

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.2.20](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.2.20)

УДК 539.3

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УРОВНЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГИХ ТЕЛАХ

М.Е. Головатенко, В.В. Дударев

*Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета,  
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

Представлен краткий обзор по проблеме исследования предварительных напряжений. На основе общей постановки задачи в рамках линеаризованной модели преднапряженного объекта сформулирована задача свободных планарных колебаний прямоугольной упругой области при наличии неоднородного поля напряжений. Для его общего случая получено решение задачи методом конечных элементов. В качестве программной среды, в которой этот метод реализован, выбрана FlexPDE, предназначенная для решения дифференциальных уравнений. Отмечены ее основные преимущества, позволяющие проводить численное моделирование при различных видах предварительных нагрузок. На конкретных примерах рассмотрены четыре вида преднапряженного состояния. Для каждого из них представлены результаты расчетов первых четырех собственных частот колебаний. С использованием возможностей пакета FlexPDE при одном из видов предварительного нагружения показано различие полей смещения, отвечающих свободным колебаниям объекта в присутствии/отсутствии преднапряжений. С учетом предположения о малости влияния остаточных напряжений на поля перемещения объекта сформулировано обобщенное соотношение, из которого выведена приближенная формула для вычисления уровня предварительных напряжений по данным о собственных частотах колебаний объекта при наличии и отсутствии предварительных напряжений и полю смещений, соответствующему собственной форме колебаний тела, свободного от преднагрузок. Также исходя из обобщенного соотношения построена приближенная формула для определения частоты свободных колебаний преднапряженного тела по данным о собственных частоте и форме колебаний тела, в котором отсутствуют остаточные напряжения. При нескольких видах предварительных нагрузок для первой собственной частоты и формы колебаний проведена серия вычислительных экспериментов, демонстрирующих точность полученных формул для рассматриваемой прямоугольной области. Дана оценка применимости результатов на практике.

*Ключевые слова:* предварительные напряжения, собственные колебания, собственная частота, идентификация, пластина, программная среда FlexPDE

## ON IDENTIFICATION OF PRESTRESS LEVEL IN ELASTIC BODIES

M.E. Golovatenko and V.V. Dudarev

*Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I.I. Vorovich of Southern Federal University,  
Rostov-on-Don, Russian Federation*

The paper presents a brief overview of the problem of prestress research. Based on the general statement of the problem within the framework of linearized model of a prestressed object, the problem of free planar vibrations of a rectangular elastic region in the presence of an inhomogeneous prestressing field is formulated. To consider the general case of preloads, the numerical solution of the problem is obtained using the finite element method. The FlexPDE package is chosen as the software environment in which this method is implemented. Its main advantages are noted, which makes it possible to carry out the numerical simulation of various types of preloads. Four types of prestressed state are considered as concrete examples. The results of calculations of the first four natural oscillation frequencies are presented. Using the capabilities of the package, the example of one of the types of preloads shows the difference in displacement fields corresponding to the free vibrations of an object in the presence and absence of prestresses. On the basis of the general formulation of the problem, taking into account the assumption of the smallness of the influence of residual stresses on the displacement fields of the object, a generalized relation is formulated. Using the relation, an approximate formula is obtained for calculating the level of prestresses from the data on the natural frequencies of the object in the presence and absence of prestresses and a displacement field corresponding to the natural form of oscillations of a body free from preloads. Also, on the basis of this relation, an approximate formula is derived to determine the frequency of free vibrations of a prestressed body according to the data on the natural frequency and vibration mode of a body in which there are no residual stresses. For the first natural frequency and vibration mode, a series of computational experiments demonstrating the accuracy of the obtained formulas for the rectangular area under consideration was carried out at several types of preloads. An assessment of the possibility of using the results in practice is given.

*Key words:* prestresses, natural oscillations, natural frequency, identification, plate, software environment FlexPDE

### 1. Введение

Предварительные (или остаточные) напряжения — особый вид напряжений, которые могут появляться в объекте после проведения таких технологических операций, как литье, сварка, термическая обработка, прокатка, наклеп и других или в результате действия эксплуатационных/скрытых нагрузок. Такие напряжения, как правило, локализуются в местах возникновения разного рода дефектов (трещин, включений) или сопряжений (например, жесткой сцепки). Также возможны ситуации, при которых преднапряжения распределяются по всему объему объекта. Обычно подобные напряжения характеризуются малым уровнем, поэтому в большинстве случаев их не учитывают. Однако необходимо отметить, что в процессе эксплуатации может образоваться ситуация, при которой рабочая нагрузка достигнет в объекте значения, которое для него близко к критическому. Тогда пренебрежение предварительными напряжениями может привести к преждевременному разрушению или повреждению [1–3]. Преднапряжения возникают в разных материалах: металле, железобетоне, керамике, стекле и другом. Они имеют широчайшие области использования, поэтому

изучение подобных напряжений актуально и имеет важное прикладное значение. В настоящее время одно из востребованных научных и практических направлений заключается в разработке и совершенствовании способов неразрушающей диагностики преднапряжений, среди которых следует отметить акустический метод, обладающий по сравнению с другими рядом преимуществ: простотой реализации, скоростью проведения исследования, стоимостью и другим.

Проявление остаточных (предварительных) напряжений может иметь как положительный, так и отрицательный характер. Например, остаточные напряжения концентрируются в области сварных швов и, если не проводить регламентные работы, направленные на снижение их уровня, впоследствии могут образоваться трещины или сколы. Эффективным приемом снижения предварительных напряжений служит разного рода обработка: термическая (закалка, отжиг), механическая (растяжение, сжатие, а также прокатка при изготовлении листового материала [3]). Преднапряжение железобетонных изделий производится путем предварительного растяжения арматуры и последующей заливки бетоном. Такие изделия, по сравнению с обычными, способны выдерживать большую растягивающую нагрузку.

Распространенными конструктивными элементами, использующимися в разных областях, являются пластины. Изучение колебаний пластин началось еще в первом десятилетии XIX века [4]. В литературе выделяется два основных вида колебаний: изгибные (с изменением формы — out-plane) и планарные (в плоскости самой пластины — in-plane). Обзорная статья [5], включающая более 200 источников, предоставляет возможность ознакомиться с распространенными аналитическими методами исследования свободных колебаний прямоугольных пластин. К ним относятся методы Ритца, Галеркина, Канторовича–Крылова, суперпозиции и другие. Следует отметить, что аналитические решения удается построить только для специальных видов граничных условий [6–9]. Однако, если такие решения осуществимы, то они позволяют оценить точность решений, полученных численными методами [6]. В настоящее время численно-аналитические методы развиваются также для пластин с одним или несколькими отверстиями и пластин непрямоугольной формы [10–12]. Отдельное внимание в научной литературе уделяется задачам для пластин, изготовленных из современных функционально-градиентных и анизотропных материалов [13–15].

Колебаниям преднапряженных объектов посвящено множество работ. В статье [16] рассмотрена задача колебаний тонкой цилиндрической оболочки с учетом внутреннего давления. Отмечены особенности изменения собственных частот колебаний в зависимости от отношения диаметра к длине оболочки и величины внутреннего давления, представлены экспериментальные данные. В работе [17] также исследуются колебания тонкостенной цилиндрической оболочки, описаны экспериментальные данные для цилиндров из стали и алюминия при наличии внутреннего давления. В статье [18] анализируется влияние предварительных напряжений и свойств функционально-градиентного материала на значения собственных частот. Объектом служит тонкая пластина, состоящая из плотной системы стальных ребер, пересекающихся под прямым углом. Области, расположенные между ребрами, заполнены однородным материалом (бетоном). Цель работы заключается в оценке применимости метода осреднения в случае динамического поведения пластины со скелетной микроструктурой, подверженной действию нормальных сил. Авторы [18] заключают, что предложенная модель позволила получить приемлемые значения собственных частот путем контроля выбора геометрии и свойств материала пластины, а также значений сил, действующих в средней плоскости пластины. В [19] осуществляется моделирование преднапряженного поля в тонкой пластине с покрытием из неоднородного функционально-градиентного материала. Рассмотрена задача изгибных колебаний пластины с учетом начального предварительно напряженного состояния. Построено численное решение прямой задачи с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Сформулирована частная проблема определения в покрытии уровня преднапряжений исходя из данных о частотных характеристиках. Оценена связь уровня предварительно напряженного состояния в пластине с покрытием с некоторыми из акустических характеристик. В работе [20] на основе общей постановки задачи о предварительно напряженном неоднородном упругом теле решаются задачи колебаний преднапряженных пластин из функционально-градиентных материалов в рамках моделей изгиба Кирхгофа и Тимошенко. При помощи МКЭ проведен анализ влияния предварительно напряженного состояния на решение прямой задачи для сплошной пластины и пластины с отверстием. Представлены два итерационных подхода к решению обратных задач, которые применяются для поиска начального приближения искомых функций, а также конечномерное приближение функции напряжения Эйри. Последняя используется для уточнения информации, которую дает первый итерационный подход. Приводятся результаты численных экспериментов по выявлению неоднородного предварительно напряженного состояния в тонкой прямоугольной пластине.

В настоящей работе обсуждается задача свободных колебаний предварительно напряженной упругой области в рамках одной из линеаризованных моделей. С использованием МКЭ рассчитываются основные акустические характеристики. Также рассмотрена обратная задача определения уровня преднапряжений в области по данным о собственных формах и частотах колебаний.

## 2. Постановка прямой задачи

Общая постановка задачи свободных колебаний предварительно напряженного упругого тела после отделения временного множителя, в соответствии с одной из линеаризованных моделей, может быть записана в виде [21–23]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \theta \mathbf{E} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \\ \mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{S_\sigma} = \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\sigma}^0 = \lambda \theta^0 \mathbf{E} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0), \\ \mathbf{u}^0|_{S_u^0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}^0 \cdot \boldsymbol{\sigma}^0|_{S_\sigma^0} = \mathbf{P}^0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь:  $\mathbf{T}$  — несимметричный добавочный тензор напряжений Пиолы (при этом полный тензор  $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} + \boldsymbol{\sigma}^0$ );  $\rho$  — плотность материала тела;  $\omega$  — круговая частота колебаний;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — тензор деформаций (индекс  $\mathbf{T}$  указывает на операцию транспонирования);  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе;  $\theta = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$ ;  $S = S_u \cup S_\sigma$  — поверхность тела;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S_\sigma$ ;  $\mathbf{E}$  — единичный тензор;  $\boldsymbol{\sigma}^0$  и  $\mathbf{u}^0$  — симметричный тензор предварительных напряжений и вектор соответствующих перемещений;  $\theta^0 = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^0))$ ;  $\mathbf{P}^0$  — вектор предварительной нагрузки, приложенной на части поверхности  $S_\sigma^0$ ;  $\mathbf{n}^0$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S_\sigma^0$ ,  $S^0 = S_u^0 \cup S_\sigma^0$ ; для моделирования свойств неоднородного упругого материала параметры Ламе и плотность принимаются переменными по пространственным координатам.

В качестве конкретного объекта исследования на основе сформулированной общей постановки рассмотрим задачу свободных планарных колебаний прямоугольной упругой области при наличии в ней предварительных напряжений. Длина прямоугольника  $l = 1$  м, ширина —  $h = 0,5$  м. Введем декартову систему координат  $(O x_1 x_2)$  и положим, что  $u_i(x_1, x_2) = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 \in [0, h]$ , то есть левая грань области жестко закреплена.

При плоском напряженном состоянии уравнения движения в (1) примут вид:

$$\begin{cases} T_{11,1} + T_{21,2} + \rho \omega^2 u_1 = 0, \\ T_{12,1} + T_{22,2} + \rho \omega^2 u_2 = 0. \end{cases}$$

Определяющие соотношения запишутся как

$$\begin{aligned} T_{11} &= \sigma_{11} + u_{1,1} \sigma_{11}^0 + u_{1,2} \sigma_{21}^0, & T_{21} &= \sigma_{21} + u_{1,1} \sigma_{12}^0 + u_{1,2} \sigma_{22}^0, \\ T_{22} &= \sigma_{22} + u_{2,1} \sigma_{12}^0 + u_{2,2} \sigma_{22}^0, & T_{12} &= \sigma_{12} + u_{2,1} \sigma_{11}^0 + u_{2,2} \sigma_{21}^0, \end{aligned}$$

где компоненты  $\sigma_{ij}$  представляются в виде:

$$\sigma_{11} = \lambda^* (u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{1,1}, \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} = \mu (u_{1,2} + u_{2,1}), \quad \sigma_{22} = \lambda^* (u_{1,1} + u_{2,2}) + 2\mu u_{2,2}$$

(напомним, что для плоского напряженного состояния вместо  $\lambda$  используется  $\lambda^*$ ), а параметры Ламе связаны с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  выражениями:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

В качестве материала рассмотрим алюминий:  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Па,  $\nu = 0,34$ ,  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>.

### 3. Исследование свободных колебаний

Используя приведенную постановку задачи, исследуем влияние разных видов предварительного напряженного состояния на значения собственных частот и форм колебаний. Для решения задачи прибегнем к численному методу — МКЭ, реализованному в программе FlexPDE, которая предназначена для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Среди ее основных преимуществ отметим следующие: возможность задавать определяющие соотношения и геометрию области в явном виде; наличие встроенных функций импорта и экспорта данных в другие программы, а также функций выгрузки для обработки в других приложениях.

Решение задачи свободных колебаний предварительно напряженной упругой области сводится к решению двух подзадач. В первой подзадаче вычисляются значения всех компонент тензора предварительных напряжений во всей области, затем они выгружаются в файлы. Далее строится численное решение задачи свободных колебаний с учетом данных, полученных из решения первой подзадачи. Контроль точности вычислений осуществляется с помощью служебного параметра  $\text{erlim} = 10^{-6}$ . Количество форм свободных колебаний задается равным четырем.

Для анализа изменения значений собственных частот колебаний рассмотрено 4 вида предварительных нагружений (Рис. 1). При этом уровень возникающих преднапряжений характеризуется одним малым безразмерным параметром  $\tau = P^0/E$ , где  $P^0$  — величина прикладываемой нагрузки.

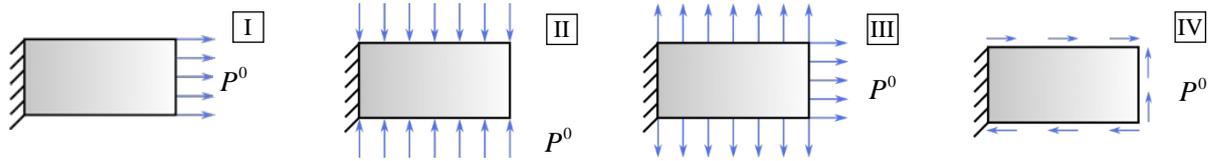


Рис. 1. Виды предварительного нагружения прямоугольной области: I – продольное растяжение, II – поперечное сжатие, III – двухосное растяжение, IV – сдвиговая нагрузка

В таблице 1 приведены вычисленные значения первых четырех собственных частот колебаний  $f_i = \omega_i/(2\pi)$ ,  $i = 1, 4$ , отвечающих разным видам преднапряжений, а также при их отсутствии ( $\sigma_{ij}^0 = 0$ ). Для наглядности значение параметра  $\tau$  взято равным  $10^{-3}$ . На рисунке 2 представлены графики зависимостей  $f_i(\tau)$ , полученные при пяти значениях параметра  $\tau$  из диапазона  $10^{-5} \dots 10^{-3}$ . Большие величины  $\tau$  не соответствуют рассматриваемой в статье задаче: здесь предварительные напряжения, согласно постановке, рассчитываются в рамках линейной модели упругости. Так, например, при  $\tau = 10^{-2}$  (нагрузка  $P^0 = \tau E = 10^{-2} E = 7 \cdot 10^8$  Па) явно будут возникать зоны пластичности, и расчеты для таких значений

Таблица 1. Значения первых четырех собственных частот колебаний при разных видах преднапряжений

Вид предварительного нагружения	Собственная частота, Гц			
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
I	355,011	1280,403	1338,824	2796,748
II	348,828	1279,677	1330,949	2789,293
III	357,583	1280,474	1341,698	2798,621
IV	351,477	1279,746	1333,833	2791,155
$\sigma_{ij}^0 = 0$	351,486	1279,748	1333,844	2791,170

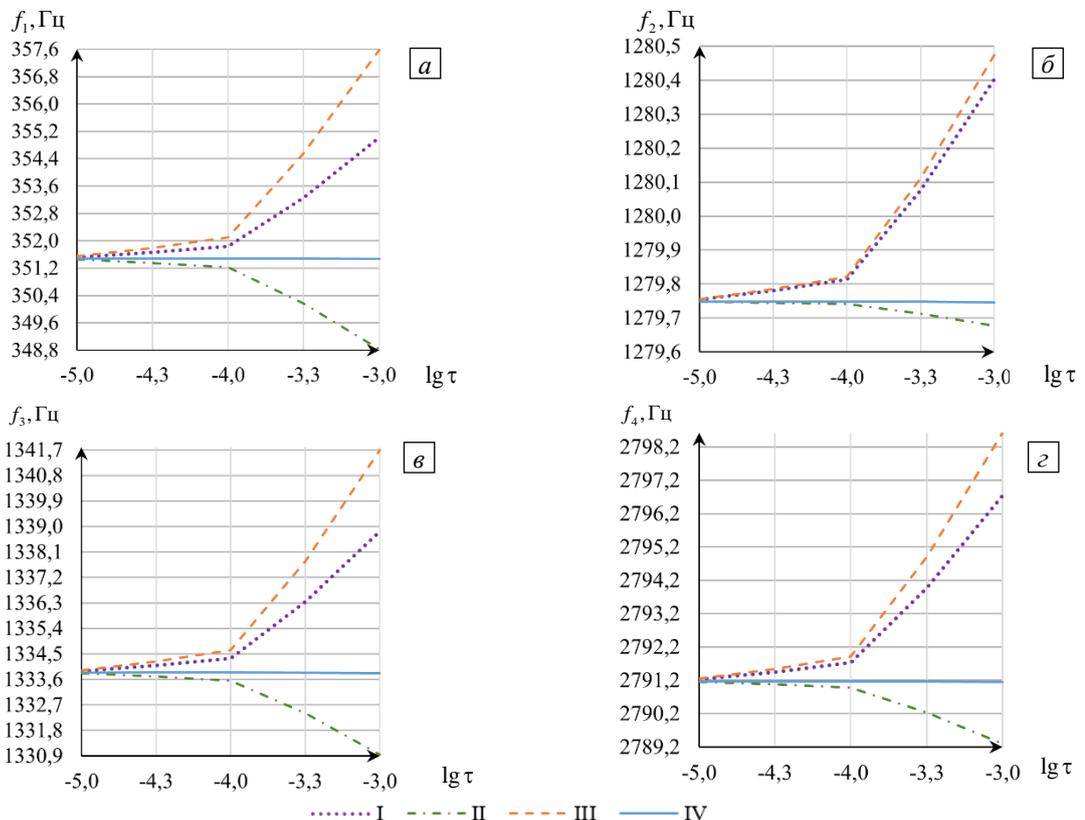


Рис. 2. Графики зависимостей  $f_1(\tau)$  (а),  $f_2(\tau)$  (б),  $f_3(\tau)$  (в),  $f_4(\tau)$  (г) при разных видах предварительных нагружений

интересны только с математической точки зрения. Из графиков видно, что с ростом величины параметра  $\tau$  I-й (точки) и III-й (пунктирная линия) виды предварительного нагружения приводят к повышению значений собственных частот, II-й (штрихпунктирная линия) — уменьшает их, IV-й (сплошная линия) — изменяет незначительно.

На рисунке 3 в качестве примера демонстрируются первые четыре собственные формы колебаний при виде I предварительного нагружения. Для остальных случаев нагрузок формы колебаний остаются такими же. Графики свидетельствуют, что разные виды предварительного нагружения сказываются на изменении значений собственных частот колебаний в разной степени: виды I и III — в наибольшей, а II и IV — в меньшей. При этом вторая собственная частота на все виды преднагружений реагирует слабее всего. Вид нагружения IV, соответствующий в начальном состоянии касательным нагрузкам, оказывает незначительное (меньше 0,002%) влияние на относительную величину первых четырех собственных частот. В связи с этим исследование подобных преднагружений в рамках обратной коэффициентной задачи по данным о собственных частотах не представляется перспективным.

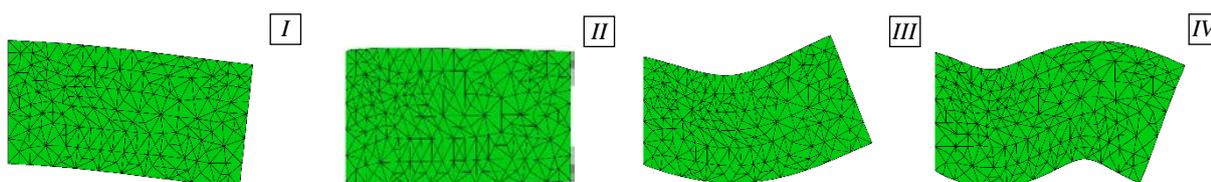


Рис. 3. Формы собственных колебаний прямоугольной области: I-я, II-я, III-я, IV-я

Для оценки влияния предварительного напряженного состояния на изменение форм колебаний введем рассмотрение функции

$$\delta_i(x_1, x_2) = |u_i^*(x_1, x_2) - v_i^*(x_1, x_2)| \cdot 100\%, \quad i = 1, 2,$$

где  $u_i^* = u_i / \max |u_i|$ ,  $v_i^* = v_i / \max |v_i|$ ,  $v_i$  — компоненты вектора смещения при отсутствии предварительных нагружений. Для первого вида преднагруженного состояния ( $\tau = 10^{-3}$ ) на рисунке 4 в качестве примера показаны графики этих функций, отвечающие первым двум формам колебаний. Из рисунка 4а, б видно, что максимальные значения  $\delta_i$  не превосходят 0,38%. Для II-й формы колебаний (Рис. 4в, г)  $\delta_i \leq 0,08\%$ ,

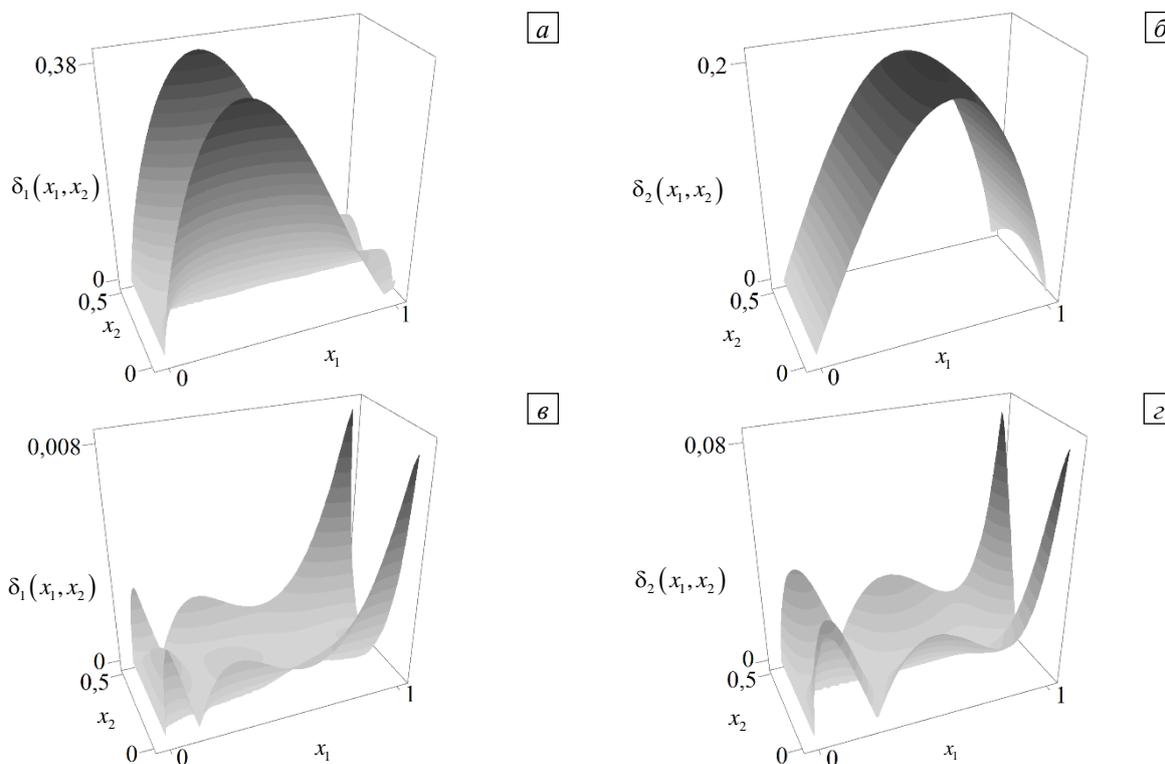


Рис. 4. Графики функций  $\delta_i(x_1, x_2)$ , соответствующие I-й (а, б) и II-й (в, г) собственным формам колебаний:  $\delta_1(x_1, x_2)$  (а, в),  $\delta_2(x_1, x_2)$  (б, г)

для III-й  $\delta_i \leq 0,23\%$ , для IV-й  $\delta_i \leq 0,25\%$ . При этом следует отметить, что максимальные значения являются малыми и достигаются функциями в небольших подобластях прямоугольника; в остальных частях расчетной области значения рассматриваемых функций существенно меньше. Максимальные значения  $\delta_i$  падают с убыванием параметра  $\tau$ . Например, при  $\tau = 10^{-4}$  для I-й собственной формы и I-го вида нагружения  $\delta_i \leq 0,04\%$ . Также получены данные для других видов преднагруженного состояния. Таким образом, поля смещений, соответствующие собственным формам колебаний прямоугольной области при наличии и отсутствии преднагрузок различаются несущественно.

**4. Анализ точности вычислений**

Для оценки точности расчетов значений собственных частот пластины при отсутствии предварительных нагружений с помощью МКЭ, реализованного в пакете FlexPDE, проведем сравнение с данными, представленными в статье [6]. В этой работе для различных специальных видов граничных условий приведены значения безразмерных собственных частот  $\beta = (\omega l / \pi) \sqrt{\rho / \mu}$ , полученных из решений трансцендентных уравнений и МКЭ, встроенным в пакет MSC/NASTRAN на сетке 100x200 с использованием мембранного элемента (Membrane) (соответствующие значения обозначены  $\beta^*$ ). В отличие от других работ данные представлены с точностью до четвертого знака после запятой; параметр  $\beta$  не зависит от коэффициента Пуассона. Для пластины точность этой безразмерной величины в четвертом знаке отвечает погрешности значения частоты  $\pm 0,992$  Гц. В качестве примера для сравнения рассмотрим пластину шириной  $h = 1, 2l = 1, 2$  м с граничными условиями, близкими к условиям исследуемой исходной задачи:

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2) = u_2(x_1, x_2) = 0, & x_1 \in [0, l], \quad x_2 = 0, \\ u_2(x_1, x_2) = 0, \quad T_{11}(x_1, x_2) = 0, & x_1 = 0, \quad x_2 \in [0, h], \\ T_{12}(x_1, x_2) = T_{22}(x_1, x_2) = 0, & x_1 \in [0, l], \quad x_2 = h, \\ u_2(x_1, x_2) = 0, \quad T_{11}(x_1, x_2) = 0, & x_1 = l, \quad x_2 \in [0, h]. \end{cases}$$

Таблица 2. Значения первых восьми безразмерных собственных частот при отсутствии предварительных нагрузок:  $\beta$ ,  $\beta^*$  из статьи [6] и  $\beta^F$ , полученные в пакете FlexPDE

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\beta$	0,4167	0,9970	1,2500	1,5900	1,8388	2,0492	2,0783	2,0833
$\beta^*$	0,4167	0,9972	1,2502	1,5902	1,8395	2,0494	2,0786	2,0838
$\beta^F$	0,416667	0,997047	1,250000	1,589971	1,838821	2,049179	2,078336	2,083334

Результаты расчетов представлены в таблице 2. Здесь  $\beta^F$  — значения безразмерной собственной частоты, полученные в пакете FlexPDE. При значении параметра  $errlim = 10^{-6}$  использовалась сетка с 223 узлами. Как видно, после округления до одного и того же (4-го) знака значения  $\beta$  и  $\beta^F$  совпадают.

**5. Исследование обратной задачи**

Рассмотрим обратную коэффициентную задачу определения уровня предварительного напряженного состояния по данным о значениях собственных частот колебаний тела. Пусть имеется два состояния объекта, одно с наличием, другое при отсутствии предварительных напряжений. Уравнения свободных колебаний, соответствующие этим состояниям, можно записать в виде:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \omega_*^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

где  $\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \mathbf{E} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = 0,5(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$ . Умножим (2) на  $\mathbf{v}$ , а (3) на  $\mathbf{u}$ , проинтегрируем по объему и вычтем одно из другого:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} dv - \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u} dv + \int_V \rho \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dv - \int_V \rho \omega_*^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dv = 0. \tag{4}$$

Преобразуем в (4) первый и второй интегралы, используя формулу Гаусса–Остроградского:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} dv = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} ds - \int_V \mathbf{T} \odot (\nabla \mathbf{v}) dv,$$

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{u} dv = \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} ds - \int_V \boldsymbol{\sigma} \odot (\nabla \mathbf{u}) dv,$$

где символом « $\odot$ » обозначена операция полного умножения [24] (для симметричных тензоров второго ранга аналогична операции « $\cdot$ » двойного скалярного умножения). Интегралы  $\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} ds$  и  $\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} ds$  обращаются в нуль в силу граничных условий (часть поверхности жестко закреплена, на другой части нагрузки отсутствуют). С учетом проделанного перепишем (4) в виде:

$$-\int_V \mathbf{T} \odot (\nabla \mathbf{v}) dv + \int_V \boldsymbol{\sigma} \odot (\nabla \mathbf{u}) ds + (\omega^2 - \omega_*^2) \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dv = 0.$$

В силу малого уровня предварительных напряжений положим, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ ,  $\nabla \mathbf{u} \approx \nabla \mathbf{v}$ . Тогда

$$\int_V (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{T}) \odot (\nabla \mathbf{v}) dv + (\omega^2 - \omega_*^2) \int_V \rho \mathbf{v}^2 dv \approx 0.$$

Принимая во внимание соотношение для тензора  $\mathbf{T}$  из (1), получим:

$$-\int_V (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}) \odot (\nabla \mathbf{v}) dv + (\omega^2 - \omega_*^2) \int_V \rho \mathbf{v}^2 dv \approx 0. \quad (5)$$

Если предварительные напряжения обусловлены действием нагрузки величиной  $P^0 = \tau E$ , то в рамках линейного закона Гука можно формально представить:  $\boldsymbol{\sigma}^0 = \tau \boldsymbol{\sigma}^{0E}$ , где  $\boldsymbol{\sigma}^{0E}$  — поле предварительных напряжений, вызванных нагрузкой, равной по величине модулю Юнга. Отсюда имеем

$$\tau \approx (\omega^2 - \omega_*^2) \frac{\int_V \rho \mathbf{v}^2 dv}{\int_V (\boldsymbol{\sigma}^{0E} \cdot \nabla \mathbf{v}) \odot (\nabla \mathbf{v}) dv}. \quad (6)$$

Это соотношение позволяет определять уровень преднапряжений по известному закону изменения компонент тензора предварительных напряжений, данным о собственных частотах колебаний тела при наличии и отсутствии преднагрузок и полю смещения, соответствующему собственной форме колебаний объекта без остаточных напряжений. Следует отметить, что на основе этой формулы можно получать результаты для частных случаев, например, выражение для определения внутреннего давления в трубе [25].

В то же время обобщенное выражение (5) можно использовать на практике для нахождения величин собственных частот преднапряженного объекта по известной информации о его собственной частоте и форме колебаний в состоянии, когда объект свободен от предварительных напряжений и задан тензор  $\boldsymbol{\sigma}^0$ :

$$\omega \approx \sqrt{\omega_*^2 + \frac{\int_V (\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}) \odot (\nabla \mathbf{v}) dv}{\int_V \rho \mathbf{v}^2 dv}}. \quad (7)$$

Для прямоугольной области соотношение (6) принимает вид:

$$\tau \approx (\omega^2 - \omega_*^2) \frac{\int_S \rho v_i^2 ds}{\int_S \sigma_{mj}^{0E} v_{i,j} v_{i,m} ds}, \quad (8)$$

где область интегрирования  $S = \{(x_1, x_2) \in R^2, x_1 \in [0, l], x_2 \in [0, h]\}$ . Здесь для краткости записи использовано правило суммирования по повторяющемуся индексу. Формула (7) в рассматриваемом случае становится следующей:

$$\omega \approx \sqrt{\omega_*^2 + \frac{\int_S \sigma_{mj}^0 v_{i,j} v_{i,m} ds}{\int_S \rho v_i^2 ds}}. \quad (9)$$

Для оценки точности выражения (8) выполнена серия вычислительных экспериментов. В таблице 2 приведены значения функции  $\delta_\tau = |\tau_{rec} - \tau_{ex}| / \tau_{ex} \cdot 100\%$ , где  $\tau_{rec}$  рассчитано по выражению (8), а  $\tau_{ex}$  — точное значение параметра, которое задается при построении численного решения соответствующих прямых задач нахождения компонент тензора предварительных напряжений  $\sigma_{ij}^0$ . Расчеты реализованы для разных видов и уровней предварительных нагружений, результаты представлены в таблице 3. Рассматривались первые собственные частота и форма колебаний. При осуществлении вычислений использовалась трансляция данных между скриптами пакета FlexPDE. Для установления границ практической применимости формулы (8) значение частоты  $\omega$ , которая определяется экспериментально, при передаче округлялось до третьего знака после запятой; остальные данные отправлялись без округления, поскольку они могут быть установлены численно, с помощью МКЭ. Если значение частоты  $\omega$  задавать более точным, то со снижением уровня предварительных напряжений уменьшается погрешность вычислений по формуле (8). Это обусловлено влиянием преднапряжений на формы колебаний и предположениями, на основе которых эта формула была выведена.

Таблица 3. Значения функции  $\delta_\tau$  и параметра  $\tau_{rec}$ , отвечающие первым собственным частоте и форме колебаний

Вид предварительного нагружения	$\tau_{ex} = 1 \cdot 10^{-3}$	$\delta_\tau, \%$	$\tau_{ex} = 1 \cdot 10^{-4}$	$\delta_\tau, \%$	$\tau_{ex} = 1 \cdot 10^{-5}$	$\delta_\tau, \%$
I	$0,9975 \cdot 10^{-3}$	0,25	$0,9997 \cdot 10^{-4}$	0,03	$0,9978 \cdot 10^{-5}$	0,22
II	$1,005 \cdot 10^{-3}$	0,5	$1,0006 \cdot 10^{-4}$	0,06	$0,9987 \cdot 10^{-5}$	0,13
III	$0,99397 \cdot 10^{-3}$	0,603	$0,9994 \cdot 10^{-4}$	0,06	$0,9998 \cdot 10^{-5}$	0,02

Аналогичные действия выполнены относительно формулы (9) на примере I-й собственной частоты колебаний. Результаты отражены в таблице 4 для функции  $\delta_f = |f_{rec} - f_{ex}| / f_{ex} \cdot 100\%$ , где  $f_{rec} = \omega_{rec} / (2\pi)$ ,  $\omega_{rec}$  — значение частоты, полученное согласно выражению (9),  $f_{ex} = \omega_{ex} / (2\pi)$ ,  $\omega_{ex}$  — точное значение параметра. Из таблицы видно, что точность данных увеличивается с уменьшением уровня предварительного нагружения. Высокая, по сравнению с формулой (8), точность есть результат отсутствия округления значений передаваемых величин при трансляции данных.

Таблица 4. Точные и приближенные значения I-й собственной частоты и функции  $\delta_\omega$  при различных уровнях предварительного нагружения

Вид предварительного нагружения	Уровень предварительного нагружения $\tau$					
	$10^{-3}$			$10^{-4}$		
	$f_{rec}, \text{Гц}$	$f_{ex}, \text{Гц}$	$\delta_f, \%$	$f_{rec}, \text{Гц}$	$f_{ex}, \text{Гц}$	$\delta_f, \%$
I	355,016	355,011	0,001	351,8411	351,84099	0,00003
II	348,841	348,828	0,004	351,2225	351,2223	0,00006
III	357,619	357,583	0,01	352,1043	352,1039	0,00011

Таким образом, по предлагаемым формулам легко оценивать как уровень предварительных напряжений, так и собственную частоту колебаний преднапряженного объекта. При этом, в силу малости влияния предварительных напряжений, для успешной реализации процедуры реконструкции их уровня на практике необходимо использовать высокоточные измерительные приборы для получения данных, которые в расчетах являются входными, что характерно для подобных задач [26].

### 6. Заключение

В рамках линеаризованной модели преднапряженного объекта с помощью пакета FlexPDE исследовалась двумерная задача свободных колебаний прямоугольной упругой области. Численное решение МКЭ, встроенным в этот пакет, позволило рассмотреть общие случаи предварительного напряженного состояния. Выявлено, что разные виды предварительных нагрузок оказывают различное влияние на значения собственных частот и формы колебаний тела. Следует отметить, что аналогичное исследование можно также провести посредством некоммерческого пакета FreeFem++ согласно описанному алгоритму.

На основе предположения о малости влияния преднапряжений на поля перемещений при свободных колебаниях выведены приближенные формулы для определения уровня предварительного напряженного состояния и значений собственных частот колебаний преднапряженного объекта. Посредством серии вычислительных экспериментов продемонстрирована точность этих формул. Полученные результаты

показывают, что для определения уровня преднапряженного состояния по данным о собственных частотах колебаний важно иметь информацию о виде вызвавших его нагрузок.

Численное исследование свободных колебаний с использованием предложенного подхода позволяет заранее предсказать степень изменения собственных частот колебаний преднапряженного объекта и исходя из этого формулировать технические требования к точности соответствующих измерительных приборов для применения на практике.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10045), <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>, в Южном федеральном университете.

## Литература

1. Чернышев Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М., Пономарев И.И. Остаточные напряжения в деформируемых твердых телах. М.: Физматлит, 1996. 240 с.
2. Витман Ф.Ф. Остаточные напряжения. М.: Гос. техн.-теоретич. изд-во, 1933. 64 с.
3. Биргер И.А. Остаточные напряжения. М.: Mashgiz, 1963. 232 с.
4. Мелешко В.В., Папков С.О. Изгибные колебания упругих прямоугольных пластин со свободными краями: от Хладни (1809) и Ритца (1909) до наших дней // Акустичний вісник. 2009. Т. 12, № 4. С. 34-51.
5. Xing Y., Li G., Yuan Y. A review of the analytical solution methods for the eigenvalue problems of rectangular plates // Int. J. Mech. Sci. 2022. Vol. 221. 107171. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107171>
6. Xing Y.F., Liu B. Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates // Int. J. Mech. Sci. 2009. Vol. 51. P. 246-255. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2008.12.009>
7. Gorman D.J. Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with two opposite edges simply supported // J. Sound Vib. 2006. Vol. 294. P. 131-161. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.10.023>
8. Gorman D.J. Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition // J. Sound Vib. 2004. Vol. 272. P. 831-851. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00421-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00421-8)
9. Bardell N.S., Langley R.S., Dunsdon J.M. On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates // J. Sound Vib. 1996. Vol. 191. P. 459-467. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0134>
10. Hasheminejad S.M., Ghaheer A. Exact solution for free vibration analysis of an eccentric elliptical plate // Arch. Appl. Mech. 2014. Vol. 84. P. 543-552. <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0816-8>
11. Wang Y., Fan J., Shen X., Liu X., Zhang J., Ren N. Free vibration analysis of stiffened rectangular plate with cutouts using Nitsche based IGA method // Thin-Walled Struct. 2022. Vol. 181. 109975. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109975>
12. Kalita K., Haldar S. Free vibration analysis of rectangular plates with central cutout // Cogent Engineering. 2016. Vol. 3. 1163781. <https://doi.org/10.1080/23311916.2016.1163781>
13. Kumar S., Jana P. Application of dynamic stiffness method for accurate free vibration analysis of sigmoid and exponential functionally graded rectangular plates // Int. J. Mech. Sci. 2019. Vol. 163. 105105. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105105>
14. Ali M.I., Azam M.S., Ranjan V., Banerjee J.R. Free vibration of sigmoid functionally graded plates using the dynamic stiffness method and the Wittrick-Williams algorithm // Comput. Struct. 2021. Vol. 244. 106424. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2020.106424>
15. Wang Q., Shi D., Liang Q., e Ahad F. A unified solution for free in-plane vibration of orthotropic circular, annular and sector plates with general boundary conditions // Appl. Math. Model. 2016. Vol. 40. P. 9228-9253. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.06.005>
16. Fung Y.C., Sechler E.E., Kaplan A. On the vibration of thin cylindrical shells under internal pressure // J. Aeronaut. Sci. 1957. Vol. 24. P. 650-660. <https://doi.org/10.2514/8.3934>
17. Miserentino R., Vosteen L. F. Vibration tests of pressurized thin-walled cylindrical shells // NASA Technical note. 1965. NASA-TN-D-3066. 47 p.
18. Rabenda M., Michalak B. Natural vibrations of prestressed thin functionally graded plates with dense system of ribs in two directions // Compos. Struct. 2015. Vol. 133. P. 1016-1023. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.026>
19. Vatulyan A., Nedin R., Dudarev V. Modelling and analysis of prestress field in a thin plate with a nonuniform coating // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Vol. 1203. 012027. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012027>
20. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Bogachev I.V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. Vol. 41. P. 1600-1618. <https://doi.org/10.1002/mma.4688>
21. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. Киев: Наукова думка, 1977. 162 с.
22. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных. М.: Мир, 1975. 592 с.
23. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Vibrations of inhomogeneous piezoelectric bodies in conditions of residual stress-strain state // Appl. Math. Model. 2018. Vol. 63. P. 219-242. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.06.038>
24. Зубов Л.М., Карякин М.И. Тензорное исчисление. Основы теории. М.: Вузовская книга, 2005. 117 с.
25. Ватульян А.О., Дударев В.В., Мнухин Р.М. О влиянии остаточного упругопластического состояния трубы на динамические характеристики // ДАН. 2015. Т. 463, № 6. С. 661-663. <https://doi.org/10.7868/S086956521524010X>
26. Никитина Н.Е. Акустоупругость. Опыт практического применения. Н. Новгород: Талам, 2005. 208 с.

## References

1. Chernyshev G.N., Popov A.L., Kozintsev V.M., Ponomarev I.I. *Ostatochnyye napryazheniya v deformiruyemykh tverdykh telakh* [Residual stresses in deformable solids]. Moscow, Fizmatlit, 1996. 240 p.
2. Vitman F.F. *Ostatochnyye napryazheniya* [Residual stresses]. Moscow, Gos. tekhn.-teoretich. izd-vo, 1933. 64 p.
3. Birger I.A. *Ostatochnyye napryazheniya* [Residual stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963. 232 p.

4. Meleshko V.V., Papkov S.O. Izgibnyye kolebaniya uprugikh pryamougol'nykh plastin so svobodnymi krayami: ot Khladni (1809) i Rittsa (1909) do nashikh dney [Bending vibrations of elastic rectangular plates with free edges: from Khladni (1809) and Ritz (1909) to the present day]. *Akustychnyy visnyk – Acoustic herald*, 2009, vol. 12, no. 4, pp. 34-51.
5. Xing Y., Li G., Yuan Y. A review of the analytical solution methods for the eigenvalue problems of rectangular plates. *Int. J. Mech. Sci.*, 2022, vol. 221, 107171. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107171>
6. Xing Y.F., Liu B. Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates. *Int. J. Mech. Sci.*, 2009, vol. 51, pp. 246-255. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2008.12.009>
7. Gorman D.J. Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with two opposite edges simply supported. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 294, pp. 131-161. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.10.023>
8. Gorman D.J. Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition. *J. Sound Vib.*, 2004, vol. 272, pp. 831-851. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00421-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00421-8)
9. Bardell N.S., Langley R.S., Dunsdon J.M. On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates. *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 191, pp. 459-467. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0134>
10. Hasheminejad S.M., Ghaheer A. Exact solution for free vibration analysis of an eccentric elliptical plate. *Arch. Appl. Mech.*, 2014, vol. 84, pp. 543-552. <https://doi.org/10.1007/s00419-013-0816-8>
11. Wang Y., Fan J., Shen X., Liu X., Zhang J., Ren N. Free vibration analysis of stiffened rectangular plate with cutouts using Nitsche based IGA method. *Thin-Walled Struct.*, 2022, vol. 181, 109975. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109975>
12. Kalita K., Haldar S. Free vibration analysis of rectangular plates with central cutout. *Cogent Engineering*, 2016, vol. 3, 1163781. <https://doi.org/10.1080/23311916.2016.1163781>
13. Kumar S., Jana P. Application of dynamic stiffness method for accurate free vibration analysis of sigmoid and exponential functionally graded rectangular plates. *Int. J. Mech. Sci.*, 2019, vol. 163, 105105. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.105105>
14. Ali M.I., Azam M.S., Ranjan V., Banerjee J.R. Free vibration of sigmoid functionally graded plates using the dynamic stiffness method and the Wittrick-Williams algorithm. *Comput. Struct.*, 2021, vol. 244, 106424. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2020.106424>
15. Wang Q., Shi D., Liang Q., e Ahad F. A unified solution for free in-plane vibration of orthotropic circular, annular and sector plates with general boundary conditions. *Appl. Math. Model.*, 2016, vol. 40, pp. 9228-9253. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.06.005>
16. Fung Y.C., Sechler E.E., Kaplan A. On the vibration of thin cylindrical shells under internal pressure. *J. Aeronaut. Sci.*, 1957, vol. 24, pp. 650-660. <https://doi.org/10.2514/8.3934>
17. Miserentino R., Vosteen L. F. *Vibration tests of pressurized thin-walled cylindrical shells*. NASA Technical note, 1965. NASA-TN-D-3066. 47 p.
18. Rabenda M., Michalak B. Natural vibrations of prestressed thin functionally graded plates with dense system of ribs in two directions. *Compos. Struct.*, 2015, vol. 133, pp. 1016-1023. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.026>
19. Nedin R.D., Nedin R., Dudarev V. Modelling and analysis of prestress field in a thin plate with a nonuniform coating. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1203, 012027. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012027>
20. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Bogachev I.V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2018, vol. 41, pp. 1600-1618. <https://doi.org/10.1002/mma.4688>
21. Guz' A.N., Makhort F.G., Gushcha O.I. *Vvedeniye v akoustoprugost'* [Introduction to acoustoelasticity]. Kyiv, Naukova dumka, 1977. 162 p.
22. Truesdell C. *A first course in rational continuum mechanics*. New York, Academic Press, 1977. 304 p.
23. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Vibrations of inhomogeneous piezoelectric bodies in conditions of residual stress-strain state. *Appl. Math. Model.*, 2018, vol. 63, pp. 219-242. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.06.038>
24. Zubov L.M., Karyakin M.I. *Tenzornoye ischisleniye. Osnovy teorii* [Tensor calculus. Basics of the theory]. Moscow, Vuzovskaya kniga, 2005. 117 p.
25. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M. Influence of the residual elastic-plastic state of a tube on the dynamic characteristics. *Dokl. Phys.*, 2015, vol. 60, pp. 377-379. <https://doi.org/10.1134/S102833581508011X>
26. Nikitina N.E. *Akoustoprugost'. Opyt prakticheskogo primeneniya* [Acoustoelasticity. Experience of practical application]. Nizhny Novgorod, Talam, 2005. 208 p.

Поступила в редакцию 21.10.2022; после доработки 20.01.2023; принята к опубликованию 31.01.2023

---

Сведения об авторах

Головатенко Максим Евгеньевич, асп., Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (ИММиКН ЮФУ), 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а; e-mail: maximgolovatenko@mail.ru  
Дударев Владимир Владимирович, кфмн, доц., ИММиКН ЮФУ; e-mail: dudarev\_vv@mail.ru