

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.2.11](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.2.11)

УДК 534-18; 53.06

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ И ТВЕРДОЙ ЧАСТИЦЫ В ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ АКУСТИЧЕСКИХ ВИБРАЦИЙ

В.В. Коновалов, Т.П. Любимова, С.А. Прокопьев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

В жидкости, которая подвергается ультразвуковому воздействию, численно исследовано взаимодействие сферической твердой частицы и газового пузыря. Параметры воздействия выбирались таким образом, чтобы длина акустической волны намного превышала размеры как пузыря, так и частицы. Поле акустического давления вдали от пузыря считалось однородным. В отсутствие частицы течение имело сферическую симметрию, а скорость границы раздела жидкость–газ находилась из уравнения Рейлея–Плессе. Обсуждаемая в настоящей работе проблема является обобщением классического случая без частицы. Управление движением твердой частицы около газового пузыря является важным для процесса флотации, широко применяемого в технологии обогащения минеральных руд. Задача рассматривалась для высокой частоты и малой либо конечной амплитуды скорости вибраций. В главном порядке малости с учетом вязкости жидкости находилось пульсационное течение для сохраняющей неподвижность тяжелой частицы. В следующем порядке изучались механизмы генерации осредненного течения в объеме жидкости и вблизи ее границ. С помощью полученного осредненного течения установлены величина действующей на частицу осредненной вибрационной силы и ее зависимость от расстояния до поверхности пузыря. Показано, что указанная сила имеет притягивающий характер. Проведено сравнение с данными расчетов в невязком приближении. Обнаружено, что при небольших расстояниях от пузыря наблюдается отклонение найденного значения вибрационной силы от значения, известного из аналитического выражения, согласно которому эта сила пропорциональна градиенту квадрата скорости пульсаций. Демонстрируется, что учет вязкости жидкости приводит к большей осредненной вибрационной силе вблизи пузыря, чем невязкий подход.

Ключевые слова: акустические вибрации, многофазные среды, вибрационная сила, вязкость, флотация, вычислительный эксперимент

THE INTERACTION OF A GAS BUBBLE AND A SOLID PARTICLE IN A LIQUID UNDER ACOUSTIC VIBRATIONS

V.V. Konovalov, T.P. Lyubimova and S.A. Prokopyev

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The interaction of a spherical solid particle and a gas bubble in a liquid subjected to ultrasonic action is numerically studied. The ultrasonic parameters are chosen in such a way that the acoustic wavelength will be much larger than the sizes of both the bubble and the particle. The acoustic pressure field at a distance to the bubble is assumed to be uniform. In the absence of a particle, the flow is a spherically symmetric flow, and the velocity of the liquid–gas interface is found from the Rayleigh–Plesset equation. The problem considered in this paper is a generalization of the classical problem without a particle. The control of the movement of solid particles around the gas bubble is important for the flotation process, which is widely used in the mineral ore beneficiation technology. The problem is considered for high frequency and small or finite vibration velocity amplitude. In the leading order of smallness and taking into the viscosity of a liquid, a pulsating flow is found for the case of a heavy particle that remains its immobility. In the following order, the mechanisms of generation of an averaged flow in the liquid volume and near its boundaries are considered. Using the obtained averaged flow, the averaged vibrational force acting on the particle and its dependence on the distance to the bubble surface are determined. It is shown that this force is an attractive force. A comparison is made with the calculation data in the inviscid approximation. It has been found that, at small distances from the bubble, there is a deviation of the calculated value of vibrational force from the value known from the analytical expression, according to which this force is proportional to the square velocity gradient of pulsations. The results obtained demonstrate that, taking into account the viscosity of a liquid leads to a larger value of the averaged vibrational force near the bubble than the inviscid approach.

Key words: acoustic vibrations, multiphase media, vibration force, viscosity, flotation, numerical experiment

1. Введение

Одним из результатов высокочастотного вибрационного воздействия на гидродинамические системы является появление осредненной вибрационной силы, действующей на взвешенные в жидкости включения с отличающейся плотностью. Задача управления поведением таких включений, как с деформируемой, так и недеформируемой поверхностью, возникает во многих областях практической деятельности. В качестве примеров можно назвать процесс флотации, а также перспективную с точки зрения медицины целенаправленную доставку лекарств по кровеносным сосудам. Вибрации, в том числе акустические, оказываются экономичным и эффективным способом изменения типичного поведения многофазной системы благодаря имеющей место неоднородности инерционных сил, а также ряду других факторов, в частности, сжимаемости газа во взвешенных в жидкости пузырях. Это приводит зачастую к парадоксальным эффектам, например, к опусканию газовых пузырей в вибрирующем в вертикальном направлении столбе жидкости [1].

Важные теоретические результаты получены для движения твердых включений в невязкой жидкости. Выводу осредненных уравнений, управляющих плавучестью тел при наличии вибраций, посвящена работа [2]. Согласно [3, 4], два твердых тела, погруженных в невязкую жидкость, в зависимости от того, ортогональна или параллельна направлению вибраций линия, соединяющая их центры, либо притягиваются, либо отталкиваются под действием вибраций. В [5] представлены аналитические выражения для осредненной силы, действующей на сферическую твердую частицу, которая колеблется в нормальном/касательном направлении относительно твердой стенки в невязкой жидкости. В обоих случаях асимптота для силы притяжения частицы к стенке обратно пропорциональна четвертой степени расстояния между ними, что подтверждается экспериментальными данными в [5].

В [6] продемонстрирован более общий подход, который позволяет определить осредненную силу для сферической твердой частицы, взвешенной в колеблющейся невязкой жидкости, независимо от конфигурации системы. Сила оказывается пропорциональной градиенту квадрата пульсационной скорости в геометрическом центре частицы. Обобщение на случай включения с деформируемой поверхностью осуществлено в [7]. При этом теории [6, 7] строятся в предположении, что диаметр частицы намного меньше, чем характерный размер существующей в жидкости неоднородности.

Заметная неоднородность течения возникает вблизи сжимаемого газового пузыря, когда его поверхность оказывается в поле акустической волны в жидкости. Зачастую можно не принимать во внимание осложняющие факторы, связанные со сжимаемостью жидкой среды [8]. Согласно [9], действующая на взвешенные частицы осредненная вибрационная сила способна в значительной степени увеличивать размер области притяжения частиц к всплывающему в жидкости пузырю. Решение для пульсационного течения записано в [9] в рамках допущения о большей, по сравнению с диаметром пузыря, длине стоячей волны и включает в себя трансляционную и монополярную части. Последняя вызвана колебаниями объема пузыря в поле однородной по пространству составляющей акустического давления. В ряде случаев монополярная мода доминирует, а значит, может рассматриваться как единственная. Она усиливается, когда частота внешнего воздействия близка к собственной частоте колебаний объема пузыря. Заметим, что в обсуждаемой системе возможен и параметрический резонанс, при котором, согласно [10], возбуждаются моды, связанные с изменением формы границы раздела.

Важность результата [9] для интенсификации процесса флотации требует учета различных осложняющих факторов вблизи газового пузыря, которые могут повлиять на его взаимодействие с твердой частицей. Так, ослабляющий эффект адсорбированного поверхностно-активного вещества на пульсации границы раздела сказывается как уменьшение размера области притяжения твердых частиц, что обнаружено в [11].

Вязкость жидкости может вызывать смену знака осредненной вибрационной силы. Сила отталкивания появляется для двух одинаковых по размеру твердых сфер, расположенных друг от друга на расстояниях порядка толщины стокового слоя, в том случае, когда жидкость вибрирует перпендикулярно отрезку, соединяющему их центры [12]. Похожий результат получен в [13] для двух цилиндров с параллельными осями. Смена знака силы наблюдается для сферической частицы в вязкой жидкости около совершающей нормальные вибрации твердой стенки [14]. «Игра» сил притяжения и отталкивания способна приводить к образованию структур в виде цепочек из сферических частиц, взвешенных в колеблющейся жидкости [15, 16].

Целью настоящей работы является численное исследование влияния вязкости жидкости на величину и характер поведения осредненной вибрационной силы при действии на твердую частицу, вблизи колеблющегося газового пузыря.

2. Постановка задачи

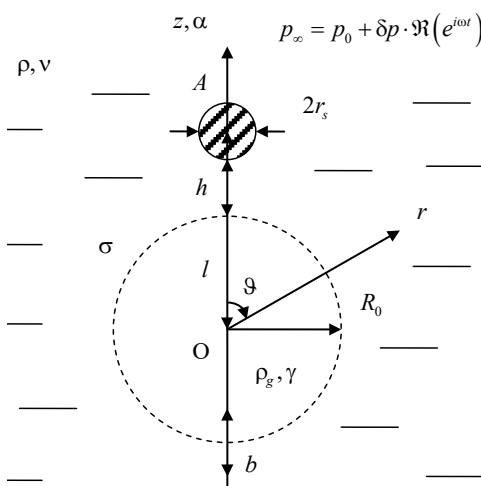


Рис. 1. Конфигурация и параметры системы

Рассмотрим взвешенный в жидкости с коэффициентом кинематической вязкости ν и плотностью ρ газовый пузырь, равновесный радиус которого R_0 (Рис. 1). На границе раздела жидкость–газ действует поверхностное натяжение с коэффициентом σ . Газ в пузыре характеризуется плотностью ρ_g и давлением p_g , которые могут отклоняться от своих равновесных значений ρ_{g0} и p_{g0} .

В объеме жидкости устанавливается стоячая акустическая волна, длина которой намного превышает размер пузыря. На большом удалении от пузыря задано поле акустического давления:

$$p_\infty = p_0 + \delta p \cdot \Re(e^{i\omega t}), \quad (1)$$

которое далее, в целях упрощения настоящего анализа, считаем однородным. В (1) приняты обозначения: p_0 —

атмосферное давление; δp — амплитуда колебаний давления во времени t с циклической частотой ω ; \Re — вещественная часть показательной функции. Неоднородной компонентой давления можно пренебречь, например, в силу малости отношения характерного размера содержащего жидкость сосуда ($L \gg R_0$) к длине волны ($\lambda = 2\pi c/\omega$). Это накладывает следующее ограничение на частоту: $f = \omega/(2\pi) \ll c/L$, где c — скорость звука в жидкости. Так, для заполненного водой контейнера с характерной длиной 10 см это дает верхнюю границу для частоты $f \ll 15$ кГц.

Сформулированная в таком виде задача обладает сферической симметрией, а зависящий от времени радиус пузыря $R(t)$ подчиняется уравнению Рейля–Плессе [17]:

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{p_g - p_\infty}{\rho} - \frac{4\nu}{R}\dot{R} - \frac{2\sigma}{\rho R}, \quad (2)$$

которое в отсутствие акустического воздействия (при $\delta p = 0$) переходит в соотношение Лапласа: $p_{g0} - p_0 = 2\sigma/R_0$.

Если частота ω в выражении (1) достаточно высока, то давление внутри пузыря p_g подчиняется адиабатическому закону:

$$p_g R^{3\gamma} = p_{g0} R_0^{3\gamma} = \text{const}, \quad (3)$$

где γ — характеризующий газ показатель адиабаты, с которым скорость звука в газе c_g связана как $c_g = \sqrt{\gamma(p_g/\rho_g)}$. Здесь плотность газа ρ_g находится из закона сохранения массы $\rho_g R^3 = \rho_{g0} R_0^3 = \text{const}$.

Путем линеаризации соотношения (2) и учета (3) можно связать амплитуду скорости b , с которой колеблется межфазная поверхность, с амплитудой акустического давления δp . При $v \ll R_0^2 \omega/4$ формула связи приобретает вид:

$$b = \frac{\delta p}{\rho R_0 \omega - \left(\gamma p_0 + \frac{2(\gamma-1)\sigma}{R_0} \right) / (R_0 \omega) + \frac{4\rho v}{R_0}} \approx \frac{\delta p}{\rho R_0 \omega - \left(\gamma p_0 + \frac{2(\gamma-1)\sigma}{R_0} \right) / (R_0 \omega)}, \quad (4)$$

где пренебрегается вязкостью жидкости, что заведомо допустимо для ультразвуковых частот и миллиметровых пузырей воздуха в воде. Далее в качестве контролируемого параметра используем амплитуду b , для которой дополнительно полагаем, что $b \ll R_0 \omega$, то есть амплитуда колебаний поверхности пузыря намного меньше его размера.

Пусть на некотором расстоянии от газового пузыря l (см. Рис. 1) находится твердая частица сферической формы радиусом r_s . Плотность материала частицы ρ_s много больше плотности жидкости ρ , следовательно, в лабораторной системе отсчета частицу можем считать неподвижной относительно «быстрого» пульсационного потока. Тогда l — это расстояние между центром пузыря в состоянии равновесия и центром частицы.

Предположим, что размер частицы достаточно мал ($r_s \ll R_0$), так что ее наличие практически не влияет на обладающее сферической симметрией решение для радиальной скорости вдали от пузыря:

$$u_r = b (R_0/r)^2 \Re(e^{i\omega t}), \quad (5)$$

которое определяется через оценку для амплитуды (4).

Радиальную координату r направим от начала сферической системы координат $Or\vartheta\alpha$, выбранного в центре пузыря. Ось z , от которой отсчитывается меридиональный угол ϑ , проведем через центр сферической частицы. Лишь в этом случае, когда $\partial/\partial\alpha \equiv 0$ и $u_\alpha = 0$, возможна осевая симметрия задачи.

Будем использовать в качестве единиц: радиус частицы r_s — для длины, r_s^2/ν — для времени, амплитуду b — для скорости, $\rho v b/r_s$ — для давления. В безразмерной таким образом формулировке появляются следующие характеристики режима течения: число Рейнольдса $Re = b r_s / \nu$; капиллярное число $Ca = \sigma r_s / (\rho v^2)$; безразмерные частота вибраций $\Omega = \omega r_s^2 / \nu$, радиус пузыря $\tilde{R} = R_0 / r_s$ и расстояние между центрами пузыря и частицы $\tilde{l} = (R_0 + l + r_s) / r_s$.

Дальнейший анализ осуществим аналогично работе [13], где показано, что поле пульсаций можно определить в рамках линеаризованной проблемы при условии, что $Re \ll \Omega$, а для нахождения осредненного

решения задачи использовать приближение ползущего течения, корректное при числе Рейнольдса $Re \ll \sqrt{\Omega}$. Кроме того, ограничимся предельной ситуацией недеформируемой поверхности газового пузыря, что соответствует $Ca \rightarrow \infty$. Как следует из представленных далее (см. раздел 3) оценок, значение капиллярного числа Ca действительно велико.

Перейдем к функции тока ψ и завихренности ϕ :

$$\phi = \text{rot}_\alpha \mathbf{u},$$

$$\mathbf{u} = \text{rot} \left\{ 0, 0, \frac{\psi}{r \sin \vartheta} \right\} = \left\{ \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, 0 \right\}.$$

Поля ψ и ϕ , а также функцию f , описывающую возмущение формы межфазной поверхности жидкость–газ, представим в виде осредненной (знак « $\bar{}$ ») и пульсационной (знак « $\hat{}$ ») частей как

$$\begin{aligned} \psi &= \bar{\psi} + \hat{\psi} = \bar{\Psi}(r, \vartheta) + \hat{\Psi}(r, \vartheta) \exp(it) + \text{к.с.}, \\ \phi &= \bar{\phi} + \hat{\phi} = \bar{\Phi}(r, \vartheta) + \hat{\Phi}(r, \vartheta) \exp(it) + \text{к.с.}, \\ f &= \bar{f} + \hat{f} = \bar{F}(\vartheta) + \hat{F}(\vartheta) \exp(it) + \text{к.с.} \end{aligned}$$

Запишем уравнения для пульсационного течения в главном порядке по числу Рейнольдса Re :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \vartheta^2} - \text{ctg} \vartheta \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \vartheta} \right) + r \sin \vartheta \hat{\Phi} &= 0, \\ i\Omega \hat{\Phi} - \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg} \vartheta \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \vartheta} - \frac{\hat{\Phi}}{\sin^2 \vartheta} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия для пульсаций представим в следующем виде:

– в объеме жидкости при $r \rightarrow \infty$

$$\hat{\Psi} = -\frac{1}{2} \tilde{R}^2 \cos \vartheta, \quad \hat{\Phi} = 0;$$

– на оси симметрии при ϑ , равном 0 или π ,

$$\hat{\Psi} = -\frac{1}{2} \tilde{R}^2, \quad \hat{\Phi} = 0;$$

– на свободной недеформируемой поверхности пузыря при $r = \tilde{R}$

$$i\hat{F} = \frac{1}{2} \frac{Re}{\Omega}, \quad \hat{\Psi} = -\frac{1}{2} \tilde{R}^2 \cos \vartheta, \quad \hat{\Phi} + \frac{2}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial r} \right) = 0;$$

– на твердой поверхности частицы при $(r \sin \vartheta)^2 + (r \cos \vartheta - \tilde{l})^2 = 1$

$$\hat{\Psi} = -\frac{1}{2} \tilde{R}^2, \quad \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \vartheta^2} + r \sin \vartheta \hat{\Phi} = 0.$$

Последнее соотношение получается из уравнения (6) в силу условия прилипания, когда $\partial \hat{\Psi} / \partial \vartheta = 0$. Функция тока $\hat{\Psi}$ на твердой неподвижной поверхности постоянна и находится по ее известному значению на бесконечности (при $r \rightarrow \infty$) путем переноса указанного значения вдоль оси симметрии, так как $\partial \hat{\Psi} / \partial r = 0$ при ϑ , равном 0 или π .

Уравнения для осредненного течения в следующем за главным порядке по числу Рейнольдса Re имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \vartheta^2} - \text{ctg} \vartheta \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \vartheta} \right) + r \sin \vartheta \bar{\Phi} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg} \vartheta \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \vartheta} - \frac{\bar{\Phi}}{\sin^2 \vartheta} \right) - \frac{Re}{r^2 \sin \vartheta} \Re \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \vartheta} \frac{\hat{\phi}}{r} + \text{ctg} \vartheta \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \hat{\phi} \right) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) содержит слагаемое квадратичного вида, куда входят пульсационные решения $\hat{\psi}$ и $\hat{\phi}$.

Граничные условия для осредненного течения запишем как:

– в объеме жидкости при $r \rightarrow \infty$

$$\bar{\Psi} = 0, \quad \bar{\Phi} = 0;$$

– на оси симметрии при ϑ , равном 0 или π ,

$$\bar{\Psi} = 0, \quad \bar{\Phi} = 0;$$

– на поверхности пузыря при $r = \tilde{R}$

$$\begin{aligned} \bar{F} &= 0, \\ \bar{\Psi} + \Re\left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \hat{f}\right) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\bar{\Phi} + \frac{2}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} \right) + \Re \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \hat{\phi} + \frac{2}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \right) \right\} \hat{f} \right] = 0; \quad (10)$$

– на поверхности частицы при $(r \sin \vartheta)^2 + (r \cos \vartheta - \tilde{l})^2 = 1$

$$\bar{\Psi} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \vartheta^2} + r \sin \vartheta \bar{\Phi} = 0.$$

Последнее соотношение получается из уравнения (7) в силу условия прилипания, когда $\partial \bar{\Psi} / \partial \vartheta = 0$. Функция тока $\bar{\Psi}$ на твердой неподвижной поверхности постоянна и находится по ее известному значению на бесконечности (при $r \rightarrow \infty$) путем переноса указанного значения вдоль оси симметрии, так как $\partial \bar{\Psi} / \partial r = 0$ при ϑ , равном 0 или π . Квадратичные слагаемые в соотношениях (9) и (10), куда входят решения для пульсационного течения $\hat{\psi}$, $\hat{\phi}$ и \hat{f} , появляются из-за сноса граничных условий на невозмущенную поверхность пузыря $r = \tilde{R}$.

В силу осевой симметрии задачи осредненная вибрационная сила \mathbf{f}_v действует на частицу строго по вертикали, и ее проекция на ось z есть

$$f_{vz} = - \oint_S (\bar{p} \mathbf{n} - \bar{\sigma} \mathbf{n}) \mathbf{e}_z dS, \quad (11)$$

где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности частицы, \mathbf{e}_z — орт вертикальной оси z . Здесь интегрирование осуществляется по сферической поверхности частицы S , где $(r \sin \vartheta)^2 + (r \cos \vartheta - \tilde{l})^2 = 1$. Для перехода к размерной величине силы необходимо произвести умножение полученного выражения на $\rho v b r_s$.

Значения осредненного давления \bar{p} в подынтегральном выражении (11) определим численно из решения задачи Коши. Для этого производные от давления на твердой поверхности частицы при $(r \sin \vartheta)^2 + (r \cos \vartheta - \tilde{l})^2 = 1$, где осредненные и пульсационные части скорости равны нулю, найдем из соответствующих проекций уравнения Навье–Стокса в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} &= \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \vartheta^2} + \frac{\text{ctg} \vartheta}{r^2} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2} \left(\bar{u}_r + \frac{\partial \bar{u}_\vartheta}{\partial \vartheta} + \text{ctg} \vartheta \bar{u}_\vartheta \right), \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \vartheta} &= r \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_\vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{u}_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_\vartheta}{\partial \vartheta^2} + \frac{\text{ctg} \vartheta}{r^2} \frac{\partial \bar{u}_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \vartheta} - \frac{\bar{u}_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right). \end{aligned}$$

Тогда $\bar{p}(B) = p_A + \int_A^B \nabla \bar{p} dL$. Здесь криволинейный интеграл вычисляется вдоль дуги L , проходящей

по поверхности частицы S от верхней точки A на оси z , в которой $\vartheta = 0$ и $r = 1 + \tilde{l}$, а также задана некоторая произвольная величина давления p_A , до некоторой точки B , где ищется текущее давление.

Необходимое в расчетах поле осредненной скорости получим из формул:

$$\bar{u}_r = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \vartheta}, \quad \bar{u}_\vartheta = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r}, \quad \bar{u}_\alpha = 0. \quad (12)$$

Компоненты же тензора вязких напряжений для осредненного течения $\bar{\sigma}$ в подынтегральном выражении (11) найдем как

$$\bar{\sigma}_{rr} = 2 \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial r}, \quad \bar{\sigma}_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \bar{u}_\vartheta}{\partial r} - \frac{\bar{u}_\vartheta}{r}, \quad \bar{\sigma}_{\vartheta\vartheta} = \frac{2}{r} \left(\frac{\partial \bar{u}_\vartheta}{\partial \vartheta} + \bar{u}_r \right), \quad \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} = 2 \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\bar{u}_r}{r} + \frac{\text{ctg} \vartheta \bar{u}_\vartheta}{r} \right). \quad (13)$$

Ряд расчетов выполнен в рамках модели невязкой жидкости. Здесь в качестве единицы длины выбирается радиус частицы r_s , а обратная частота ω^{-1} служит единицей времени. Вместо числа Рейнольдса Re и безразмерной частоты Ω в задаче появляется безразмерная амплитуда колебаний:

$$A = b / (r_s \omega).$$

Решение для потенциала скорости пульсационного течения ($\mathbf{u} = \nabla \xi$)

$$\xi = \Xi(r, \vartheta) \exp(it) + \text{к.с.}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Xi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Xi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \Xi}{\partial \vartheta^2} + \text{ctg} \vartheta \frac{\partial \Xi}{\partial \vartheta} \right) = 0.$$

Ставятся следующие граничные условия, куда входит функция формы поверхности пузыря $f = iF(\vartheta) \exp(it) + \text{к.с.}$:

– в объеме жидкости при $r \rightarrow \infty$

$$\Xi = -\frac{A \tilde{R}^2}{2 r};$$

– на оси симметрии при ϑ , равном 0 или π ,

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \vartheta} = 0;$$

– на недеформируемой поверхности пузыря при $r = \tilde{R}$

$$F = -\frac{1}{2} A, \quad F + \frac{\partial \Xi}{\partial r} = 0;$$

– на поверхности частицы при $(r \sin \vartheta)^2 + (r \cos \vartheta - \tilde{l})^2 = 1$:

$$\frac{\partial \Xi}{\partial n} = 0.$$

Проекция на ось z осредненной вибрационной силы \mathbf{f}_v , действующей на частицу, в отсутствие вязкости вычисляется как

$$f_{vz} = \int_S \left\{ \left(\frac{\partial \Xi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Xi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right\} n_z dS.$$

Здесь интегрирование осуществляется по сферической поверхности частицы S , где $(r \sin \vartheta)^2 + (r \cos \vartheta - \tilde{l})^2 = 1$.

Для перехода к размерной величине силы необходимо произвести умножение на $\rho r_s^4 \omega^2$.

3. Результаты

Расчеты проводились в пакете CrystallPack [17], который предназначен для решения гидродинамических задач при помощи итерационного метода Ньютона. Точность аппроксимации граничных условий на криволинейных границах (в настоящем случае на поверхности твердой частицы) обеспечивается в пакете в рамках двух подходов. Во-первых, декартова сетка с уточняемым шагом при необходимости измельчается

в требуемое число раз вблизи сложных границ (либо внутри пограничных слоев). Во-вторых, граничные условия ставятся не строго в узлах расчетной сетки, а сносятся на реальную физическую поверхность через процедуру линейной/квадратичной аппроксимации по значениям в узлах сетки.

В силу осевой симметрии задачи достаточно, чтобы двумерная расчетная область охватывала диапазон изменения меридиональной координаты ϑ от 0 до π . Размер же области по радиальной координате r выбирался равным $10r_s$. Разрешение расчетной сетки вдоль верхней и правой границ области составляло, соответственно, 301 и 201 точек. Применялось четыре уровня измельчения сетки, в конечном итоге в интересующих местах области исследования ее шаги уменьшались в 16 раз, а именно: около нижней границы расчетной области; вблизи геометрической границы твердой частицы; у левой границы области ниже частицы. В результате число узлов сетки составляло порядка 100–200 тысяч в зависимости от положения частицы.

Важной особенностью пакета CrystarPack, которая была использована в расчетах, является возможность создавать новое вектор-решение посредством записи в него значений физического поля, уже вычисленных с выбранной точностью аппроксимации. Так, например, вносить определенные по формулам (12) и сохраненные величины компонент скорости в узлах расчетной сетки. Либо находить на основе соотношений (13) компоненты вязких напряжений по известным с предыдущего этапа компонентам скорости. Заметим, что доступ к вектору-решению осуществляется вызовом предоставляемых пакетом процедур.

Ниже приводятся результаты расчетов для пузыря миллиметрового размера ($R_0 = 5 \cdot 10^{-4}$ м) в воде (плотность $\rho = 998,2$ кг/м³ и кинематическая вязкость $\nu = 10^{-6}$ м²/с) и твердой частицы диаметром сто микрон ($r_s = 5 \cdot 10^{-5}$ м). Именно такие размеры пузыря и частицы представляют интерес для процесса флотации. Циклическая частота вибраций ω варьировалась от $5 \cdot 10^3$ до $2 \cdot 10^4$ с⁻¹. Амплитуда скорости поверхности пузыря в акустическом поле фиксировалась и составляла $b = 0,01$ м/с. Коэффициент поверхностного натяжения на поверхности пузыря равнялся $\sigma = 0,0728$ Н/м, а значит, капиллярное число было достаточно велико ($Ca \approx 3647$), что делает обоснованным приближение недеформируемой границы раздела сред, которое использовалось в расчетах.

На рисунке 2 можно видеть зависимость действующей на твердую частицу осредненной вибрационной силы от расстояния между поверхностями газового пузыря и твердой частицы для различных значений циклической частоты внешнего воздействия ω . Штриховой линией показаны результаты расчетов в невязком приближении.

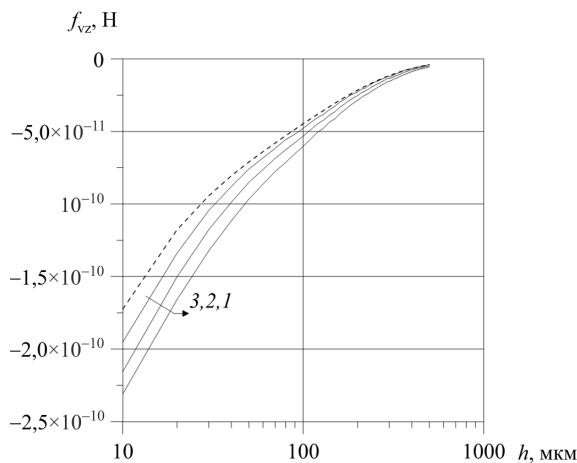


Рис. 2. Зависимость вибрационной силы от расстояния между поверхностями газового пузыря и твердой частицы

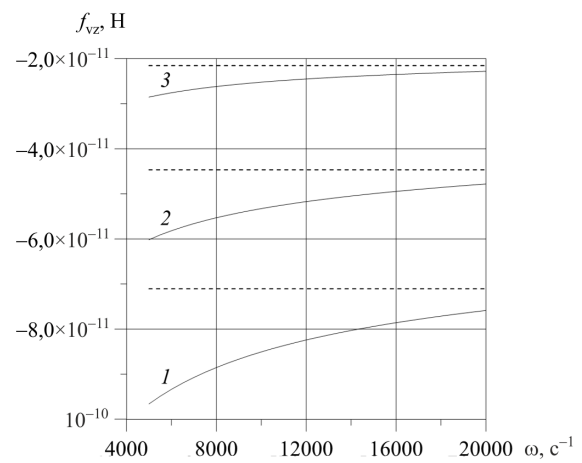


Рис. 3. Зависимость вибрационной силы от частоты акустического воздействия

Отметим, что вибрационная сила имеет всегда притягивающий характер и вблизи поверхности пузыря увеличивается с понижением частоты. Такая зависимость от частоты связана с вязкими напряжениями в интеграле для силы в осредненном течении (см. (11)). С ростом либо расстояния между частицей и пузырем, либо частоты роль вязкости жидкости понижается, и происходит переход к высокочастотному пределу, где единственным действующим фактором является фиксированная амплитуда скорости пульсационного течения $b = 0,01$ м/с. Это можно видеть на рисунке 3, где кривые становятся более пологими при выборе большего расстояния, а именно: 50 мкм (кривая 1), 100 мкм (кривая 2), 200 мкм (кривая 3).

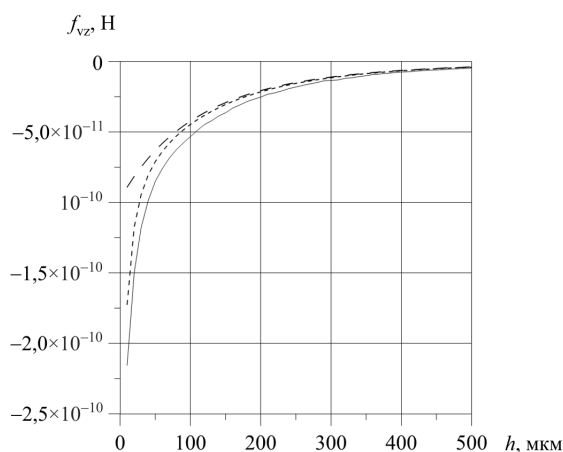


Рис. 4. К сравнению подходов для определения вибрационной силы и ее зависимости от расстояния

последняя методика дает силу большей величины, чем другие подходы, в особенности для малых расстояний между пузырьком и частицей.

4. Заключение

В настоящей работе рассмотрено влияние вязкости жидкости на осредненную вибрационную силу, действующую на сферическую твердую частицу около газового пузыря, который совершает высокочастотные колебания во внешнем поле акустического давления. Задача изучена численно в рамках двухполюсного подхода с разделением течения на пульсационную и осредненную составляющие и в приближении недеформируемой поверхности пузыря. В качестве метода решения использовался итерационный метод Ньютона.

В полном соответствии с известной невязкой теорией на больших расстояниях между пузырьком и частицей на последнюю действует сила притяжения к пузырьку, что есть следствие закона Бернулли. Однако на расстояниях порядка толщины стокового слоя сила отталкивания, которая появляется, например, при нахождении частицы около вибрирующей твердой стенки, в настоящей работе не обнаружена. Более того, вязкость оказывается положительным фактором, который способствует притяжению частицы к пузырьку. Это можно связать с существованием вблизи свободной поверхности жидкости более «слабого», по сравнению с пограничным слоем около твердой стенки, пограничного слоя. В обсуждаемом случае не возникает ограниченного твердыми границами течения при приближении частицы к поверхности пузыря. В результате осредненные вязкие напряжения, входящие в интеграл для вибрационной силы, толкают частицу к пузырьку.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-69-46066) <https://rscf.ru/project/20-69-46066/>.

Литература

1. *Blekhman I.I., Blekhman L.I., Sorokin V.S., Vaisberg L.A., Vasilkov V.B., Yakimova K.S.* Motion of gas bubbles and rigid particles in vibrating fluid-filled volumes // *Procedia IUTAM*. 2013. Vol. 8. P. 43-50. <https://doi.org/10.1016/j.piutam.2013.04.007>
2. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А.* О движении твердого тела в вибрирующей жидкости // *Конвективные течения* / Под ред. Е.М. Жуховицкого. Пермь: Перм. гос. пед. ин-т, 1987. С. 61-71.
3. *Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P.* The motion of solid body in a liquid under the influence of a vibrational field // *Proc. of the First Int. Symp. on Hydromechanics and Heat/Mass Transfer in Microgravity*. Perm–Moscow, Russia, July 6-14, 1991. Gordon and Breach, 1992. P. 247-251.
4. *Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P., Roux B.* Vibration influence on the dynamics of a two-phase system in weightlessness conditions // *J. Phys. IV France*. 2001. Vol. 11. P. Pr6-83-Pr6-90. <https://doi.org/10.1051/jp4:2001610>
5. *Hassan S., Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Kawaji M.* Effects of vibrations on particle motion near a wall: Existence of attraction force // *Int. J. Multiphas. Flow*. 2006. Vol. 32. P. 1037-1054. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.05.008>
6. *Заичкин Е.В., Любимов Д.В.* Поведение взвешенного в жидкости тела в поле торсионных вибраций // *Вибрационные эффекты в гидродинамике* / Под ред. Д.В. Любимова. Пермь: Изд-е Перм. ун-та, 2001. Вып. 2. С. 97-109.
7. *Lyubimov D., Cherepanov A., Lyubimova T.* Behavior of a drop (bubble) in a non-uniform pulsating flow // *Adv. Space Res.* 2002. Vol. 29. P. 667-672. [https://doi.org/10.1016/S0273-1177\(01\)00669-X](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(01)00669-X)
8. *Низматуллин Р.И., Ахатов И.Ш., Вахитова Н.К.* Вынужденные колебания газового пузырька в сферическом объеме сжимаемой жидкости // *ПМТФ*. 1999. Т. 40, № 2. С. 111-118. (English version <https://doi.org/10.1007/BF02468525>)

9. Lyubimov D.V., Klimenko L.S., Lyubimova T.P., Filippov L.O. The interaction of a rising bubble and a particle in oscillating fluid // *J. Fluid Mech.* 2016. Vol. 807. P. 205-220. <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2016.608>
10. Nabergoj R., Francescutto A. On thresholds for surface waves on resonant bubbles // *J. Phys. Colloques.* 1979. Vol. 40. P. C8-306-C8-309. <http://dx.doi.org/10.1051/jphyscol:1979854>
11. Lyubimov D.V., Klimenko L.S., Lyubimova T.P., Filippov L.O. Surfactant effect on interaction of rising bubble and particle in a liquid subjected to vibrations // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. Vol. 879. 012022. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/879/1/012022>
12. Klotsa D., Swift M.R., Bowley R.M., King P.J. Interaction of spheres in oscillatory fluid flows // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 76. 056314. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.056314>
13. Lyubimova T., Lyubimov D., Shardin M. The interaction of rigid cylinders in a low Reynolds number pulsational flow // *Microgravity Sci. Technol.* 2011. Vol. 23. P. 305-309. <https://doi.org/10.1007/s12217-010-9252-3>
14. Saadatmand M., Kawaji M. Mechanism of vibration-induced repulsion force on a particle in a viscous fluid cell // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88. 023019. <https://doi.org/10.1103/physreve.88.023019>
15. Klotsa D., Swift M.R., Bowley R.M., King P.J. Chain formation of spheres in oscillatory fluid flows // *Phys. Rev. E.* 2009. Vol. 79. 021302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.021302>
16. Lyubimov D.V., Baydin A.Y., Lyubimova T.P. Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization // *Microgravity Sci. Technol.* 2013. Vol. 25. P. 121-126. <https://doi.org/10.1007/s12217-012-9336-3>
17. Konovalov V.V. Development of CrystarPack numerical package for solving computational fluid dynamics problems // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2022. Vol. 2317. 012003. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2317/1/012003>

References

1. Blekhman I.I., Blekhman L.I., Sorokin V.S., Vaisberg L.A., Vasilkov V.B., Yakimova K.S. Motion of gas bubbles and rigid particles in vibrating fluid-filled volumes. *Procedia IUTAM*, 2013, vol. 8, pp. 43-50. <https://doi.org/10.1016/j.piutam.2013.04.007>
2. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. O dvizhenii tverdogo tela v vibriruyushchey zhidkosti [On the motion of a rigid body in a vibrating liquid] // *Konvektivnyye techeniya* [Convective Currents], ed. by E.M. Zhukhovitskiy. Perm: Perm. gos. ped. in-t, 1987. Pp. 61-71.
3. Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P. *Proc. of the First Int. Symp. on Hydromechanics and Heat/Mass Transfer in Microgravity. Perm–Moscow, Russia, July 6-14, 1991. Gordon and Breach, 1992. Pp. 247-251.*
4. Lyubimov D.V., Cherepanov A.A., Lyubimova T.P., Roux B. Vibration influence on the dynamics of a two-phase system in weightlessness conditions. *J. Phys. IV France*, 2001, vol. 11, pp. Pr6-83-Pr6-90. <https://doi.org/10.1051/jp4:2001610>
5. Hassan S., Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Kawaji M. Effects of vibrations on particle motion near a wall: Existence of attraction force. *Int. J. Multiphas. Flow*, 2006, vol. 32, pp. 1037-1054. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2006.05.008>
6. Zaichkin E.V., Lyubimov D.V. Povedeniye vzveshennogo v zhidkosti tela v pole torsionnykh vibratsiy [The behavior of a body suspended in a fluid in a field of torsional vibrations] // *Vibratsionnyye efekty v gidrodinamike* [Vibration effects in hydrodynamics], ed. by D.V. Lyubimov. Perm, Perm State University, 2001. Iss. 2. Pp. 97-109.
7. Lyubimov D., Cherepanov A., Lyubimova T. Behavior of a drop (bubble) in a non-uniform pulsating flow. *Adv. Space Res.*, 2002, vol. 29, pp. 667-672. [https://doi.org/10.1016/S0273-1177\(01\)00669-X](https://doi.org/10.1016/S0273-1177(01)00669-X)
8. Nigmatulin R.I., Akhatov I.S., Vakhitova N.K. Forced oscillations of a gas bubble in a spherical volume of a compressible liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, pp. 285-291. <https://doi.org/10.1007/BF02468525>
9. Lyubimov D.V., Klimenko L.S., Lyubimova T.P., Filippov L.O. The interaction of a rising bubble and a particle in oscillating fluid. *J. Fluid Mech.*, 2016, vol. 807, pp. 205-220. <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2016.608>
10. Nabergoj R., Francescutto A. On thresholds for surface waves on resonant bubbles. *J. Phys. Colloques*, 1979, vol. 40, pp. C8-306-C8-309. <http://dx.doi.org/10.1051/jphyscol:1979854>
11. Lyubimov D.V., Klimenko L.S., Lyubimova T.P., Filippov L.O. Surfactant effect on interaction of rising bubble and particle in a liquid subjected to vibrations. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2017, vol. 879, 012022. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/879/1/012022>
12. Klotsa D., Swift M.R., Bowley R.M., King P.J. Interaction of spheres in oscillatory fluid flows. *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 76, 056314. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.056314>
13. Lyubimova T., Lyubimov D., Shardin M. The interaction of rigid cylinders in a low Reynolds number pulsational flow. *Microgravity Sci. Technol.*, 2011, vol. 23, pp. 305-309. <https://doi.org/10.1007/s12217-010-9252-3>
14. Saadatmand M., Kawaji M. Mechanism of vibration-induced repulsion force on a particle in a viscous fluid cell. *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 88, 023019. <https://doi.org/10.1103/physreve.88.023019>
15. Klotsa D., Swift M.R., Bowley R.M., King P.J. Chain formation of spheres in oscillatory fluid flows. *Phys. Rev. E*, 2009, vol. 79, 021302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.79.021302>
16. Lyubimov D.V., Baydin A.Y., Lyubimova T.P. Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization. *Microgravity Sci. Technol.*, 2013, vol. 25, pp. 121-126. <https://doi.org/10.1007/s12217-012-9336-3>
17. Konovalov V.V. Development of CrystarPack numerical package for solving computational fluid dynamics problems. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2022, vol. 2317, 012003. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2317/1/012003>

Поступила в редакцию 23.11.2022; после доработки 28.11.2022; принята к опубликованию 29.11.2022

Сведения об авторах

Коновалов Владимир Владиславович, кфмн, нс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: konovalov@icmm.ru

Любимова Татьяна Петровна, дфмн, проф., зав. лаб., ИМСС УрО РАН; e-mail: lyubimovat@mail.ru

Прокопьев Сергей Анатольевич, кфмн, мнс, ИМСС УрО РАН; e-mail: asaznai@gmail.com