DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.2.12
УДК 532.51

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВЯЗИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ СТАЦИОНАРНОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Д.В. Князев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Анализ уравнений стационарного осесимметричного движения вязкой жидкости в переменных «функция тока–вихрь–функция Бернулли» показывает, что в случае существенно вязкого течения ранг матрицы Якоби системы этих гидродинамических переменных равен двум, что означает наличие между ними функциональной связи, задаваемой одним выражением. Основой для нахождения этой связи служит уравнение, следующее из уравнений движения и переноса вихря. Оно имеет вид линейной комбинации градиентов трёх гидродинамических полей с коэффициентами, равными минорам 2-го порядка матрицы Якоби. С помощью интегрирующего множителя линейную комбинацию можно преобразовать к полному градиенту некоторой функции, сохраняющей, хотя бы локально, постоянное значение на решении исходной системы гидродинамических уравнений. Эта сохраняющаяся величина даст выражение функциональной зависимости между функцией Бернулли, модифицированными вихрем и функцией тока. Для осуществления указанной процедуры требуется определить коэффициенты линейной комбинации как функции заранее неизвестных гидродинамических полей, а не пространственных переменных. Это приводит к необходимости рассмотрения замкнутой системы уравнений, которая и построена в настоящей работе. По её решениям устанавливается вид искомой функциональной зависимости и сами гидродинамические поля. Приведены примеры такого рода точных решений, которые могут служить основой для тестирования численных алгоритмов.

Ключевые слова: уравнения гидродинамики, осесимметричные течения, сохраняющиеся величины, функциональная зависимость, точные решения

FUNCTIONAL DEPENDENCIES OF THE HYDRODYNAMIC FIELDS OF AN AXISYMMETRIC STATIONARY FLOW OF VISCOUS FLUID

D.V. Knyazev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

Analysis of the equations of motion for axisymmetric stationary viscous fluid flows in terms of the variables of stream function, vortex, and Bernoulli function shows that, for essentially viscous flows, the rank of the Jacobi matrix of the system of these hydrodynamic variables is equal to 2, which implies the existence a functional relationship between them given by a single expression. A basis for finding this relationship is the equation derived as a corollary of the equations of motion and vortex transfer. It is represented as a linear combination of the gradients of three hydrodynamic fields, the coefficients of which are equal to the second order minors of the Jacobi matrix. Using an integrating factor, the linear combination is reduced to a full gradient of some function that remains constant at least locally on the solution of the original system of hydrodynamic equations. This conserved quantity is used to find an expression for the functional relationship between the Bernoulli function, the modified vortex and the stream function. To this end it is necessary to find the coefficients of a linear combination as the functions of previously-unknown hydrodynamic fields, rather than spatial variables. This requires consideration of a closed system of equations constructed in this paper. The form of the desired functional relationship and the hydrodynamic fields themselves are determined by finding its solutions. Examples of solutions of this kind, which can serve as a basis for testing different algorithms, are given.

Key words: hydrodynamic equations, axisymmetric flows, conserved quantities, functional relationship, exact solutions

1. Введение

В установившемся трёхмерном потоке идеальной жидкости функция Бернулли сохраняет постоянные значения вдоль линий тока и вихревых линий [1]. Следовательно, стационарные уравнения Эйлера обладают первым интегралом, называемым интегралом Бернулли. В случае неустановившегося безвихревого течения существует интеграл Лагранжа–Коши (его стационарный вариант — интеграл Бернулли–Эйлера), в котором сумма функции Бернулли и частной производной потенциала скорости по времени зависит только от времени [2].

Наличие перечисленных интегралов указывает на функциональную связь между гидродинамическими полями. Проиллюстрировать её проще всего на примере двумерного или осесимметричного течения, если в качестве гидродинамических переменных взять функцию Бернулли, единственную ненулевую компоненту вихря скорости, и функцию тока. Выбор именно этих величин обусловлен тем, что линии тока совпадают с изолиниями функции тока, а вихревые линии являются прямыми, перпендикулярными плоскости течения. Из уравнений двумерного стационарного движения идеальной жидкости, записанных в этих переменных, следует специальная форма интеграла Бернулли, согласно которой вихрь и функция Бернулли зависят только от функции тока [3, 4], то есть вдоль каждой линии тока они постоянны. Таким образом, эти три гидродинамические функции связаны функционально, причём вихрь равен производной функции Бернулли по функции тока, но с обратным знаком. Вид зависимости функции Бернулли от функции тока произволен, точнее, должен быть задан в соответствии с постановкой конкретной задачи [3].

Пример плоскопараллельного невязкого течения показывает, что успех нахождения сохраняющихся величин (интегралов движения) и функциональных связей между гидродинамическими полями зависит от выбора этих полей. В общем случае трёхмерного нестационарного течения невязкой жидкости удобно использовать три потенциала Клебша (переменные Клебша) и функцию Бернулли [5–8]. Преобразование Клебша представляет вектор скорости в виде линейной комбинации градиентов потенциалов с коэффициентами, зависящими от самих потенциалов. С его помощью удаётся показать, что модифицированная функция Бернулли (в стационарном случае совпадающая с обычной функцией Бернулли) зависит только от двух потенциалов, пересечения изоповерхностей которых образуют вихревые линии. Уравнения для этих потенциалов имеют вид гамильтоновой системы [7] и дополняются уравнением 2-го порядка для третьего потенциала Клебша. Роль функции Гамильтона играет модифицированная функция Бернулли. Её вид, как функции двух потенциалов, должен быть задан в соответствии с физической постановкой конкретной задачи.

Попытка применить подход Клебша, заключающийся в представлении градиента функции Бернулли в виде линейной комбинации градиентов некоторых потенциалов, предпринята в [9]. Вообще область применимости преобразований Клебша выходит далеко за пределы классической гидродинамики [7], охватывает некоторые разделы квантовой физики [6]. Формализм Клебша даёт возможность находить первые интегралы соответствующих систем уравнений и формулировать для них вариационные принципы [5]. Некоторые групповые свойства преобразований Клебша исследованы в [10].

Первые интегралы уравнений движения идеальной жидкости широко применяются для решения широкого круга задач, имеющих важное прикладное значение [1–3]. Наличие сохраняющихся величин полезно при тестировании численных схем и алгоритмов в смысле проверки их на «консервативность».

Течение вязкой жидкости описывается системой уравнений Навье–Стокса. В отличие от невязкого случая, первые интегралы для этой системы не найдены, известны лишь отдельные классы её решений [11, 12]. В настоящей работе показано, что в случае осесимметричного стационарного вязкого течения существует функциональная связь между функцией Бернулли и модифицированными вихрем и функцией тока, позволяющая выразить одну из величин через две других. Для нахождения вида этой связи построена замкнутая система уравнений, в которой роль независимых переменных играют три вышеупомянутых величины. Для двумерных установившихся вязких течений аналогичный результат получен в [13].

2. Функциональные связи гидродинамических полей

Уравнения движения вязкой жидкости в форме Громеки–Ламба имеют вид [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\beta - \nu\nabla\times\mathbf{\Omega}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{\Omega} = \nabla\times\mathbf{v}, \qquad \beta = \Pi + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}. \tag{1}$$

Здесь: $\mathbf{v}$, $\mathbf{\Omega}$ — векторы скорости и вихря; β — функция Бернулли; Π — функция, включающая в себя давление, отнесённое к постоянной плотности, и потенциал массовых сил; ν — коэффициент кинематической вязкости; ∇ — дифференциальный оператор Гамильтона.

Рассмотрим установившееся осесимметричное течение вязкой жидкости. Используя цилиндрические координаты (r, ϕ, ζ) с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_\zeta$, введём функцию тока Ψ и представим векторы скорости и вихря следующим образом:

$$\mathbf{v} = \nabla\times\left(\frac{\Psi(r,\zeta)}{r}\mathbf{e}_\phi\right), \qquad \mathbf{\Omega} = r\,\omega(r,\zeta)\mathbf{e}_\phi .$$

В результате уравнения (1) преобразуются к системе

$$\omega\nabla\psi + \nabla\beta = \nu\, r\,\mathbf{e}_\phi \times \nabla\omega, \qquad \Delta\psi - \frac{2\mathbf{e}_r}{r}\cdot\nabla\psi = -r^2\omega, \tag{2}$$

где $\Delta = \nabla\cdot\nabla$ — оператор Лапласа в цилиндрических координатах, $\psi(r,\zeta) = \Psi(r,\zeta) + 2\nu\zeta$.

В случае $\omega = \omega_0 = \text{const}$ система (2) упрощается:

$$\nabla(\omega_0\psi + \beta) = 0, \qquad \Delta\psi - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = -r^2\omega_0 . \tag{3}$$

Из первого уравнения в (3) следует, что функция $S(\psi, \omega_0, \beta) = \omega_0\psi + \beta$ сохраняет постоянное значение. К такого рода движениям жидкости относится течение Пуазейля в цилиндрической трубе кругового нормального сечения. При потенциальном течении ($\omega = 0$) сохраняющаяся величина $S(\psi, \omega_0, \beta)$ переходит в интеграл Бернулли–Эйлера: $\beta = \text{const}$.

Пусть теперь $\omega \neq \text{const}$. Воспользуемся двумя следствиями первого уравнения из (2):

$$\nabla\omega \times \nabla\psi = \mathbf{e}_\phi \nu r \Delta\omega, \qquad \nabla\psi \times \nabla\beta = \mathbf{e}_\phi \nu r \nabla\psi \cdot \nabla\omega . \tag{4}$$

Одно из них — уравнение переноса вихря, второе — результат векторного умножения уравнения движения на $\nabla\psi$. Векторно умножим первое уравнение в (4) на $\nabla\beta$, второе — на $\nabla\omega$, сложим результаты и воспользуемся тождеством Якоби [14]. После векторного умножения на $\mathbf{e}_\phi$ и простых преобразований получим:

$$P\nabla\psi + Q\nabla\omega + R\nabla\beta = 0 . \tag{5}$$

Коэффициенты этого выражения равны:

$$P = \mathbf{e}_\phi \cdot (\nabla\beta \times \nabla\omega), \qquad Q = \nu r \nabla\omega \cdot \nabla\psi, \qquad R = \nu r \Delta\omega . \tag{6}$$

С другой стороны, в силу (4), имеем

$$P = \mathbf{e}_\phi \cdot (\nabla\beta \times \nabla\omega), \qquad Q = \mathbf{e}_\phi \cdot (\nabla\psi \times \nabla\beta), \qquad R = \mathbf{e}_\phi \cdot (\nabla\omega \times \nabla\psi) . \tag{7}$$

Соотношение (5) с коэффициентами (6) справедливо только в том случае, если функции $\psi(r,\zeta)$, $\omega(r,\zeta)$, $\beta(r,\zeta)$ связаны первым уравнением из (2). Выражение (5) с коэффициентами (7) является тождеством, верным для произвольных гладких функций $\psi(r,\zeta)$, $\omega(r,\zeta)$, $\beta(r,\zeta)$, причём P , Q , R — миноры второго порядка матрицы Якоби этой системы функций. Последнее обстоятельство позволяет судить о характере связей между величинами ψ , ω, β .

В случае идеальной жидкости ($\nu = 0$) из (5), (6) следует, что $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, то есть ранг матрицы Якоби системы функций $\psi(r,\zeta)$, $\omega(r,\zeta)$, $\beta(r,\zeta)$ равен единице, а значит две из этих функций могут быть выражены через третью. Обычно это свойство формулируется как утверждение о сохранении величиной ω и функцией Бернулли β постоянного значения вдоль линии тока в осесимметричном стационарном потоке идеальной жидкости. Система (2) редуцируется к уравнению относительно ψ [3, 4]:

$$\Delta\psi - \frac{2\mathbf{e}_r}{r} \cdot \nabla\psi = -r^2 \omega(\psi) ,$$

и связи $d\beta(\psi)/d\psi = -\omega(\psi)$, в которых одна из функций, $\omega(\psi)$ или $\beta(\psi)$, должна быть выбрана из дополнительных физических соображений, диктуемых постановкой конкретной задачи.

Покажем, что в случае вязкой жидкости при выполнении условия $\nabla\omega \neq 0$ ранг матрицы Якоби системы функций $\psi(r,\zeta)$, $\omega(r,\zeta)$, $\beta(r,\zeta)$ равен двум, то есть в каждой точке области течения $P^2 + Q^2 + R^2 > 0$. Исключим $\nabla\omega$ из (7) с помощью первого уравнения из (2):

$$Q = \mathbf{e}_\phi \cdot (\nabla\psi \times \nabla\beta), \qquad P = -\frac{1}{\nu r} \nabla\beta \cdot (\omega\nabla\psi + \nabla\beta), \qquad R = \frac{1}{\nu r} \nabla\psi \cdot (\omega\nabla\psi + \nabla\beta) . \tag{8}$$

Предположим обратное: пусть в некоторой точке области течения $\nabla\omega \neq 0$ и при этом $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Величина Q обращается в нуль в трёх случаях: $\nabla\psi = 0$, $\nabla\beta = 0$, $\nabla\psi$ и $\nabla\beta$ коллинеарные. При $\nabla\psi = 0$ из второго выражения (8) и предположения, что $P = 0$, следует, что $\nabla\beta = 0$, но тогда из первого уравнения (2) вытекает $\nabla\omega = 0$, что противоречит условию $\nabla\omega \neq 0$. Пусть теперь $\nabla\beta = 0$, тогда из предположения $R = 0$ и последнего соотношения (8) следует, что в рассматриваемой точке либо $\nabla\psi = 0$, либо $\omega = 0$, но, в силу уравнения движения (2), оба эти случая вновь противоречат требованию $\nabla\omega \neq 0$. Пусть $\nabla\beta = \alpha\nabla\psi \neq 0$, тогда из $P = 0$, $R = 0$ и (8) получаем $\alpha = -\omega$, что, с учётом первого уравнения (2), опять ведёт к противоречию с условием $\nabla\omega \neq 0$.

Из доказанного утверждения и формулы (5) следует, что величины P и R не обращаются в нуль в одной и той же точке. Отметим, что ось симметрии потока $r = 0$ к области течения не относится, а принадлежит её границе.

Поскольку ранг матрицы Якоби системы функций $\psi(r,\zeta)$, $\omega(r,\zeta)$, $\beta(r,\zeta)$ равен двум, функции, по крайней мере локально, функционально зависимы, то есть существует функция $S(\psi,\omega,\beta)$, сохраняющая постоянное значение на решении системы (2):

$$S(\psi,\omega,\beta)=S_0=\text{const},\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial\beta}\right)^2>0\,.$$

Выражение (5) с помощью интегрирующего множителя $\mu\neq 0$ может быть приведено к полному градиенту функции $S(\psi,\omega,\beta)$, то есть

$$\mu\left(P\nabla\psi+Q\nabla\omega+R\nabla\beta\right)=\nabla S(\psi,\omega,\beta)=\frac{\partial S}{\partial\psi}\nabla\psi+\frac{\partial S}{\partial\omega}\nabla\omega+\frac{\partial S}{\partial\beta}\nabla\beta=0\,. \tag{9}$$

Для этого нужно, чтобы P, Q, R были таковы, что $\nabla\times\left[\mu\left(P\nabla\psi+Q\nabla\omega+R\nabla\beta\right)\right]=0$, а это равносильно требованию:

$$\nabla\psi\times\nabla P+\nabla\omega\times\nabla Q+\nabla\beta\times\nabla R=0\,. \tag{10}$$

Легко убедиться, что условие (10) всегда выполнимо в силу (7) и тождества Якоби. Далее может быть построена система уравнений для нахождения $S(\psi,\omega,\beta)=S_0$.

3. Система уравнений

Предположим, что в области течения диссипативное слагаемое в первом уравнении из (2) не обращается в нуль, то есть $\nabla\omega\neq 0$, следовательно, ранг матрицы Якоби системы гладких функций $\psi(r,\zeta)$, $\omega(r,\zeta)$, $\beta(r,\zeta)$ во всех внутренних точках равен двум. В частном случае это означает, что координаты r, ζ и две из переменных ψ, ω, β связаны (локальным) диффеоморфизмом. Исходя из этого далее примем, что произвольная функция $A(r,\zeta)$ может быть также представлена как гладкая функция переменных ψ, ω, β, а именно:

$$A(r,\zeta)=A\big(\psi(r,\zeta),\beta(r,\zeta),\omega(r,\zeta)\big)\,.$$

Отыскание $S(\psi,\omega,\beta)=S_0$ эквивалентно вычислению P, Q, R как функций переменных ψ, ω, β. Осуществить это возможно исходя из требования совместности (5) (или (9)) с исходной системой (2), а также с (6), (7), (10).

Для удобства введём новые неизвестные $X(\psi,\omega,\beta)$, $Y(\psi,\omega,\beta)$, $Z(\psi,\omega,\beta)$, связанные с $P(\psi,\omega,\beta)$, $Q(\psi,\omega,\beta)$, $R(\psi,\omega,\beta)$, $r(\psi,\omega,\beta)$, первыми производными от $S(\psi,\omega,\beta)$ и интегрирующим множителем $\mu(\psi,\omega,\beta)$, соотношениями

$$P=\nu e^{2Z}\left(\omega Y-r\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial S}{\partial\psi},\qquad Q=\nu^2 r e^{2Z}X=\frac{1}{\mu}\frac{\partial S}{\partial\omega},\qquad R=\nu e^{2Z}Y=\frac{1}{\mu}\frac{\partial S}{\partial\beta}\,. \tag{11}$$

Из (5) и первого уравнения (2), с учётом (11), выразим $\nabla\psi$, $\nabla\beta$:

$$\nabla\psi=\nu\left(X\nabla\omega+Y\,\mathbf{e}_\phi\times\nabla\omega\right),\qquad \nabla\beta=-\nu\left[\omega X\nabla\omega+\left(\omega Y-r\right)\mathbf{e}_\phi\times\nabla\omega\right]. \tag{12}$$

В силу (12) уравнения (7) и второе соотношение в (6) сводятся к уравнению

$$\nabla\omega\cdot\nabla\omega=e^{2Z}\,. \tag{13}$$

Для дальнейшего, используя (12), (13), полезно записать выражение для градиента ∇A некоторой произвольной функции $A(\psi,\omega,\beta)$:

$$\nabla A=D_1[A]\nabla\omega+D_2[A]\mathbf{e}_\phi\times\nabla\omega,\quad D_1[A]=\frac{\partial A}{\partial\omega}+\nu X\left(\frac{\partial A}{\partial\psi}-\omega\frac{\partial A}{\partial\beta}\right),\quad D_2[A]=\nu\left[Y\frac{\partial A}{\partial\psi}+\left(r-\omega Y\right)\frac{\partial A}{\partial\beta}\right]. \tag{14}$$

Формулы (12) — частный случай (14) при $A=\psi$ и $A=\beta$.

Исходя из требования $\nabla\times\nabla A\equiv 0$, найдём условие, которому должны удовлетворять неизвестные X, Y, r для того, чтобы выражение (14) являлось градиентом произвольной функции $A(\psi,\omega,\beta)$. С учётом последнего уравнения из (6), а также того, что

$$\mathbf{e}_r=\nabla r(\psi,\omega,\beta)=D_1[r]\nabla\omega+D_2[r]\mathbf{e}_\phi\times\nabla\omega,\qquad \mathbf{e}_\zeta=\mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\phi=D_2[r]\nabla\omega-D_1[r]\mathbf{e}_\phi\times\nabla\omega, \tag{15}$$

придём к цепочке равенств:

$$\nabla\times\nabla A=\mathbf{e}_\phi e^{2Z}\left(D_1\left[D_2[A]\right]-D_2\left[D_1[A]\right]+\frac{1}{r}\left(Y-D_1[r]\right)D_2[A]\right)=$$
$$=\nu\mathbf{e}_\phi e^{2Z}\left(\frac{\partial A}{\partial\psi}-\omega\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)\left(D_1[Y]-D_2[X]+\frac{Y}{r}\left(Y-D_1[r]\right)\right)=0.$$

Чтобы они выполнялись не зависимо от выбора функции $A(\psi,\omega,\beta)$, неизвестные X, Y, r должны быть связаны уравнением:

$$D_1[Y]-D_2[X]+\frac{Y}{r}\left(Y-D_1[r]\right)=0, \tag{16}$$

а операторы $D_1[A]$, $D_2[A]$ подчинялись тождеству:

$$D_1\left[D_2[A]\right]-D_2\left[D_1[A]\right]+\frac{1}{r}\left(Y-D_1[r]\right)D_2[A]=0, \tag{17}$$

эквивалентному условию $\partial^2 A/(\partial r\partial\zeta)=\partial^2 A/(\partial\zeta\partial r)$. Легко убедиться, что требование (10) сводится к уравнению (16).

Остаётся рассмотреть второе уравнение в (2) и последнее уравнение в (6). Подставив (12) во второе уравнение из (2), найдём:

$$D_1[X]+D_2[Y]+\frac{1}{r}\left(XY-2XD_1[r]-YD_2[r]\right)+\frac{\omega r^2}{\nu}e^{-2Z}=0. \tag{18}$$

Из (15) и (13) следует, что

$$\nabla\omega=e^{2Z}\left(D_1[r]\mathbf{e}_r+D_2[r]\mathbf{e}_\zeta\right),\qquad e^{-2Z}=\left(D_1[r]\right)^2+\left(D_2[r]\right)^2. \tag{19}$$

Подстановка $\nabla\omega$ из (19) в последнее уравнение в (6) даёт:

$$D_1\left[D_1[r]\right]+D_2\left[D_2[r]\right]+\frac{1}{r}\left(Y-D_1[r]\right)D_1[r]=0. \tag{20}$$

Второе выражение в (19) можно рассматривать как определение $Z(\psi,\omega,\beta)$, тогда уравнения (16), (18), (20) образуют искомую замкнутую систему относительно $X(\psi,\omega,\beta)$, $Y(\psi,\omega,\beta)$, $r(\psi,\omega,\beta)$:

$$\begin{gathered}D_1[Y]-D_2[X]+\frac{1}{r}Y\left(Y-D_1[r]\right)=0,\\ D_1[X]+D_2[Y]+D_1[r]\left(\frac{\omega r^2}{\nu}D_1[r]-\frac{2X}{r}\right)+D_2[r]\left(\frac{\omega r^2}{\nu}D_2[r]-\frac{Y}{r}\right)+\frac{XY}{r}=0,\\ D_1\left[D_1[r]\right]+D_2\left[D_2[r]\right]+\frac{1}{r}\left(Y-D_1[r]\right)D_1[r]=0.\end{gathered} \tag{21}$$

Последнее уравнение системы (21) равносильно паре уравнений:

$$D_1[r]=-D_2[\zeta],\qquad D_2[r]=D_1[\zeta]. \tag{22}$$

Действительно, сравнив (15) с выражениями

$$\mathbf{e}_\zeta=\nabla\zeta(\psi,\omega,\beta)=D_1[\zeta]\nabla\omega+D_2[\zeta]\mathbf{e}_\phi\times\nabla\omega,\qquad \mathbf{e}_r=\mathbf{e}_\phi\times\mathbf{e}_\zeta=-D_2[\zeta]\nabla\omega+D_1[\zeta]\mathbf{e}_\phi\times\nabla\omega,$$

получим (22). Потребовав для $D_1[\zeta]$, $D_2[\zeta]$ выполнения условия совместности (17), придём к третьему уравнению (21).

Преобразуем систему (21) к более симметричному виду. Второе уравнение в (19) обратится в тождество, если принять

$$D_1[r] = e^{-Z}\cos W, \qquad D_2[r] = e^{-Z}\sin W\,. \tag{23}$$

Здесь $W(\psi,\omega,\beta)$ — новая неизвестная. Подставив (23) в последнее уравнение системы (21) и потребовав для $D_1[r]$, $D_2[r]$ выполнения условия совместности (17), получим

$$D_1[Z]-D_2[W]=\frac{1}{r}\left(Y-e^{-Z}\cos W\right), \qquad D_1[W]+D_2[Z]=0\,.$$

В результате (21) преобразуется в систему уравнений 1-го порядка относительно $X(\psi,\omega,\beta)$, $Y(\psi,\omega,\beta)$, $Z(\psi,\omega,\beta)$, $W(\psi,\omega,\beta)$, $r(\psi,\omega,\beta)$:

$$\begin{gathered}
D_1[Y]-D_2[X]=\frac{Y}{r}\left(e^{-Z}\cos W-Y\right),\\
D_1[X]+D_2[Y]=\frac{e^{-Z}}{r}\left(2X\cos W+Y\sin W\right)-\frac{XY}{r}-\frac{\omega r^2}{\nu}e^{-2Z},\\
D_1[Z]-D_2[W]=\frac{1}{r}\left(Y-e^{-Z}\cos W\right),\\
D_1[W]+D_2[Z]=0,\\
D_1[r]=e^{-Z}\cos W, \qquad D_2[r]=e^{-Z}\sin W\,.
\end{gathered} \tag{24}$$

Согласно (12), (19), (23) справедливы равенства:

$$\begin{gathered}
\nabla\omega=e^{Z}\left(\mathbf{e}_r\cos W+\mathbf{e}_\zeta\sin W\right),\\
\nabla\psi=\nu e^{Z}\left[\mathbf{e}_r\left(X\cos W+Y\sin W\right)+\mathbf{e}_\zeta\left(X\sin W-Y\cos W\right)\right],\\
\nabla\beta=\nu e^{Z}\left\{\mathbf{e}_r\left[(r-\omega Y)\sin W-\omega X\cos W\right]-\mathbf{e}_\zeta\left[(r-\omega Y)\cos W+\omega X\sin W\right]\right\},\\
\mathbf{v}=\frac{\nu e^{Z}}{r}\left[\mathbf{e}_r\left(2e^{-Z}+Y\cos W-X\sin W\right)+\mathbf{e}_\zeta\left(X\cos W+Y\sin W\right)\right].
\end{gathered} \tag{25}$$

С помощью (25) и (14) легко убедиться в том, что требования $\nabla\times\nabla\psi=0$, $\nabla\times\nabla\omega=0$ приводят к первому и четвёртому уравнениям из (24). Подстановка выражений $\nabla\omega$, $\nabla\psi$ из (25) во второе уравнение в (2) и первое уравнение в (4) даёт второе и третье уравнения в (24). Первое уравнение в (2) и равенство (5) обращаются в тождества. С помощью (25) можно формулировать граничные условия для (24).

После нахождения некоторого решения системы (24) величину $S(\psi,\omega,\beta)=S_0$ вычислим, решив уравнения

$$D_1[S]=0, \qquad D_2[S]=0\,, \tag{26}$$

следующие из (11) (или того, что $\nabla S(\psi,\omega,\beta)=0$ и соотношений (14)), и совместных в смысле выполнения тождества (17).

4. Редукции и примеры решений

Ввиду существования связи $S(\psi,\omega,\beta)=S_0$ наличие в (21) или (24) трёх независимых переменных ψ, ω, β представляется избыточным. Рассмотрим два преобразования, позволяющие сократить число независимых переменных:

$$\xi=\omega, \qquad \eta=\psi, \qquad \chi=S(\psi,\omega,\beta), \tag{27}$$

$$\xi=\omega, \qquad \eta=\beta, \qquad \chi=S(\psi,\omega,\beta)\,. \tag{28}$$

Преобразование (27) будет невырожденным при условии $\partial S/\partial\beta\neq 0$. В результате его действия дифференциальные операторы $D_1[A]$, $D_2[A]$, а вместе с ними и система (24) приводятся к виду, не содержащему переменную χ: $D_1[A]=\dfrac{\partial A}{\partial\xi}+\nu X\dfrac{\partial A}{\partial\eta}$, $D_2[A]=\nu Y\dfrac{\partial A}{\partial\eta}$. При этом функция $S(\psi,\omega,\beta)$, разумеется, заранее не известна, достаточно лишь знать, что она обладает свойствами (26). Таким образом, преобразование (27) понижает размерность задачи.

Преобразование (28) также понижает размерность. Оно не вырождено при условии $\partial S/\partial\psi \neq 0$ и редуцирует операторы $D_1[A]$, $D_2[A]$ к виду

$$D_1[A] = \frac{\partial A}{\partial \xi} - \nu\xi X \frac{\partial A}{\partial \eta}, \qquad D_2[A] = \nu(r - \xi Y)\frac{\partial A}{\partial \eta}.$$

Система (24) обладает решением вида:

$$X = X_0(\omega) + (a\psi - b\beta) X_1(\omega), \quad Y = Y(\omega), \quad Z = Z(\omega), \quad r = r(\omega), \quad W = \pi n. \tag{29}$$

Здесь: a, b — постоянные; n — целое число. Новые неизвестные удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{dr}{d\omega} = (-1)^n e^{-Z}, \qquad \frac{dZ}{d\omega} = \frac{1}{r}\left[Y - (-1)^n e^{-Z}\right],\\
\frac{dX_1}{d\omega} + \left\{\nu(a + b\omega)X_1 + \frac{1}{r}\left[Y - 2(-1)^n e^{-Z}\right]\right\}X_1 = 0,\\
\frac{dY}{d\omega} + \left\{\nu(a + b\omega)X_1 - \frac{1}{r}\left[Y - (-1)^n e^{-Z}\right]\right\}Y = \nu brX_1,\\
\frac{dX_0}{d\omega} + \left\{\nu(a + b\omega)X_1 + \frac{1}{r}\left[Y - 2(-1)^n e^{-Z}\right]\right\}X_0 = -\frac{\omega r^2}{\nu}e^{-2Z}.
\end{gathered} \tag{30}$$

От сомножителя $(-1)^n$ в (30) можно избавиться, выполнив замены: $\omega \to (-1)^n\omega$, $X_1 \to (-1)^n X_1$, $Y \to (-1)^n Y$, $b \to (-1)^n b$. Ограничимся рассмотрением двух частных решений (29), (30), соответствующих $\partial S/\partial\beta = 0$ и $\partial S/\partial\psi = 0$.

Пусть $Y = 0$ ($\partial S/\partial\beta = 0$), $X_1 = 0$, $X = X_0$. Тогда система (30) преобразуется к виду

$$\frac{dr}{d\omega} = e^{-Z}, \qquad r\frac{dZ}{d\omega} = -e^{-Z}, \qquad \frac{dX}{d\omega} = \frac{2}{r}e^{-Z}X - \frac{\omega r^2}{\nu}e^{-2Z},$$

её общее решение будет следующим:

$$r = C_2 e^{C_1\omega}, \qquad X = e^{2C_1\omega}\left[C_3 + \frac{C_2^4}{4\nu}(1 - 2C_2\omega)e^{2C_1\omega}\right], \qquad Z = -\left(\ln|C_1C_2| + C_1\omega\right).$$

Здесь и далее C_i — постоянные интегрирования ($i = 0, 1, 2, \ldots$). При $Y = 0$ первое уравнение (12) можно переписать как $\nabla\psi = \nu X\nabla\omega$, следовательно, $\psi = \psi(\omega)$ и $d\psi/d\omega = \nu X$. Решение последнего уравнения, представленное как

$$2C_1\psi - \left[\nu C_3 + \left(\frac{C_2}{2}\right)^4 (3 - 4C_1\omega)e^{2C_1\omega}\right]e^{2C_1\omega} = C_4,$$

можно принять в качестве $S(\psi,\omega)$, поскольку оно удовлетворяет требованиям (26). С помощью (25) вычислим вектор скорости:

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_r\frac{2\nu}{r} + \mathbf{e}_\zeta\frac{\nu}{C_1C_2^2}\left[C_3 + \frac{C_2^2}{4\nu}r^2\left(1 - 2\ln\frac{r}{C_2}\right)\right]. \tag{31}$$

При выполнении неравенств $-1 < 4\nu C_3/C_2^4 < 0$ продольная составляющая скорости имеет два нуля: при $r = R_0$ и $r = R_1$ (функция тока в этих точках достигает экстремальных значений в силу того, что $v_\zeta = r^{-1}\,\partial\Psi/\partial r$). Это даёт возможность интерпретировать (31) как течение между проницаемыми коаксиальными цилиндрами (см. рисунок *а*).

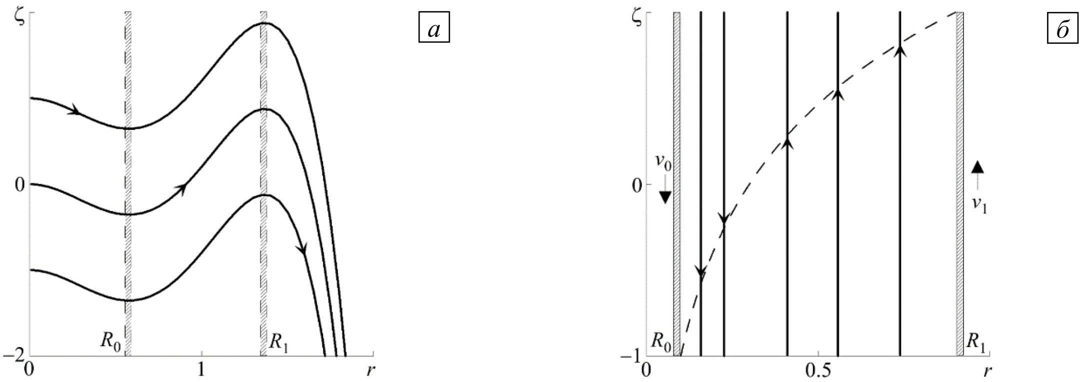

Рис. Качественные картины линий тока в зазоре между цилиндрами радиусов R_0, R_1 при разных видах решений для скорости: (*а*) – решение (31) при $-1 < 4\nu C_3 / C_2^4 < 0$, цилиндры проницаемые, неподвижные; (*б*) – решение (32) при $C_1 = -1/2$, цилиндры движутся вдоль оси ζ со скоростями v_0, v_1

Пусть теперь $Y = r/\omega$ ($\partial S/\partial\psi = 0$), $X_1 = 0$, $X = X_0$. Система (30) преобразуется к виду:

$$\frac{dr}{d\omega} = e^{-Z}, \qquad r\frac{dZ}{d\omega} = \frac{r}{\omega} - e^{-Z}, \qquad \frac{dX}{d\omega} = \left(\frac{2}{r}e^{-Z} - \frac{1}{\omega}\right)X - \frac{\omega r^2}{\nu}e^{-2Z},$$

а её общее решение представляется следующим образом:

$$r = C_2|\omega|^{C_1}, \qquad Z = -\ln\left(C_2|C_1||\omega|^{C_1-1}\right), \qquad X = \frac{C_1^2 C_2^4}{\nu}|\omega|^{2C_1-1}\left(C_3 + \frac{1-|\omega|^{2C_1+1}}{2C_1+1}\right), \qquad \omega C_1 > 0, \qquad C_2 > 0.$$

При $Y = r/\omega$ второе уравнение в (12) можно переписать как $\nabla\beta = -\nu\omega X\nabla\omega$, следовательно, $\beta = \beta(\omega)$ и $d\beta/d\omega = -\nu\omega X$. Решение последнего уравнения

$$\beta - \frac{C_1^2 C_2^4}{\nu}\left[\frac{1 + C_3(2C_1+1) - |\omega|^{2C_1+1}}{2C_1+1}\right]^2 = C_4$$

можно принять в качестве $S(\psi,\omega)$, так как оно удовлетворяет требованиям (26). С помощью (25) вычисляется вектор скорости:

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_r\frac{\nu(2C_1+1)}{rC_1} + \mathbf{e}_\zeta|C_1|C_2^2\left[C_3 + \frac{1-(r/C_2)^{(2C_1+1)/C_1}}{2C_1+1}\right]. \tag{32}$$

Решение (32), кроме прочего, описывает течение жидкости между коаксиальными цилиндрами радиусов R_0 и R_1, движущимися вдоль общей оси со скоростями v_0, v_1. Чтобы показать это, в (32) нужно перейти к пределу при $C_1 \to -1/2$. В результате получится логарифмический профиль скорости $(v_\zeta - v_0)/(v_1 - v_0) = \ln(r/R_0)/\ln(R_1/R_2)$, изображённый на рисунке (*б*) штриховой линией. Линии тока представляют собой прямые, параллельные оси ζ.

Поля скорости вида (31), (32) принадлежат к семейству точных решений уравнений гидродинамики вязкой жидкости

$$\mathbf{v} = \frac{\nu G}{r}\mathbf{e}_r + u(r)\mathbf{e}_\zeta, \qquad \Pi = \Pi_0(r) + \zeta\Pi_1, \qquad \frac{d}{dr}\left(r^{-G}u\right) = \frac{\Pi_1}{2\nu}r^{1-G} + C_0 r^{-1-G},$$

описывающих течения сред, индуцированные постоянным осевым градиентом давления $\Pi_1\mathbf{e}_\zeta$ и линейным однородным источником либо стоком мощности $\nu G/(2\pi)$, расположенным на оси симметрии.

5. Заключение

Анализ уравнений осесимметричного стационарного течения вязкой жидкости показывает, что между модифицированными функцией тока ψ, вихрем ω и функцией Бернулли β существует функциональная зависимость, позволяющая, в частности, выразить одну из функций через две других, в отличие от невязкого случая, когда две из неизвестных выражаются через третью. Иными словами, ранг матрицы Якоби системы функций ψ, ω, β, полностью описывающих течение, равен двум. Указанные свойства дают возможность представить градиенты (25) гидродинамических полей через сами эти поля с помощью новых неизвестных. Для вычисления последних используется замкнутая система уравнений (21) (или (24)). По её решениям может быть восстановлена функциональная связь между ψ, ω, β, являющаяся для данного течения сохраняющейся величиной. Приведены примеры точных решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (тема № 121031700169-1).

Литература

1. *Седов Л.И.* Механика сплошных сред. М.: Наука, 1970. Т. 2. 568 с.
2. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 2. 727 с.
3. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. *Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994. 319 с. (English version https://doi.org/10.1007/978-94-017-0745-9)
5. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. 256 с. (English version https://doi.org/10.1007/978-3-642-45914-6_2)
6. *Sholle M., Marner F., Gaskell P.H.* Potential fields in fluid mechanics: A review of two classical approaches and related recent advances // Water. 2020. Vol. 12. 1241. https://doi.org/10.3390/w12051241
7. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // УФН. 1997. Т. 167, № 11. С. 1138-1167. https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199711a.1137
8. *Keller J.J.* A pair of stream functions for three-dimensional vortex flows // Z. angew Math. Phys. 1996. Vol. 47. P. 821-836. https://doi.org/10.1007/BF00920036
9. *Sholle M., Marner F.* A generalized Clebsch transformation leading to a first integral of Navier-Stokes equations // Phys. Lett. 2016. Vol. 380. P. 3258-3261. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2016.07.066
10. *Мамонтов Е.В.* Преобразования эквивалентности уравнений Клебша // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 153-160. (English version https://doi.org/10.1007/s11202-008-0012-1)
11. *Riley N., Drazin P.* The Navier-Stokes equations. A classification of flows and exact solutions. Cambridge University Press, 2006. 196 p.
12. *Пухначёв В.В.* Симметрии в уравнениях Навье-Стокса // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 6-76.
13. *Knyazev D.V.* An integral of the two-dimensional stationary viscous fluid flow equations // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. Vol. 1945. 012019. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1945/1/012019
14. *Корн Г., Корн М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.

References

1. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnykh sred* [Mechanics of continuous medium]. Moscow: Nauka, 1970. Vol. 2, 568 p.
2. Kochin N.E., Kibel' I.A., Rose N.V. *Theoretical hydromechanics.* New York: Interscience Publ., 1964. Part 2, 569 p.
3. Batchelor G.K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1970. 615 p.
4. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A. *Application of group-theoretical methods in hydrodynamics*. Springer Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. 396 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0745-9
5. Serrin J. Mathematical principles of classical fluid mechanics // Fluid Dynamics I, ed. By C. Truesdell. Springer, 1959. Pp. 125-263. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45914-6_2
6. Sholle M., Marner F., Gaskell P.H. Potential fields in fluid mechanics: A review of two classical approaches and related recent advances. *Water*, 2020, vol. 12, 1241. https://doi.org/10.3390/w12051241
7. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A. Hamiltonian formalism for nonlinear waves. *Phys.-Usp.*, 1997, vol. 40, pp. 1087-1116. https://doi.org/10.1070/PU1997v040n11ABEH000304
8. Keller J.J. A pair of stream functions for three-dimensional vortex flows. *Z. angew Math. Phys.*, 1996, vol. 47, pp. 821-836. https://doi.org/10.1007/BF00920036
9. Sholle M., Marner F. A generalized Clebsch transformation leading to a first integral of Navier-Stokes equations. *Phys. Lett.*, 2016, vol. 380, pp. 3258-3261. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2016.07.066
10. Mamontov E.V. Equivalence transformations of the Clebsch equations. *Sib. Math. J.*, 2008, vol. 49, pp. 123-129. https://doi.org/10.1007/s11202-008-0012-1
11. Riley N., Drazin P. *The Navier-Stokes equations. A classification of flows and exact solutions*. Cambridge University Press, 2006. 196 p.
12. Pukhnachev V.V. Simmetrii v uravneniyakh Nav'ye-Stoksa [Symmetries of the Navier-Stokes equations]. *Uspekhi mekhaniki*, 2006, vol. 4, no. 1, pp. 6-76.
13. Knyazev D.V. An integral of the two-dimensional stationary viscous fluid flow equations. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1945, 012019. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1945/1/012019
14. Korn G., Korn T. *Mathematics handbook for scientists and engineers*. McGraw-Hill Book Company, 1961. 943 p.

Поступила в редакцию 05.11.2022; после доработки 26.12.2022; принята к опубликованию 05.01.2023

Сведения об авторе

Князев Денис Вячеславович, кфмн, нс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: dvk@icmm.ru