

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.1.8](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.1.8)

УДК 539.3

ГИБРИДНЫЙ МЕТОД ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ АНТИПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТЫХ ВОЛНОВОДОВ С ПРИСОЕДИНЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

А.Д. Ханазарян, М.В. Голуб

Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация

Использование сеточных методов для моделирования протяженных слоистых структур с неоднородностями приводит к увеличению вычислительных затрат при дискретизации части волновода, имеющей значительные линейные размеры, тогда как полуаналитические численные методы не позволяют напрямую описывать структуры с локальными неоднородностями произвольной формы. Для компенсации недостатков, свойственных этим двум классам численных методов, в настоящей работе предложена гибридная схема на основе метода спектральных элементов (МСЭ) и полуаналитического метода конечных элементов (ПАМКЭ) для изучения антиплоских колебаний составной структуры в частотной области. Так, в протяженном волноводе схема дает возможность с помощью ПАМКЭ представить решение в виде суммы мод, а смежные области дискретизировать МСЭ. На общей для двух областей границе задаются условия непрерывности перемещений и напряжений. Для сопряжения решений вводится вспомогательная функция перемещений, которая раскладывается по тем же базисным функциям, что фигурируют в МСЭ и ПАМКЭ (рассматриваются интерполяционные полиномы Лагранжа на узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто). Неизвестные коэффициенты разложения вспомогательной функции определяются методом Галеркина и методом коллокаций. Установлено, что оба метода обеспечивают одинаковую точность. Сравниваются результаты моделирования на основе гибридной схемы, полученные методами Галеркина и коллокаций, а также в стандартном пакете конечно-элементного анализа. Демонстрируется их хорошее совпадение. Представленный гибридный подход без существенных ограничений может быть обобщен на случай плоских колебаний, но требует тщательной проработки при переходе к трехмерному случаю.

Ключевые слова: гибридный метод, составные структуры, антиплоские колебания, метод спектральных элементов, полуаналитический метод, неразрушающий контроль, упругие волны

HYBRID METHOD FOR MODELLING ANTI-PLANE VIBRATIONS OF LAYERED WAVEGUIDES WITH BONDED COMPOSITE JOINTS

A.D. Khanazaryan and M.V. Golub

Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation

The use of mesh-based methods for modeling elongated composite structures with inhomogeneities leads to an increase in computational costs when discretizing the waveguide part of greater linear dimensions, while the semi-analytical numerical methods do not allow one to directly describe the structures with local inhomogeneities of an arbitrary shape. To compensate for the shortcomings of these two classes of numerical methods, we propose a hybrid scheme based on the spectral element method (SEM) and the semi-analytical finite element method (SAFEM) for studying the anti-plane vibrations of a composite structure in the frequency domain. Thus, for a waveguide, this scheme makes it possible to represent the solution via the SAFEM as a sum of modes or guided waves, and the adjacent regions are discretized using the SEM. The displacement and stress continuity conditions are imposed on the common boundary of two domains. To couple the solutions, we introduce an auxiliary function of displacement, which is approximated by applying the same basis functions as those used in SEM and SAFEM (Lagrange interpolation polynomials on the Gauss–Legendre–Lobatto nodal points). The unknown expansion coefficients of this function are determined by the Galerkin and collocation methods. It has been established that both methods provide the same accuracy. The results obtained by the hybrid approach employing the Galerkin and collocation methods are compared with the results calculated in the standard finite element software. It is shown that they are in good agreement. The presented hybrid approach can be straightforwardly extended to the case of in-plane motion, but it requires significant refinement for a three-dimensional case.

Key words: hybrid method, composite structures, anti-plane vibrations, spectral element method, semi-analytical method, non-destructive evaluation, elastic waves

1. Введение

В последние десятилетия доля композитных материалов в различных областях промышленности заметно выросла. К примеру, композиты нашли применение в областях, где наблюдается потребность в улучшенных прочностных свойствах конструкций, в частности, в авиакосмической отрасли [1] или при подводном строительстве [2]. Такого рода изделиям присущи зоны, в которых соединяется (стыкуется) несколько материалов [3]. Эти зоны являются наивероятнейшим местом формирования отслоений и других дефектов [4]. Для безопасной эксплуатации слоистых (составных) структур требуется постоянный контроль зон соединения на протяжении всего жизненного цикла конструкции и, при необходимости, возможность вмешательства, чтобы не допустить ее разрушения [5]. Известные методы неразрушающего контроля, такие как ультразвуковые, термографические, радиографические, голографические методы и другие [6, 7], не всегда способны обеспечить надежный и регулярный мониторинг в соответствии с существующими стандартами. Один из протоколов наблюдений удастся получить с помощью систем мониторинга объектов в режиме реального времени [7, 8]. К наиболее перспективным методам инспекции тонкостенных композитных конструкций можно отнести подход, основанный на использовании бегущих упругих волн [6, 8].

При разработке надежных методов обнаружения дефектов на основе упругих волн возникает потребность в эффективных математических моделях и алгоритмах. Так как моделируемые физические процессы описываются уравнениями в частных производных в областях различной конфигурации, для которых получить аналитическое решение затруднительно или невозможно, то задачи такого рода можно разрешить только численными методами. При этом для сложных структур, включающих области простых форм, комбинация различных по своей природе подходов, например, полуаналитических и прямых численных методов, позволяет значительно экономить вычислительные ресурсы. Подобные подходы к решению задач математической физики, объединяющие преимущества нескольких комбинируемых методов, относят к гибридным [9, 10].

Наиболее распространенным прямым численным методом решения волновых задач является метод конечных элементов (МКЭ) [11]. Ключевой недостаток как МКЭ, так и родственного ему метода спектральных элементов (МСЭ) [12], предполагающего использование многочленов высоких порядков, — необходимость увеличения числа степеней свободы/элементов для достижения приемлемой точности решения. Это приводит к росту вычислительных затрат при наличии протяженных структур (волноводов). Подобный же недостаток, хотя с проявлением в несколько меньшей степени, имеют метод граничных элементов (МГЭ) [13] и метод масштабированных граничных конечных элементов (ММГКЭ) [14]. В МГЭ численная дискретизация проводится на компакте размерностью на единицу меньшей, чем размерность пространства задачи, что при наличии аналитических представлений для матрицы Грина приводит к меньшим затратам машинного времени. В случае МКЭ или МГЭ сходимость решения для тел с неоднородностями типа трещин происходит достаточно медленно, что может частично компенсироваться использованием специальных элементов или более мелкой сетки. Альтернативой могут быть бессеточные методы или ММГКЭ, предполагающий предварительное разбиение на звездообразно-выпуклые области, для которых специальным образом формулируются дифференциальные уравнения в частных производных. Такой прием делает ММГКЭ особенно эффективным при рассмотрении распространения волн в структурах с неоднородностями типа трещин.

Разновидности метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) [15–17], а также полуаналитический метод конечных элементов (ПАМКЭ) [18] позволяют эффективно рассчитывать волновые поля в слоистых волноводах, но не могут напрямую описывать составные структуры, у которых некоторые части конечных размеров имеют сложную форму. Поэтому в тех случаях, когда в исследуемых структурах имеются протяженные области (волноводы), для изучения которых применимы полуаналитические подходы, прибегают к гибридным схемам. Так, в волновых задачах распространение получили гибридные методы, в рамках которых в протяженной области, в том числе неограниченной, решение строится с помощью полуаналитического метода, а смежные области дискретизируются одним из прямых численных методов, см., например, [18–23, 24].

Так как ПАМКЭ предполагает конечно-элементную дискретизацию только поперечного сечения волновода на основе МСЭ, то ПАМКЭ и МСЭ были взяты в качестве основы при разработке предлагаемого в данной работе гибридного метода для исследования динамического поведения структуры, состоящей из протяженного слоистого волновода конечной длины и прилегающей к нему области прямоугольной формы. В случае областей произвольных форм достаточно стандартной модификации в МСЭ (см. [10, 26]), поэтому для простоты изложения она здесь не приводится. Предлагаемая гибридная схема имеет сходство с гибридной численно-аналитической схемой из [21], где решение в волноводе строилось МГИУ [15] в виде разложения по нормальным модам и использовался стандартный МКЭ-пакет, в силу чего формулировались вспомогательные МКЭ-задачи с известными условиями на торцах. Предлагаемый гибридный метод обращается к ПАМКЭ для описания распространения волн в упругом протяженном волноводе [18] и к МСЭ для моделирования динамических колебаний в областях конечных размеров [25–27]. В работе представляется общая схема построения решения путем «сшивки» решений для каждой из смыкающихся областей с помощью метода Галеркина и метода коллокаций. Приводятся численные результаты и на их основе сравниваются две разновидности предлагаемого гибридного подхода как между собой, так и с МКЭ, демонстрируется эффективность и сходимость обеих представленных численных схем.

2. Постановка и общая схема решения

2.1. Постановка задачи

Рассматриваются антиплоские установившиеся гармонические колебания составной области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. При этом область $\Omega_2 = \{0 \leq x_1 \leq d_2, h_3 \leq x_2 \leq h_3 + h_2\}$ представляет собой протяженный волновод заданной толщины h_2 , а Ω_1 может быть произвольной формы и имеет общую границу S_c с областью Ω_2 . Соответствующая задача теории упругости формулируется в декартовой системе координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$. Установившиеся гармонические колебания в антиплоском случае в каждой области Ω_i ($i = 1, 2$) описываются уравнениями Гельмгольца:

$$\Delta u_i(\mathbf{x}) + k_i^2 u_i(\mathbf{x}) = 0, \quad (1)$$

где $k_i = \omega/c_i$ — волновое число, $\omega = 2\pi f$ — круговая частота установившихся колебаний, f — частота, $c_i = \sqrt{\mu_i/\rho_i}$ — скорость распространения колебаний в области Ω_i .

Внешняя граница области Ω , в зависимости от типа граничных условий, разбивается на несколько частей $S = (\partial\Omega) = S_0 \cup S_u \cup S_\sigma$. На границе S_0 задается условие жесткого защемления:

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0, \tag{2}$$

на границе S_u перемещения приравняются к константе $u_0 \neq 0$:

$$u(\mathbf{x}) = u_0, \quad \mathbf{x} \in S_u, \tag{3}$$

а граница S_σ считается свободной от напряжений:

$$\mu \frac{du(\mathbf{x})}{dn} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma. \tag{4}$$

Здесь и далее \mathbf{n} — вектор нормали. На внутренней границе $S_c = \Omega_1 \cap \Omega_2$ ставятся условия непрерывности перемещений и напряжений:

$$u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x}), \quad \mu_1 \frac{du_1(\mathbf{x})}{dn} = \mu_2 \frac{du_2(\mathbf{x})}{dn}, \quad \mathbf{x} \in S_c. \tag{5}$$

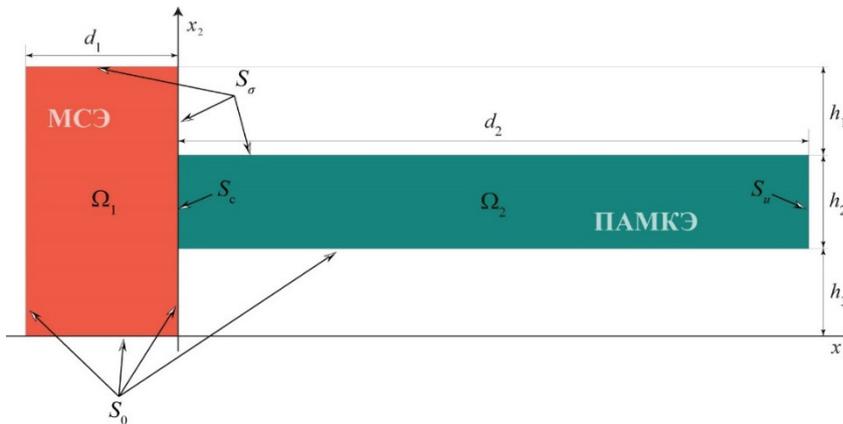


Рис. 1. Геометрия задачи в случае прямоугольной области Ω_1

Согласно закону Гука, в антиплоском случае ненулевые компоненты тензора напряжений имеют вид:

$$\sigma_{13} = \mu \frac{du(\mathbf{x})}{dx_1}, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{du(\mathbf{x})}{dx_2}.$$

Геометрия задачи, которая обсуждается в настоящей работе, приведена на рисунке 1. Здесь в качестве области Ω_1 без потери общности подходу выступает область прямоугольной формы:

$$\Omega_1 = [-d_1, 0] \times [0, h_1 + h_2 + h_3].$$

Для построения решения с применением гибридной схемы необходимо сначала получить решение двух вспомогательных задач: для областей Ω_1 и области Ω_2 . При этом функция перемещений на общей границе S_c предполагается известной, и решения строятся, соответственно, с помощью МСЭ и ПАМКЭ. Итак, на внутренней границе вводится вспомогательная неизвестная функция перемещений:

$$u(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_c. \tag{6}$$

2.2. Метод спектральных элементов (МСЭ)

Для области Ω_1 рассматривается вариационная формулировка уравнения (1)

$$\int_{\Omega_1} \Delta u_1(\mathbf{x}) v_1(\mathbf{x}) dV + k_1^2 \int_{\Omega_1} u_1(\mathbf{x}) v_1(\mathbf{x}) dV = 0 \tag{7}$$

вместе с граничными условиями (2)–(4) на тех границах, которые относятся к Ω_1 , и условием (6), где функция перемещений полагается известной. Применяя первую формулу Грина для слагаемого с оператором Лапласа, уравнение (7) можно переписать в виде:

$$\int_{\Omega_1} \nabla u_1(\mathbf{x}) \nabla v_1(\mathbf{x}) dV - \oint_{\partial\Omega_1} v_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} d\ell - k_1^2 \int_{\Omega_1} u_1(\mathbf{x}) v_1(\mathbf{x}) dV = 0. \quad (8)$$

В МСЭ в качестве базисных функций для аппроксимации $u_1(\mathbf{x})$ используются интерполяционные полиномы $C^i(\xi_k^l)$, $k=1,2$ на узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто. Прямоугольная область Ω_1 представляется состоящей из прямоугольных элементов (производится разбиений: M_1 по оси x_1 и $M_2 = M_2^1 + M_2^2 + M_2^3$ по оси x_2):

$$\Omega_1 = \bigcup_{l_1=1}^{M_1} [x_1^{l_1}, x_1^{l_1+1}] \times \bigcup_{l_2=1}^{M_2} [x_2^{l_2}, x_2^{l_2+1}].$$

При этом глобальная система координат x_k связана с локальной системой координат $\xi_k^{l_k}$ каждого элемента l_k соотношениями вида:

$$\xi_k^{l_k} = \frac{2x_k - x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}{x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}, \quad x_k = \frac{x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}{2} \xi_k^{l_k} + \frac{x_k^{l_k+1} + x_k^{l_k}}{2}, \quad \frac{d}{dx_k} = S^{l_k} \frac{d}{d\xi_k^{l_k}}, \quad S^{l_k} = \frac{2}{x_k^{l_k+1} - x_k^{l_k}}, \quad k=1,2.$$

Тогда решение уравнения (1) можно представить как

$$u_1(x_1, x_2) = \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_{i_1 i_2}^{l_1 l_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) = \sum_{l_1=1}^{G_1} u^{l_1} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}), \quad (9)$$

где функция $I_1(l_1, l_2, i_1, i_2) = (i_1 - 1)(M_2 N + 1) + (M_2 N + 1)N(l_1 - 1) + N(l_2 - 1) + i_2$ используется для индексации узлов, а $G_1 = (M_1 N + 1)(M_2 N + 1)$ — это общее количество узлов. В узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто χ_j значения интерполяционных полиномов совпадают со значениями дельта-символа Кронекера:

$$C^i(\chi_j) = \delta_{ij},$$

а значения производной $dC^i(\chi_j)/d\xi$ обозначаются как D_j^i .

Для дискретизации уравнения (8) применяется метод Бубнова–Галеркина, согласно которому весовые (далее тестовые) функции $v_1(\mathbf{x})$ берутся совпадающими с базисными функциями

$$v_1(x_1, x_2) = C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}), \quad (10)$$

которые, в соответствии с условиями (2), на границе S_0 равны нулю:

$$v_1(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0. \quad (11)$$

В дальнейшем, для краткости, тестовые функции нумеруются индексом $I_1(l_1^i, l_2^i, i_1^i, i_2^i)$ по аналогии с индексом $I_1(l_1, l_2, i_1, i_2)$.

Интегралы в (8) при использовании (9)–(11) могут быть вычислены на узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто χ_k с помощью квадратурных формул:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{N+1} w_k f(\chi_k).$$

После подстановки (9) и (10) в (8) и учета условия (11) формируется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{l_1} A_{l_1 l_1}^1 u^{l_1} = g_{l_1},$$

где

$$A_{l_1 l_1}^1 = \delta_{l_1 l_1} \delta_{l_2 l_2} \left((S^{l_1} / S^{l_2}) w_{l_2} \delta_{l_2 l_2} \sum_{k=1}^{N+1} w_k D_k^{l_1} D_k^{l_2} + (S^{l_2} / S^{l_1}) w_{l_1} \delta_{l_1 l_1} \sum_{r=1}^{N+1} w_r D_r^{l_2} D_r^{l_1} - k_1^2 (1 / (S^{l_1} S^{l_2})) w_{l_1} \delta_{l_1 l_1} w_{l_2} \delta_{l_2 l_2} \right)$$

и g_{l_1} — компоненты вектора-столбца, которые, за исключением тех, что соответствуют узлам на границе S_c , равны нулю:

$$g_{l_1} = \begin{cases} q(x_2), & l_1 = M_1, \quad l_1 = N + 1, \quad l_2 \in [M_2^1 + 1, M_2^1 + M_2^2], \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

При этом условие (4) дает нулевой вклад контурного интеграла в (8), а для выполнения условия (2) необходимо изменить соответствующие строки матрицы:

$$A_{l_1(l_1, l_1, l_1)l_1}^1 = 0, \quad A_{l_1(l_1, l_1, l_1)l_1(l_1, l_1, l_1)}^1 = 1, \quad A_{l_1(1, l_2, 1, l_2)l_1}^1 = 0, \quad A_{l_1(1, l_2, 1, l_2)l_1(1, l_2, 1, l_2)}^1 = 1.$$

2.3. Полуаналитический метод конечных элементов (ПАМКЭ) для протяженных волноводов

Для области Ω_2 , по аналогии с Ω_1 , используется вариационная формулировка уравнения (1) с граничными условиями (2)–(4) на тех границах, которые относятся к Ω_2 , и с условием (6). При этом к (1), согласно ПАМКЭ, предварительно применяется прямое преобразование Фурье по x_1 с параметром преобразования α , что приводит к следующему уравнению

$$\int_{h_3}^{h_2+h_3} \frac{\partial^2 U(\alpha, x_2)}{\partial x_2^2} v_2(x_2) dx_2 + (k_2^2 - \alpha^2) \int_{h_3}^{h_2+h_3} U(\alpha, x_2) v_2(x_2) dx_2 = 0 \tag{12}$$

относительно Фурье-преобразования для перемещений:

$$U(\alpha, x_2) = F_{x_1} [u_2(x_1, x_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} u_2(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1.$$

Интегрирование уравнения (12) по частям приводит его к виду:

$$\begin{aligned} \int_{h_3}^{h_2+h_3} \frac{\partial U(\alpha, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial v_2(x_2)}{\partial x_2} dx_2 - v_2(h_2) v_2(x_2) \frac{\partial U(\alpha, x_2)}{\partial x_2} \Big|_{h_3}^{h_2+h_3} + v_2(0) \frac{\partial U(\alpha, 0)}{\partial x_2} + \\ + (\alpha^2 - k_2^2) \int_{h_3}^{h_2+h_3} U(\alpha, x_2) v_2(x_2) dx_2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку предполагается осуществить «сшивку» решений двух подзадач с помощью гибридной схемы, Фурье-символ $U(\alpha, x_2)$ и вспомогательную функцию $q(x_2)$ следует разложить по тем же самым базисным функциям:

$$U(\alpha, x_2) = \sum_{l=1}^{M_2^1} \sum_{i=1}^{N+1} \beta_l^i(\alpha) C^i(\xi^l) = \sum_{l_2} \beta^{l_2}(\alpha) C^{i_l}(\xi^{l_2}), \tag{14}$$

$$q(x_2) = \sum_{r=1}^{M_2^2} \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_j^r C^j(\xi^r) = \sum_{l_2} \gamma^{l_2} C^j(\xi^r), \tag{15}$$

где $I_2(l, i) = N(l-1) + i$ — одномерная функция для индексации узлов на границе S_c , которая находится в диапазоне $I_2 = \overline{1, G_2}$, $G_2 = M_2^2 N + 1$.

Для дискретизации уравнения (13) снова применяется метод Бубнова–Галеркина. Согласно ему тестовые функции $v_2(\mathbf{x})$, которые должны удовлетворять граничному условию (2), берутся совпадающими с базисными функциями:

$$v_2(x_2) = C^i \left(\xi^i \right), \quad (16)$$

$$v_2(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_0. \quad (17)$$

В дальнейшем индекс $I_2'(l', i')$ используется для нумерации тестовых функций таким же образом, как и индекс $I_2(l, i)$.

С учетом подстановки представлений (14) и (16) в (13), а также условий (4) и (17) формулируется дисперсионное уравнение относительно частоты:

$$\det(\hat{\mathbf{A}}(\omega) - \alpha^2 \tilde{\mathbf{A}}) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathbf{B} - \lambda_n \mathbf{E}) = 0, \quad (18)$$

$$\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \hat{\mathbf{A}}(\omega), \quad \alpha_n = \pm \sqrt{\lambda_n},$$

где $\hat{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{A}}$ — матрицы коэффициентов $\hat{A}_{I_2' I_2}(\omega) = \delta_{I_2' I_2} \left(S^l \sum_{n=1}^{N+1} w_n D_n^l D_n^l - k_2^2 (1/S^l) w_i \delta_{ii} \right)$ и $\tilde{A}_{I_2' I_2} = -(1/S^l) w_i \delta_{ii} \delta_{ii}$, \mathbf{E} — единичная матрица.

Полученные при решении задачи (18) собственные числа λ_n и собственные векторы $\bar{\beta}_n$ используются для построения решения в протяженном волноводе Ω_2 :

$$u_2(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{G_2} c_n^m U(\alpha_n, x_2, \bar{\beta}^n) e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1)} = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{G_2} \tilde{c}_{I_2'(m, n)} U(\alpha_n, x_2, \bar{\beta}^n) e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1)}, \quad x_1^1 = 0, \quad x_1^2 = d_2, \quad (19)$$

где $\tilde{I}_2(m, n) = G_2(m-1) + n$. Следует отметить, что для решения задачи на основе гибридной схемы уже достаточно представления (19), так как неизвестные коэффициенты разложения могут быть найдены из соотношений, следующих после подстановки (19) в граничные условия на торцах волновода.

2.4. Гибридная схема

При построении решения задачи (1)–(5) на основе гибридной схемы вводится, согласно последней, неизвестная функция перемещений на общей границе S_c , при этом необходимо обеспечить на ней непрерывность перемещений и напряжений (см. (5)). Применение МСЭ в области Ω_1 приводит к изменению соответствующих строк матрицы A^1 :

$$A_{I_1(M_1, I_2, N+1, I_2') I_1}^1 = 0, \quad A_{I_1(M_1, I_2, N+1, I_2') I_1(M_1, I_2, N+1, I_2')}^1 = 1,$$

а также к формированию матрицы A^2 размера $G_1 \times G_2$, элементы которой равны нулю, за исключением тех, что соответствуют узлам на S_c :

$$A_{I_1 I_2}^2 = \begin{cases} 1, & I_1' = M_1, \quad I_1' = N+1, \quad I_2' \in [M_2^1 + 1, M_2^1 + M_2^2], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда справедливо следующее уравнение:

$$A^1 u^{I_1} = A^2 \gamma^{I_2},$$

и в области Ω_2 будут выполняться граничные условия (3), (5) и (6), если здесь к нахождению решения применить метод Галеркина или метод коллокаций.

2.4.1. Метод Галеркина

Тестовые функции в виде (16), а также подстановка разложений (15) и (19) в условия (3) и (6) позволяют получить следующие соотношения:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{G_2} c_n^m e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^1)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{i=1}^{N+1} \beta_i^{l(n)}(\alpha) (1/S^l) w_i \delta_{ll'} \delta_{ii'} \right) - \sum_{r=1}^{M_2^2} \sum_{j=1}^{N+1} \gamma_j^r (1/S^l) w_i \delta_{rl'} \delta_{ji'} = 0, \\ \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{G_2} c_n^m e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{i=1}^{N+1} \beta_i^{l(n)}(\alpha) (1/S^l) w_i \delta_{ll'} \delta_{ii'} \right) = u_0 (1/S^l) w_i, \\ B_{I_2 \bar{I}_2}^1 = e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^1)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{i=1}^{N+1} \beta_i^{l(n)}(\alpha) (1/S^l) w_i \delta_{ll'} \delta_{ii'} \right), \\ B_{I_2 \bar{I}_2}^2 = e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^2)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{i=1}^{N+1} \beta_i^{l(n)}(\alpha) (1/S^l) w_i \delta_{ll'} \delta_{ii'} \right), \\ B_{I_2 I_2}^3 = \frac{1}{S^l} w_i \delta_{rl'} \delta_{ji'}, \\ F_{I_2} = u_0 \frac{1}{S^l} w_i. \end{cases}$$

С учетом тестовых функций в записи (16) условие непрерывности напряжений на интерфейсе представляется в виде:

$$\mu_1 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_{i_1 i_2}^{l_1 l_2} \frac{S^{l_1}}{S^{l_2}} D_{N+1}^{l_1} w_{i_2} \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \delta_{i_2 i'} - \mu_2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{G_2} c_n^m (-1)^{m+1} i \sqrt{\lambda_n} e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^1)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{i=1}^{N+1} \beta_i^{l(n)}(\alpha) (1/S^l) w_i \delta_{ll'} \delta_{ii'} \right) = 0$$

и

$$\begin{aligned} C_{I_2 I_1}^1 &= \mu_1 \frac{S^{l_1}}{S^{l_2}} D_{N+1}^{l_1} w_{i_2} \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \delta_{i_2 i'}, \\ C_{I_2 \bar{I}_2}^2 &= \mu_2 (-1)^{m+1} i \sqrt{\lambda_n} e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^1)} \left(\sum_{l=1}^{M_2^2} \sum_{i=1}^{N+1} \beta_i^{l(n)}(\alpha) (1/S^l) w_i \delta_{ll'} \delta_{ii'} \right). \end{aligned}$$

2.4.2. Метод коллокаций

При рассмотрении в качестве точек коллокации узловых точек $x_2^{l_2} \in S_c$, $I_2' = \overline{1, G_2}$, а также использовании разложений (15) и (19) условия (3) и (6) принимают вид:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{G_2} c_n^m U(\alpha_n, x_2^{l_2}, \bar{\beta}^n) e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^1)} - \gamma^{l_2} = 0, \\ \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{G_2} c_n^m U(\alpha_n, x_2^{l_2}, \bar{\beta}^n) e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^1)} = u_0, \end{cases}$$

и

$$\begin{aligned} B_{I_2 \bar{I}_2}^1 &= U(\alpha_n, x_2^{l_2}, \bar{\beta}^n) e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^1)}, \\ B_{I_2 \bar{I}_2}^2 &= U(\alpha_n, x_2^{l_2}, \bar{\beta}^n) e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^m - x_1^1)}, \\ B_{I_2 I_2}^3 &= \mathbf{E}_{G_2 \times G_2}, \\ F_{I_2} &= u_0, \end{aligned}$$

а условие непрерывности напряжений на интерфейсе становится следующим:

$$\mu_1 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{l_1'=1}^{N+1} \sum_{l_2'=1}^{N+1} u_{l_1 l_2}^{l_1 l_2} S^h D_{N+1}^{l_1} \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \delta_{l_2 i'} - \mu_2 \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^{G_2} c_n^m U(\alpha_n, x_2^{l_2}, \bar{\beta}^n) (-1)^{m+1} i \sqrt{\lambda_n} e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^n - x_1^1)} = 0$$

и

$$C_{l_2 l_1}^1 = \mu_1 S^h D_{N+1}^{l_1} \delta_{l_1 M_1} \delta_{l_2 l'} \delta_{l_2 i'},$$

$$C_{l_2 \bar{l}_2}^2 = \mu_2 U(\alpha_n, x_2^{l_2}, \bar{\beta}^n) (-1)^{m+1} i \sqrt{\lambda_n} e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (x_1^n - x_1^1)}.$$

2.4.3. Формирование итоговой системы уравнений для случая составной области

В результате проделанных выше преобразований для составной области Ω в случае гибридного подхода к решению формируется СЛАУ относительно коэффициентов разложений u_1 , u_2 и q , соответственно, в виде (9), (19) и (15), или в краткой записи:

$$A^1 u^{l_1} = A^2 \gamma^{l_2},$$

$$B^1 c^{\bar{l}_2} = B^3 \gamma^{l_2},$$

$$B^2 c^{\bar{l}_2} = F,$$

$$C^1 u^{l_1} = C^2 c^{\bar{l}_2}.$$

Вид уравнений позволяет «свернуть» и упростить эту систему уравнений для проведения численных расчетов путем исключения коэффициентов разложения для искусственно введенной неизвестной функции перемещений q . В результате система

$$A^1 u^{l_1} = \tilde{A}^2 c^{\bar{l}_2},$$

$$B^2 c^{\bar{l}_2} = F,$$

$$C^1 u^{l_1} = C^2 c^{\bar{l}_2}$$

содержит только коэффициенты разложений для u_1 , u_2 , где $\tilde{A}^2 = A^2 (B^3)^{-1} B^1$.

3. Численный анализ

Численный анализ на основе гибридной схемы и верификация подхода реализованы в пакете прикладных программ MATLAB. Основные характеристики исследуемой составной структуры приведены в таблице 1. Задаваемые на границе S_u перемещения равнялись: $u_0 = 1$ мкм. Расчеты выполнены на стационарном компьютере с 6-ядерным центральным процессором AMD Ryzen 5 5600G. Полученные результаты сравниваются с вычисленными посредством МКЭ (в пакете COMSOL Multiphysics®) с использованием полиномов 4-й степени (Quartic Lagrange Discretization).

Таблица 1. Свойства материалов и геометрические параметры волноводной структуры (см. Рис. 1)

Область	Материал	c , м/с	μ , ГПа	ρ , кг/м ³	d , мм	h_1 , мм	h_2 , мм	h_3 , мм
Ω_1	Сталь	3192	80	7850	1	1	1	1
Ω_2	Алюминий	3162	27	2700	10	–	1	–

3.1. Выполнение граничных условий

Для проверки применимости численного подхода и проекционных методов, а также выполнения граничных условий на границе стыка S_c областей, образующих составную область Ω , рассматривались относительные погрешности выполнения условий непрерывности перемещений и напряжений (5) в норме L_1 :

$$\varepsilon_u = \frac{\|u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})\|_{L_1(S_c)}}{\|u_1(\mathbf{x})\|_{L_1(S_c)}}, \quad \varepsilon_\sigma = \frac{\left\| \mu_1 \frac{du_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{n}} - \mu_2 \frac{du_2(\mathbf{x})}{d\mathbf{n}} \right\|_{L_1(S_c)}}{\left\| \mu_1 \frac{du_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{n}} \right\|_{L_1(S_c)}}.$$

Произведено сравнение метода Галеркина и метода коллокаций, причем в последнем для определения коэффициентов разложения вспомогательной функции участвовали как узлы Гаусса–Лежандра–Лобатто, так и равномерно распределенные точки. Результаты — относительные погрешности ϵ_u (для перемещений) и ϵ_σ (для напряжений) на интерфейсе, вычисленные на двух частотах, приведены в таблице 2. Видно, что метод коллокаций, при условии использования точек Гаусса–Лежандра–Лобатто, с увеличением числа разбиений по наибольшему размеру волновода, становится сопоставимым по точности с методом Галеркина.

Таблица 2. Относительная погрешность перемещений и напряжений на интерфейсе при различных частотах

Параметры дискретизации	Проекционный метод			
	$N = 4, M_1 = M_2 = 2$	$N = 6, M_1 = M_2 = 6$	$N = 4, M_1 = M_2 = 10$	$N = 6, M_1 = M_2 = 10$
ϵ_u при 1 МГц				
Метод Галеркина	$3,5246 \cdot 10^{-15}$	$6,9602 \cdot 10^{-15}$	$1,0741 \cdot 10^{-14}$	$1,0203 \cdot 10^{-14}$
Метод коллокаций (точки Гаусса–Лежандра–Лобатто)	$4,0735 \cdot 10^{-15}$	$5,3943 \cdot 10^{-15}$	$1,0707 \cdot 10^{-14}$	$1,1808 \cdot 10^{-14}$
Метод коллокаций (равномерно распределенные точки)	0,1158	0,055	0,0265	0,0333
ϵ_σ при 1 МГц				
Метод Галеркина	$2,5023 \cdot 10^{-16}$	$4,1389 \cdot 10^{-15}$	$1,4165 \cdot 10^{-15}$	$2,4218 \cdot 10^{-15}$
Метод коллокаций (точки Гаусса–Лежандра–Лобатто)	$5,7205 \cdot 10^{-16}$	$2,6723 \cdot 10^{-15}$	$1,1913 \cdot 10^{-15}$	$2,3284 \cdot 10^{-15}$
Метод коллокаций (равномерно распределенные точки)	0,0357	0,0241	0,0102	0,0177
ϵ_u при 5 МГц				
Метод Галеркина	$1,8913 \cdot 10^{-15}$	$5,3229 \cdot 10^{-15}$	$3,2183 \cdot 10^{-15}$	$6,2864 \cdot 10^{-15}$
Метод коллокаций (точки Гаусса–Лежандра–Лобатто)	$9,7137 \cdot 10^{-16}$	$3,2537 \cdot 10^{-15}$	$4,6728 \cdot 10^{-15}$	$7,7805 \cdot 10^{-15}$
Метод коллокаций (равномерно распределенные точки)	0,1194	0,04	0,0202	0,0253
ϵ_σ при 5 МГц				
Метод Галеркина	$3,6934 \cdot 10^{-16}$	$2,8478 \cdot 10^{-15}$	$9,4134 \cdot 10^{-16}$	$1,5297 \cdot 10^{-15}$
Метод коллокаций (точки Гаусса–Лежандра–Лобатто)	$1,9667 \cdot 10^{-16}$	$1,7583 \cdot 10^{-15}$	$7,9455 \cdot 10^{-16}$	$1,5057 \cdot 10^{-15}$
Метод коллокаций (равномерно распределенные точки)	0,0231	0,0131	0,0057	0,0094

Для того чтобы проверить, удовлетворяет ли решение на основе гибридной схемы граничному условию (4) — отсутствию напряжений на внешней границе S_σ области Ω_2 , рассчитывались напряжения $\sigma_{23}(x)$ при числе разбиений $N = 6, M_1 = M_2 = 10$. Результаты расчетов сравнивались с полученными МКЭ (см. Рис. 2). Следует отметить, что максимальные напряжения превышают 3 ГПа (в области Ω_1) и 1 ГПа (в области Ω_2) при обеих рассмотренных частотах колебаний. Графики иллюстрируют и тот факт, что с ростом частоты точность выполнения граничных условий (4) в расчете посредством МКЭ падает, в то время как при том же числе степеней свободы гибридная схема дает примерно такую же точность.

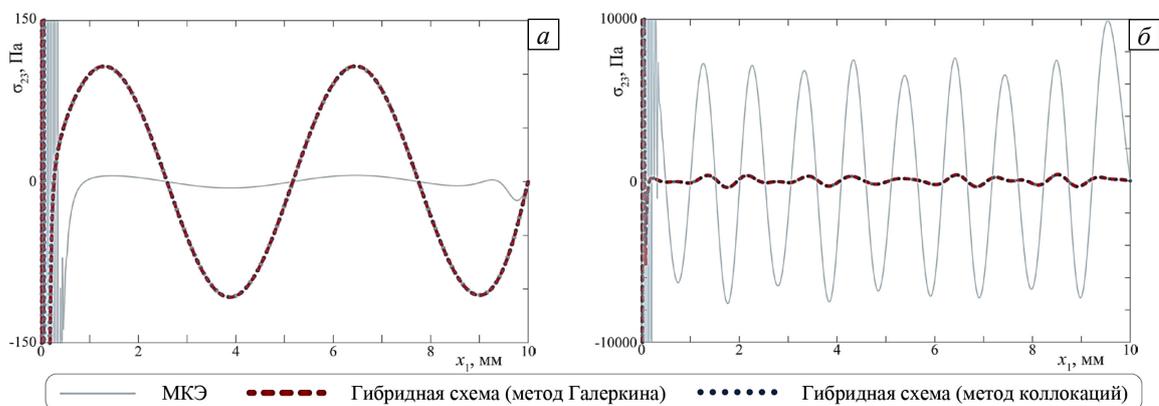


Рис. 2. Напряжения $\sigma_{23}(x_1, h_3 + h_2)$, рассчитанные МКЭ (сплошная линия) и на основе вариантов гибридной схемы (пунктирные линии) при f , МГц: 1 (а); 5 (б)

3.2. Сравнение с другими методами

Для анализа эффективности и точности разработанной гибридной схемы вычислялись перемещения $u(x_1, h_3 + h_2)$, $x_1 \in [-d_1, d_2]$ и касательные напряжения $\sigma_{13}(x_1, h_3 + h_2)$, $x_1 \in [0, d_2]$ при $N = 4$ и разным числе разбиений по оси x_2 (см. Рис. 3, 4; для сравнения показано решение МКЭ). Так как метод Галеркина и метод коллокаций дают фактически одинаковые результаты, то далее приводятся данные, полученные на основе гибридной схемы с использованием метода Галеркина.

На рисунках 5, 6 изображены перемещения $u(x_1, x_2)$ во всей составной области Ω , вычисленные с помощью гибридной схемы при $N = 4$, $M_1 = M_2^2 = 10$ (Рис. 5а, 6а) и МКЭ (Рис. 5б, 6б) для большей частоты: $f = 5$ МГц. Для наглядности приведены результаты для разных размеров области Ω_1 : $h_3 = 0$ мм и $h_3 = 1$ мм. Можно видеть хорошее совпадение с расчетом МКЭ.

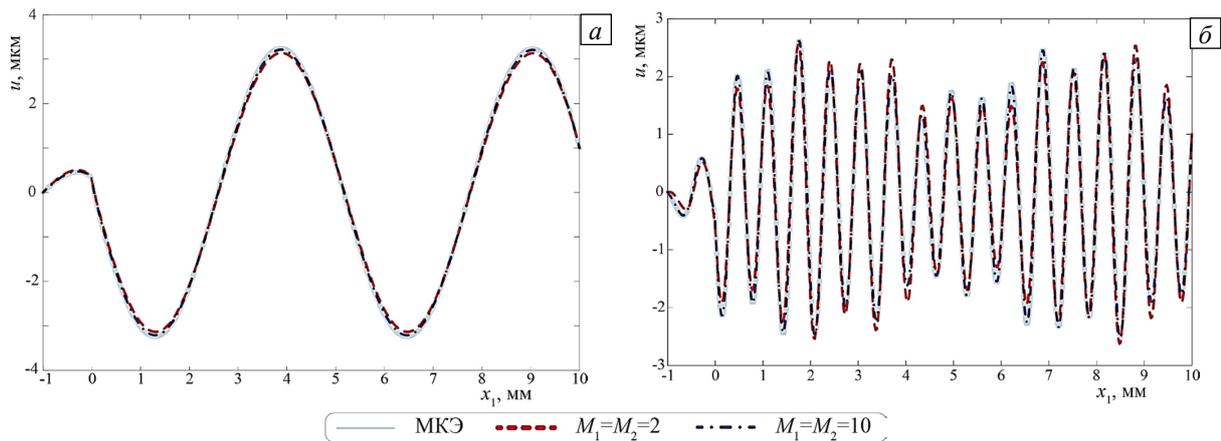


Рис. 3. Перемещения $u(x_1, h_3 + h_2)$, рассчитанные МКЭ (сплошная кривая) и при разном числе разбиений на основе гибридной схемы (соответственно пунктирная и штрихпунктирная линии) для частот f , МГц: 1 (а); 5 (б)

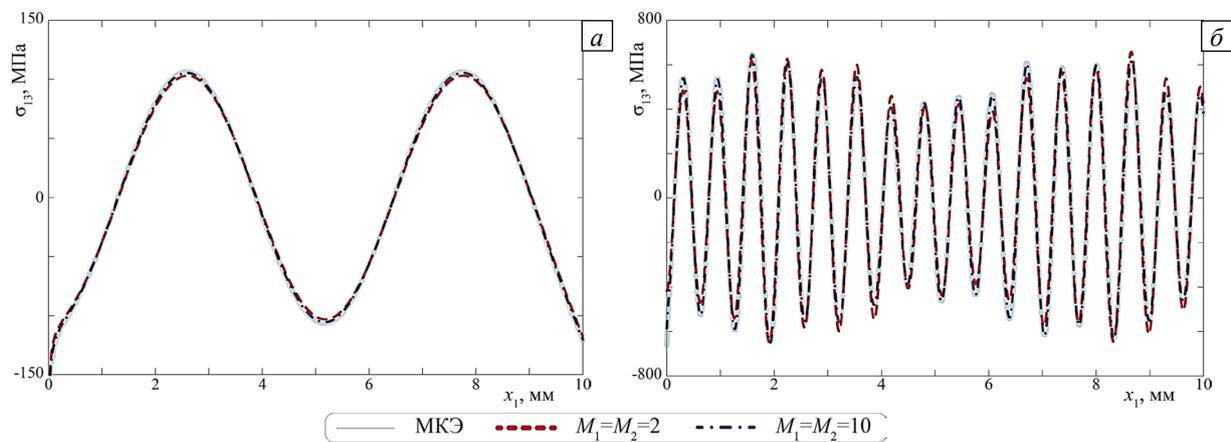


Рис. 4. Напряжения $\sigma_{13}(x_1, h_3 + h_2)$, рассчитанные МКЭ (сплошная кривая) и при разном числе разбиений на основе гибридной схемы (соответственно пунктирная и штрихпунктирная линии) при f , МГц: 1 (а); 5 (б)

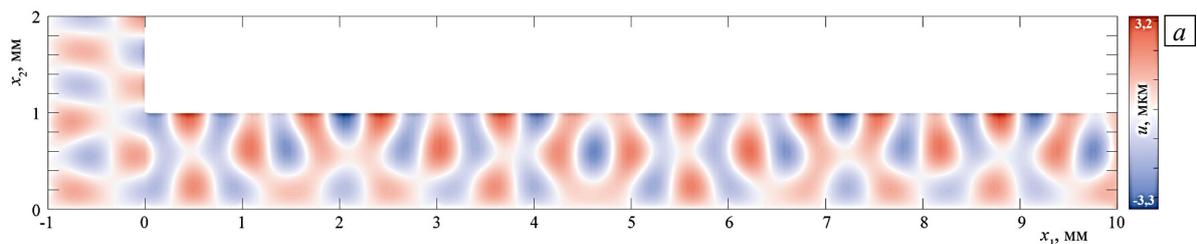


Рис. 5. Перемещения $u(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью гибридной схемы (а) и МКЭ (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 0$ мм

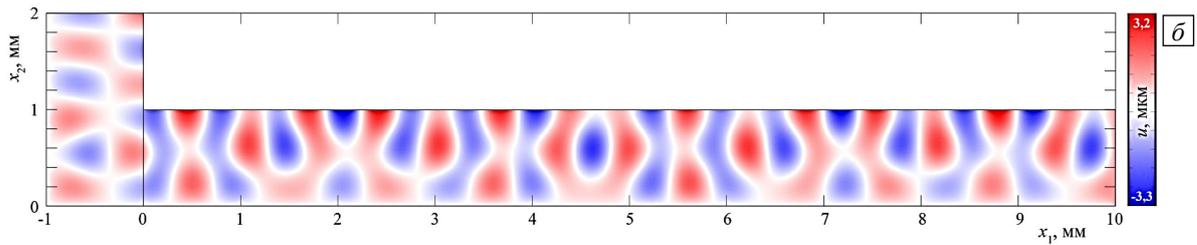


Рис. 5. Продолжение

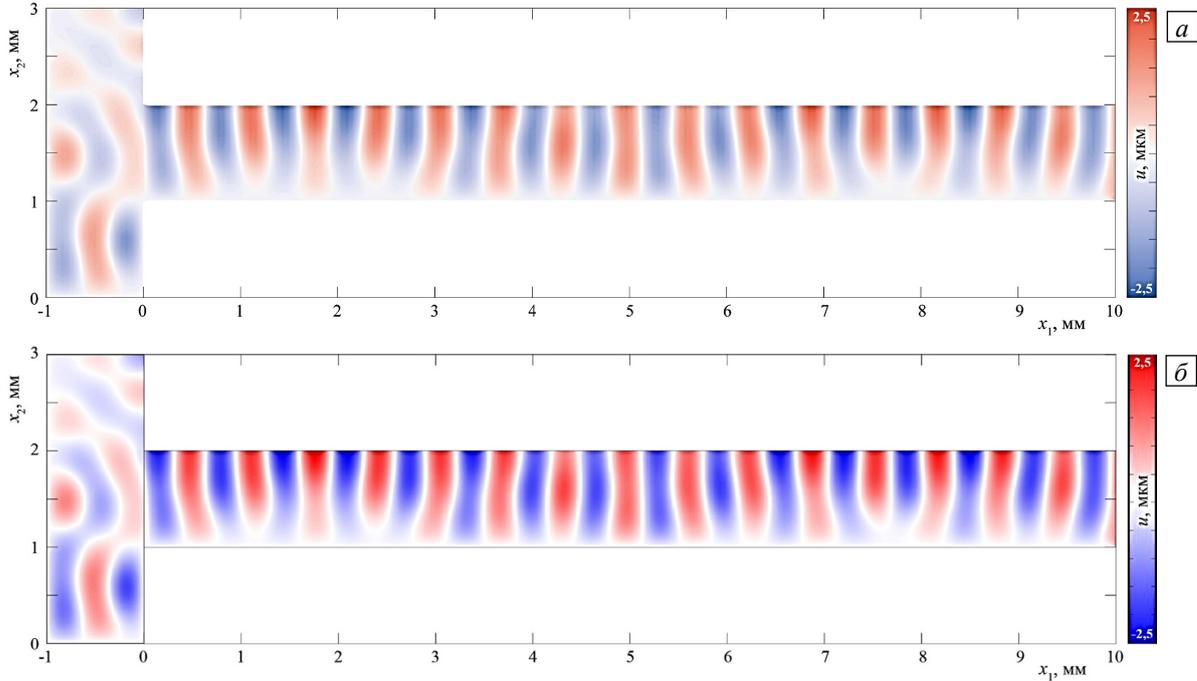


Рис. 6. Перемещения $u(x_1, x_2)$, рассчитанные с помощью гибридной схемы (а) и МКЭ (б) при $f = 5$ МГц и $h_3 = 1$ мм

3.3. Сходимость метода

Для исследования сходимости гибридного метода вводится и вычисляется относительная погрешность перемещений $u^*(x_1, h_3 + h_2)$ и $u(x_1, h_3 + h_2)$ в норме L_1 , полученных, соответственно, с использованием МКЭ на «мелкой» сетке и гибридной схемы:

$$\varepsilon = \frac{\|u(x_1, h_3 + h_2) - u^*(x_1, h_3 + h_2)\|_{L_1}}{\|u^*(x_1, h_3 + h_2)\|_{L_1}}, \quad x_1 \in [-d_1, d_2].$$

На рисунке 7 представлены результаты расчета погрешности ε при $N = 4$ и разным количестве разбиений по протяженному размеру волновода. Следует отметить, что в методе коллокаций использовались равномерно распределенные точки. На рисунке видно уменьшение относительной погрешности расчета на основе гибридной схемы с увеличением числа узлов при обеих частотах в случае применения как метода Галеркина, так и метода коллокаций, что свидетельствует о сходимости гибридного решения с ростом количества элементов/узлов.

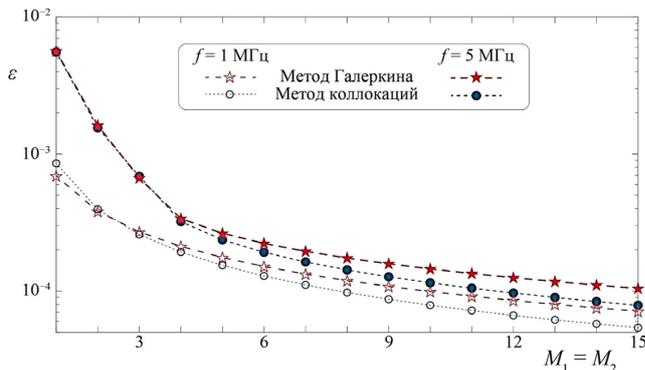


Рис. 7. Относительная погрешность ε гибридной схемы с методом Галеркина и с методом коллокаций

В таблицах 3 и 4 приведено время, требуемое для решения СЛАУ размерностью $(G_1 + 2G_2) \times (G_1 + 2G_2)$, и значения чисел обусловленности возникающих в левой части матриц при применении метода Галеркина и метода коллокаций для составной области Ω

при ее различном разбиении. Например, для $N = 4$, $M_1 = M_2^2 = 2$ и $N = 6$, $M_1 = M_2^2 = 6$ размерность матриц системы, соответственно, равна 243×243 и 4107×4107 . При этом в расчетах МКЭ число степеней свободы составляет 17841, а вычисления длятся около 2 с. Можно видеть, что метод Галеркина дает возможность сэкономить вычислительные ресурсы и получить меньшие числа обусловленности, чем в методе коллокаций.

Таблица 3. Время решения СЛАУ для составной области при частоте 1 МГц (в секундах)

Проекционный метод	$N = 4, M_1 = M_2^2 = 2$	$N = 6, M_1 = M_2^2 = 6$	$N = 4, M_1 = M_2^2 = 10$	$N = 6, M_1 = M_2^2 = 10$
Метод Галеркина	0,06	0,26	2,35	20,14
Метод коллокаций	0,14	0,83	3,87	23,31

Таблица 4. Число обусловленности матрицы СЛАУ для составной области при частоте 1 МГц

Проекционный метод	$N = 4, M_1 = M_2^2 = 2$	$N = 6, M_1 = M_2^2 = 6$	$N = 4, M_1 = M_2^2 = 10$	$N = 6, M_1 = M_2^2 = 10$
Метод Галеркина	$2,8702 \cdot 10^4$	$6,5096 \cdot 10^5$	$5,4635 \cdot 10^5$	$1,7483 \cdot 10^6$
Метод коллокаций	$1,6765 \cdot 10^5$	$1,6637 \cdot 10^7$	$1,6015 \cdot 10^7$	$7,4804 \cdot 10^7$

4. Заключение

В работе представлен гибридный подход к решению динамических задач теории упругости для составной структуры, включающей слоистый протяженный конечный волновод и участок конечных размеров. В исследуемом случае для описания в частотной области антиплоских колебаний состоящей из разномодульных материалов конструкции используется совокупность метода спектральных элементов (МСЭ) и полуаналитического метода конечных элементов (ПАМКЭ). Анализ выполнения граничных условий на разных частотах показывает, что два применяемых при этом проекционных метода (метод Галеркина и метод коллокаций) показывают близкие результаты по точности и времени счета. Метод Галеркина выглядит предпочтительнее лишь незначительно. Так для его реализации требуется меньше времени, и он приводит к меньшим, по сравнению с методом коллокаций, значениям чисел обусловленности матрицы, которую имеет в левой части решаемая СЛАУ.

Продемонстрирована сходимость гибридной схемы и показано хорошее совпадение с результатами, полученными МКЭ в пакете COMSOL Multiphysics®. Представленный гибридный подход в дальнейшем без существенных ограничений может быть обобщен на случай как плоских колебаний, так и областей произвольной формы. Кроме того, видится перспектива разработки гибридной схемы, но уже как совокупности ПАМКЭ и ММГКЭ (метода масштабируемых граничных конечных элементов), которая позволит взять преимущества ММГКЭ и при малых затратах вычислительных ресурсов с высокой точностью решать динамические задачи для составных тел с трещинами и отслоениями. Для трехмерных постановок предложенная схема, по-видимому, не может быть использована напрямую, и потребуются ее значительная доработка и трудоемкая адаптация под различные классы волноводов.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА-А20-120051590020-1, проект № FZEN-2020-0017).

Литература

1. Kaufmann M., Zenkert D., Wennhage P. Integrated cost/weight optimization of aircraft structures // Struct. Multidisc. Optim. 2010. Vol. 41. P. 325-334. <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0413-1>
2. Rubino F., Nisticò A., Tucci F., Carlone P. Marine application of fiber reinforced composites: A review // J. Mar. Sci. Eng. 2020. Vol. 8. 26. <https://doi.org/10.3390/jmse8010026>
3. Kupski J., de Freitas S.T. Design of adhesively bonded lap joints with laminated CFRP adherends: Review, challenges and new opportunities for aerospace structures // Compos. Struct. 2021. Vol. 268. 113923. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113923>
4. Wang W., de Freitas S.T., Poulis J.A., Zarouchas D. A review of experimental and theoretical fracture characterization of bi-material bonded joints // Compos. B Eng. 2021. Vol. 206. 108537. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108537>
5. Philibert M., Soutis C., Gresil M., Yao K. Damage detection in a composite T-joint using guided Lamb waves // Aerospace. 2018. Vol. 5. 40. <https://doi.org/10.3390/aerospace5020040>
6. Mitra M., Gopalakrishnan S. Guided wave based structural health monitoring: A review // Smart Mater. Struct. 2016. Vol. 25. 53001. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/5/053001>
7. Zhuang Y., Kopsaftopoulos F., Dugnani R., Chang F.-K. Integrity monitoring of adhesively bonded joints via an electromechanical impedance-based approach // Struct. Health Monit. 2018. Vol. 17. P. 1031-1045. <https://doi.org/10.1177/1475921717732331>
8. Mueller I., Memmolo V., Tschöke K., Moix-Bonet M., Möllenhoff K., Golub M.V., Venkat R.S., Lugovtsova Ye., Eremin A., Moll J. Performance assessment for a guided wave-based SHM system applied to a stiffened composite structure // Sensors. 2022. Vol. 22. 7529. <https://doi.org/10.3390/s22197529>

9. Бурого Н.Г., Никитин И.С., Якушев В.Л. Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток // ЖВМиМФ. 2016. Т. 56, № 6. С. 1082-1092. <https://doi.org/10.7868/s0044466916060107>
10. Lisitsa V., Tcheverda V., Botter C. Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation // J. Comput. Phys. 2016. Vol. 311. P. 142-157. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.02.005>
11. Lu J.-F., Liu Y., Feng Q.-S. Wavenumber domain finite element model for the dynamic analysis of the layered soil with embedded structures // Eur. J. Mech. Solid. 2022. Vol. 96. 104696. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104696>
12. Komatitsch D., Vilotte J.-P., Vai R., Castillo-Covarrubias J.M., Sánchez-Sesma F.J. The spectral element method for elastic wave equations – application to 2-D and 3-D seismic problems // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1999. Vol. 45. P. 1139-1164. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0207\(19990730\)45:9<1139::aid-nme617>3.0.co;2-t](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0207(19990730)45:9<1139::aid-nme617>3.0.co;2-t)
13. Баженов В.Г., Изумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
14. Song C., Wolf J.P. The scaled boundary finite-element method – alias consistent infinitesimal finite-element cell method – for elastodynamics // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1997. Vol. 147. P. 329-355. [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(97\)00021-2](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(97)00021-2)
15. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
16. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
17. Manolis G.D., Dineva P.S., Rangelov T.V., Wuttke F. State-of-the-Art for the BIEM // Seismic wave propagation in non-homogeneous elastic media by boundary elements. Springer, 2017. P. 9-52. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45206-7_2
18. Bartoli I., Marzani A., di Scalea F.L., Viola E. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section // J. Sound Vib. 2006. Vol. 295. P. 685-707. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.021>
19. Vivar-Perez J.M., Duczek S., Gabbert U. Analytical and higher order finite element hybrid approach for an efficient simulation of ultrasonic guided waves I: 2D-analysis // Smart Structures and Systems. 2014. Vol. 13. P. 587-614. <https://doi.org/10.12989/sss.2014.13.4.587>
20. Zou F., Aliabadi M.H. A boundary element method for detection of damages and self-diagnosis of transducers using electro-mechanical impedance // Smart Mater. Struct. 2015. Vol. 24. 095015. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/9/095015>
21. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А. Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акустический журнал. 2018. Т. 64, № 1. С. 3-12. <https://doi.org/10.7868/S0320791918010082>
22. Golub M.V., Shpak A.N. Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure // Appl. Math. Model. 2019. Vol. 65. P. 234-255. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.08.019>
23. Malik M.K., Chronopoulos D., Tanner G. Transient ultrasonic guided wave simulation in layered composite structures using a hybrid wave and finite element scheme // Compos. Struct. 2020. Vol. 246. 112376. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112376>
24. Новиков О.И., Евдокимов А.А. Реализация гибридного численно-аналитического подхода для решения задач дифракции SH-волн на препятствиях произвольной формы // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2020. Т. 17, № 2. С. 49-56. <https://doi.org/10.31429/vestnik-17-2-49-56>
25. Shi L., Zhou Y., Wang J.-M., Zhuang M., Liu N., Liu Q.H. Spectral element method for elastic and acoustic waves in frequency domain // J. Comput. Phys. 2016. Vol. 327. P. 19-38. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.09.036>
26. Бубенчиков А.М., Попонин В.С., Мельникова В.Н. Математическая постановка и решение пространственных краевых задач методом спектральных элементов // Вест. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2008. № 3. С. 70-76.
27. Голуб М.В., Шпак А.Н., Бюте И., Фритцен К.-П. Моделирование гармонических колебаний и определение резонансных частот полосового пьезоэлектрического актуатора методом конечных элементов высокого порядка точности // Вычисл. мех. сплош. сред. 2015. Т. 8, № 4. С. 397-407.

References

1. Kaufmann M., Zenkert D., Wennhage P. Integrated cost/weight optimization of aircraft structures. *Struct. Multidisc. Optim.*, 2010, vol. 41, pp. 325-334. <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0413-1>
2. Rubino F., Nisticò A., Tucci F., Carlone P. Marine application of fiber reinforced composites: A review. *J. Mar. Sci. Eng.*, 2020, vol. 8, 26. <https://doi.org/10.3390/jmse8010026>
3. Kupski J., de Freitas S.T. Design of adhesively bonded lap joints with laminated CFRP adherends: Review, challenges and new opportunities for aerospace structures. *Compos. Struct.*, 2021, vol. 268, 113923. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113923>
4. Wang W., de Freitas S.T., Poulis J.A., Zarouchas D. A review of experimental and theoretical fracture characterization of bi-material bonded joints. *Compos. B Eng.*, 2021, vol. 206, 108537. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.108537>
5. Philibert M., Soutis C., Gresil M., Yao K. Damage detection in a composite T-joint using guided Lamb waves. *Aerospace*, 2018, vol. 5, 40. <https://doi.org/10.3390/aerospace5020040>
6. Mitra M., Gopalakrishnan S. Guided wave based structural health monitoring: A review. *Smart Mater. Struct.*, 2016, vol. 25, 53001. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/5/053001>
7. Zhuang Y., Kopsaftopoulos F., Dugnani R., Chang F.-K. Integrity monitoring of adhesively bonded joints via an electromechanical impedance-based approach. *Struct. Health Monit.*, 2018, vol. 17, pp. 1031-1045. <https://doi.org/10.1177/1475921717732331>
8. Mueller I., Memmolo V., Tschöke K., Moix-Bonet M., Möllenhoff K., Golub M.V., Venkat R.S., Lugovtsova Ye., Eremin A., Moll J. Performance assessment for a guided wave-based SHM system applied to a stiffened composite structure. *Sensors*, 2022, vol. 22, 7529. <https://doi.org/10.3390/s22197529>

9. Burago N.G., Nikitin I.S., Yakushev V.L. Hybrid numerical method with adaptive overlapping meshes for solving nonstationary problems in continuum mechanics. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2016, vol. 56, pp. 1065-1074. <https://doi.org/10.1134/S0965542516060105>
10. Lisitsa V., Tcheverda V., Botter C. Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation. *J. Comput. Phys.*, 2016, vol. 311, pp. 142-157. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.02.005>
11. Lu J.-F., Liu Y., Feng Q.-S. Wavenumber domain finite element model for the dynamic analysis of the layered soil with embedded structures. *Eur. J. Mech. Solid.*, 2022, vol. 96, 104696. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104696>
12. Komatitsch D., Vilotte J.-P., Vai R., Castillo-Covarrubias J.M., Sánchez-Sesma F.J. The spectral element method for elastic wave equations – application to 2-D and 3-D seismic problems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1999, vol. 45, pp. 1139-1164. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0207\(19990730\)45:9<1139::aid-nme617>3.0.co;2-t](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0207(19990730)45:9<1139::aid-nme617>3.0.co;2-t)
13. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. *Metody granichnykh integral'nykh uravneniy i granichnykh elementov v reshenii zadach trekhmernoy dinamicheskoy teorii uprugosti s sopryazhennymi polyami* [The boundary integral equation method and the boundary element method for three-dimensional elastodynamic problems with conjugate fields]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 352 p.
14. Song C., Wolf J.P. The scaled boundary finite-element method—alias consistent infinitesimal finite-element cell method—for elastodynamics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1997, vol. 147, pp. 329-355. [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(97\)00021-2](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(97)00021-2)
15. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred* [Dynamics of inhomogeneous linearly elastic media]. Moscow, Nauka, 1989. 343 p.
16. Vatul'yan A.O. *Obratnyye zadachi v mekhanike deformiruyemogo tverdogo tela* [Inverse problems in mechanics of solids]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 223 p.
17. Manolis G.D., Dineva P.S., Rangelov T.V., Wuttke F. State-of-the-Art for the BIEM. *Seismic wave propagation in non-homogeneous elastic media by boundary elements*. Springer, 2017. P. 9-52. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45206-7_2
18. Bartoli I., Marzani A., di Scalea F.L., Viola E. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section. *J. Sound Vib.*, 2006, vol. 295, pp. 685-707. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.021>
19. Vivar-Perez J.M., Duczek S., Gabbert U. Analytical and higher order finite element hybrid approach for an efficient simulation of ultrasonic guided waves I: 2D-analysis. *Smart Structures and Systems*, 2014, vol. 13, pp. 587-614. <https://doi.org/10.12989/sss.2014.13.4.587>
20. Zou F., Aliabadi M.H. A boundary element method for detection of damages and self-diagnosis of transducers using electro-mechanical impedance. *Smart Mater. Struct.*, 2015, vol. 24, 095015. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/24/9/095015>
21. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Evdokimov A.A. Hybrid numerical-analytical scheme for calculating elastic wave diffraction in locally inhomogeneous waveguides. *Acoust. Phys.*, 2018, vol. 64, pp. 1-9. <https://doi.org/10.1134/s1063771018010086>
22. Golub M.V., Shpak A.N. Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure. *Appl. Math. Model.*, 2019, vol. 65, pp. 234-255. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.08.019>
23. Malik M.K., Chronopoulos D., Tanner G. Transient ultrasonic guided wave simulation in layered composite structures using a hybrid wave and finite element scheme. *Compos. Struct.*, 2020, vol. 246, 112376. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112376>
24. Novikov O.I., Evdokimov A.A. Implementation of a hybrid numerical-analytical approach for solving the problems of SH-wave diffraction by arbitrary-shaped obstacles. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov ChEC – Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2020, vol. 17, no. 2, pp. 49-56. <https://doi.org/10.31429/vestnik-17-2-49-56>
25. Shi L., Zhou Y., Wang J.-M., Zhuang M., Liu N., Liu Q.H. Spectral element method for elastic and acoustic waves in frequency domain. *J. Comput. Phys.*, 2016, vol. 327, pp. 19-38. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.09.036>
26. Bubenchikov A.M., Poponin V.S., Melnikova V.N. The mathematical statement and solution of spatial boundary value problems by means of spectral element method. *Vest. Tom. gos. un-ta. Matematika i mekhanika – Mathematics and Mechanics*, 2008, no. 3, pp. 70-76.
27. Golub M.V., Shpak A.N., Buethe I., Fritzen C.-P. Harmonic motion simulation and resonance frequencies determination of a piezoelectric strip-like actuator using high precision finite element method. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 397-407.

Поступила в редакцию 11.11.2022; после доработки 06.12.2022; принята к опубликованию 09.12.2022