

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.2.16](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.2.16)

УДК 532.5.013

СТАЦИОНАРНАЯ И КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ КОНВЕКЦИЯ БИДИСПЕРСНОЙ КОЛЛОИДНОЙ СУСПЕНЗИИ

Б.Л. Смородин, И.Н. Черепанов

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация

В рамках бидисперсной модели с помощью метода конечных разностей проведено численное моделирование и изучены нелинейная эволюция и свойства двумерных режимов конвекции коллоидной суспензии, возникающих в горизонтальном слое при подогреве снизу. Слой имеет твердые теплопроводные и непроницаемые для суспензии горизонтальные границы. На боковых границах расчетной области используются периодические граничные условия, позволяющие исследовать не только стационарную конвекцию и стоячие волны, но и бегущие волны. Рассматривается случай, когда в состоянии механического равновесия термодиффузионный транспорт и гравитационная стратификация наночастиц направлены противоположно, что является источником оседания тяжелой примеси и возникновения колебательной неустойчивости. При достижении числом Рейля некоторого критического значения в слое образуется стоячая волна, которая оказывается неустойчивой. Ее разрушение, сопровождающееся перестройкой полей концентрации наночастиц, приводит к длительному переходному режиму бегущих волн, характеристики которого изучены и проанализированы. Построена бифуркационная диаграмма (зависимость максимальной функции тока от числа Рейля), изображающая нелинейные режимы течения жидкости в зависимости от интенсивности нагрева. Показано, что при высокой интенсивности нагрева конвективное перемешивание размывает гравитационную седиментацию наночастиц и приводит к сглаживанию концентрационных неоднородностей. В результате нелинейной эволюции колебательных возмущений устанавливается режим стационарной конвекции, для которого свойственна зеркальная симметрия решений. Устойчивые режимы бегущих волн обнаружены в узкой подкритической области значений числа Рейля. Получены поля функции тока, температуры и концентраций примеси малых и больших наночастиц.

Ключевые слова: коллоидная суспензия, бидисперсная модель, конвекция, бегущая волна, численное моделирование

STATIONARY AND OSCILLATORY CONVECTION IN BIDISPERSE COLLOIDAL SUSPENSION

B.L. Smorodin and I.N. Cherepanov

Perm State University, Perm, Russian Federation

The nonlinear evolution and properties of two-dimensional convection flows of a colloidal suspension arising in a horizontal layer heated from below are studied within the framework of a bidisperse model. Numerical simulation is carried out using the finite difference method. The layer has solid, ideally heat-conducting horizontal boundaries that are impervious to suspension. Periodic boundary conditions are used at the lateral boundaries of the computational domain to detect and analyze not only stationary convection and standing waves, but also traveling waves. We consider the case when, in a quiescent colloidal suspension, the thermodiffusion transport and gravitational settling of nanoparticles are directed oppositely, which causes the settling down of a heavy impurity and the onset of oscillatory instability. When the Rayleigh number reaches a certain critical value, an unstable standing wave (SW) appears in the layer. Its destruction, accompanied by the redistribution of nanoparticle concentration fields, leads to the emergence of a long transient regime of traveling waves, the characteristics of which are studied and analyzed. A bifurcation diagram (dependence of the maximum stream function on the Rayleigh number) showing how the nonlinear modes of a fluid flow change depending on heating intensity is constructed. It is shown that, at high heating intensity, convective mixing destroys the gravitational sedimentation of nanoparticles and leads to smoothing of concentration inhomogeneities. Due to the nonlinear evolution of oscillatory perturbations, a stationary convection regime characterized by the mirror symmetry of solutions is established. Stable traveling waves are found in a narrow subcritical range of Rayleigh numbers. The fields of stream function, temperature, and impurity concentrations of small and large nanoparticles are obtained.

Key words: colloidal suspension, bidisperse model, convection, traveling wave, numerical simulation

1. Введение

Конвективные процессы в молекулярных смесях осложняются диффузионным и термодиффузионным транспортом примеси [1, 2]. В коллоидных растворах, где размеры наночастиц на несколько порядков больше характерного размера молекул, может добавиться оседание примеси в гравитационном поле [3, 4] либо магнитофорез феррочастиц в неоднородном магнитном поле [5]. Эти процессы влияют на перераспределение примеси, открывают возможность для возникновения колебательной конвекции, сказываются на эволюции нелинейных течений [6–12]. Отметим, что в [8] колебательная конвекция коллоидной суспензии (магнитной жидкости на основе керосина) рассматривается в рамках модели трехкомпонентной смеси, состоящей из двухкомпонентной жидкости-носителя, которая в результате термодиффузии может разделяться на компоненты, и монодисперсных наночастиц, оседающих под воздействием гравитационного поля.

Несмотря на то что реальные суспензии полидисперсны [13], для описания конвекции в коллоидных растворах (наножидкостях) или в магнитных жидкостях часто используется монодисперсная модель [10–12]. Однако в некоторых случаях монодисперсная модель не достаточна для корректного представления

коллоидной суспензии. Тогда применяется так называемая бидисперсная модель, в которой считается, что в однородной жидкости-носителе содержится два типа наночастиц, различающихся только своими размерами (условно говоря, малые и большие наночастицы). Эта модель дает хорошее согласование с экспериментом [14].

Результаты исследования конвективной устойчивости бидисперсной коллоидной суспензии относительно длинноволновых и ячеистых возмущений представлены в [15], где показано, что существуют длинноволновые колебательные возмущения с большим периодом и ячеистые колебательные возмущения. Вследствие эволюции колебательных возмущений в бинарных смесях и коллоидных суспензиях возникают разнообразные нелинейные режимы конвекции: протяженные и локализованные состояния, активно изучаемые экспериментально [7–9], теоретически [5, 10, 11] и с посредством численного моделирования [12, 17].

В данной статье рассматривается трехкомпонентная смесь (бидисперсная коллоидная суспензия), которая качественно отличается от обсуждаемой в [8]: здесь оба типа компонентов (большие и малые наночастицы) переносятся благодаря диффузионному, термодиффузионному и конвективному транспорту, а также участвуют в гравитационном оседании. На основе численного моделирования анализируется конвекция коллоидной суспензии, заполняющей горизонтальный слой. Построена бифуркационная диаграмма, где отражены решения в виде стационарной конвекции и бегущих волн, а также получены распределения гидродинамических и концентрационных полей компонентов смеси.

2. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим горизонтальный слой коллоидной суспензии толщиной h , находящийся в поле силы тяжести \mathbf{g} . Ось x декартовой системы координат направим вдоль нижней границы слоя, а ось z поперек слоя. Твердые непроницаемые идеально теплопроводные границы слоя имеют координаты $z = \pm h/2$. На этих границах поддерживаются некоторые фиксированные температуры: $T(h/2) = T_u$, $T(-h/2) = T_u + \Theta$, где при имеющем место нагреве снизу $\Theta > 0$.

В рамках бидисперсной модели будем считать, что коллоидная суспензия содержит две фракции наночастиц: маленькие (радиусом r_s) и большие (радиусом $r_l = \alpha r_s$, $\alpha > 1$). Средние массовые доли малых (\bar{C}_s) и больших (\bar{C}_l) наночастиц связаны со средней массовой долей образуемых ими «тяжелой» примеси ($\bar{C} = \bar{C}_s + \bar{C}_l$) соотношением:

$$\bar{C}_l = \gamma \bar{C}, \quad \bar{C}_s = (1 - \gamma) \bar{C}, \quad (1)$$

где γ — доля больших наночастиц. Считаем, что коэффициенты диффузии частиц обоих типов D_i ($i = s, l$), а также температуропроводность χ и вязкость η суспензии постоянны.

Представим уравнение состояния смеси в виде:

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta_T \theta + \beta_s \zeta_s + \beta_l \zeta_l), \quad \zeta_s = C_s - \bar{C}_s, \quad \zeta_l = C_l - \bar{C}_l, \quad (2)$$

где ρ_0 — плотность коллоидной суспензии при некоторой средней температуре \bar{T} и средних массовых концентрациях \bar{C}_s , \bar{C}_l , при этом $\bar{\theta}$ и ζ_s , ζ_l — отклонения температуры и концентрации от своих средних значений, β_T , β_i — коэффициенты теплового и концентрационного расширения компонентов ($i = s, l$) (в силу одинаковости материала больших и малых частиц их коэффициенты концентрационного расширения являются равными: $\beta_s = \beta_l$).

Введем безразмерные масштабы длины — h , времени — h^2/χ , скорости жидкости — χ/h , температуры — Θ , давления — $\rho_0 \chi^2/h^2$ и концентраций — $C_i = \beta \Theta / \beta_T$. Запишем систему уравнений конвекции коллоидной суспензии:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \text{Pr} \Delta \mathbf{v} + \text{Pr} \text{Ra} (\theta - \zeta_s - \zeta_l) \mathbf{e} = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \theta &= \Delta \theta, \\ \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \zeta_i &= \text{Le}_i \nabla \left[\nabla (\zeta_i + \psi_i \theta) + \frac{\zeta_i}{\lambda_i} \mathbf{e} \right], \quad i = s, l. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) содержит: t — время; p — давление; ∇ и Δ — стандартные дифференциальные операторы; \mathbf{e} — единичный вектор, направленный вверх; безразмерные числа Прандтля $\text{Pr} = \nu/\chi$ и Релея

$Ra = (\beta_T gh^3 \Theta) / (\nu \chi)$; параметры, которые характеризуют компоненты коллоидной суспензии, относящиеся к малым ($i = s$) и большим ($i = l$) наночастицам — числа Льюиса $Le_i = D_i / \chi$; безразмерные длины седиментации $\lambda_i = h / (\lambda_{sed})_i$, где $(\lambda_{sed})_i = k_B T / (\Delta \rho g V_i)$; параметры разделения $\psi_i = (S_T)_i \bar{C}_i (1 - \bar{C}_i) (\beta_i / \beta_T)$, где $(S_T)_i$ — коэффициенты термодиффузии компонентов; k_B — постоянная Больцмана, $\Delta \rho$ — разность плотностей наночастиц и жидкости-носителя, V_i — объемы наночастиц.

Решение системы (3) должно удовлетворять закону сохранения массы. Для каждого из компонентов смеси запишем это требование в безразмерной форме:

$$\int_{-1/2}^{1/2} C_s dz = \frac{B_s \lambda_s}{Ra}, \quad \int_{-1/2}^{1/2} C_l dz = \frac{B_l \lambda_l}{Ra}. \quad (4)$$

При этом появляются дополнительные параметры — числа Больцмана $B_i = \beta_i gh^4 \bar{C}_i / (\nu \chi (\lambda_{sed})_i)$ для каждого компонента ($i = s, l$).

Граничные условия на вертикальных границах области зададим периодическими с периодом $L = 2$, на горизонтальных границах — соответствующими твердым изотермическим непроницаемым для примеси границам:

$$z = \pm \frac{1}{2}: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} + \psi_i \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{C_i}{\lambda_i} = 0, \quad \theta(-1/2) = 1, \quad \theta(1/2) = 0. \quad (5)$$

Периоду $L = 2$ отвечает волновое число $k = 2\pi/L = \pi$, согласующееся с критическим волновым числом возникновения конвекции при нагреве жидкости снизу:

$$F(x, z, t) = F(x + L, z, t), \quad (6)$$

где F — любая из функций системы (3).

В общем случае параметры, характеризующие малые и большие наночастицы, можно записать в виде соотношений, включающих отношение радиусов $\alpha = r_l / r_s$ и коэффициент $\gamma \neq 0$, показывающий долю крупных частиц:

$$Le_l = Le_s / \alpha, \quad \lambda_l = \lambda_s / \alpha^3, \quad B_s = (1 - \gamma) B, \quad B_l = \gamma \alpha^3 B, \quad \psi_s = (1 - \gamma) \psi, \quad \psi_l = \alpha \gamma \psi. \quad (7)$$

Здесь $B = \beta_s gh^4 \bar{C} / (\nu \chi (\lambda_{sed})_s)$ и $\psi(\bar{C})$ — число Больцмана и параметр разделения монодисперсной жидкости определяются через концентрацию «тяжелой» примеси \bar{C} . При расчетах использовались следующие значения: $\gamma = 0,1$; $\alpha = 2,5$; $Pr = 10$; $Le_s = 1,5 \cdot 10^{-4}$; $\lambda_s = 30$; $B = 2000$; $\psi_s = 1,8$; $\psi_l = 0,5$.

Нейтральная кривая, разделяющая области растущих и затухающих возмущений основного состояния, полученная в результате решения краевой задачи с помощью метода ортогонализации, представлена на рисунке 1. Нейтральная кривая имеет два локальных минимума: в длинноволновой области при $Ra(k=0) = 2142$ и в области ячеистых возмущений при $Ra_{osc}(k=3,14) = 2006$. Абсолютный минимум на нейтральной кривой концентрации связан с ячеистыми колебательными возмущениями при волновом числе $k = 3,14$ и частоте $\omega = 8,173$. С уменьшением волнового числа частота нейтральных возмущений убывает (Табл.).

Фактически речь идет о двух разных колебательных модах. Для первого типа возмущений (интервал D–G на Рис. 1) квадрат частоты линейно зависит от суммы чисел Больцмана, но не зависит от чисел Льюиса [15]. Такие колебания связаны с тем, что насыщенный наночастицами, но нагретый элемент суспензии всплывает в более холодную область с меньшей концентрацией. В результате охлаждения этого элемента он становится более тяжелым, чем его окружение и тонет, попадая в более нагретую жидкость. Далее процесс повторяется.

Для второго типа колебаний (интервал B–D на Рис. 1) существенным моментом является зависимость конвективной скорости от концентрации обеих компонент (малых и больших наночастиц), а их эволюция в длинноволновом пределе определяется диффузией (числами Льюиса, которые экстремально малы) [15]. Квадрат частоты для этого типа колебательных возмущений зависит от чисел Льюиса.

Для анализа эволюции нелинейных течений введем функцию тока Ψ и завихренность Φ , связанные со скоростью жидкости \mathbf{v} соотношениями:

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad \Phi = (\text{rot } \mathbf{v})_z. \quad (8)$$

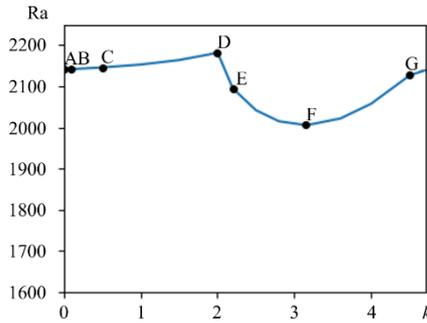


Рис. 1. Нейтральная кривая конвективной неустойчивости бидисперсной коллоидной суспензии при заданных значениях параметров компонентов

Таблица. Характеристики возмущений в фиксированных точках нейтральной кривой (Рис. 1)

Точка на нейтральной кривой	$k = 3, 14$	Ra_{osc}	ω
A	0	2142	0
B	0,1	2142	0,000086
C	0,50	2146	0,00094
D	2,00	2183	0,00886
E	2,20	2095	3,36
F	3,14	2006	8,173
G	4,50	2127	3,5

И перепишем систему уравнений (3) для моделирования двумерных течений с учетом введенных параметров:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left[\frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = \text{Pr} \left[\Delta \Phi + \text{Ra} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \zeta_s}{\partial x} - \frac{\partial \zeta_l}{\partial x} \right) \right], \quad \Delta \Psi = \Phi, \quad (9)_1$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = \Delta \theta, \quad (9)_2$$

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta_i}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} \right] = \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \zeta_i = \text{Le}_i \nabla \left[\nabla (\zeta_i + \psi_i \theta) + \frac{\zeta_i}{\lambda_i} \mathbf{e} \right], \quad i = s, l. \quad (9)_3$$

Тогда условия на горизонтальных границах примут вид:

$$\begin{aligned} z = -\frac{1}{2}: \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 1, \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} + \psi_i \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{C_i}{\lambda_i} = 0, \\ z = \frac{1}{2}: \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0, \quad \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} + \psi_i \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{C_i}{\lambda_i} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

а для завихренности Φ поставим условия Тома [18]: на вертикальных границах функции $\Psi(x, z, t)$, $\Phi(x, z, t)$, $\theta(x, z, t)$, $\zeta_s(x, z, t)$, $\zeta_l(x, z, t)$ удовлетворяют условиям периодичности вида (6).

В качестве начальных условий воспользуемся значениями полей, характеризующих состояние механического равновесия [15]:

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, t=0) = 0, \quad \Phi(x, z, t=0) = 0, \quad \theta(x, z, t=0) = 1/2 - z, \\ \zeta_i(x, z, t=0) = \frac{B_i \lambda_i}{\text{Ra}} - \left(\frac{B_i}{\text{Ra}} - \psi_i \right) z, \quad i = s, l, \end{aligned} \quad (11)$$

с возмущением конечной амплитуды для завихренности в двух фиксированных точках:

$$\Phi(x = L/4, z = 1/2, t = 0) = -1, \quad \Phi(x = 3L/4, z = 1/2, t = 0) = 1. \quad (12)$$

Для получения решений в подкритической области $\text{Ra} < \text{Ra}_{osc}$ применим метод продолжения по параметру.

При численном моделировании нелинейной стадии конвекции строилась сетка 128×64 . Пространственные производные в уравнении движения (9)₁ и в уравнении теплопроводности (9)₂ аппроксимировались центральными разностями. Конечно-разностная аппроксимация уравнений для концентрации (9)₃ должна удовлетворять закону сохранения массы. Это достигалось путем консервативной формы записи уравнения и аппроксимации его при помощи метода контрольного объема [19]. Решение уравнения Пуассона для функции тока на каждом шаге по времени проводилось с использованием быстрых преобразований Фурье [20].

Далее анализировались как локальные, так и интегральные характеристики системы. Основной исследуемой функцией являлась функция тока Ψ . Рассматривались ее максимальное значение внутри ячейки в текущий момент времени: $\Psi_{\max}(t) = \max[\Psi_{i,j}(t_k)]$, и значение в фиксированной точке ячейки: $\Psi_{\text{loc}}(t) = \Psi(0,5; 0,5; t_k)$. В фиксированной точке ячейки также определялся Фурье-спектр колебаний функции тока Ψ_{loc} .

3. Переходные и устойчивые режимы конвекции коллоидной суспензии

При расчете методом конечных разностей для ячейки длиной $L = 2\pi/k = 2$, соответствующей критическим возмущениям, граница устойчивости механического равновесия (Conductive State — CS) соотносится с $Ra_{osc} = 2035$. От предсказанного линейной теорией в предыдущем разделе результата $Ra_{osc} = 2006$ отклонение составляет 1,3%. Частота колебаний на начальном участке течения равняется $\omega = 6,66$ (отклонение от значения, найденного согласно линейной теории 18,5%). Эволюция возмущений при $Ra = 2050$, представленная на рисунке 2, свидетельствует, что конвекция в коллоидной суспензии возникает вследствие обратной бифуркации Хопфа. Уже при небольшой надкритичности (0,7%) максимальное значение функции тока в конвективной ячейке принимает конечное значение: $\Psi_{max} = 1,69$.

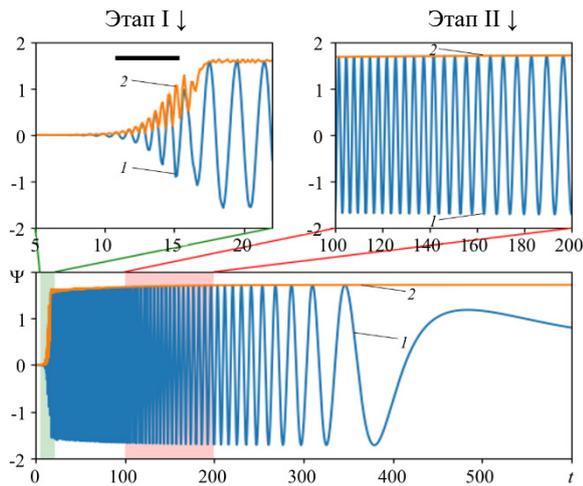


Рис. 2. Эволюция функции тока в фиксированной точке конвективной ячейки $\Psi_{loc}(t)$ (линия 1) и максимального значения функции тока $\Psi_{max}(t)$ (линия 2); $Ra = 2050$

(при $x = 1,0$) и опускается по ее краям (при $x = 0$ и $x = 2$). Зеркальная симметрия решения нарушена: вихрь, вращающийся по часовой стрелке (с центром в $x = 1,5$) захватывает большее количество тяжелых частиц из нижнего приграничного слоя и легкой, обедненной частицами суспензии, из верхнего приграничного слоя, чем противоположно вращающийся вихрь (с центром в $x = 0,5$). Далее ($t = 18,8$) направление вращения конвективных вихрей и течение в центре конвективной ячейки меняются на противоположные, но максимум модуля конвективной скорости отвечает той же координате: $x = 1,0$. В дальнейшем появляется горизонтальное движение. При ($t \geq 20$, Рис. 3) поле распределения примеси качественно перестраивается, появляются узкие погранслои, разделяющие области с высокой и низкой концентрацией примеси.

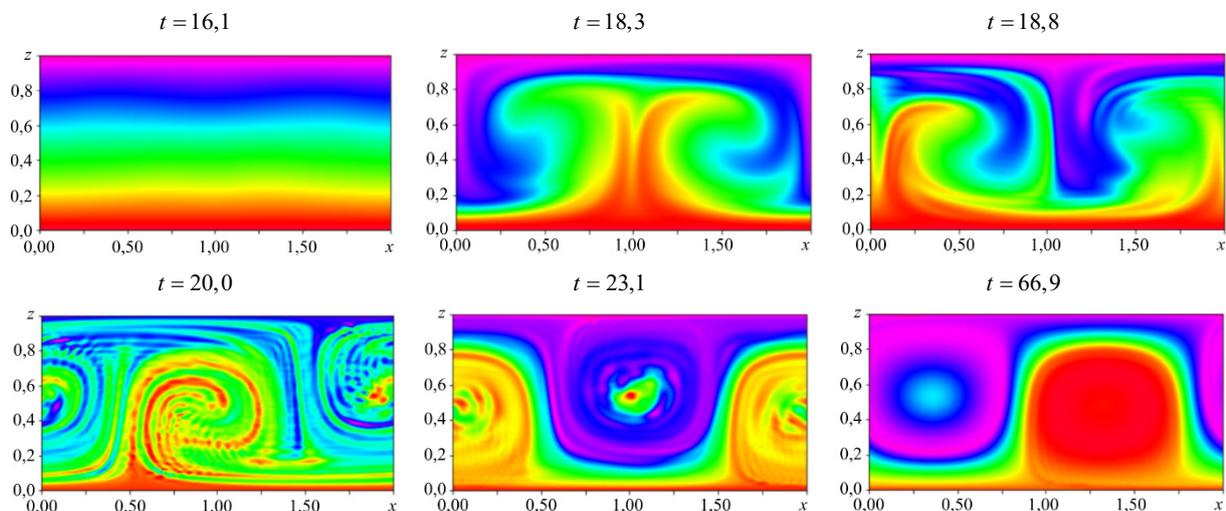


Рис. 3. Распределение полей концентраций больших наночастиц при переходе от стоячей волны к бегущей; $Ra = 2050$

На этапе I ($0 < t < 12$) осциллирует и растет по амплитуде не только значение функции тока в локальной точке $\Psi_{loc}(t)$, но и ее максимальное значение $\Psi_{max}(t)$. Такое поведение решения свидетельствует о том, что течение представляет собой стоячую волну (SW), амплитуда которой постоянно растет. Затем, на этапе II ($12 < t < 19$), как в случае бинарных молекулярных смесей [16] или коллоидных суспензий [10, 11], в результате спонтанного нарушения симметрии режим стоячей волны переходит в режим бегущей волны (Traveling Wave — TW).

Эволюция поля концентрации больших наночастиц во время перехода от SW к TW представлена на рисунке 3. Видно, что в режиме стоячей волны имеется зеркальная симметрия решения относительно плоскости, проходящей через середину ячейки ($t = 16,1$). В следующий момент ($t = 18,3$) жидкость поднимается в центре ячейки

Последующая эволюция бегущей волны в бинарной коллоидной суспензии отличается от поведения в монодисперсной среде [10, 11]. На завершающейся довольно продолжительной части перехода к финальному состоянию (Рис. 2, $17 < t < 600$) период колебаний функции тока в фиксированной точке постепенно увеличивается, конвективная структура (бегущая волна) при этом замедляется до полной остановки. Последний максимум $\Psi_{\text{loc}}(t = 475)$ значительно меньше $\Psi_{\text{max}}(t)$ (см. Рис. 2), что говорит об остановке бегущей волны. Термодиффузионный и гравитационный транспорты не могут поддерживать значительные концентрационные неоднородности. Частота и фазовая скорость бегущей волны уменьшаются до нуля, и в слое устанавливается стационарная конвекция (Stationary Overturning Convection — SOC). Длительность переходного процесса, например, для полимерных частиц в слое $h = 0,29$ см составляет ~ 10 час. Поля функции тока, температуры и концентраций малых и больших частиц в режиме SOC представлены на рисунке 4.

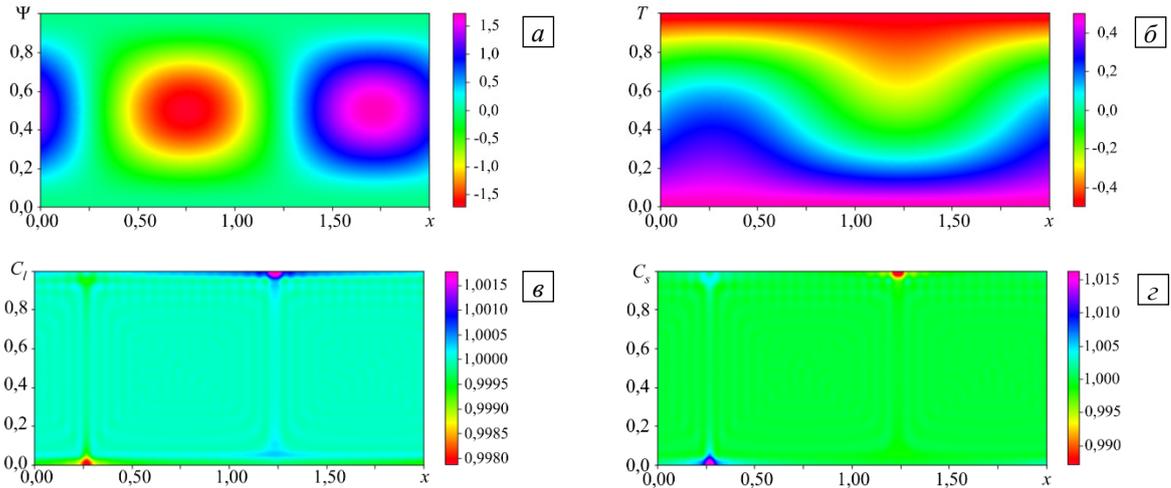


Рис. 4. Распределение полей функции тока (а), температуры (б) и концентраций малых (в) и больших (г) наночастиц; $Ra = 2000$

Поле функции тока и поле температуры демонстрируют слабый пространственный ангармонизм: ведущей в разложениях по горизонтальной координате является первая пространственная гармоника. При этом поля концентрации малых и больших наночастиц имеют качественно иной вид, а именно: распределения примеси внутри конвективных валов практически однородны. Небольшие области неоднородности располагаются вблизи горизонтальных границ в застойных областях между конвективными валиками, где скорость перемешивания стремится к нулю. Отметим, что максимум распределения малых частиц соответствует минимуму распределения крупных частиц. Это можно объяснить тем, что рассматривается случай положительной термодиффузии. Под действием градиента температуры и большие, и малые наночастицы движутся в более холодную область (к верхней границе), причем из-за разницы в параметрах термодиффузии ($\psi_s = 1,8$, $\psi_l = 0,5$) параметр разделения и термодиффузионный градиент

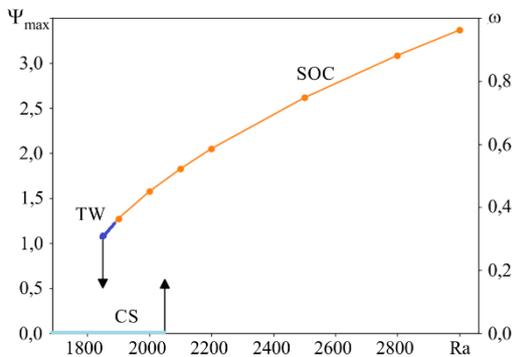


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма конвективных течений бидисперсной коллоидной суспензии

малых наночастиц более чем в три раза превышают значения для больших наночастиц. Гравитационное оседание приводит к транспорту наночастиц в обратную сторону (к нижней границе). Но если для малых наночастиц результирующий поток направлен к холодной верхней границе, то для крупных наночастиц гравитационное оседание доминирует над термодиффузионным потоком, и частицы собираются у нижней границы.

Бифуркационная диаграмма решений, характеризующих состояние бидисперсной коллоидной суспензии представлена на рисунке 5. При $Ra > Ra_{\text{osc}} = 2035$ неустойчивость наступает колебательным образом, однако после длительного переходного процесса устанавливается режим SOC.

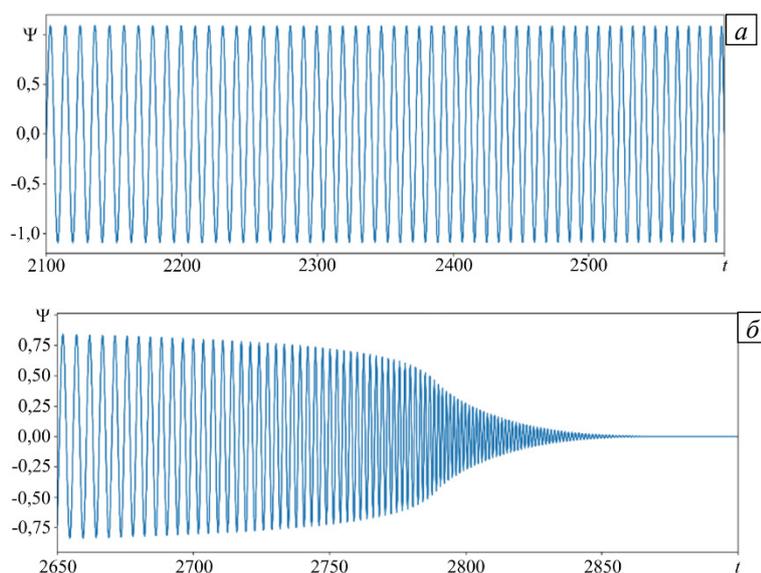


Рис. 6. Эволюция во времени локальной функции тока в режиме бегущей волны (а) и в переходном режиме от бегущей волны к равновесному состоянию (б)

Как и в случае бинарной смеси, будем обозначать границу между режимами TW и SOC как $Ra_* \approx 1875$. В исследуемом течении $Ra_* < Ra_{osc}$. Дальнейшее уменьшение числа Рейля приводит к тому, что в области $Ra_{TW} < Ra < Ra_*$ реализуется устойчивый режим бегущей волны ($Ra \approx 1850$, Рис. 6а). В интервале $2400 < t < 2600$ значение функции тока в локальной точке осциллирует с постоянной частотой $\omega = 0,785$. Далее, при $Ra < Ra_{TW} = 1825$, режим бегущей волны становится неустойчивым ($Ra = 1800$, Рис. 6б). Сначала амплитуда течения и конвективный перенос медленно уменьшаются, затем наступает фаза быстрого спада амплитуды течения,

и увеличения частоты колебаний до значения $\omega = 4,99$. Возмущения становятся малыми и затухают. Бидисперсная коллоидная суспензия переходит в состояние механического равновесия (CS).

4. Заключение

На основе бидисперсной модели, предполагающей наличие малых и больших наночастиц, численно исследована нелинейная стадия конвекции коллоидной суспензии в нагреваемом снизу горизонтальном слое. Получены характеристики переходных и конвективных устойчивых течений: бегущей волны и стационарной конвекции. Параметры суспензии таковы, что под действием гравитационной седиментации тяжелые наночастицы накапливаются у нагретой нижней границы, откуда вымываются конвективным течением. Выявлены условия существования протяженных состояний: стоячих и бегущих волн, а также стационарной конвекции. При превышении числом Рейля критического значения в слое возникает колебательная конвекция в виде стоячей волны. Как и в случае монодисперсной коллоидной суспензии, эта стоячая волна оказывается неустойчивой. Следующий за ее распадом длительный переходный процесс завершается формированием режима стационарной конвекции. Поля концентрации малых и больших наночастиц в этом режиме практически везде однородны, за исключением застойных областей между конвективными валами вблизи горизонтальных границ, где наблюдаются небольшие неоднородности. В подкритической области обнаружен устойчивый режим бегущих волн. Построена бифуркационная диаграмма конвекции коллоидной суспензии. Получены зависимости максимальной функции тока и частоты колебаний в волновых режимах.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00491).

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Mason M., Weaver W. The settling of small particles in a fluid // Phys. Rev. 1924. Vol. 23. P. 412-426. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.23.412>
4. Raikher Yu.L., Shliomis M.I. On the kinetics of establishment of the equilibrium concentration in a magnetic suspension // J. Magn. Mater. 1993. Vol. 122. P. 93-97. [https://doi.org/10.1016/0304-8853\(93\)91047-B](https://doi.org/10.1016/0304-8853(93)91047-B)
5. Shliomis M.I., Smorodin B.L. Convective instability of magnetized ferrofluids // J. Magn. Mater. 2002. Vol. 252. P. 197-202. [https://doi.org/10.1016/S0304-8853\(02\)00712-6](https://doi.org/10.1016/S0304-8853(02)00712-6)
6. Lücke M., Barten W., Büchel P., Fütterer C., Hollinger St., Jung Ch. Pattern formation in binary fluid convection and in systems with through flow // Evolution of spontaneous structures in dissipative continuous systems / Ed. F.H. Busse, S.C. Müller. Springer, 1998. P. 127-196. https://doi.org/10.1007/3-540-49537-1_3
7. Путин Г.Ф. Экспериментальное исследование влияния барометрического распределения на течения ферромагнитных коллоидов // Материалы 11-го рижского совещания по магнитной гидродинамике. Рига: Зинатне, 1984. Т. 3. С. 15-18.
8. Глухов А.Ф., Демин В.А., Попов Е.А. Тепловая конвекция магнитной наносуспензии в узких каналах // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 1. С. 41-51. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462813010055>).

9. Winkel F., Messlinger S., Schöpf W., Rehberg I., Siebenbürger M., Ballauff M. Thermal convection in a thermosensitive colloidal suspension // *New J. Phys.* 2010. Vol. 12. 053003. <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/12/5/053003>
10. Smorodin B.L., Cherepanov I.N., Myznikova B.I., Shliomis M.I. Traveling-wave convection in colloids stratified by gravity // *Phys. Rev. E*. 2011. Vol. 84. 026305. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.84.026305>
11. Smorodin B.L., Cherepanov I.N. Convection of colloidal suspensions stratified by thermodiffusion and gravity // *Eur. Phys. J. E*. 2014. Vol. 37. 118. <http://dx.doi.org/10.1140/epje/i2014-14118-x>
12. Черепанов И.Н. Течение коллоида в горизонтальной ячейке при подогреве сбоку // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 2. С. 135-144. <http://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.2.12>
13. Rosensweig R.E. *Ferrohydrodynamics*. Courier Corporation, 1998. 344 p.
14. Elfimova E.A., Ivanov A.O., Lakhtina E.V., Pshenichnikov A.F., Camp P.J. Sedimentation equilibria in polydisperse ferrofluids: Critical comparisons between experiment, theory, and computer simulation // *Soft Matter*. 2016. Vol. 12. P. 4103-4112. <https://doi.org/10.1039/C6SM00304D>
15. Smorodin B.L., Cherepanov I.N. Onset of convection in bidisperse colloidal suspension // *Microgravity Sci. Technol.* 2022. Vol. 34. 72. <https://doi.org/10.1007/s12217-022-09985-w>
16. Barten W., Lücke M., Kamps M., Schmitz R. Convection in binary fluid mixtures. I. Extended traveling-wave and stationary states // *Phys. Rev. E*. 1995. Vol. 51. P. 5636-5661. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.5636>
17. Любимова Т.П., Зубова Н.А. Возникновение и нелинейные режимы конвекции трехкомпонентной смеси в прямоугольной области пористой среды с учетом эффекта Соре // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2019. Т. 12, № 3. С. 249-262. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.21>
18. Тарунин Е.Л. *Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции*. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 228 с.
19. Роуч П. *Вычислительная гидродинамика*. М.: Мир, 1980. 618 с.
20. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. М.: Наука, 1977. 456 с.

References

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid mechanics*. Oxford, Pergamon Press, 1987. 539 p.
2. Gershuni G. Z., Zhukhovitskii E. M. *Convective stability of incompressible fluids*. Jerusalem, Keter Publishing House, 1976. 330 p.
3. Mason M., Weaver W. The settling of small particles in a fluid. *Phys. Rev.*, 1924, vol. 23, pp. 412-426. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.23.412>
4. Raikher Yu.L., Shliomis M.I. On the kinetics of establishment of the equilibrium concentration in a magnetic suspension. *J. Magn. Magn. Mater.*, 1993, vol. 122, pp. 93-97. [https://doi.org/10.1016/0304-8853\(93\)91047-B](https://doi.org/10.1016/0304-8853(93)91047-B)
5. Shliomis M.I., Smorodin B.L. Convective instability of magnetized ferrofluids. *J. Magn. Magn. Mater.*, 2002, vol. 252, pp. 197-202. [https://doi.org/10.1016/S0304-8853\(02\)00712-6](https://doi.org/10.1016/S0304-8853(02)00712-6)
6. Lücke M., Barten W., Büchel P., Fütterer C., Hollinger St., Jung Ch. Pattern formation in binary fluid convection and in systems with through flow. *Evolution of spontaneous structures in dissipative continuous systems*, ed. F.H. Busse, S.C. Müller. Springer, 1998. P. 127-196. https://doi.org/10.1007/3-540-49537-1_3
7. Putin G.F. *Materials of the 11th Riga meeting on magnetohydrodynamics*. Riga, Zinatne, 1984. Vol. 3, pp. 15-18.
8. Glukhov A.F., Demin V.A., Popov E.A. Thermal magnetic nanosuspension convection in narrow channels. *Fluid dyn.*, 2013, vol. 48, pp. 36-45. <http://dx.doi.org/10.1134/S0015462813010055>
9. Winkel F., Messlinger S., Schöpf W., Rehberg I., Siebenbürger M., Ballauff M. Thermal convection in a thermosensitive colloidal suspension. *New J. Phys.*, 2010, vol. 12, 053003. <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/12/5/053003>
10. Smorodin B.L., Cherepanov I.N., Myznikova B.I., Shliomis M.I. Traveling-wave convection in colloids stratified by gravity. *Phys. Rev. E*, 2011, vol. 84, 026305. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.84.026305>
11. Smorodin B.L., Cherepanov I.N. Convection of colloidal suspensions stratified by thermodiffusion and gravity. *Eur. Phys. J. E*, 2014, vol. 37, 118. <http://dx.doi.org/10.1140/epje/i2014-14118-x>
12. Cherepanov I.N. Flow of colloid liquid in horizontal cell under heating from sidewall. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2017, vol. 58, pp. 1181-1191. <https://doi.org/10.1134/S0021894417070021>
13. Rosensweig R.E. *Ferrohydrodynamics*. Courier Corporation, 1998. 344 p.
14. Elfimova E.A., Ivanov A.O., Lakhtina E.V., Pshenichnikov A.F., Camp P.J. Sedimentation equilibria in polydisperse ferrofluids: Critical comparisons between experiment, theory, and computer simulation. *Soft Matter*, 2016, vol. 12, pp. 4103-4112. <https://doi.org/10.1039/C6SM00304D>
15. Smorodin B.L., Cherepanov I.N. Onset of convection in bidisperse colloidal suspension. *Microgravity Sci. Technol.*, 2022, vol. 34, 72. <https://doi.org/10.1007/s12217-022-09985-w>
16. Barten W., Lücke M., Kamps M., Schmitz R. Convection in binary fluid mixtures. I. Extended traveling-wave and stationary states. *Phys. Rev. E*, 1995, vol. 51, pp. 5636-5661. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.5636>
17. Lyubimova T.P., Zubova N.A. Onset and nonlinear regimes of convection of ternary mixture in a rectangular porous cavity taking into account Soret effect. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no. 3, pp. 249-262. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.21>
18. Tarunin E.L. *Vychislitel'nyy eksperiment v zadachakh svobodnoy konveksii* [Computational experiment in free convection problems]. Irkutsk, Irkutsk University Publishing House, 1990. 228 p.
19. Roache P.J. *Computational fluid dynamics*. Hermosa Publishers, 1976. 446 p.
20. Marchuk G.I. *Methods of numerical mathematics*. New York: Springer-Verlag, 1982. 510 p.

Поступила в редакцию 28.11.2022; после доработки 28.12.2022; принята к опубликованию 30.12.2022

Сведения об авторах

Смородин Борис Леонидович, дфмн, проф., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 614990, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15; e-mail: bsmorodin@yandex.ru

Черепанов Иван Николаевич, кфмн, доц., ПГНИУ; e-mail: cherepanov@yandex.ru