

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.1.6](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.1.6)

УДК 532.5.032

ДИНАМИКА ЗАЖАТОЙ КАПЛИ В ПОЛЕ ТРАНСЛЯЦИОННЫХ ВИБРАЦИЙ

А.А. Алабужев^{1,2}, М.А. Пьянкова¹¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация²Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация

Исследуются собственные и вынужденные трансляционные колебания капли идеальной жидкости. Капля помещена в сосуд больших размеров, заполненный жидкостью другой плотности. В состоянии равновесия капля имеет форму кругового цилиндра и находится в контакте с крышкой и дном сосуда. Скорость движения контактной линии на торцевых плоскостях пропорциональна отклонению краевого угла от равновесного значения (угол образуют соответствующая плоскость и недеформированная цилиндрическая поверхность капли). Коэффициент пропорциональности (параметр смачивания или параметр Хоккинга) свой для крышки и дна, он характеризует степень взаимодействия между линией контакта и твердой поверхностью, которое приводит к диссипации энергии при ее движении. Это позволяет использовать для описания движения потенциал скорости при наличии деформированной поверхности раздела между невязкими жидкостями. Показано, что основная частота трансляционной моды собственных колебаний может не обращаться в нуль, в отличие от случая равных параметров смачивания. Диссипация энергии определяется суммарным вкладом этих параметров, что дает возможность варьировать движение линии контакта в широких пределах. Амплитуда колебаний пропорциональна разности плотностей жидкостей, то есть при одинаковых плотностях система движется как целое. Обнаружено, что возбуждаются как четные, так и нечетные гармоники колебаний формы капли вследствие разных значений параметров смачивания крышки и дна, а при их одинаковых свойствах внешняя вибрационная сила возбуждает только четные гармоники.

Ключевые слова: собственные колебания, вынужденные колебания, трансляционные колебания, капля жидкости, динамика линии контакта, деформируемая поверхность раздела

DYNAMICS OF A CLAMPED DROP UNDER TRANSLATIONAL VIBRATIONS

A.A. Alabuzhev^{1,2} and M.A. Pyankova¹¹Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation²Perm State University, Perm, Russian Federation

The free and forced translational oscillations of an ideal liquid drop have been investigated. The drop was placed in a large-sized vessel filled with a liquid of different density. In equilibrium, the drop has the shape of a circular cylinder, and it is sandwiched between the lid and bottom of the vessel. The contact line-speed at the end plates is proportional to the deviation of the contact angle from its equilibrium value (the angle is formed by the corresponding plate and the undeformed cylindrical surface of the drop). The proportionality coefficient (the wetting or Hocking parameter) is different for each surface; it characterizes the force of interaction between the contact line and the solid surface, which leads to energy dissipation during its movement. This makes it possible to use the velocity potential to describe motion in the presence of a deformed interface between inviscid fluids. It is shown that the fundamental frequency of the translational mode of natural oscillations may not vanish in contrast to the case of equal wetting parameters. The energy dissipation is determined by the total contribution of these parameters, which makes it possible to vary the motion of the contact line over a wide range. The oscillation amplitude is proportional to the density difference of the liquids, i.e., at equal densities, the system moves as a whole. It has been found that both integer and non-integer harmonics of shape oscillations are excited due to different wetting parameters. The external vibrational force excites only even harmonics and, with identical surfaces, only they are present in the oscillation spectrum.

Key words: free oscillations, forced oscillations, translational vibrations, liquid drop, contact line dynamics, deformable interface

1. Введение

Изучению поведения включений (капель, пузырьков, частиц) в жидкости и способам манипулирования ими в настоящее время уделяется пристальное внимание [1–18]. Это вызвано интересом не только к позиции фундаментальности проблемы, но и с точки зрения приложений, где такие объекты взаимодействуют. Так, пузырьки, капли или частицы могут появляться или исчезать в процессе изменения состояния системы, например, при разрушении слоя и пленки жидкости [19–21], при кипении и испарении [22, 23], при конденсации [24] и другом. Особую роль в таких процессах играет растекание жидкости по поверхности раздела, то есть движение линии контакта сред [25–35].

В большинстве процитированных работ предполагается, что линия контакта смещается равномерно, что жидкость растекается либо под действием стационарного внешнего поля (силы тяжести, температуры и другого), либо за счет межмолекулярных взаимодействий (в частности, ван-дер-ваальсового притяжения). При этом заметную роль играет молекулярная вязкость. Вследствие этого существенно ограничивается использование подобных моделей при быстропеременном движении линии контакта. В работе [36] при изучении волн на деформируемой горизонтальной поверхности жидкости между двумя вертикальными стенками, для периодического перемещения линии контакта вдоль вертикальной стенки, предложено следующее условие:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = \Lambda^* \mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^* \quad (1)$$

Здесь: ζ^* — отклонение горизонтальной поверхности от равновесного положения; t^* — время; Λ^* — феноменологическая постоянная (параметр смачивания или параметр Хокинга); \mathbf{k} — вектор нормали к твердой поверхности; далее краевым углом называется угол, образуемый вертикальной стенкой и горизонтальной поверхностью (в состоянии равновесия он предполагается прямым). В результате параметр смачивания Λ^* , который имеет размерность скорости, характеризует степень взаимодействия контактной линии с вертикальной стенкой, а все сложные процессы, происходящие в непосредственной близости от линии контакта, из рассмотрения исключаются. Граничное условие (1) включает два важных предельных состояния: фиксированное положение контактной линии при $\partial \zeta^* / \partial t^* = 0$ [9, 37, 38] и фиксированное значение краевого угла $\mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^* = 0$ [9, 39, 40]. Во всех других случаях оно описывает затухание свободных колебаний, которое связано с взаимодействием линии контакта с твердой вертикальной стенкой при движении.

Условие (1) и его модификации (с учетом гистерезиса краевого угла [41], электрсмачивания [42], неоднородности поверхностей [43]) использовались, например, при изучении собственных и вынужденных колебаний полусферической капли [44, 45], пузырька на подложке [46, 47], колебаний цилиндрической капли [48–50], пузырька, окруженного жидкостью конечного объема [51, 52], рассеивания капиллярных волн [53], движения линии контакта по вертикальной поверхности [54, 55]. В работе [42] на основе (1) предложена модель колебаний капли между разными поверхностями в переменном электрическом поле. Затем эта модель использовалась для описания осесимметричных колебаний капли [49] и объемных колебаний пузырька [51]. Собственные трансляционные колебания такой капли между одинаковыми поверхностями исследовались в работах [48, 56], вынужденные — в [48]. В данной работе изучаются трансляционные колебания зажатой капли жидкости, аналогичные [48], но между разными поверхностями, подобно [49]. Основное внимание уделяется влиянию различающихся свойств поверхности. Влияние других параметров задачи подробно изучено в вышеперечисленных работах.

2. Постановка задачи

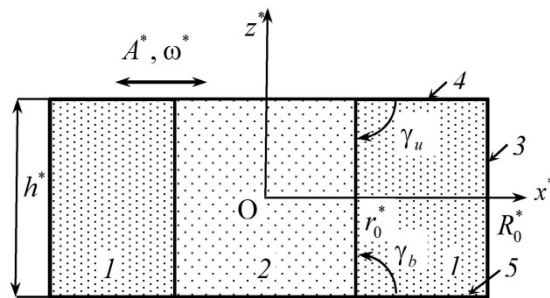


Рис. 1. Геометрия задачи: 1 – жидкость, 2 – капля, 3 – сосуд, 4 – крышка, 5 – дно

Рассмотрим колебания капли жидкости плотностью ρ_i^* и вязкостью ν_i^* в сосуде цилиндрической формы высотой h^* и радиусом R_0^* , заполненном другой жидкостью, характеризуемой плотностью ρ_e^* и вязкостью ν_e^* (Рис. 1). Система координат $Ox^*y^*z^*$ связана с сосудом. В состоянии механического равновесия капля имеет форму кругового цилиндра высотой h^* и радиусом r_0^* , ось Oz^* совпадает с осью симметрии цилиндра. Размеры сосуда возьмем достаточно большими, по сравнению с размерами капли

($r_0^* \ll R_0^*$), чтобы пренебречь влиянием боковой стенки сосуда на поведение капли. На сосуд действует внешняя вибрационная сила с амплитудой A^* и частотой ω^* , направленная перпендикулярно оси симметрии капли и вдоль оси Ox^* .

Предположим, что жидкости несжимаемые и невязкие, то есть выполняются следующие условия для частоты вибраций: $\omega^* r_0^* \ll c_{i,e}^*$ и $\nu_{i,e}^* \ll \omega^* r_0^{*2}$ ($c_{i,e}^*$ — скорость звука в жидкости). Например, для капли воды ($c_i^* = 1,5 \cdot 10^3$ м/с, $\nu_i^* = 10^{-6}$ м²/с) радиусом $r_0^* \sim 10^{-2}$ м в воздухе ($c_e^* = 3,4 \cdot 10^2$ м/с, $\nu_e^* = 10^{-5}$ м²/с) диапазон допустимых частот $\omega^* \sim 10^{-1} \dots 10^4$ рад/с. Это позволяет вместо вектора скорости \mathbf{v}^* ввести потенциал скорости ϕ^* : $\mathbf{v}^* = \nabla \phi^*$.

При движении линий контакта выполняется граничное условие (1). Параметр смачивания для каждой поверхности индивидуален: Λ_u^* — на «верхней» крышке сосуда ($z^* = h^*/2$), Λ_b^* — на «нижней» ($z^* = -h^*/2$). Благодаря этому условию диссипацию энергии можно учитывать даже при использовании приближения невязкой жидкости [36, 41–56]. Это позволяет, согласно теореме Кельвина о циркуляции, рассматривать течение как потенциальное при наличии деформируемой поверхности раздела.

На деформируемой боковой поверхности капли, которая является поверхностью раздела двух жидкостей, зададим постоянный коэффициент поверхностного натяжения σ^* . Эта поверхность в цилиндрических

координатах (r^*, α, z^*) определяется как $r^* = r_0^* + \zeta^*(\alpha^*, z^*, t^*)$, где $\zeta^*(\alpha^*, z^*, t^*)$ — функция, описывающая отклонение цилиндрической поверхности от равновесного положения, t^* — время. Силой тяжести можно пренебречь в случае сильного поверхностного натяжения, малых размеров капли и близких плотностей жидкостей, то есть должно быть малым число Бонда (Этвеша): $Bo = g^* r_0^{*2} |\rho_e^* - \rho_i^*| / \sigma^* \ll 1$, где g^* — ускорение свободного падения.

Выберем в качестве единиц измерения: координат — r_0^* (по горизонтали) и h^* (по вертикали); отклонения от положения равновесия поверхности раздела жидкостей — A^* ; плотности — $\rho_e^* + \rho_i^*$; времени — $\sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^{*3} / \sigma^*}$; скорости — $A^* \sqrt{\sigma^*} / \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^{*3}}$; давления — $A^* \sigma^* / r_0^{*2}$.

Исследуем только малоамплитудные колебания капли: $A^* \ll r_0^*$. Запишем линеаризованные уравнения и граничные условия в безразмерном виде в неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом:

$$\Delta \varphi_k = 0, \quad p_k = -\rho_k \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} - \omega^2 r e^{i\omega t} \cos \alpha \right) \quad (k = i, e), \quad (2)$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}, \quad p_e - p_i = \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (3)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \varphi_e \rightarrow 0, \quad (4)$$

$$z = \pm \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$r = 1, \quad z = \pm \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \lambda_{u,b} b \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (6)$$

где p_i , φ_i и p_e , φ_e — давление и потенциал скорости в капле и в окружающей жидкости соответственно.

Краевая задача (2)–(6) включает семь безразмерных параметров: геометрический параметр — $b = r_0^* / h^*$; отношения плотности — $\rho_i = \rho_i^* / (\rho_e^* + \rho_i^*)$ и $\rho_e = \rho_e^* / (\rho_e^* + \rho_i^*)$; амплитуду $\varepsilon = A^* / r_0^*$ и частоту $\omega = \omega^* \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^{*3} / \sigma^*}$ вибраций; параметры смачивания крышки $\lambda_u = \Lambda_u^* \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^* / \sigma^*}$ и дна $\lambda_b = \Lambda_b^* b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) r_0^* / \sigma^*}$.

3. Собственные колебания

Рассмотрим лишь собственные трансляционные колебания капли, так как внешняя сила, входящая в уравнение Бернулли (2), возбуждает только трансляционную моду. Решение краевой задачи (2)–(6) без учета внешней силы в уравнении (2) представим в виде рядов Фурье по собственным функциям оператора Лапласа при граничных условиях (4) и (5):

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left(i\Omega \sum_{n=0}^{\infty} \left((a_{0n} R_{0n}^i(r) \cos(2n\pi z) + a_{1n} R_{1n}^i(r) \sin((2n+1)\pi z)) \cos(\alpha) \right) e^{i\Omega t} \right), \quad (7)$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left(i\Omega \sum_{k=0}^{\infty} \left((b_{0n} R_{0n}^e(r) \cos(2n\pi z) + b_{1n} R_{1n}^e(r) \sin((2n+1)\pi z)) \cos(\alpha) \right) e^{i\Omega t} \right), \quad (8)$$

$$\zeta(z, t) = \operatorname{Re} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} (c_{0n} \cos(2n\pi z) + c_{1n} \sin((2n+1)\pi z)) + d_1 z + d_2 z^2 \right) \cos(\alpha) e^{i\Omega t} \right), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} R_{00}^i(r) &= r, & R_{0n}^i(r) &= I_1(2\pi n b r), & R_{1n}^i(r) &= I_1((2n+1)\pi b r), \\ R_{00}^e(r) &= r^{-1}, & R_{0n}^e(r) &= K_1(2\pi n b r), & R_{1n}^e(r) &= K_1((2n+1)\pi b r), \end{aligned}$$

где a_{0n} , a_{1n} , b_{0n} , b_{1n} , c_{0n} , c_{1n} , d_1 и d_2 — неизвестные постоянные амплитуды, $I_1(r)$ и $K_1(r)$ — модифицированные функции Бесселя первого порядка 1-го и 2-го рода соответственно, Ω — частота собственных колебаний. В решениях (7)–(9) первые слагаемые под знаком суммы описывают четные гармоники (относительно смены знака координаты z), вторые слагаемые — нечетные гармоники. Общий

вид решения (9) определяется граничным условием баланса нормальных напряжений (3), и тогда два последних слагаемых в (9) будут отвечать нечетным и четным гармоникам соответственно.

Следующая задача на собственные значения Ω получается после подстановки решений (7)–(9) в однородную краевую задачу (2)–(6):

$$EO - \frac{ib}{2\Omega}(\lambda_u + \lambda_b)(E + O) - \frac{b^2\lambda_u\lambda_b}{\Omega^2} = 0, \quad (10)$$

где

$$E = \frac{1}{6} - \frac{2b^2}{\Omega^2} + \Omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n}{\Omega_{0n}^2 - \Omega^2}, \quad C_n = \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \quad (n \geq 1),$$

$$O = \frac{1}{2} + \Omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n S_n}{\Omega_{1n}^2 - \Omega^2}, \quad S_n = \frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi^2},$$

$$\Omega_{0n}^2 = \frac{4\pi^2 n^2 b^2}{\rho_i \frac{R_{0n}^i(1)}{R_{0nr}^i(1)} - \rho_e \frac{R_{0n}^e(1)}{R_{0nr}^e(1)}} \quad (n \geq 1), \quad \Omega_{1n}^2 = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 b^2}{\rho_i \frac{R_{1n}^i(1)}{R_{1nr}^i(1)} - \rho_e \frac{R_{1n}^e(1)}{R_{1nr}^e(1)}} \quad (k \geq 0),$$

$$R_{ln}^k(r) = \frac{\partial R_{ln}^k(r)}{\partial r} \quad (k = i, e; l = 0, 1),$$

при этом Ω_{0n} и Ω_{1n} — частоты четных и нечетных гармоник трансляционной моды собственных колебаний цилиндрической капли со свободной линией контакта ($\lambda \rightarrow \infty$) [39, 56].

Алгебраическое уравнение (10) имеет комплексные решения Ω , то есть свободные колебания затухают. Диссипация энергии свободных колебаний связана с взаимодействием линии контакта с крышкой/дном сосуда. Отметим, что при закрепленной ($\lambda \rightarrow 0$) или свободной ($\lambda \rightarrow \infty$) линии контакта на одной из горизонтальных плоскостей в системе происходит диссипация энергии. Например, для закрепленной или свободной контактной линии на дне и конечных значениях λ_u уравнение (10) принимает вид:

$$\lambda_b = 0: \quad EO = \frac{ib\lambda_u}{2\Omega}(E + O),$$

$$\lambda_b \rightarrow \infty: \quad \frac{i}{2}(E + O) + \frac{b\lambda_u}{\Omega} = 0.$$

При одинаковых смачивающих свойствах крышки и дна сосуда $\lambda_u = \lambda_b = \lambda$ уравнение (10) представляет собой произведение двух множителей, каждое из которых является частным уравнением для нахождения частот четных или нечетных мод:

$$\left(E - \lambda \frac{ib}{\Omega}\right) \left(O - \lambda \frac{ib}{\Omega}\right) = 0. \quad (11)$$

Эти уравнения совпадают с аналогичными уравнениями в [48, 56] и подобны уравнениям в [42, 46, 49].

На рисунке 2 показаны частоты $\text{Re}(\Omega)$ и декременты затухания $\text{Im}(\Omega)$ основной гармоники свободных колебаний. При одинаковых λ частота обращается в нуль после некоторого критического значения параметра смачивания (Рис. 2а). Критическое значение соответствует точке ветвления кривой декремента (Рис. 2б). Данный эффект связан со степенью взаимодействия линии контакта с поверхностью крышки/дна: при малых значениях λ это взаимодействие велико, и возможны «изгибные» колебания капли, которые описываются основной гармоникой трансляционной моды [48, 56]. С увеличением значения λ взаимодействие с зажимающими плоскостями уменьшается, и капля при движении сохраняет свою цилиндрическую форму аналогично капле со сводной линией контакта (постоянным краевым углом) [39].

При различающихся параметрах смачивания ($\lambda_u \neq \lambda_b$) «изгибные» колебания могут не исчезать, если один из параметров достаточно мал. На рисунке 2а показано, что частота основной гармоники отлична от нуля на всем интервале значений λ_u при малых и конечных λ_b , тогда как при больших λ_b зависимости $\text{Re}(\Omega_0)$ (Рис. 2а) и $\text{Im}(\Omega_0)$ (Рис. 2б) качественно совпадают с аналогичными графиками для случая одинаково смачиваемых пластин.

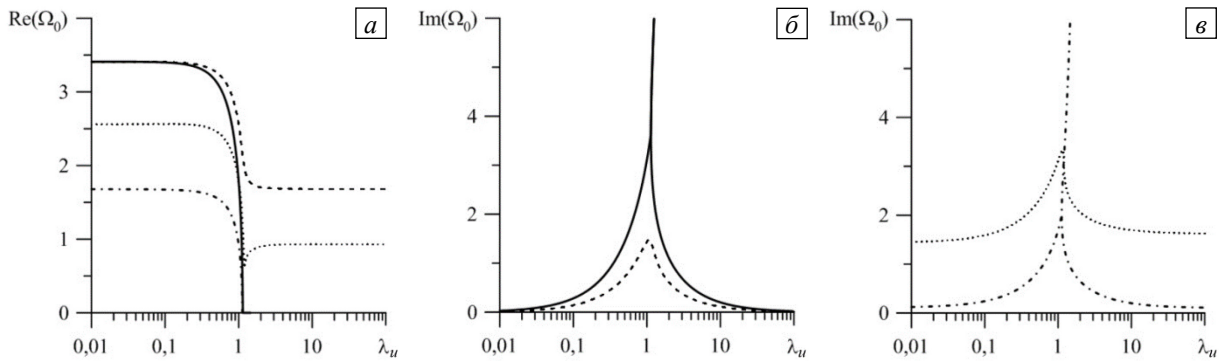


Рис. 2. Частота (а) и декремент затухания (б, в) основной гармоники трансляционной моды при $b=1$, $\rho_i=0,7$ и разных значениях λ_b : λ_u – сплошная линия, 0 – штриховая, 1 – пунктирная, 10 – штрихпунктирная

Частоты более высоких гармоник монотонно убывают с увеличением параметра смачивания (Рис. 3а). Декременты затухания (Рис. 3б, в) имеют максимумы при конечных значениях λ . В целом все зависимости качественно совпадают со случаем пластин с одинаковыми свойствами. Отметим, что наибольшую частоту имеет капля с закрепленной линией контакта, а наименьшую — капля со свободной контактной линией. Вместе с номером гармоники растет и декремент.

С увеличением геометрического параметра b частоты колебаний тоже увеличиваются. На рисунке 4 показаны зависимости основной гармоники для двух значений b . Видно, что критический уровень параметра смачивания не зависит от b .

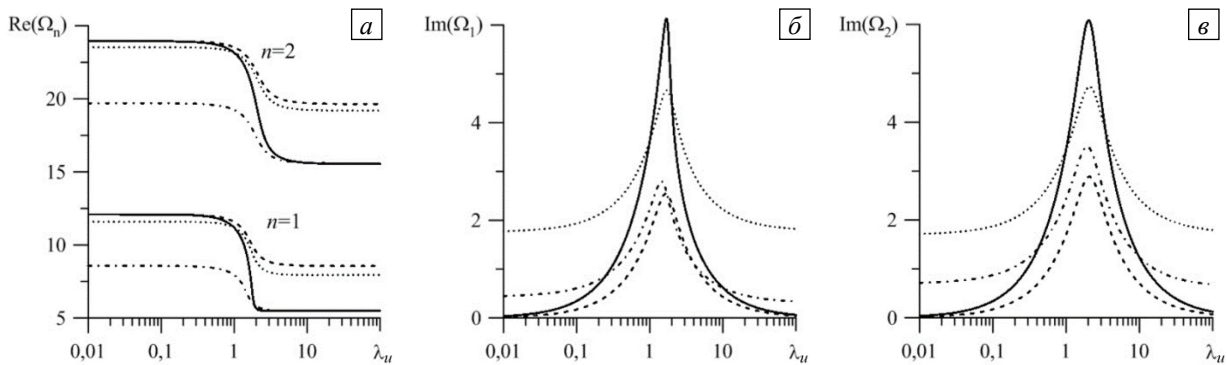


Рис. 3. Частота (а) и декремент затухания (б, в) двух гармоник трансляционной моды при $b=1$, $\rho_i=0,7$ и разных значениях λ_b : λ_u – сплошная линия, 0 – штриховая, 1 – пунктирная, 10 – штрихпунктирная

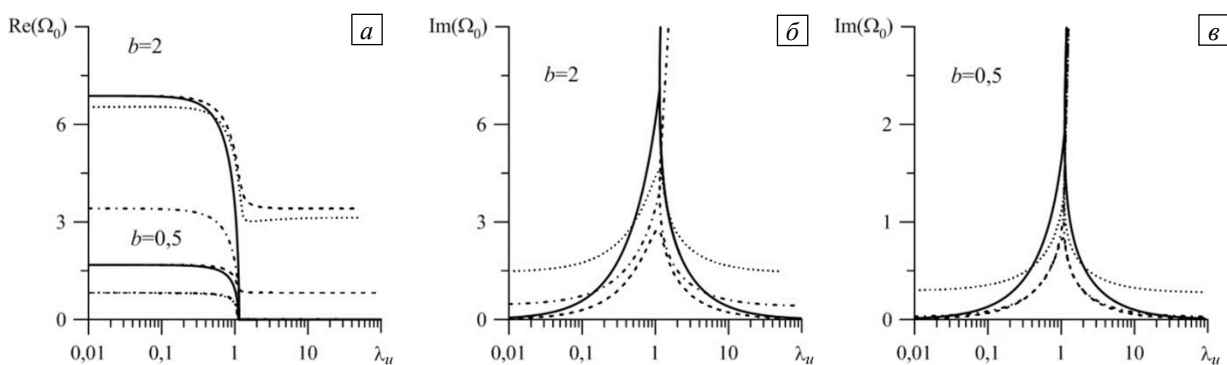


Рис. 4. Частота (а) и декремент затухания (б, в) при $\rho_i=0,7$ и разных значениях b и λ_b : λ_u – сплошная линия, 0 – штриховая, 1 – пунктирная, 10 – штрихпунктирная

4. Вынужденные колебания

При исследовании вынужденных колебаний решение полной краевой задачи (2)–(6) находится в виде, аналогичном (7)–(9):

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left(i\omega \sum_{n=0}^{\infty} \left((a_{0n} R_{0n}^i(r) \cos(2n\pi z) + a_{1n} R_{1n}^i(r) \sin((2n+1)\pi z)) \cos(\alpha) \right) e^{i\omega t} \right), \quad (12)$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left(i\omega \sum_{k=0}^{\infty} \left((b_{0n} R_{0n}^e(r) \cos(2n\pi z) + b_{1n} R_{1n}^e(r) \sin((2n+1)\pi z)) \cos(\alpha) \right) e^{i\omega t} \right), \quad (13)$$

$$\zeta(z, t) = \operatorname{Re} \left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} (c_{0n} \cos(2n\pi z) + c_{1n} \sin((2n+1)\pi z)) + d_1 z + d_2 z^2 \right) \cos(\alpha) e^{i\omega t} \right). \quad (14)$$

Подставляя решения (12)–(14) в задачу (2)–(6), получаем выражения для неизвестных амплитуд:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{(\rho_i - \rho_e)(E_u - E_b)}{E_u O_b + E_b O_u}, & d_2 &= -\frac{(\rho_i - \rho_e)(O_u + O_b)}{E_u O_b + E_b O_u}, \\ E_{u,b} &= \frac{1}{6} - \frac{2b^2}{\omega^2} + \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n C_n}{\Omega_{0n}^2 - \omega^2} + \frac{b\lambda_{u,b}}{i\omega}, & O_{u,b} &= \frac{1}{2} + \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n S_n}{\Omega_{1n}^2 - \omega^2} + \frac{b\lambda_{u,b}}{i\omega}, \\ b_{on} &= a_{on} \frac{R_{0nr}^i(1)}{R_{0nr}^e(1)}, & b_{1n} &= a_{1n} \frac{R_{1nr}^i(1)}{R_{1nr}^e(1)}, & a_{on} &= \frac{1}{R_{0nr}^i(1)} (c_{0n} + C_n d_2), & a_{1n} &= \frac{1}{R_{1nr}^i(1)} (c_{1n} + S_n d_1), \\ c_{00} &= (\rho_i - \rho_e) - \left(\frac{1}{12} + \frac{2b^2}{\omega^2} \right) d_2, & c_{0n} &= \frac{\omega^2 C_n d_2}{\Omega_{0n}^2 - \omega^2}, & c_{1n} &= \frac{\omega^2 S_n d_1}{\Omega_{1n}^2 - \omega^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из выражений (15) видно, что все амплитуды пропорциональны множителю $(\rho_i - \rho_e)$, то есть при одинаковых плотностях капли и окружающей жидкости система будет двигаться как целое, без каких-либо колебаний капли. В общем случае все амплитуды являются комплексными числами, за исключением предельных случаев (закрепленных линий контакта и постоянных краевых углах).

Для удобства демонстрации результатов и их обсуждения введем следующие обозначения: $\zeta_u = |\zeta(0; 0,5; 0)|$ — амплитуда колебаний линии контакта на крышке; $\zeta_b = |\zeta(0; -0,5; 0)|$ — на дне; $\zeta_0 = |\zeta(0; 0; 0)|$ — в центре сосуда; $\zeta_q = |\zeta(0; 0,25; 0)|$ — при $z = 0,25$; γ_u (γ_b) — краевой угол между крышкой (дном) и цилиндрической поверхностью капли (см. Рис. 1).

На рисунке 5 показаны зависимости амплитуды колебаний от частоты вибраций ω для трех значений λ_b при фиксированном значении параметра смачивания крышки $\lambda_u = 1$. Отметим, что максимальные значения амплитуды колебаний достигаются в случае линейного резонанса. Резонансный пик на основной частоте собственных колебаний отсутствует при больших значениях λ (Рис. 5а, з), так как эта частота обращается в нуль (Рис. 2а). Кроме этого, существуют «антирезонансные» частоты, при которых линия контакта неподвижна при любых величинах λ (Рис. 5б, д). Значения этих частот удовлетворяют условиям:

$$d_1 = 0, \quad d_2 = -\frac{\rho_i - \rho_e}{1/6 - 2b^2/\omega^2 + \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n / (\Omega_{0n}^2 - \omega^2)}, \quad (16)$$

то есть такие частоты определяются четными гармониками. При достаточной подвижности линии контакта появляются дополнительные «антирезонансные» частоты и на нечетных гармониках (Рис. 5б, сплошная линия), но они зависят от соотношения параметров Хокинга.

Внешняя сила возбуждает только четные гармоники (подробнее см. в [48]), поэтому при одинаковых значениях параметра Хокинга λ имеется только один резонансный пик на частоте четной гармоники, который располагается между двумя соседними значениями «антирезонансных» частот (Рис. 5б, д). В случае различающихся λ_u и λ_b дополнительно к ним возбуждаются нечетные гармоники, что приводит к появлению резонансных пиков на частотах и этих гармоник. Эти пики наиболее заметны при значениях λ таких, при которых взаимодействие еще довольно сильное, но линии контакта уже подвижны. Однако в большинстве случаев резонансная амплитуда четных гармоник больше, чем нечетных, то есть основная часть энергии передается четным гармоникам. Амплитуда краевого угла меняется в больших пределах (Рис. 5в, е), но уменьшается с увеличением λ вследствие снижения взаимодействия между линией контакта и твердой поверхностью.

На рисунке 6 показаны динамические формы контактных линий и профиль боковой поверхности капли жидкости в разные моменты периода колебаний T и значения краевых углов на протяжении всего периода.

Капля смещается вдоль направления вибраций (Рис. 6а, б) согласно решению (12)–(14). Амплитуда колебаний боковой поверхности капли (Рис. 6в) мала, так как основная частота собственных колебаний при данных параметрах равняется нулю. Профиль боковой поверхности капли такой, что может быть описан четной функцией. Из рисунка 6г следует, что при больших значениях λ (при слабом взаимодействии между линией контакта и дном сосуда, Рис. 1) амплитуда краевого угла уменьшается.

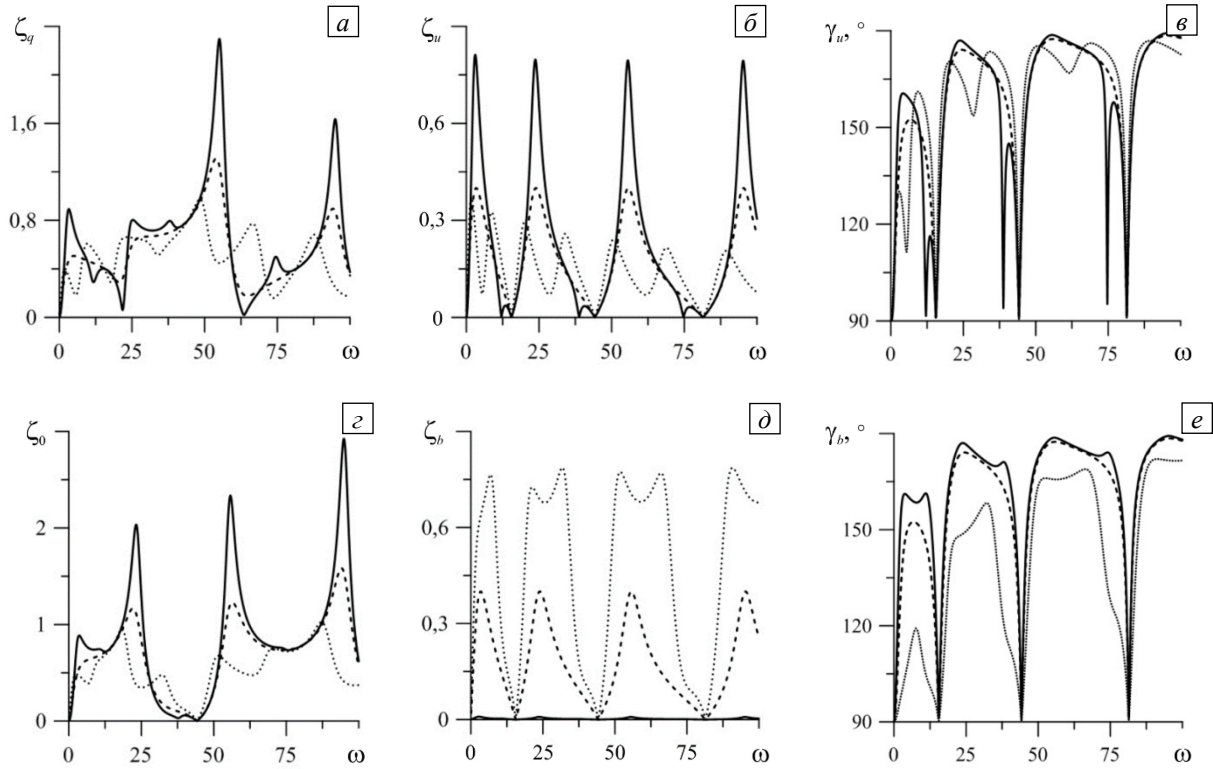


Рис. 5. Зависимость амплитуды колебаний боковой поверхности (а, д), линии контакта (б, е) и краевого угла (в, е) от частоты внешних вибраций ω при $\rho_i = 0,7$, $\lambda_u = 1$ и разных значениях λ_b : 0,01 – сплошная линия, 1 – штриховая, 10 – пунктирная

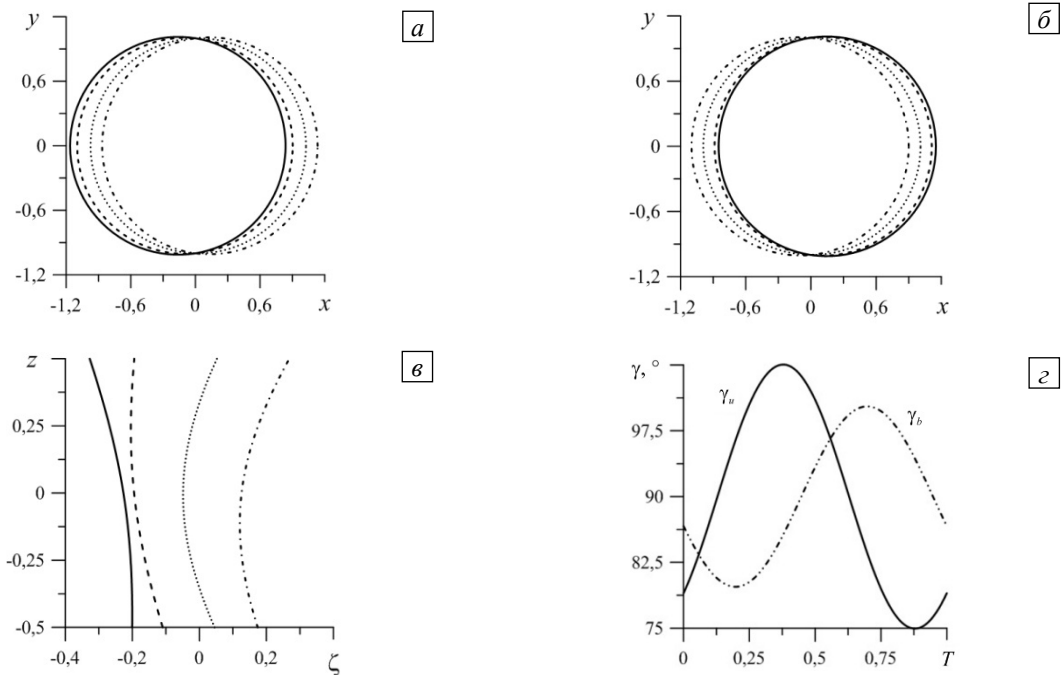


Рис. 6. Форма линии контакта $1 + 0,5\zeta(z, t)$ при разных z : 0,5 (а) и $-0,5$ (б), форма боковой поверхности капли при $\alpha = 0$ (в) в различные моменты периода колебаний капли t : 0 – сплошная линия, 0,125T – штриховая, 0,25T – пунктирная, 0,375T – штрихпунктирная; на фрагменте (г) представлены изменения краевых углов в течение всего периода колебаний

5. Заключение

Исследованы собственные и вынужденные колебания капли жидкости, зажатой между двумя параллельными твердыми поверхностями с различающимися свойствами, под действием трансляционных вибраций. Граничное условие, налагаемое на контактную линию, приводит к затуханию колебаний, что позволяет использовать потенциальное течение с деформированной поверхностью раздела, согласно теореме Кельвина о циркуляции, в модели невязкой жидкости.

Параметры Хокинга для каждой плоскости отличаются между собой, что приводит к появлению в спектре как четных гармоник трансляционной моды, так и нечетных. Внешнее вибрационное воздействие возбуждает только четные гармоники, но из-за взаимодействия линий контакта с поверхностями, имеющими разные свойства, нарушается симметрия относительно середины капли, и появляются нечетные гармоники. Резонансная амплитуда на частотах четных гармоник больше, чем на нечетных. Следовательно, большая часть энергии содержится в четных колебаниях формы капли.

В случае ограничивающих поверхностей с одинаковыми свойствами основная частота трансляционной моды обращается в нуль после некоторого критического значения параметра Хокинга (подробнее см. в [48, 56]). При разнородных поверхностях эта частота не обнуляется в широком диапазоне значений параметров смачивания и монотонно убывает с увеличением одного параметра при фиксированном другом. При нулевой частоте отсутствует соответствующий резонансный пик, что хорошо заметно на построенных амплитудно-частотных зависимостях. Таким образом, полученные результаты могут быть использованы, например, при определении гладкости поверхности и измерении интегрального параметра взаимодействия — параметра Хокинга.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (бюджетная тема № 121031700169-1) (собственные колебания) и гранта РФФИ (проект № 20-31-90104) (вынужденные колебания).

Литература

1. *Holter N.J., Glasscock W.R.* Vibrations of evaporating liquid drops // *J. Acoust. Soc. Am.* 1952. Vol. 24. P. 682-686. <https://doi.org/10.1121/1.1906956>
2. *Miller C.A., Scriven L.E.* The oscillations of a fluid droplet immersed in another fluid // *J. Fluid Mech.* 1968. Vol. 32. P. 417-435. <https://doi.org/10.1017/S0022112068000832>
3. *Henderson D.M., Miles J.W.* Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 275. P. 285-299. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112094002363>
4. *Картавых Н.Н., Шкляев С.В.* О параметрическом резонансе полусферической капли на осциллирующей твердой подложке // *Вестник ПГУ. Физика.* 2007. № 1(6). С. 23-28.
5. *Иванцов А.О.* Акустические колебания полусферической капли // *Вестник ПГУ. Физика.* 2012. № 3(21). С. 16-23.
6. *Alabuzhev A.A., Shklyayev S.V.* Emission of acoustic waves by nonlinear drop oscillations // *Phys. Fluids.* 2007. Vol. 19. 047102. <https://doi.org/10.1063/1.2718492>
7. *Shklyayev S., Straube A.V.* The impact of bubble diffusivity on confined oscillated bubbly liquid // *Phys. Fluids.* 2009. Vol. 21. 063303. <https://doi.org/10.1063/1.3157237>
8. *Shklyayev S.* Janus droplet as a catalytic micromotor // *EPL.* 2015. Vol. 110. 54002. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/110/54002>
9. *Bostwick J.B., Steen P.H.* Dynamics of sessile drops. Part 1. Inviscid theory // *J. Fluid Mech.* 2014. Vol. 760. P. 5-38. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.582>
10. *Chang C., Bostwick J., Daniel S., Steen P.* Dynamics of sessile drops. Part 2. Experiment // *J. Fluid Mech.* 2015. Vol. 768. P. 442-467. <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.99>
11. *Klimenko L., Lyubimov D.* Surfactant effect on the average flow generation near curved interface // *Microgravity Sci. Technol.* 2018. Vol. 30. P. 77-84. <https://doi.org/10.1007/s12217-017-9577-2>
12. *Марышев Б.С., Паришкова Я.Н., Иванцов А.О., Зубова Н.А.* Вынос из придонного слоя речных систем загрязнений, накопленных в процессе сброса воды, содержащей продукты промышленной переработки // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2022. Т. 15, № 2. С. 209-222. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.2.16>
13. *Ding D., Bostwick J.B.* Oscillations of a partially wetting bubble // *J. Fluid Mech.* 2022. Vol. 945. A24. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.584>
14. *Kim J.* Spray cooling heat transfer: The state of the art // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2007. Vol. 28. P. 753-767. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2006.09.003>
15. *Bhushan B., Jung Y.C.* Natural and biomimetic artificial surfaces for superhydrophobicity, self-cleaning, low adhesion, and drag reduction // *Prog. Mater. Sci.* 2011. Vol. 56. P. 1-108. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2010.04.003>
16. *Liu W., Ren Y., Tao Y., Chen X., Yao B., Hui M., Bai L.* Control of two-phase flow in microfluidics using out-of-phase electroconvective streaming // *Phys. Fluids.* 2017. Vol. 29. 112002. <https://doi.org/10.1063/1.5003973>
17. *Antonopoulou E., Harlen O.G., Walkley M.A., Kapur N.* Jetting behavior in drop-on-demand printing: Laboratory experiments and numerical simulations // *Phys. Rev. Fluids.* 2020. Vol. 5. 043603. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.043603>
18. *De Ruiter R., Sempregon C., van Gorcum M., Duits M.H.G., Brinkmann M., Mugele F.* Stability limits of capillary bridges: How contact angle hysteresis affects morphology transitions of liquid microstructures // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 114. 234501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.234501>

19. *Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G.* Long-scale evolution of thin liquid films // *Rev. Mod. Phys.* 1997. Vol. 69. P. 931-980. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.931>
20. *Samoilova A., Nepomnyashchy A.* Longitudinal modulation of Marangoni wave patterns in thin film heated from below: Instabilities and control // *Appl. Math. Stat.* 2021. Vol. 7. 697332. <https://doi.org/10.3389/fams.2021.697332>
21. *Alabuzhev A.A., Volodin I.V.* Linear instability of forced oscillations of a thin ferrofluid film in a vertical magnetic field // *Microgravity Sci. Technol.* 2022. Vol. 34. 91. <https://doi.org/10.1007/s12217-022-10014-z>
22. *Savenko O.A., Lebedev-Stepanov P.V.* Quasi-stationary evaporation of a small liquid droplet on a flat substrate: Analytical solution in bipolar coordinates // *Colloid J.* 2022. Vol. 84. P. 312-320. <https://doi.org/10.1134/S1061933X22030115>
23. *Ebril H.Y.* Evaporation of pure liquid sessile and spherical suspended drops: A review // *Adv. Colloid Interface Sci.* 2012. Vol. 170. P. 67-86. <https://doi.org/10.1016/j.cis.2011.12.006>
24. *Boinovich L., Emelyanenko A.M., Korolev V.V., Pashinin A.S.* Effect of wettability on sessile drop freezing: When superhydrophobicity stimulates an extreme freezing delay // *Langmuir.* 2014. Vol. 30. P. 1659-1668. <https://doi.org/10.1021/la403796g>
25. *Huh C., Scriven L.E.* Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line // *J. Colloid Interface Sci.* 1971. Vol. 35. P. 85-101. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(71\)90188-3](https://doi.org/10.1016/0021-9797(71)90188-3)
26. *Hocking L.M.* Sliding and spreading of thin two-dimensional drops // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1981. Vol. 34. P. 37-55. <https://doi.org/10.1093/qjmam/34.1.37>
27. *Dussan V.E.B., Chow R.T.-P.* On the ability of drops or bubbles to stick to non-horizontal surfaces of solids // *J. Fluid Mech.* 1987. Vol. 137. P. 1-29. <https://doi.org/10.1017/S002211208300227X>
28. *Dussan V.E.B.* On the ability of drops or bubbles to stick to non-horizontal surfaces of solids. Part 2. Small drops or bubbles having contact angles of arbitrary size // *J. Fluid Mech.* 1985. Vol. 151. P. 1-20. <https://doi.org/10.1017/S0022112085000842>
29. *Dussan V.E.B.* On the ability of drops to stick to surfaces of solids. Part 3. The influences of the motion of the surrounding fluid on dislodging drops // *J. Fluid Mech.* 1987. Vol. 174. P. 381-397. <https://doi.org/10.1017/S002211208700017X>
30. *Young G.W., Davis S.H.* A plate oscillating across a liquid interface: Effects of contact-angle hysteresis // *J. Fluid Mech.* 1987. Vol. 174. P. 327-356. <https://doi.org/10.1017/S0022112087000156>
31. *Snoeijer J.H., Andreotti B.* A microscopic view on contact angle selection // *Phys. Fluids.* 2008. Vol. 20. 057101. <https://doi.org/10.1063/1.2913675>
32. *Du J., Chamakos N.T., Papathanasiou A.G., Min Q.* Initial spreading dynamics of a liquid droplet: The effects of wettability, liquid properties, and substrate topography // *Phys. Fluids.* 2021. Vol. 33. 042118. <https://doi.org/10.1063/5.0049409>
33. *Ben Amar M., Cummings L.J., Pomeau Y.* Transition of a moving contact line from smooth to angular // *Phys. Fluids.* 2003. Vol. 15. P. 2949-2960. <https://doi.org/10.1063/1.1604778>
34. *Manor O., Pismen L.M.* Effect of high-frequency in-plane substrate vibration on a three-phase contact angle // *Phys. Fluids.* 2015. Vol. 27. 062101. <https://doi.org/10.1063/1.4922054>
35. *Xu X., Di Y., Doi M.* Variational method for liquids moving on a substrate // *Phys. Fluids.* 2016. Vol. 28. 087101. <https://doi.org/10.1063/1.4959227>
36. *Hocking L.M.* The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // *J. Fluid Mech.* 1987. Vol. 179. P. 253-266. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112087001514>
37. *Демин В.А.* К вопросу о свободных колебаниях капиллярного моста // *Изв. РАН. МЖГ.* 2008. № 4. С. 28-37. (English version <http://dx.doi.org/10.1134/S0015462808040042>)
38. *Alabuzhev A.A.* Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid // *Int. J. Fluid Mech. Res.* 2019. Vol. 46. P. 441-457. <https://doi.org/10.1615/InterJFluidMechRes.2019025743>
39. *Алабузhev A.A., Любимов Д.В.* Поведение цилиндрической капли при многочастотных вибрациях // *Изв. РАН. МЖГ.* 2005. № 2. С. 18-28. (English version <http://dx.doi.org/10.1007/s10697-005-0058-8>)
40. *Lu Z., Preston D.J., Antao D.S., Zhu Y., Wang E.N.* Coexistence of pinning and moving on a contact line // *Langmuir.* 2017. Vol. 33. P. 8970-8975. <https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.7b02070>
41. *Hocking L.M.* Waves produced by a vertically oscillating plate // *J. Fluid Mech.* 1987. Vol. 179. P. 267-281. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112087001526>
42. *Алабузhev A.A., Кашина М.А.* Влияние различия свойств поверхностей на осесимметричные колебания сжатой капли в переменном электрическом поле // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2018. Т. 61, № 8-9. С. 662-676. (English version <https://doi.org/10.1007/s11141-019-09919-4>)
43. *Alabuzhev A.A.* Influence of heterogeneous plates on the axisymmetrical oscillations of a cylindrical drop // *Microgravity Sci. Technol.* 2018. Vol. 30. P. 25-32. <https://doi.org/10.1007/s12217-017-9571-8>
44. *Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V.* Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop // *Phys. Fluids.* 2009. Vol. 21. 072104. <https://doi.org/10.1063/1.3174446>
45. *Alabuzhev A.A., Kolupaev V.S.* The effect of substrate surface on the dynamics of sessile drop under axisymmetric vibrations // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer.* 2021. Vol. 9. P. 75-85. <https://doi.org/10.1615/INTERFACPHENOMHEATTRANSFER.2021035378>
46. *Shklyaev S., Straube A.V.* Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate // *Phys. Fluids.* 2008. Vol. 20. 052102. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2918728>
47. *Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V., Shklyaev S.* Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis // *Phys. Fluids.* 2011. Vol. 23. 102105. <http://dx.doi.org/10.1063/1.3650280>
48. *Алабузhev A.A.* Трансляционные колебания цилиндрической капли в ограниченном объеме жидкости // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 4. С. 453-465.
49. *Alabuzhev A.A.* Forced axisymmetric oscillations of a drop, which is clamped between different surfaces // *Microgravity Sci. Technol.* 2020. Vol. 32. P. 545-553. <https://doi.org/10.1007/s12217-020-09783-2>
50. *Kashina M.A., Alabuzhev A.A.* The forced oscillations of an oblate drop sandwiched between different inhomogeneous surfaces under ac vibrational force // *Microgravity Sci. Technol.* 2021. Vol. 33. 35. <https://doi.org/10.1007/s12217-021-09886-4>
51. *Alabuzhev A.A.* Influence of surface properties on axisymmetrical oscillations of a cylindrical bubble // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer.* 2019. Vol. 7. P. 255-268. <https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2019031147>

52. Алабужев А.А. О влиянии внутреннего давления на колебания цилиндрического газового пузырька // Вестник ПГУ. Физика. 2020. № 4. С. 51-62. <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2020-4-51-62>
53. Zhang L., Thiessen D.B. Capillary-wave scattering from an infinitesimal barrier and dissipation at dynamic contact lines // *J. Fluid Mech.* 2013. Vol. 719. P. 295-313. <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2013.5>
54. Ting C.-L., Perlin M. Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: An experimental investigation // *J. Fluid Mech.* 1995. Vol. 295. P. 263-300. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112095001960>
55. Perlin M., Schultz W.W., Liu Z. High Reynolds number oscillating contact lines // *Wave Motion*. 2004. Vol. 40. P. 41-56. <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2003.12.011>
56. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 78-86. (English version <http://dx.doi.org/10.1007/s10808-007-0088-6>)

References

1. Holter N.J., Glasscock W.R. Vibrations of evaporating liquid drops. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1952, vol. 24, pp. 682-686. <https://doi.org/10.1121/1.1906956>
2. Miller C.A., Scriven L.E. The oscillations of a fluid droplet immersed in another fluid. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 32, pp. 417-435. <https://doi.org/10.1017/S0022112068000832>
3. Henderson D.M., Miles J.W. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line. *J. Fluid Mech.*, 1994, vol. 275, pp. 285-299. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112094002363>
4. Kartavyh N.N., Shklyayev S.V. О параметрическом резонансе полусилиндрической капли на остосиллирующей твердой подложке [About parametrical resonance of semicylindrical drop on oscillating solid plane]. *Vestnik PGU. Fizika – Bulletin of Perm University. Physics*, 2007, no. 1(6), pp. 23-28.
5. Ivantsov A.O. Acoustic oscillations of semispherical drop. *Vestnik PGU. Fizika – Bulletin of Perm University. Physics*, 2012, no. 3(21), pp. 16-23.
6. Alabuzhev A.A., Shklyayev S.V. Emission of acoustic waves by nonlinear drop oscillations. *Phys. Fluids*, 2007, vol. 19, 047102. <https://doi.org/10.1063/1.2718492>
7. Shklyayev S., Straube A.V. The impact of bubble diffusivity on confined oscillated bubbly liquid. *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, 063303. <https://doi.org/10.1063/1.3157237>
8. Shklyayev S. Janus droplet as a catalytic micromotor. *EPL*, 2015, vol. 110, 54002. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/110/54002>
9. Bostwick J.B., Steen P.H. Dynamics of sessile drops. Part 1. Inviscid theory. *J. Fluid Mech.*, 2014, vol. 760, pp. 5-38. <https://doi.org/10.1017/jfm.2014.582>
10. Chang C., Bostwick J., Daniel S., Steen P. Dynamics of sessile drops. Part 2. Experiment. *J. Fluid Mech.*, 2015, vol. 768, pp. 442-467. <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.99>
11. Klimentov L., Lyubimov D. Surfactant effect on the average flow generation near curved interface. *Microgravity Sci. Technol.*, 2018, vol. 30, pp. 77-84. <https://doi.org/10.1007/s12217-017-9577-2>
12. Maryshev B.S., Parshakova Ya.N., Ivantsov A.O., Zubova N.A. Removal of pollution accumulated in the process of wastewater discharge from the bottom layer of river systems. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2022, vol. 15, no. 2, pp. 209-222. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.2.16>
13. Ding D., Bostwick J.B. Oscillations of a partially wetting bubble. *J. Fluid Mech.*, 2022, vol. 945, A24. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.584>
14. Kim J. Spray cooling heat transfer: The state of the art. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 2007, vol. 28, pp. 753-767. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2006.09.003>
15. Bhushan B., Jung Y.C. Natural and biomimetic artificial surfaces for superhydrophobicity, self-cleaning, low adhesion, and drag reduction. *Prog. Mater. Sci.*, 2011, vol. 56, pp. 1-108. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2010.04.003>
16. Liu W., Ren Y., Tao Y., Chen X., Yao B., Hui M., Bai L. Control of two-phase flow in microfluidics using out-of-phase electroconvective streaming. *Phys. Fluids*, 2017, vol. 29, 112002. <https://doi.org/10.1063/1.5003973>
17. Antonopoulou E., Harlen O.G., Walkley M.A., Kapur N. Jetting behavior in drop-on-demand printing: Laboratory experiments and numerical simulations. *Phys. Rev. Fluids*, 2020, vol. 5, 043603. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.043603>
18. De Ruiter R., Semprebon C., van Gorcum M., Duits M.H.G., Brinkmann M., Mugele F. Stability limits of capillary bridges: How contact angle hysteresis affects morphology transitions of liquid microstructures. *Phys. Rev. Lett.*, 2015, vol. 114, 234501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.234501>
19. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 1997, vol. 69, pp. 931-980. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.931>
20. Samoilova A., Nepomnyashchy A. Longitudinal modulation of Marangoni wave patterns in thin film heated from below: Instabilities and control. *Appl. Math. Stat.*, 2021, vol. 7, 697332. <https://doi.org/10.3389/fams.2021.697332>
21. Alabuzhev A.A., Volodin I.V. Linear instability of forced oscillations of a thin ferrofluid film in a vertical magnetic field. *Microgravity Sci. Technol.*, 2022, vol. 34, 91. <https://doi.org/10.1007/s12217-022-10014-z>
22. Savenko O.A., Lebedev-Stepanov P.V. Quasi-stationary evaporation of a small liquid droplet on a flat substrate: Analytical solution in bipolar coordinates. *Colloid J.*, 2022, vol. 84, pp. 312-320. <https://doi.org/10.1134/S1061933X22030115>
23. Ebril H.Y. Evaporation of pure liquid sessile and spherical suspended drops: A review. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2012, vol. 170, pp. 67-86. <https://doi.org/10.1016/j.cis.2011.12.006>
24. Boinovich L., Emelyanenko A.M., Korolev V.V., Pashinin A.S. Effect of wettability on sessile drop freezing: when superhydrophobicity stimulates an extreme freezing delay. *Langmuir*, 2014, vol. 30, pp. 1659-1668. <https://doi.org/10.1021/la403796g>
25. Huh C., Scriven L.E. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line. *J. Colloid Interface Sci.*, 1971, vol. 35, pp. 85-101. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(71\)90188-3](https://doi.org/10.1016/0021-9797(71)90188-3)

26. Hocking L.M. Sliding and spreading of thin two-dimensional drops. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1981, vol. 34, pp. 37-55. <https://doi.org/10.1093/qjmam/34.1.37>
27. Dussan VE.B., Chow R.T.-P. On the ability of drops or bubbles to stick to non-horizontal surfaces of solids. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 137, pp. 1-29. <https://doi.org/10.1017/S002211208300227X>
28. Dussan VE.B. On the ability of drops or bubbles to stick to non-horizontal surfaces of solids. Part 2. Small drops or bubbles having contact angles of arbitrary size. *J. Fluid Mech.*, 1985, vol. 151, pp. 1-20. <https://doi.org/10.1017/S0022112085000842>
29. Dussan VE.B. On the ability of drops to stick to surfaces of solids. Part 3. The influences of the motion of the surrounding fluid on dislodging drops. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 174, pp. 381-397. <https://doi.org/10.1017/S002211208700017X>
30. Young G.W., Davis S.H. A plate oscillating across a liquid interface: effects of contact-angle hysteresis. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 174, pp. 327-356. <https://doi.org/10.1017/S0022112087000156>
31. Snoeijer J.H., Andreotti B. A microscopic view on contact angle selection. *Phys. Fluids*, 2008, vol. 20, 057101. <https://doi.org/10.1063/1.2913675>
32. Du J., Chamakos N.T., Papathanasiou A.G., Min Q. Initial spreading dynamics of a liquid droplet: The effects of wettability, liquid properties, and substrate topography. *Phys. Fluids*, 2021, vol. 33, 042118. <https://doi.org/10.1063/5.0049409>
33. Ben Amar M., Cummings L.J., Pomeau Y. Transition of a moving contact line from smooth to angular. *Phys. Fluids*, 2003, vol. 15, pp. 2949-2960. <https://doi.org/10.1063/1.1604778>
34. Manor O., Pismen L.M. Effect of high-frequency in-plane substrate vibration on a three-phase contact angle. *Phys. Fluids*, 2015, vol. 27, 062101. <https://doi.org/10.1063/1.4922054>
35. Xu X., Di Y., Doi M. Variational method for liquids moving on a substrate. *Phys. Fluids*, 2016, vol. 28, 087101. <https://doi.org/10.1063/1.4959227>
36. Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 179, pp. 253-266. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112087001514>
37. Demin V.A. Problem of the free oscillations of a capillary bridge. *Fluid Dyn.*, 2008, vol. 43, pp. 524-532. <http://dx.doi.org/10.1134/S0015462808040042>
38. Alabuzhev A.A. Oscillations and parametric instability of a cylindrical drop of a low-viscous liquid. *Int. J. Fluid Mech. Res.*, 2019, vol. 46, pp. 441-457. <https://doi.org/10.1615/InterJFluidMechRes.2019025743>
39. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. Behavior of a cylindrical drop under multi-frequency vibration. *Fluid Dyn.*, 2005, vol. 40, pp. 183-192. <http://dx.doi.org/10.1007/s10697-005-0058-8>
40. Lu Z., Preston D.J., Antao D.S., Zhu Y., Wang E.N. Coexistence of pinning and moving on a contact line. *Langmuir*, 2017, vol. 33, pp. 8970-8975. <https://doi.org/10.1021/acs.langmuir.7b02070>
41. Hocking L.M. Waves produced by a vertically oscillating plate. *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 179, pp. 267-281. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112087001526>
42. Alabuzhev A.A., Kashina M.A. Influence of surface properties on axisymmetric oscillations of an oblate drop in an ac electric field. *Radiophys. Quantum El.*, 2019, vol. 61, pp. 589-602. <https://doi.org/10.1007/s11141-019-09919-4>
43. Alabuzhev A.A. Influence of heterogeneous plates on the axisymmetrical oscillations of a cylindrical drop. *Microgravity Sci. Technol.*, 2018, vol. 30, pp. 25-32. <https://doi.org/10.1007/s12217-017-9571-8>
44. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V. Stick-slip dynamics of an oscillated sessile drop. *Phys. Fluids*, 2009, vol. 21, 072104. <https://doi.org/10.1063/1.3174446>
45. Alabuzhev A.A., Kolupaev V.S. The effect of substrate surface on the dynamics of sessile drop under axisymmetric vibrations. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2021, vol. 9, pp. 75-85. <https://doi.org/10.1615/INTERFACPHENOMHEATTRANSFER.2021035378>
46. Shklyaev S., Straube A.V. Linear oscillations of a hemispherical bubble on a solid substrate. *Phys. Fluids*, 2008, vol. 20, 052102. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2918728>
47. Fayzrakhmanova I.S., Straube A.V., Shklyaev S. Bubble dynamics atop an oscillating substrate: Interplay of compressibility and contact angle hysteresis. *Phys. Fluids*, 2011, vol. 23, 102105. <http://dx.doi.org/10.1063/1.3650280>
48. Alabuzhev A.A. Translational oscillations of a cylindrical drop in a bounded volume of fluid. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 453465.
49. Alabuzhev A.A. Forced axisymmetric oscillations of a drop, which is clamped between different surfaces. *Microgravity Sci. Technol.*, 2020, vol. 32, pp. 545-553. <https://doi.org/10.1007/s12217-020-09783-2>
50. Kashina M.A., Alabuzhev A.A. The forced oscillations of an oblate drop sandwiched between different inhomogeneous surfaces under ac vibrational force. *Microgravity Sci. Technol.*, 2021, vol. 33, 35. <https://doi.org/10.1007/s12217-021-09886-4>
51. Alabuzhev A.A. Influence of surface properties on axisymmetrical oscillations of a cylindrical bubble. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2019, vol. 7, pp. 255-268. <https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2019031147>
52. Alabuzhev A.A. Effect of the internal pressure on oscillations of a cylindrical gas bubble. *Vestnik PGU. Fizika – Bulletin of Perm University. Physics*, 2020, no. 4, pp. 51-62. <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2020-4-51-62>
53. Zhang L., Thiessen D.B. Capillary-wave scattering from an infinitesimal barrier and dissipation at dynamic contact lines. *J. Fluid Mech.*, 2013, vol. 719, pp. 295-313. <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2013.5>
54. Ting C.-L., Perlin M. Boundary conditions in the vicinity of the contact line at a vertically oscillating upright plate: An experimental investigation. *J. Fluid Mech.*, 1995, vol. 295, pp. 263-300. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112095001960>
55. Perlin M., Schultz W.W., Liu Z. High Reynolds number oscillating contact lines. *Wave Motion*, 2004, vol. 40, pp. 41-56. <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2003.12.011>
56. Alabuzhev A.A., Lyubimov D.V. Effect of the contact-line dynamics on the natural oscillations of a cylindrical droplet. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2007, vol. 48, pp. 686-693. <http://dx.doi.org/10.1007/s10808-007-0088-6>

Поступила в редакцию 15.11.2022; после доработки 06.12.2022; принята к опубликованию 09.12.2022

Сведения об авторах

Алабузhev Алексей Анатольевич, кфмн, доц., снс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: alabuzhev@icmm.ru

Пьянкова Марина Анатольевна, б/с, асп., ИМСС УрО РАН; e-mail: ya.kashina-marina@yandex.ru