6$ Па (Рис. 1).

В начальный момент времени $t = 0$ канал заполнен чистой неньютоновской жидкостью ($\phi/\phi^* = 0$). При $t > 0$ под заданным давлением на входе P_0 в канал подается суспензия с относительной концентрацией твердых частиц $\phi_0/\phi^* = 0.5$. Параметры реологического уравнения

дисперсионной среды приняты равными $S_0 = 1$ н/м², $\mu_0 = 10^3$ нс/м², $a = 2$, $b = 3$, $\varepsilon = 0.2$.

На рисунке 2 представлены рассчитанные распределения относительной концентрации частиц ϕ/ϕ^* в канале в разные моменты времени.

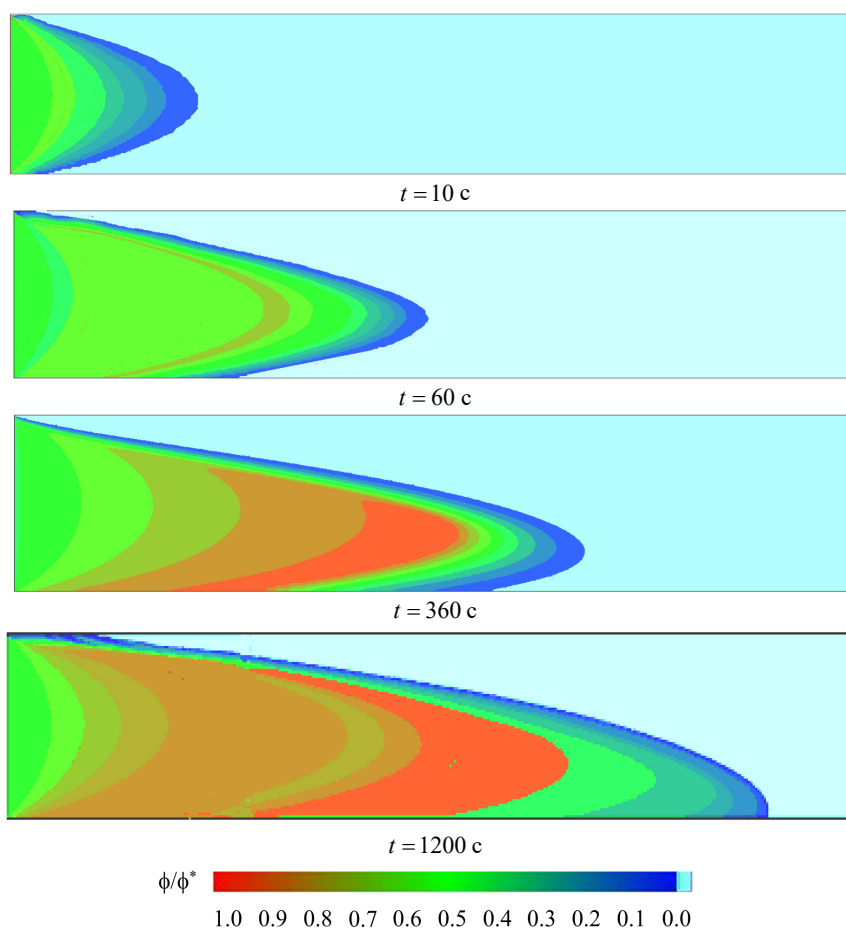


Рис. 2. Изменение концентрации частиц в канале

По мере продвижения суспензии по каналу твердые частицы занимают все больший объем, их концентрация повышается, эффективная вязкость растет, расход суспензии при заданном на входе постоянном давлении падает. В какой-то момент расход суспензии становится таким же, как общий расход утечек жидкой фазы через пористые стенки, и тем самым определяется предельная длина заполнения канала частицами.

На рисунке 3 представлены рассчитанные распределения давления, эффективной вязкости, относительной концентрации частиц и скорости суспензии после достижения предельной длины заполнения канала. В частности, распределение давления практически постоянно по высоте и нелинейно убывает по длине канала. Пропорционально давлению уменьшаются и утечки жидкой фазы через

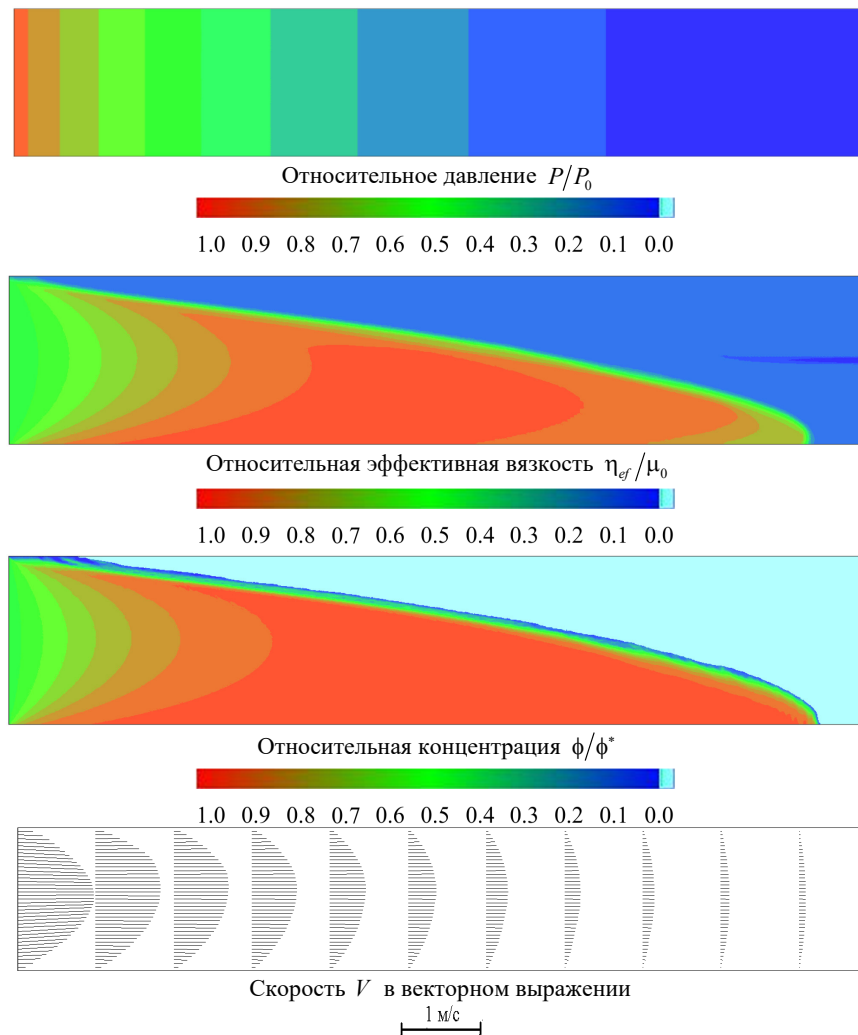


Рис. 3. Распределение основных переменных после достижения предельной длины заполнения канала

пористые стенки. Отток дисперсной среды приводит в результате к повышению концентрации частиц. Поскольку эффективная вязкость зависит от параметров основного потока суспензии и концентрации частиц, расход основного потока суспензии убывает, а профили скорости становятся не симметричными.

5. Заключение

Предложена модель течения суспензии твердых частиц в канале с пористыми стенками, объединяющая в себе описание таких процессов, как течение смеси неньютоновской жидкости и твердых частиц в трубах и каналах, перенос и осаждение твердых частиц, фильтрацию жидкости в окружающую пористую среду. Отличительной особенностью рассматриваемой суспензии является увеличение эффективной вязкости с ростом концентрации твердых частиц и непрерывное или скачкообразное увеличение напряжений с ростом скорости сдвига.

В качестве примера проведен расчет методом конечных элементов процесса транспортировки твердых частиц в плоском канале с оттоком дисперсионной среды через пористые стенки. Показано, что отток дисперсионной фазы суспензии через пористые стенки приводит к повышению концентрации частиц и эффективной вязкости, падению расхода суспензии при заданном на входе постоянном давлении, ограничению длины заполнения канала частицами.

Литература

1. *Kleinstreuer C.* Two-phase flow: Theory and applications. Taylor and Francis, 2003. 512 p. <https://doi.org/10.1201/9780203734865>
2. *Леонтьев Н.Е.* О структуре фронта пористости при движении суспензии в пористой среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2006. № 5. С. 73-76.
3. *Фортъе А.* Механика суспензий. М.: Мир, 1971. 264 с.

4. Ходаков Г.С. Реология суспензий. Теория фазового течения и ее экспериментальное обоснование // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева). 2003. Т. XLVII, № 2. С. 33-43.
5. Guillou S., Makhloufi R. Effect of a shear-thickening rheological behaviour on the friction coefficient in a plane channel flow: A study by direct numerical simulation // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2007. Vol. 144. P. 73-86. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2007.03.008>
6. Seth J.R., Mohan L., Locatelli-Champagne C., Cloitre M., Bonnecaze R.T. A micromechanical model to predict the flow of soft particle glasses // Nature Mater. 2011. Vol. 10. P. 838-843. <https://doi.org/10.1038/nmat3119>
7. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernández F.J., Sevilla A. An apparent viscosity function for shear thickening fluids // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2011. Vol. 166. P. 321-325. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2011.01.001>
8. Boyer F., Guazzell E., Pouliquen O. Unifying suspension and granular rheology // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 107. 188301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.188301>
9. Nakanishi H., Nagahiro S., Mitarai N. Fluid dynamics of dilatant fluids // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. 011401. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.011401>
10. Урьев Н.Б. Физико-химические основы технологии дисперсных систем и материалов. М.: Химия, 1988. 255 с.
11. Tanner R.I. Engineering rheology. Oxford University Press, 2000. 586 p.
12. Brown E., Jaeger H.M. Shear thickening in concentrated suspensions: phenomenology, mechanisms and relations to jamming // Rep. Prog. Phys. 2014. Vol. 77. 046602. <http://iopscience.iop.org/0034-4885/77/4/046602>
13. Denn M.M., Morris J.F. Rheology of non-Brownian suspensions // Annu. Rev. Chem. Biomol. Eng. 2014. Vol. 5. P. 203-228. <https://doi.org/10.1146/annurev-chembioeng-060713-040221>
14. Mari R., Seto R., Morris J.F., Denn M.M. Nonmonotonic flow curves of shear thickening suspensions // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 91. 052302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.052302>
15. Vázquez-Quesada A., Ellero M. Rheology and microstructure of non-colloidal suspensions under shear studied with Smoothed Particle Hydrodynamics // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2016. Vol. 233. P. 37-47. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2015.12.009>
16. Nagahiro S., Nakanishi H. Negative pressure in shear thickening bands of a dilatant fluid // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 94. 062614. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.062614>
17. Singh A., Mari R., Denn M.M., Morris J.F. A constitutive model for simple shear of dense frictional suspensions // J. Rheol. 2018. Vol. 62. P. 457-468. <https://doi.org/10.1122/1.4999237>
18. Liu A.J., Nagel S.R. The jamming transition and the marginally jammed solid // Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 2010. Vol.1. P. 347-369. <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-070909-104045>
19. Vázquez-Quesada A., Wagner N.J., Ellero M. Planar channel flow of a discontinuous shear-thickening model fluid: Theory and simulation // Phys. Fluid. 2017. Vol. 29. 103104. <https://doi.org/10.1063/1.4997053>
20. Pan Zh., de Cagny H., Weber B., Bonn D. S-shaped flow curves of shear thickening suspensions: Direct observation of frictional rheology // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92. 032202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.032202>
21. Singh A., Pednekar S., Chun J., Denn M.M., Morris J.F. From yielding to shear jamming in a cohesive frictional suspension // Phys. Rev. Lett. 2019. Vol. 122. 098004. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.098004>
22. Egres R.G., Wagner N.J. The rheology and microstructure of acicular precipitated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition // J. Rheol. 2005. Vol. 49. P. 719-746. <https://doi.org/10.1122/1.1895800>
23. Скульский О.И. Реометрические течения концентрированных суспензий твердых частиц // Вычисл. мех. сплош. сред. 2020. Т. 13, № 3. С. 269-278. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.21>
24. Скульский О.И. Особенности течения концентрированных суспензий твердых частиц // Вычисл. мех. сплош. сред. 2021. Т. 14, № 2. С. 210-219. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.18>
25. Yao J., Tao K., Huang Z. Flow of particulate-fluid suspension in a channel with porous walls // Transp. Porous Med. 2013. Vol. 98. P. 147-172. <https://doi.org/10.1007/s11242-013-0137-y>
26. Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Melnik O. Lava dome morphology inferred from numerical modeling // Geophys. J. Int. 2020. Vol. 223. P. 1597-1609. <https://doi.org/10.1093/gji/ggaa3395>
27. Скульский О.И., Фонарев А.В., Кузнецова Ю.Л. «FEM FLOW» – конечно-элементная программа для расчета течения вязкоупругой жидкости в каналах со свободной поверхностью с учетом неизотермичности: свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2007611760 от 25.04.2007.

References

1. Kleinstreuer C. *Two-phase flow: Theory and applications*. Taylor and Francis, 2003. 512 p. <https://doi.org/10.1201/9780203734865>
2. Leontiev N.E. Structure of a porosity front for suspension flow in a porous medium. *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. I. Matem., mekh.* – Moscow University Mechanics Bulletin, 2006, no. 5, pp. 73-76.
3. Fortier A. *Mécanique des Suspensions* [Suspension mechanics]. Masson, 1967. 176 p.
4. Khodakov G.S. Reologiya suspenziy. Teoriya fazovogo techeniya i ee eksperimental'noye obosnovaniye [Suspension rheology. The theory of phase flow and its experimental substantiation]. *Ros. khim. zh. (Zh. Ros. khim. ob-va im. D.I. Mendeleeva)*, 2003, vol. XLVII, no. 2, pp. 33-43.
5. Guillou S., Makhloufi R. Effect of a shear-thickening rheological behaviour on the friction coefficient in a plane channel flow: A study by direct numerical simulation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2007, vol. 144, pp. 73-86. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2007.03.008>
6. Seth J.R., Mohan L., Locatelli-Champagne C., Cloitre M., Bonnecaze R.T. A micromechanical model to predict the flow of soft particle glasses. *Nature Mater.*, 2011, vol. 10, pp. 838-843. <https://doi.org/10.1038/nmat3119>
7. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernández F.J., Sevilla A. An apparent viscosity function for shear thickening fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2011, vol. 166, pp. 321-325. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2011.01.001>

8. Boyer F., Guazzell E., Pouliquen O. Unifying suspension and granular rheology. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 107, 188301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.188301>
9. Nakanishi H., Nagahiro S., Mitarai N. Fluid dynamics of dilatant fluids. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, 011401. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.011401>
10. Ur'yev N.B. *Fiziko-khimicheskiye osnovy tekhnologii dispersnykh sistem i materialov* [Physicochemical foundations of the technology of dispersed systems and materials]. Moscow, Khimiya, 1988. 255 p. Tanner R.I. *Engineering rheology*. Oxford University Press, 2000. 586 p
11. Brown E., Jaeger H.M. Shear thickening in concentrated suspensions: phenomenology, mechanisms and relations to jamming. *Rep. Prog. Phys.*, 2014, vol. 77, 046602. <http://iopscience.iop.org/0034-4885/77/4/046602>
12. Denn M.M., Morris J.F. Rheology of non-Brownian suspensions. *Annu. Rev. Chem. Biomol. Eng.*, 2014, vol. 5, pp. 203-228. <https://doi.org/10.1146/annurev-chembioeng-060713-040221>
13. Mari R., Seto R., Morris J.F., Denn M.M. Nonmonotonic flow curves of shear thickening suspensions. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, 052302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.052302>
15. Vázquez-Quesada A., Ellero M. Rheology and microstructure of non-colloidal suspensions under shear studied with Smoothed Particle Hydrodynamics. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2016, vol. 233, pp. 37-47. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2015.12.009>
16. Nagahiro S., Nakanishi H. Negative pressure in shear thickening bands of a dilatant fluid. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, 062614. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.062614>
17. Singh A., Mari R., Denn M.M., Morris J.F. A constitutive model for simple shear of dense frictional suspensions. *J. Rheol.*, 2018, vol. 62, pp. 457-468. <https://doi.org/10.1122/1.4999237>
18. Liu A.J., Nagel S.R. The jamming transition and the marginally jammed solid. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 2010, vol. 1, pp. 347-369. <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-070909-104045>
19. Vázquez-Quesada A., Wagner N.J., Ellero M. Planar channel flow of a discontinuous shear-thickening model fluid: Theory and simulation. *Phys. Fluid.*, 2017, vol. 29, 103104. <https://doi.org/10.1063/1.4997053>
20. Pan Zh., de Cagny H., Weber B., Bonn D. S-shaped flow curves of shear thickening suspensions: Direct observation of frictional rheology. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, 032202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.032202>
21. Singh A., Pednekar S., Chun J., Denn M.M., Morris J.F. From yielding to shear jamming in a cohesive frictional suspension. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, vol. 122, 098004. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.098004>
22. Egres R.G., Wagner N.J. The rheology and microstructure of acicular precipitated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition. *J. Rheol.*, 2005, vol. 49, pp. 719-746. <https://doi.org/10.1122/1.1895800>
23. Skul'skiy O.I. Rheometric flows of concentrated suspensions of solid particles. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 269-278. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.21>
24. Skul'skiy O.I. Features of the flow of concentrated suspensions of solid particles. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2021, vol. 14, no. 2, pp. 210-219. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.18>
25. Yao J., Tao K., Huang Z. Flow of particulate-fluid suspension in a channel with porous walls. *Transp. Porous Med.*, 2013, vol. 98, pp. 147-172. <https://doi.org/10.1007/s11242-013-0137-y>
26. Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Melnik O. Lava dome morphology inferred from numerical modeling. *Geophys. J. Int.*, 2020, vol. 223, pp. 1597-1609. <https://doi.org/10.1093/gji/ggaa395>
27. Skul'skiy O.I., Fonarev A.V., Kuznetsova Yu.L. «FEM FLOW» – finite element program for calculating the flow of a viscoelastic fluid in channels with a free surface, taking into account non-isothermal. RF Copyright Certificate No. 2007611760, 25 April 2007.

Поступила в редакцию 11.11.2022; после доработки 20.03.2023; принята к опубликованию 23.03.2023