

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.1.5](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.1.5)

УДК 539.3

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И РЕКОНСТРУКЦИИ ДВУМЕРНОГО НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

А.О. Ватульян^{1,2}, Р.Д. Недин¹¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская федерация²Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ, Российская федерация

Несмотря на актуальность исследований, посвященных выявлению полноценных двумерных или трехмерных неоднородных полей преднапряжений в твердых телах путем ряда поверхностных измерений в рамках неразрушающего подхода, в литературе они представлены в недостаточной степени. Настоящая работа является дальнейшим развитием методологии неразрушающей диагностики неоднородного двумерного начального напряженного состояния тонких пластин, основы которой заложены авторами и опубликованы ранее. В рамках линеаризованной модели формулируются и исследуются прямая и обратная задачи для планарных колебаний предварительно напряженной тонкой пластины. Даны вариационная и слабая постановки прямой задачи. Предложена итерационно-регуляризирующая схема решения обратной задачи идентификации двумерного начального напряженного состояния по данным измерений перемещений на некотором участке границы в заданном частотном диапазоне. Новая методика базируется на проекционном и конечно-элементном методах и приводит к решению плохо обусловленной алгебраической системы линейных уравнений на каждой итерации. Она дает возможность использовать данные проведенной серии вибрационных испытаний с применением различных видов нагружения. Получены и проанализированы результаты вычислительных экспериментов по восстановлению некоторых двумерных распределений начального напряженного состояния в прямоугольной пластине. Кроме того, выполнен конечно-элементный анализ чувствительности компонент предварительных напряжений к видам зондирующего нагружения, позволивший сформулировать рекомендации по выбору параметров зондирования для наиболее эффективной процедуры реконструкции.

Ключевые слова: обратная задача, предварительное напряжение, пластина, метод конечных элементов, итерационная регуляризация, проекционный метод

ON THE SENSITIVITY AND RECONSTRUCTION OF 2D PRESTRESS STATE IN A THIN PLATE

A.O. Vatulyan^{1,2} and R.D. Nedin¹¹Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation²Southern Mathematical Institute, VSC RAS, Vladikavkaz, Russian Federation

Despite of the relevance of studies devoted to the identification of fully 2D or 3D nonhomogeneous prestress fields in solids based on a number of surface measurements using a nondestructive approach, there is still a lack of publications on this topic in literature. In the present paper, we continue to develop the methodology for nondestructive acoustical identification of inhomogeneous 2D residual stress state in a plate, the foundations of which have been laid and published by the authors in their early works. In the framework of the linearized boundary-value problem, we formulate and investigate the direct and inverse problems of in-plane vibrations of a prestressed thin plate. The variational and weak formulations of the direct problem are presented. A new iterative-regularized scheme is proposed for solving the inverse problem of identification of 2D residual stress state in a plate using the measurements of displacements on some part of the boundary in a given frequency range. This technique is based on the projection and finite-element methods and leads to solving an ill-conditioned algebraic system at each iteration. It makes it possible to use the results of a series of vibration tests performed by applying different types of loading. Numerical results of reconstruction of some 2D inhomogeneous residual stress states in a rectangular plate were obtained and analyzed. Additionally, the finite-element analysis of sensitivity of the prestress parameters to sounding load types was carried to formulate recommendations on the choice of sounding parameters for the most advantageous reconstruction procedure.

Key words: inverse problem, prestress, residual stress, plate, finite element method, iterative regularization, projection method

1. Введение

Поля предварительных (начальных, внутренних, остаточных, технологических) напряжений (ПН) представляют собой распределения напряжений, существующих в теле при отсутствии внешних воздействий (механических, тепловых нагрузок или другого). Такие напряжения возникают в результате технологических процессов (сварки, литья, прокатки и прессования, дробеструйной и термической обработки, химических процессов и прочего) и способны приводить к неравномерному пластическому деформированию, температурным и объемным изменениям в инженерных конструкциях. Эти напряжения могут быть как желательными, так и нежелательными. С точки зрения предотвращения износа, усталости, растрескивания, дефектообразования, охрупчивания и возможного разрушения существенный интерес представляют новые методики моделирования и реконструкции остаточных напряжений в конструкциях [1, 2].

За последние несколько десятилетий разработан ряд методик идентификации и измерения ПН, которые можно условно разделить на разрушающие, полуразрушающие и неразрушающие (включающие рентгеновскую и нейтронную дифракцию, шум Баркгаузена, акустические и ультразвуковые) способы. В литературе имеется ряд довольно полных обзоров по измерениям ПН, см., например, [3, 4]. Среди способов

именно неразрушающие подходы к идентификации ПН являются наиболее перспективными, однако они требуют построения адекватных, экспериментально подтверждаемых теоретических моделей деформирования и колебаний упругих тел с явным учетом неравномерного распределения ПН в конкретных материалах, в том числе в новых слоистых и функционально-градиентных композитах. Кроме того, требуется разработка соответствующего математического аппарата. Тем не менее, в большом количестве исследований, посвященных теоретическим и численным аспектам идентификации остаточных напряжений, полностью или частично применяются разрушающие и полуразрушающие способы мониторинга; такие работы часто сопровождаются моделированием на основе метода конечных элементов (МКЭ). Например, в [5] распределение остаточных напряжений в деталях из металлических сплавов, сваренных лазером, измерено с помощью комбинации метода сечений (Cutting Contour Method) и теплового/структурного конечно-элементного 3D-моделирования.

Одним из широко распространенных в настоящее время способов контроля механических свойств и параметров предварительного напряженного состояния (ПНС) деталей является индентирование, которое пользуется большой популярностью благодаря простоте эксплуатации и применимости на макро-, микро- и наноуровне. Еще в конце 90-х годов в [6] сформулирована зависимость между параметрами вдавливания и уровнем остаточных напряжений; при этом поле остаточных напряжений считается одноосным. Сейчас активно развиваются методы микро- и наноиндентирования; так, в [7] описывается методика, позволяющая оценить величину и ориентацию главных составляющих остаточных напряжений на наноуровне.

Метод реконструкции «собственных деформаций» (eigenstrain), предложенный Джуном и Корсунским [8], основан на идентификации собственных деформаций (то есть различных неупругих деформаций, термических деформаций, фазовых превращений, дислокаций и другого) по данным экспериментальных измерений. В последующем по ним реконструируются остаточные напряжения. В работах [9, 10] для определения полей собственных деформаций и соответствующих полей остаточных напряжений предлагается вариационный подход, подходящий как для разрушающего, так и для неразрушающего мониторинга. Некоторые успешные применения вариационного подхода представлены в [11], где ПН восстановлены в сварном образце с помощью анализа собственных деформаций и метода масштабирования (который состоит в проведении измерений в аналогичном образце меньшего размера, претерпевшем тот же самый производственный процесс изготовления). В [12] авторы реконструировали ПН путем анализа собственной деформации на основе данных, полученных при последовательном сверлении и продольной резке. Другое применение метода собственных деформаций в сочетании со смешанной вариационной формулировкой и МКЭ предложено в [13]; авторы приводят несколько численных примеров реконструкции ПН, в том числе в упругопластических предварительно напряженных балках и сварных образцах, находящихся в одномерном одноосном ПНС.

Следует отметить, что проблема восстановления ПН представляет интерес не только для инженерных и машиностроительных изделий, но и для биомеханики; известно, что костные ткани и кровеносные сосуды содержат распределения остаточных напряжений. Например, в кровеносных сосудах ПН вызываются ростом и ремоделированием тканей, что сопровождается оптимизацией биомеханических эффектов клеток артериальной стенки. Теория биомеханики предварительно напряженных живых конструкций с большими деформациями активно развивалась в три последних десятилетия такими учеными, как Хогер, Хольцапфель, Огден, Хамфри [14, 15] и другими. В [16] авторы предложили обратные математические методы для реконструкции остаточного напряжения в артериальной стенке, теоретически основанные на использовании технологии внутрисосудистого ультразвука (Intravascular Ultrasound Technology) и анализа нескольких собственных частот материала стенки сосуда.

Несмотря на актуальность проблемы, в отечественной и зарубежной литературе наблюдается нехватка исследований, посвященных выявлению 2D или 3D неоднородных полей ПН в твердых телах посредством поверхностных измерений в рамках неразрушающих представлений. В качестве параметров измерений могут выступать амплитуды перемещений в наборе точек некоторого участка поверхности тела для нескольких частот колебаний; однако в такой постановке обратная задача оказывается нелинейной и существенно некорректной. В ряде случаев целесообразнее рассматривать более простую линейную обратную задачу восстановления ПН по данным измерения перемещений внутри всей области, занимаемой телом. Так, в подобной постановке в [17] предложено несколько способов решения соответствующей обратной задачи и обсуждаются аспекты достижения единственности решения.

В настоящей статье продолжено развитие методики неразрушающей акустической идентификации неоднородного двумерного остаточного напряженного состояния внутри некоторой области по измеренным перемещениям на части границы; основы этой методики заложены в нескольких ранних авторских работах [18–21]. Новизна предлагаемого вниманию читателя исследования заключается в приложении к части границы объекта одновременно нескольких зондирующих частотных нагружений различного вида. Три неизвестные составляющие двумерного ПНС выражаются через функцию напряжений, что гарантирует выполнение уравнений равновесия тела в начальной конфигурации. Затем, согласно разработанной ранее линейризованной теории обратных задач для предварительно напряженных тел, с помощью проекционного метода формулируется итерационно-регуляризирующая процедура, сводящаяся к решению плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных

параметров ПН. Рассмотрение на границе объекта различных зондирующих воздействий позволило добиться лучших результатов реконструкции компонент ПНС. Также в целях определения эффективности используемых параметров частотного нагружения и выбора наиболее информативных способов зондирования проведен акустический анализ чувствительности к типу ПНС.

**2. Планарные колебания предварительно напряженной тонкой пластины:
постановка краевой задачи, слабая формулировка**

Будем исходить из линеаризованной постановки задачи планарных колебаний предварительно напряженной изотропной тонкой пластины толщиной h , занимающей область $S \times [-h/2, h/2]$ (см. Рис. 1). Принимая во внимание гипотезы плоского напряженного состояния, представим задачу в виде [18, 20]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u}) + \rho \omega^2 \mathbf{u} &= 0, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda^* \mathbf{I} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad} \mathbf{u}^T), \\ \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u}) \Big|_{S_\sigma} &= \mathbf{P}, \quad \mathbf{u} \Big|_{S_u} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь: $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ и $\boldsymbol{\sigma}^0 = \sigma_{ij}^0 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ ($i, j = 1, 2$) — симметричные тензоры добавочных и начальных (предварительных) напряжений, записанные в декартовой системе координат через элементы нормированного ортогонального базиса $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$; $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2$ — вектор малых перемещений ($u_3 = 0$); ρ — плотность тела; ω — частота установившихся колебаний; λ, μ — коэффициенты Ламе;

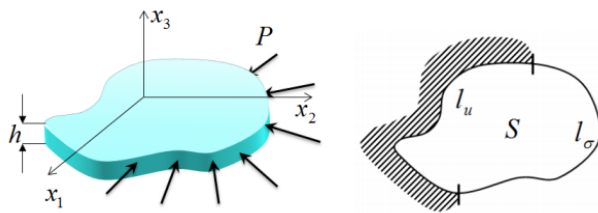


Рис. 1. Планарные колебания тонкой пластины

$\lambda^* = 2\lambda\mu / (\lambda + 2\mu)$ — модифицированный параметр Ламе, соответствующий плоскому напряженному состоянию; \mathbf{I} — единичный тензор; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к границе области $\partial S = l_u \cup l_\sigma$; \mathbf{P} — вектор внешней механической нагрузки, действующей на части границы l_σ ; на части l_u пластина жестко закреплена.

В декартовой компонентной форме выражения, входящие в (1), примут вид:

- уравнения движения $(\sigma_{ij} + u_{i,k} \sigma_{kj}^0)_{,j} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad i, j, k = 1, 2$;
- определяющие соотношения для тензора добавочных напряжений $\sigma_{ij} = \lambda^* \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})$;
- естественные и главные граничные условия $(\sigma_{ij} + u_{i,k} \sigma_{kj}^0) n_j \Big|_{S_\sigma} = P_i$ и $u_i \Big|_{S_u} = 0$. Постановка задачи (1) включает в себя три независимые компоненты тензора ПН: $\sigma_{11}^0, \sigma_{12}^0$ и σ_{22}^0 .

Слабую формулировку описанной задачи можно представить в виде [21]:

$$W_0^{uv} + W_\sigma^{uv} - \omega^2 K^{uv} = 0, \quad \mathbf{v} \Big|_{l_u} = 0, \tag{2}$$

где \mathbf{v} — вектор пробных функций, удовлетворяющих тем же главным граничным условиям, что и вектор перемещений \mathbf{u} , и введены аналоги начальной и текущей потенциальной и кинетической энергии:

$$\begin{aligned} W_0^{uv} &= \int_S [(\boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u}) : \operatorname{grad} \mathbf{v}] dS, \\ W_\sigma^{uv} &= \int_S [\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}^u : \boldsymbol{\epsilon}^v] dS - \int_{l_\sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dl, \quad K^{uv} = \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dS, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\epsilon}^u : \boldsymbol{\epsilon}^v = \epsilon_{ij}^u \epsilon_{ij}^v = \epsilon_{11}^u \epsilon_{11}^v + 2\epsilon_{12}^u \epsilon_{12}^v + \epsilon_{22}^u \epsilon_{22}^v = u_{1,1} v_{1,1} + \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) (v_{1,2} + v_{2,1}) + u_{2,2} v_{2,2}$.

Зачастую составляющую энергии для начальной среды удобнее записать как

$$W_0^{uv} = \int_S [\sigma_{11}^0 K_{11}^{uv} + \sigma_{12}^0 K_{12}^{uv} + \sigma_{22}^0 K_{22}^{uv}] dS,$$

где соответствующие ядра имеют обозначения:

$$K_{11}^{uv} = u_{1,1}v_{1,1} + u_{2,1}v_{2,1}, \quad K_{22}^{uv} = u_{1,2}v_{1,2} + u_{2,2}v_{2,2}, \quad K_{12}^{uv} = u_{1,1}v_{1,2} + u_{2,1}v_{2,2} + u_{1,2}v_{1,1} + u_{2,2}v_{2,1}. \quad (3)$$

В компонентной форме слабая постановка примет вид:

$$\int_S (\sigma_{11}^0 u_{i,1} v_{i,1} + \sigma_{12}^0 (u_{i,1} v_{i,2} + u_{i,2} v_{i,1}) + \sigma_{22}^0 u_{i,2} v_{i,2}) dS + \int_S (\lambda u_{i,i} v_{j,j} + 2\mu \epsilon_{ij}^u \epsilon_{ij}^v - \omega^2 \rho u_i v_i) dS - \int_{l_\sigma} P_i v_i dl = 0, \quad v_i|_{l_\sigma} = 0. \quad (4)$$

При использовании слабой постановки достаточно просто формулируются конечно-элементные интерпретации при исследовании прямых задач, подобных (1).

3. Обратная задача реконструкции ПНС в плоской области

Рассмотрим постановку обратной задачи реконструкции трех компонент ПН σ_{ij}^0 в плоской области. Будем считать, что задана дополнительная информация об измеренных на части ее границы амплитудах перемещений $u_i|_{l_\sigma} = f_i$ под действием зондирующей периодической нагрузки P_i ($i = 1, 2$) в некотором частотном диапазоне $\omega \in [\omega_-, \omega_+]$.

3.1. Итерационно-регуляризирующая схема

В работе [20] для двумерной области приведено построение линеаризованного соотношения взаимности, которое позволяет сформировать итерационный процесс определения поправок для компонент тензора ПН по отношению к некоторому выбранному начальному состоянию. В тензорной форме линеаризованное соотношение взаимности на n -й итерации представляется в виде:

$$\int_S [(\Sigma^{(n)} \cdot \text{grad } \mathbf{u}^{(n-1)}) : \text{grad } \mathbf{u}^{(n-1)}] dS + \int_{l_\sigma} \mathbf{P} \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{u}^{(n-1)}) dl = 0, \quad \omega \in [\omega_-, \omega_+]. \quad (5)$$

Здесь: индексы (n) , $(n-1)$ — номера итераций; $\Sigma^{(n)} = \delta \sigma_{ij}^{0(n)} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ — тензор, компонентами которого служат поправки к соответствующим компонентам ПН на текущей итерации; \mathbf{P} — нагрузка в плоскости пластины, действующая на части границы l_σ ; $\mathbf{f}|_{l_\sigma}$ — смещения под действием зондирующей нагрузки известные из дополнительной информации к постановке обратной задачи.

Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса $n = \overline{1, N}$, где N — предельное число итераций, решается краевая задача определения текущего приближения для ПН — $\sigma^{0(n-1)}$, и вычисляется соответствующее поле смещений — $\mathbf{u}^{(n-1)}$. После этого из интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода (5) находятся компоненты тензора $\Sigma^{(n)}$ (поправки к компонентам тензора $\sigma^{0(n)}$) и уточняется текущее приближение для ПН: $\sigma^{0(n)} = \sigma^{0(n-1)} + \Sigma^{(n)}$. Такой подход требует знания начального приближения $\sigma^{0(0)}$, поиск которого можно осуществлять в каком-нибудь узком классе функций (например, линейных или постоянных) с помощью минимизации функционала невязки в пространстве небольшой размерности. В компонентной форме соотношение (5) имеет вид: $\int_S \sum_{kj} \Sigma_{ij}^{(n)} u_{i,j}^{(n-1)} u_{i,k}^{(n-1)} dS + \int_{l_\sigma} P_i (f_i - u_i^{(n-1)}) dl = 0$. Выход

из итерационного процесса осуществляется либо по достижению функционалом невязки некоторого минимального (порогового) значения, либо по предельному числу итераций.

Будем считать, что поле ПН самоуравновешенное, и введем функцию напряжений. Выразим через нее поправки к ПН на n -й итерации: $\Sigma_{11}^{(n)} = \delta \sigma_{11}^{0(n)} = \delta \Phi_{,22}^{(n)}$, $\Sigma_{22}^{(n)} = \delta \sigma_{22}^{0(n)} = \delta \Phi_{,11}^{(n)}$, $\Sigma_{12}^{(n)} = \delta \sigma_{12}^{0(n)} = -\delta \Phi_{,12}^{(n)}$. Тогда уравнение (5) становится следующим:

$$\int_S (\delta \Phi_{,22}^{(n)} K_{11}^{(n-1)} - \delta \Phi_{,12}^{(n)} K_{12}^{(n-1)} + \delta \Phi_{,11}^{(n)} K_{22}^{(n-1)}) dS = F^{(n-1)}(\omega), \quad \omega \in [\omega_-, \omega_+], \quad (6)$$

где $F^{(n-1)}(\omega) = \int_{l_\sigma} [P_1 (u_1^{(n-1)} - f_1) + P_2 (u_2^{(n-1)} - f_2)] dl$. Отметим, что выражения для ядер $K_{ij}^{(n-1)}$ на текущей

итерации: $K_{11}^{(n-1)} = [u_{1,1}^{(n-1)}]^2 + [u_{2,1}^{(n-1)}]^2$, $K_{22}^{(n-1)} = [u_{1,2}^{(n-1)}]^2 + [u_{2,2}^{(n-1)}]^2$, $K_{12}^{(n-1)} = 2[u_{1,1}^{(n-1)} u_{1,2}^{(n-1)} + u_{2,1}^{(n-1)} u_{2,2}^{(n-1)}]$,

получаются из приведенных выше выражений (2) при использовании в качестве пробных функций амплитуд смещений $v_i = u_i$ [18, 20].

Операторное уравнение (6) — интегро-дифференциальное уравнение относительно поправки к функции напряжений $\delta\Phi^{(n)}$. Его исследование представляет собой гораздо более сложную задачу, чем исследование классического уравнения Фредгольма 1-го рода с непрерывным ядром, возникающего в коэффициентных обратных задачах нахождения переменного модуля упругости или переменных параметров Ламе. В [19, 21] это уравнение выведено и проанализировано с помощью проекционного метода и МКЭ, а также опубликованы некоторые результаты реконструкции для случая вибрационного нагружения только одного вида на частоте вблизи второго резонанса. А именно, реконструировано предварительное самоуравновешенное напряжение, выражаемое в функциях простых классов; точность восстановления при этом заметно падает по мере усложнения структуры неоднородности и немонотонности рассматриваемых классов функций, определяющих законы ПН.

Опишем далее усовершенствованный и уточненный подход к решению сформулированной обратной задачи, на основе которого можно провести реконструкцию по измерениям, полученным в серии испытаний для нескольких видов зондирующего нагружения.

3.2. Проекционный метод

Эффективным способом исследования уравнения (6) является проекционный метод. Его преимущество, по сравнению с методами разностных аппроксимаций, состоит в том, что не возникает дополнительная погрешность при вычислении производных задаваемых численно функций. Будем отыскивать функцию напряжений Φ в виде комбинации линейно независимых функций — полиномов степени выше 2-й:

$$\delta\Phi^{(n)} = \sum_{k,l=0}^K a_{kl}^{(n)} x_1^k x_2^l,$$

где $a_{kl}^{(n)}$ — искомые коэффициенты разложения на n -й итерации. Индексы k, l соответствуют показателям степени функций: x_1^k, x_2^l . Расписывая левую часть уравнения (6), получим

$$\begin{aligned} & \int_S (\delta\Phi_{,22}^{(n)} K_{11}^{(n-1)} - \delta\Phi_{,12}^{(n)} K_{12}^{(n-1)} + \delta\Phi_{,11}^{(n)} K_{22}^{(n-1)}) dS = \\ & = \int_S \left(\left[\sum_{k,l=0}^K a_{kl}^{(n)} l(l-1) x_1^k x_2^{l-2} \right] K_{11}^{(n-1)} - \left[\sum_{k,l=0}^K a_{kl}^{(n)} k l x_1^{k-1} x_2^{l-1} \right] K_{12}^{(n-1)} + \left[\sum_{k,l=0}^K a_{kl}^{(n)} k(k-1) x_1^{k-2} x_2^l \right] K_{22}^{(n-1)} \right) dS = \sum_{k,l=0}^K a_{kl}^{(n)} A_{kl}^{(n-1)}, \end{aligned}$$

где $A_{kl}^{(n-1)} = \int_S (l(l-1) x_1^k x_2^{l-2} K_{11}^{(n-1)} - k l x_1^{k-1} x_2^{l-1} K_{12}^{(n-1)} + k(k-1) x_1^{k-2} x_2^l K_{22}^{(n-1)}) dS$ — вычисляемые на $(n-1)$ -й итерации коэффициенты. Ядра $K_{ij}^{(n-1)}$ находятся из решения соответствующей прямой задачи (например, с помощью МКЭ на основе постановки (4)) для последнего рассчитанного $(n-1)$ -го приближения. Таким образом, операторное уравнение (6) становится следующим:

$$\sum_{k,l=0}^K A_{kl}^{(n-1)} a_{kl}^{(n)} = F^{(n-1)}. \tag{7}$$

Из (7) можно получать СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов $a_{kl}^{(n)}$, если воспользоваться результатами экспериментов по акустическому зондированию. Для этого рассмотрим серию M различных испытаний, отличающихся способом приложения нагрузки к части границы для различных частот колебаний: $\omega_k \in [\omega_-, \omega_+]$, $T_{ij} n_j|_{l_m} = P_i^{(m)}$, $u_i|_{l_m} = f_i^{(m)}$, $m = \overline{1, M}$ — номер испытания при заданной частоте ω_k . При этом части границы l_1, l_2, \dots, l_M могут пересекаться. Соответствующие правые части уравнения (7) запишутся как

$$F_m^{(n-1)}(\omega) = \int_{l_m} [P_i^{(m)} (u_i^{(n-1)} - f_i^{(m)})] dl.$$

Тогда обратная задача на каждой итерации сводится к исследованию следующей СЛАУ:

$$\sum_{k,l=0}^K A_{klm}^{(n-1)} a_{kl}^{(n)} = F_m^{(n-1)}, \quad m = \overline{1, M}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (8)$$

При этом M — число уравнений в СЛАУ, в общем случае может быть не равно числу неизвестных $a_{kl}^{(n)}$. Рассмотрение меньшего количества зондирующих экспериментов приведет к прямоугольной плохо обусловленной СЛАУ, которую можно исследовать только с помощью методов регуляризации [22]. При этом начальное приближение берется из класса простых функций (например, постоянные), и функционал невязки минимизируется на сетке с использованием информации об ограниченности функций ПН.

3.3. Данные для вычислительных экспериментов

Ниже описываются примеры реконструкции некоторых неоднородных полей ПН при нескольких динамических режимах испытаний по планарному нагружению жестко заземленной по левому краю ($x_1 = 0$) прямоугольной пластины с материальными параметрами: $E = 1.98 \cdot 10^{11}$ Па (модуль Юнга), $\nu = 0.28$ (коэффициент Пуассона), $\rho = 7884$ кг/м³. Ее срединное сечение занимает плоскую область $S = \{x_1 \in [0, l], x_2 \in [-h/2, h/2]\}$, где $l = 1.3$ м, $h = 0.5$ м. Истинные поля ПН имеют диапазон изменения $\sigma_{\alpha\beta}^0/E = 10^{-6} \div 10^{-4}$, $\gamma, \beta = 1, 2$.

Распишем правую часть уравнения (8) для общего случая механического нагружения пластины, изображенного на рисунке 2:

$$\begin{aligned} F^{(n-1)} &= \int_{l_\alpha} P_\alpha (u_\alpha^{(n-1)} - f_\alpha) dl = \int_{l_\alpha} P_\alpha \Delta_\alpha^{(n-1)} dl = \int_{\Gamma_1} P_\alpha \Delta_\alpha^{(n-1)} dl + \int_{\Gamma_2} P_\alpha \Delta_\alpha^{(n-1)} dl + \int_{\Gamma_3} P_\alpha \Delta_\alpha^{(n-1)} dl = \\ &= \int_{\Gamma_1} (\tau_1 \Delta_1^{(n-1)} + q_1 \Delta_2^{(n-1)}) dl + \int_{\Gamma_2} (q_2 \Delta_1^{(n-1)} + \tau_2 \Delta_2^{(n-1)}) dl + \int_{\Gamma_3} (\tau_3 \Delta_1^{(n-1)} + q_3 \Delta_2^{(n-1)}) dl, \end{aligned}$$

где $\Delta_\alpha^{(n-1)} = u_\alpha^{(n-1)} - f_\alpha$; q_α, τ_α — компоненты нормальных и касательных нагрузок, приложенных к соответствующим граням $\Gamma_1 = \{x_1 \in [0, l], x_2 = -h/2\}$ (нижняя грань), $\Gamma_2 = \{x_1 = l, x_2 \in [-h/2, h/2]\}$ (правая грань), $\Gamma_3 = \{x_1 \in [0, l], x_2 = h/2\}$ (верхняя грань). Главные граничные условия для всех случаев следующие:

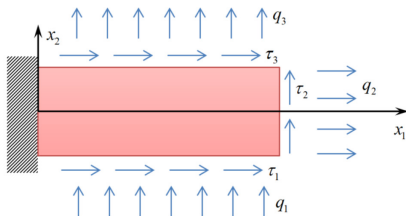


Рис. 2. Общая схема нагружения области

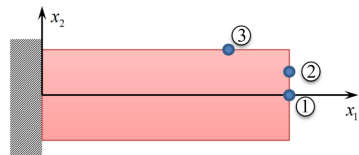


Рис. 3. Точки на границе области для проведения анализа чувствительности:

1) $(l, 0)$; 2) $(l, 0.25h)$; 3) $(l, 0.75h)$

$u_1|_{\Gamma_4} = 0, u_2|_{\Gamma_4} = 0$, где $\Gamma_4 = \{x_1 = 0, x_2 \in [-h/2, h/2]\}$ — левая грань.

При исследовании поставленной обратной задачи важным остается вопрос выбора эффективного зондирующего нагружения пластины. С этой целью осуществлен анализ чувствительности амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) пластины, отвечающих разным типам ПНС, при воздействии на пластину различных видов динамических нагрузок.

3.4. Анализ чувствительности ПН к режимам нагружения

Для проведения анализа чувствительности АЧХ взяты три точки на границе пластины (см. Рис. 3), в которых вычислены относительные амплитуды вектора смещения, а также выведены формы колебаний и построены двумерные графики смещения для разных типов ПНС и различных режимах нагружения на частотах колебаний в окрестности первых двух резонансов.

Рассмотрены следующие типы однородного ПНС:


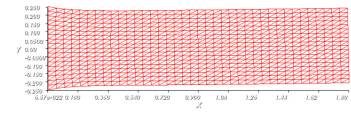
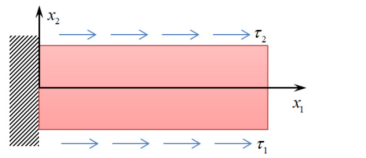
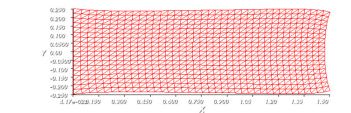
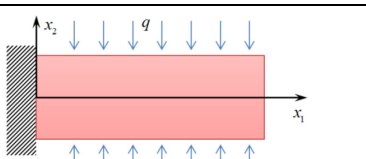
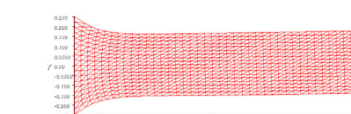
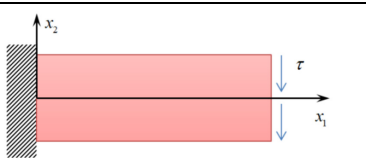
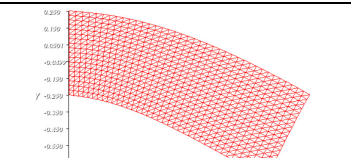
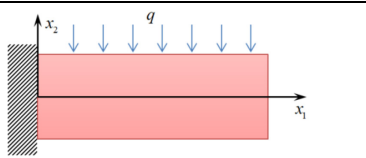
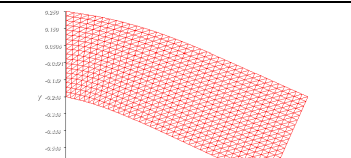
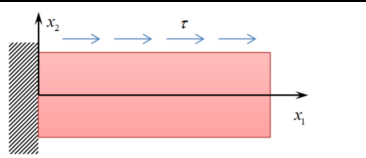
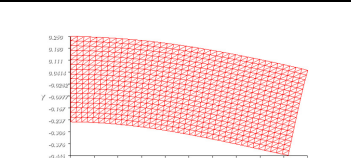
$$\begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= 0, & \sigma_{22}^0 &= 0, & \sigma_{12}^0 &= 0, & 1 \\ \sigma_{11}^0 &= 10^{-3} E, & \sigma_{22}^0 &= 0, & \sigma_{12}^0 &= 0, & 2 \\ \sigma_{11}^0 &= 0, & \sigma_{22}^0 &= 10^{-3} E, & \sigma_{12}^0 &= 0, & 3 \\ \sigma_{11}^0 &= 0, & \sigma_{22}^0 &= 0, & \sigma_{12}^0 &= 10^{-3} E, & 4 \end{aligned} \quad (9)$$

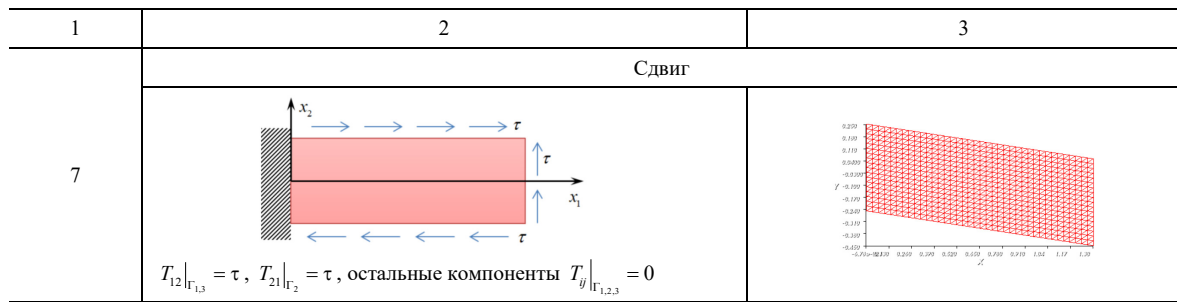
Случай (9₁) соответствует ненапряженной пластине (без ПН), в остальных случаях присутствует единственная ненулевая компонента тензора ПН: в (9₂), (9₃) — нормальные компоненты, в (9₄) — касательная компонента.

В таблице 1 приведены использованные в расчетах семь режимов нагружения и расчетная область, деформированная в условиях статики при нулевой частоте колебаний. Соответствующие граничные условия показаны под схемами нагружения; общая форма этих условий следующая:

$$(T_{11}n_1 + T_{12}n_2)|_{\Gamma_e} = P_1, \quad (T_{21}n_1 + T_{22}n_2)|_{\Gamma_e} = P_2.$$

Таблица 1. Режимы нагружения для проведения анализа чувствительности.

№ режима	Схема нагружения и естественные граничные условия	Деформированная пластина (расчет МКЭ)
1	2	3
	Растяжение вдоль оси x_1	
1	 <p>$T_{11} _{\Gamma_2} = q, \quad T_{21} _{\Gamma_2} = 0, \quad T_{ij}n_j _{\Gamma_{1,3}} = 0, \quad i, j = 1, 2$</p>	
	Растяжение вдоль оси x_1	
2	 <p>$T_{12} _{\Gamma_{1,3}} = \pm \tau, \quad T_{22} _{\Gamma_{1,3}} = 0 \quad (\tau_1 = \tau_2 = \tau), \quad T_{ij}n_j _{\Gamma_2} = 0, \quad i, j = 1, 2$</p>	
	Сжатие вдоль оси x_2	
3	 <p>$T_{12} _{\Gamma_{1,3}} = 0, \quad T_{22} _{\Gamma_{1,3}} = -q, \quad T_{ij}n_j _{\Gamma_2} = 0, \quad i, j = 1, 2$</p>	
	Изгиб	
4	 <p>$T_{11} _{\Gamma_2} = 0, \quad T_{21} _{\Gamma_2} = -\tau, \quad T_{ij}n_j _{\Gamma_{1,3}} = 0, \quad i, j = 1, 2$</p>	
	Изгиб	
5	 <p>$T_{12} _{\Gamma_3} = 0, \quad T_{22} _{\Gamma_3} = -q, \quad T_{ij}n_j _{\Gamma_{1,2}} = 0, \quad i, j = 1, 2$</p>	
	Изгиб	
6	 <p>$T_{12} _{\Gamma_3} = \tau, \quad T_{22} _{\Gamma_3} = 0, \quad T_{ij}n_j _{\Gamma_{1,2}} = 0, \quad i, j = 1, 2$</p>	



На рисунке 4 приведены результаты влияния принятых к рассмотрению типов ненулевого ПНС (9₂)–(9₄) на амплитуду (длину) вектора смещения $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ по сравнению с нулевым ПНС (9₁). Расчет производился по формуле:

$$\delta(\omega) = \frac{\|\mathbf{u}(\omega) - \mathbf{u}^*(\omega)\|}{\max_{x_1, x_2 \in S} \|\mathbf{u}(0)\|} 100\% . \tag{10}$$

Здесь: \mathbf{u}^* и \mathbf{u} — векторы перемещения в заданной точке области при наличии ПНС выбранного типа и отсутствии преднапряжений; ω — частота колебаний. Рассчитанные амплитуды представлены для точки 3 (0.75l, 0.5h) (см. Рис. 3). В легенде приняты обозначения: delta1, delta2, delta22, соответствующие ненулевым компонентам ПН $\sigma_{11}^0, \sigma_{12}^0$ и σ_{22}^0 (ПНС (9₂)–(9₄)). По оси абсцисс отложены частоты колебаний (в Гц), по оси ординат — относительные амплитуды в процентах. Здесь не демонстрируются результаты, полученные для других точек — 1 и 2 (см. Рис. 3), поскольку все тенденции в них аналогичны тенденциям в точке 3 (однако в точке 1 некоторые интересные эффекты влияния исчезают из-за ее симметричного расположения).

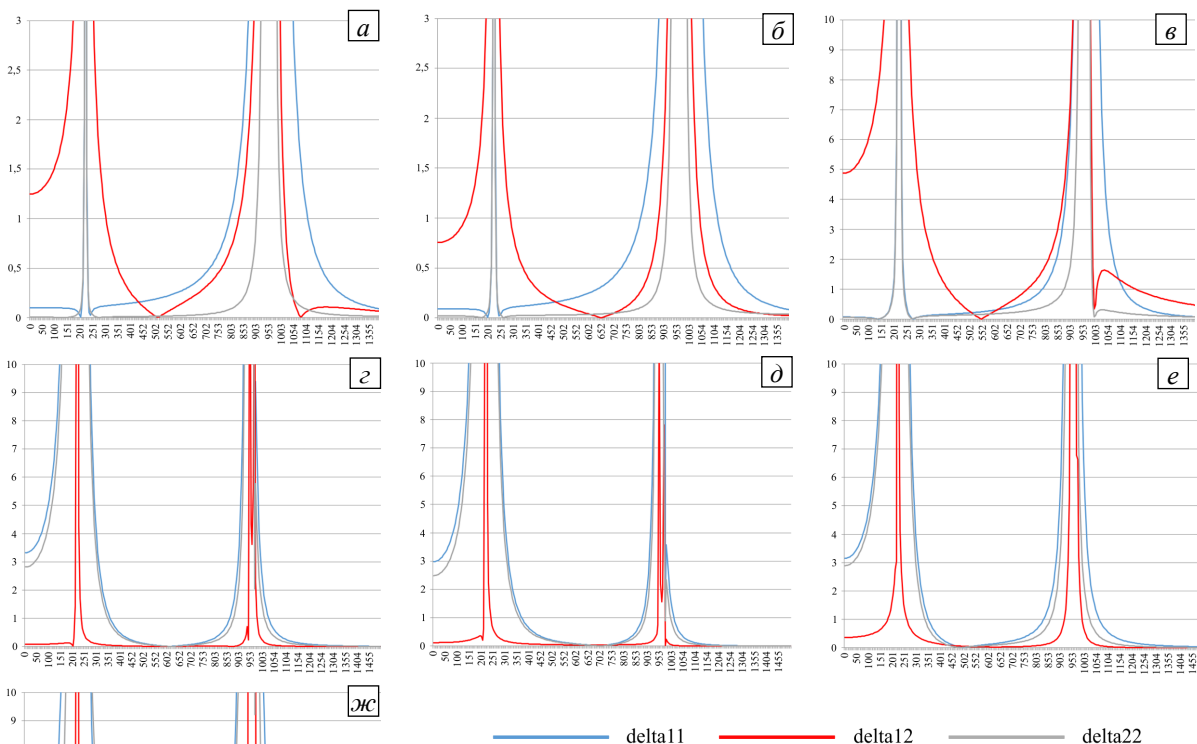


Рис. 4. Графики относительной амплитуды смещения при заданных типах ПНС в зависимости от режима зондирующей нагрузки: № 1 (а), № 2 (б), № 3 (в), № 4 (г), № 5 (д), № 6 (е), № 7 (ж) (см. Табл. 1)

Таблица 2. Собственные частоты (приведены в Гц), рассчитанные для типов ПНС (9₁)–(9₄)

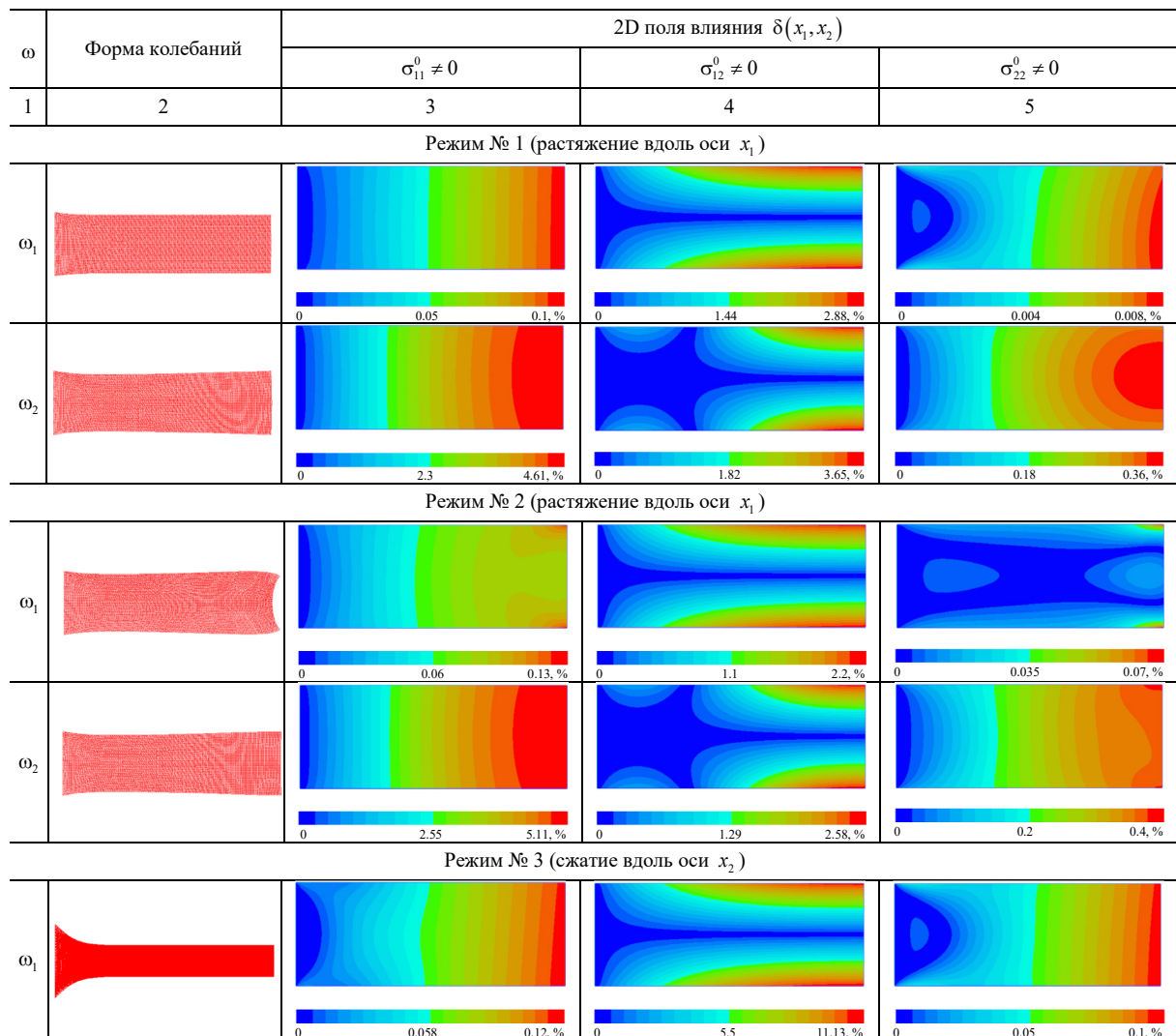
№ П/П	Без ПН	σ_{11}^0	σ_{12}^0	σ_{22}^0
1	218.711	222.181	218.697	221.6
2	946.062	950.61	946.036	948.904
3	967.191	967.682	967.181	967.23
4	2045.44	2050.48	2045.37	2047.26
5	2869.86	2871.35	2869.85	2870.09
6	3012.7	3016.94	3012.61	3014.91
7	3733.86	3737.02	3733.78	3735.96
8	4165.18	4169.16	4165	4167.37
9	4439	4441.07	4438.96	4441.19
10	4480.72	4484.61	4480.41	4487.8

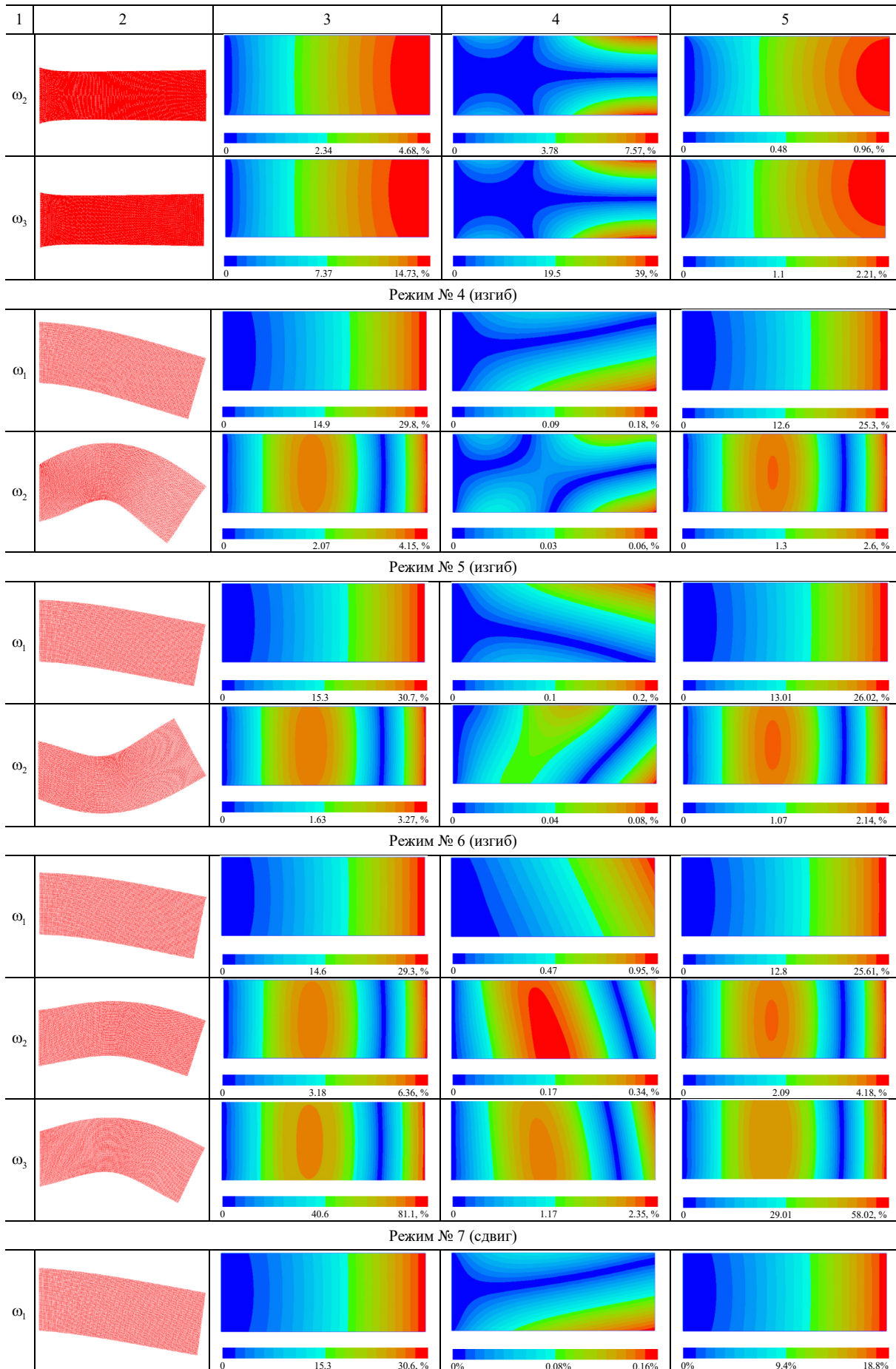
В таблице 2 для сравнения приведены первые 10 собственных частот, рассчитанные для рассматриваемых типов ПНС. Из таблицы видно, что предварительный сдвиг (см. σ_{12}^0) оказывает наименьшее влияние на изменение собственных частот, по сравнению с двумя нормальными нагружениями (см. $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0$).

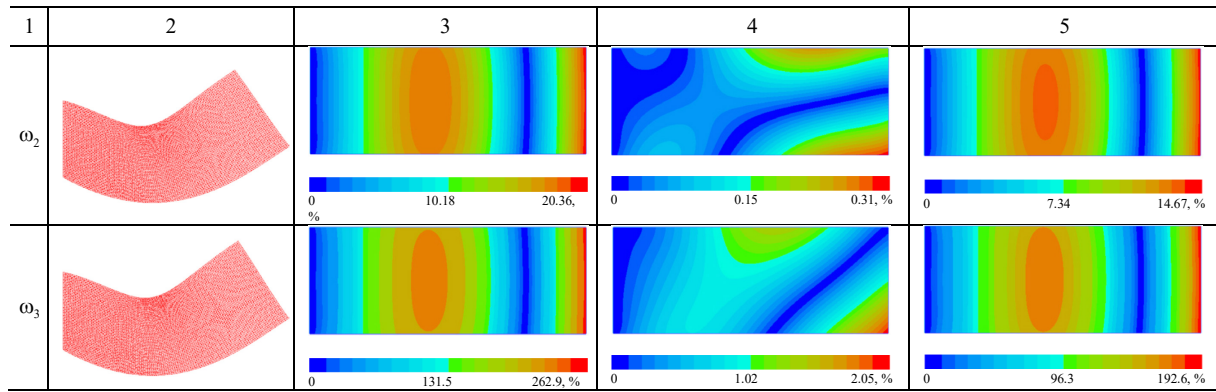
Далее, в таблице 3, представлена часть результатов анализа чувствительности в форме двумерных графиков влияния $\delta(x_1, x_2)$ для частот колебаний $\omega_1 = 180$ Гц, $\omega_2 = 900$ Гц, $\omega_3 = 930$ Гц. Для повышения точности вычисления полей расчеты выполнялись на сетках из квадратичных конечных элементов с числом разбиений 120×50 для всех режимов нагружения, кроме № 3 (сжатие вдоль оси x_2); для него строилась более густая сетка размерностью 200×100 .

Отметим, что формы колебаний при заданной частоте для разных типов ПНС (9) неразличимы визуально даже при увеличении масштаба относительных деформаций, поэтому в таблице 3 они не представлены. Под каждой картиной поля влияния имеется цветовая шкала в процентах. Наибольшему влиянию отвечает красный цвет, минимальному — синий.

Таблица 3. Поля влияния $\delta(x_1, x_2)$ для разных видов нагружения







Третья частота $\omega_3 = 930$ Гц, участвующая в некоторых вычислительных экспериментах, выбрана с целью демонстрации значительного увеличения влияния по сравнению с частотой $\omega_2 = 900$ Гц; это объясняется тем, что при приближении ко второму резонансу (967.191 Гц, значение приведено для ПНС (9₁)) влияние ПН на АЧХ возрастает (см. Рис. 4). Таким образом, незначительно увеличив частоту, при большинстве режимов нагружения можно получить прирост влияния ПН на АЧХ на порядок.

Из приведенных картин видно, что для каждой частоты колебаний есть зоны слабого и даже нулевого влияния компонент ПН. К примеру, в таблице 3 «мертвые зоны» влияния касательных напряжений σ_{12}^0 располагаются в окрестности средней линии области $x_2 = 0$ (вся эта зона окрашена синим цветом); влияние ПН σ_{12}^0 заметно только на верхней и нижней границах, причем рядом с жесткой заделкой влияние всегда близко к нулю. Эти результаты помогают понять, каким образом следует зондировать пластину с целью наиболее эффективной реконструкции компонент ПН.

На основании полученных результатов анализа чувствительности можно сделать следующие выводы для рассмотренной пластины в форме вытянутого прямоугольника:

- для эффективного восстановления касательных ПН σ_{12}^0 следует использовать нагрузки видов № 1, 2 (растяжение), № 3 (сжатие) и проводить зондирование на верхней и нижней гранях пластины;
- нормальные ПН $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0$ лучше всего восстанавливаются при нагрузках № 4–6 (изгиб) или № 7 (сдвиг);
- чтобы восстановить σ_{11}^0 , можно приложить растягивающую нагрузку, но влияние этой компоненты ПН при этом слабее, чем при изгибе. Вместе с тем компонента σ_{22}^0 практически не проявляется при нагружении растяжением № 1–3, и для ее успешной реконструкции требуется другой вид нагружения.

Таким образом, для восстановления ПНС, возникающего при растяжении/сжатии, эффективнее прикладывать изгибную или сдвиговую зондирующую нагрузку, а для реконструкции ПНС, созданного сдвигом (касательных ПН) следует зондировать растягивающей/сжимающей нагрузкой.

Исходя из выявленной связи типа ПНС с видом нагружения, можно отобрать следующие наиболее эффективные режимы нагружения для реконструкции:

1. Нагружение № 3 (сжатие вдоль оси x_2) оказывает характерное влияние на касательные ПН σ_{12}^0 .
2. Нагружение № 6 (изгиб) сказывается на нормальных ПН $\sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0$ (степень влияния примерно на одном уровне).
3. Нагружение № 7 (сдвиг) лучше всего подходит для восстановления нормальных ПН (причем в большей степени для компоненты σ_{11}^0).

Далее представим данные реконструкции некоторых типов ПНС для этих 3-х режимов динамического зондирования.

3.5. Эксперименты по реконструкции двумерных распределений ПН

Рассмотрим два следующих примера самоуравновешенного неоднородного ПНС.

Пример 1. Линейное (ПНС I):

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{11}^0 &= 10^6 (15.8 + 3.05x_1 + 7.92x_2), \\
 \tilde{\sigma}_{22}^0 &= 10^6 (-15.8 + 3.05x_1 - 7.92x_2), \\
 \tilde{\sigma}_{12}^0 &= 10^6 (-9.9 + 7.92x_1 - 3.05x_2).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Пример 2. Нелинейное немонотонное (ПНС II) (см. Рис. 5):

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{11}^0 &= 10^5 (14.7 + 1.47 \sin(2.3x_1) \exp(2x_2) - 13.2 \sin(6x_2) \exp(0.77x_1)), \\ \tilde{\sigma}_{22}^0 &= 10^5 (13.5 - 1.95 \sin(2.3x_1) \exp(2x_2) - 0.22 \sin(6x_2) \exp(0.77x_1)), \\ \tilde{\sigma}_{12}^0 &= 10^5 (10 - 1.7 \cos(2.3x_1) \exp(2x_2) - 1.7 \cos(6x_2) \exp(0.77x_1)).\end{aligned}\quad (12)$$

На рисунках вместо обозначений осей x_1, x_2 использованы x, y .

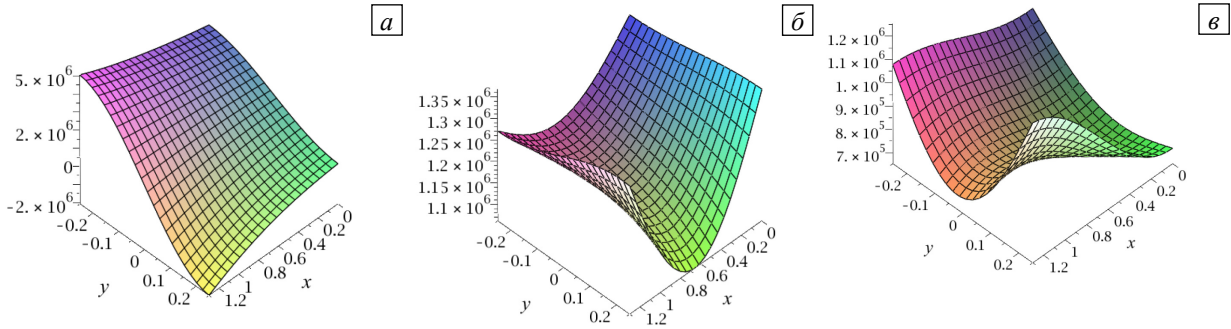


Рис. 5. Графики нелинейных компонент ПНС II, Па: $\tilde{\sigma}_{11}^0$ (а), $\tilde{\sigma}_{22}^0$ (б), $\tilde{\sigma}_{12}^0$ (в)

Будем отыскивать на каждой итерации функцию напряжений Φ в виде линейной комбинации полиномов не выше 4-й степени:

$$\delta\Phi^{(n)} = a_{20}^{(n)} x_1^2 + a_{11}^{(n)} x_1 x_2 + a_{02}^{(n)} x_2^2 + a_{30}^{(n)} x_1^3 + a_{21}^{(n)} x_1^2 x_2 + a_{12}^{(n)} x_1 x_2^2 + a_{03}^{(n)} x_2^3 + a_{40}^{(n)} x_1^4 + a_{31}^{(n)} x_1^3 x_2 + a_{22}^{(n)} x_1^2 x_2^2 + a_{13}^{(n)} x_1 x_2^3 + a_{04}^{(n)} x_2^4,$$

что соответствует квадратичным законам ПН:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{0(n)} &= 2a_{02}^{(n)} + 2a_{12}^{(n)} x_1 + 6a_{03}^{(n)} x_2 + 2a_{22}^{(n)} x_1^2 + 6a_{13}^{(n)} x_1 x_2 + 12a_{04}^{(n)} x_2^2, \\ \sigma_{22}^{0(n)} &= 2a_{20}^{(n)} + 6a_{30}^{(n)} x_1 + 2a_{21}^{(n)} x_2 + 12a_{40}^{(n)} x_1^2 + 6a_{31}^{(n)} x_1 x_2 + 2a_{22}^{(n)} x_2^2, \\ \sigma_{12}^{0(n)} &= -(a_{11}^{(n)} + 2a_{21}^{(n)} x_1 + 2a_{12}^{(n)} x_2 + 3a_{31}^{(n)} x_1^2 + 4a_{22}^{(n)} x_1 x_2 + 3a_{13}^{(n)} x_2^2).\end{aligned}\quad (13)$$

Таким образом, на каждой итерации восстанавливаются 12 коэффициентов разложения: $a_{20}^{(n)}, a_{11}^{(n)}, \dots, a_{04}^{(n)}$, и СЛАУ (8) для решения обратной задачи принимает вид:

$$\begin{aligned}A_{20m}^{(n-1)} a_{20}^{(n)} + A_{11m}^{(n-1)} a_{11}^{(n)} + A_{02m}^{(n-1)} a_{02}^{(n)} + A_{30m}^{(n-1)} a_{30}^{(n)} + A_{21m}^{(n-1)} a_{21}^{(n)} + A_{12m}^{(n-1)} a_{12}^{(n)} + A_{03m}^{(n-1)} a_{03}^{(n)} + \\ + A_{40m}^{(n-1)} a_{40}^{(n)} + A_{31m}^{(n-1)} a_{31}^{(n)} + A_{22m}^{(n-1)} a_{22}^{(n)} + A_{13m}^{(n-1)} a_{13}^{(n)} + A_{04m}^{(n-1)} a_{04}^{(n)} = F_m^{(n-1)}, \quad m = \overline{1, M}, \quad n = \overline{1, N}.\end{aligned}\quad (14)$$

Относительная погрешность определялась по формуле $\delta_{ij} = \left(\left| \tilde{\sigma}_{ij}^0 - \sigma_{ij}^0 \right| / \max_{x_1, x_2} \left| \tilde{\sigma}_{ij}^0 \right| \right) \cdot 100\%$, где $\tilde{\sigma}_{ij}^0$ — истинные ПН, σ_{ij}^0 — восстановленные ПН (результат решения обратной задачи) ($i, j = 1, 2$). Рассмотрены также средние погрешности, вычисляемые по формуле $\bar{\delta}_{ij} = (1/S) \int_S \delta_{ij}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$.

Для расчета коэффициентов $A_{klm}^{(n-1)}$ в СЛАУ (14) на каждой итерации в пакете FreeFEM++ [23] решалась прямая задача (4) для текущего приближения ПН. Затем ПНС уточнялось на каждом этапе итерационного процесса. В качестве начального приближения для искомой функции Φ был выбран нулевой уровень: $\Phi^{(0)} = 0$, что соответствует нулевым составляющим ПН: $\sigma_{11}^{0(0)} = \sigma_{12}^{0(0)} = \sigma_{22}^{0(0)} = 0$.

Одной из целей при решении обратной задачи являлось снижение числа требуемых экспериментов по акустическому зондированию (что характеризуется числом как видов нагружений на границе пластины, так и выбранных частот колебаний) с сохранением допустимой точности реконструкции. Приведем результаты реконструкции ПНС I и ПНС II при зондировании 3-мя отобранными выше видами нагружения на 4-х, 3-х и 2-х частотах колебаний. В силу специфики решаемой обратной задачи снижение числа опытов по зондированию ожидаемо ухудшает точность реконструкции за счет уменьшения числа уравнений в плохо обусловленной СЛАУ (14).

3.5.1. *Реконструкция ПНС I, 4 частоты.* Рассмотрим 4 частоты колебаний: $\omega_1 = 230$ Гц, $\omega_2 = 1020$ Гц, $\omega_3 = 2020$ Гц, $\omega_4 = 2060$ Гц, для каждого из 3-х выбранных видов зондирующих нагружений (формируется 12 уравнений в СЛАУ (14)). На рисунках 6, 7 представлены результаты реконструкции ПНС I, полученные после 1-й и 12-й итераций процесса счета ($N = 1$ и $N = 12$). Средние значения погрешностей включены в описания рисунков. Результаты демонстрируют существенное улучшение точности реконструкции при рассмотрении большего числа итераций; начиная с 12-й итерации, точность восстановления перестает улучшаться.

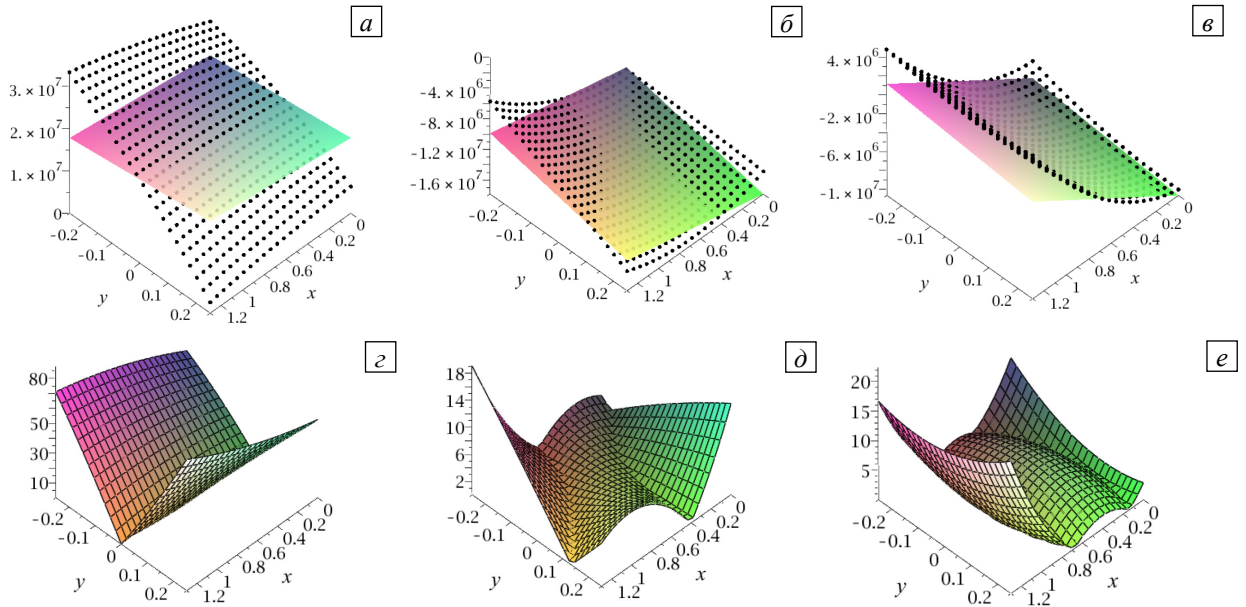


Рис. 6. Реконструкция ПНС I после 1-й итерации; компоненты, Па: $\bar{\sigma}_{11}^0$ (a), $\bar{\sigma}_{22}^0$ (б), $\bar{\sigma}_{12}^0$ (в) (цветные поверхности – истинные функции ПН, точки – результат реконструкции); относительные погрешности, %: $\bar{\delta}_{11}$ (г), $\bar{\delta}_{22}$ (д), $\bar{\delta}_{12}$ (е) (соответствующие средние значения погрешностей: $\bar{\delta}_{11} = 31\%$, $\bar{\delta}_{22} = 3.4\%$ и $\bar{\delta}_{12} = 4.4\%$)

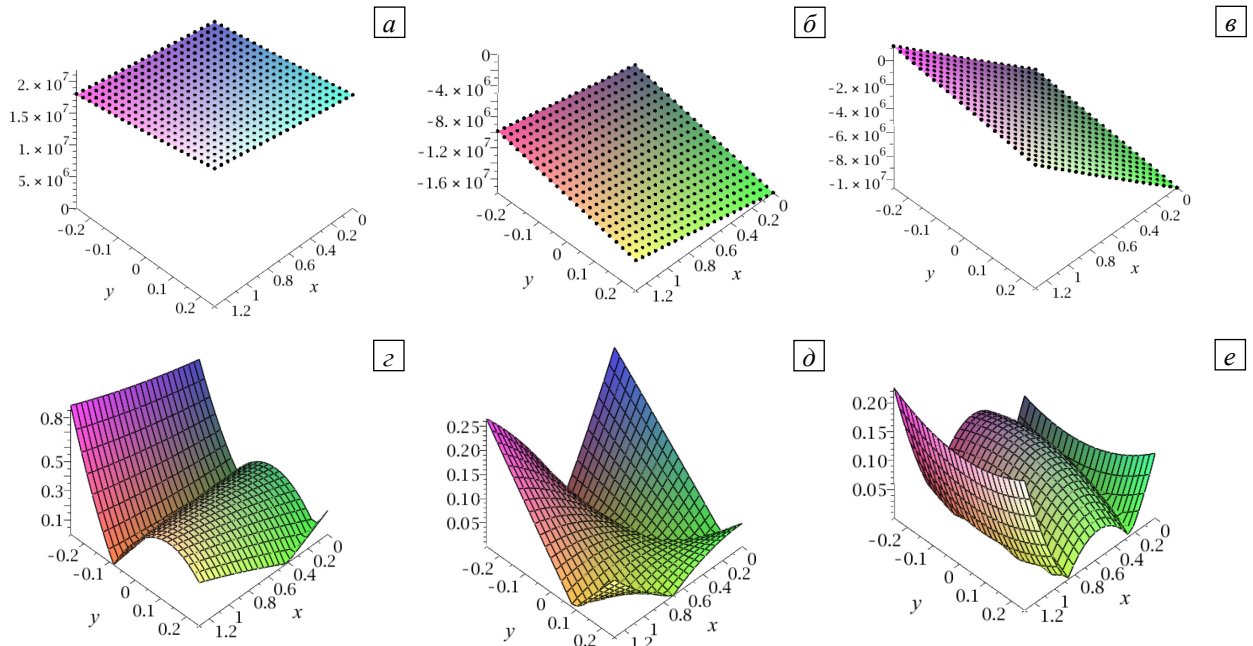


Рис. 7. Реконструкция ПНС I после 12-й итерации; компоненты, Па: $\bar{\sigma}_{11}^0$ (a), $\bar{\sigma}_{22}^0$ (б), $\bar{\sigma}_{12}^0$ (в) (цветные поверхности – истинные функции ПН, точки – результат реконструкции); относительные погрешности, %: $\bar{\delta}_{11}$ (г), $\bar{\delta}_{22}$ (д), $\bar{\delta}_{12}$ (е) (соответствующие средние значения погрешностей: $\bar{\delta}_{11} = 0.3\%$, $\bar{\delta}_{22} = 0.06\%$ и $\bar{\delta}_{12} = 0.07\%$)

3.5.2. *Реконструкция ПНС I, 3 частоты.* При 3-х частотах: $\omega_1 = 223$ Гц, $\omega_2 = 952$ Гц, $\omega_3 = 969$ Гц, получим 9 уравнений в СЛАУ (14). Результаты реконструкции после 12 итераций приведены на рисунке 8.

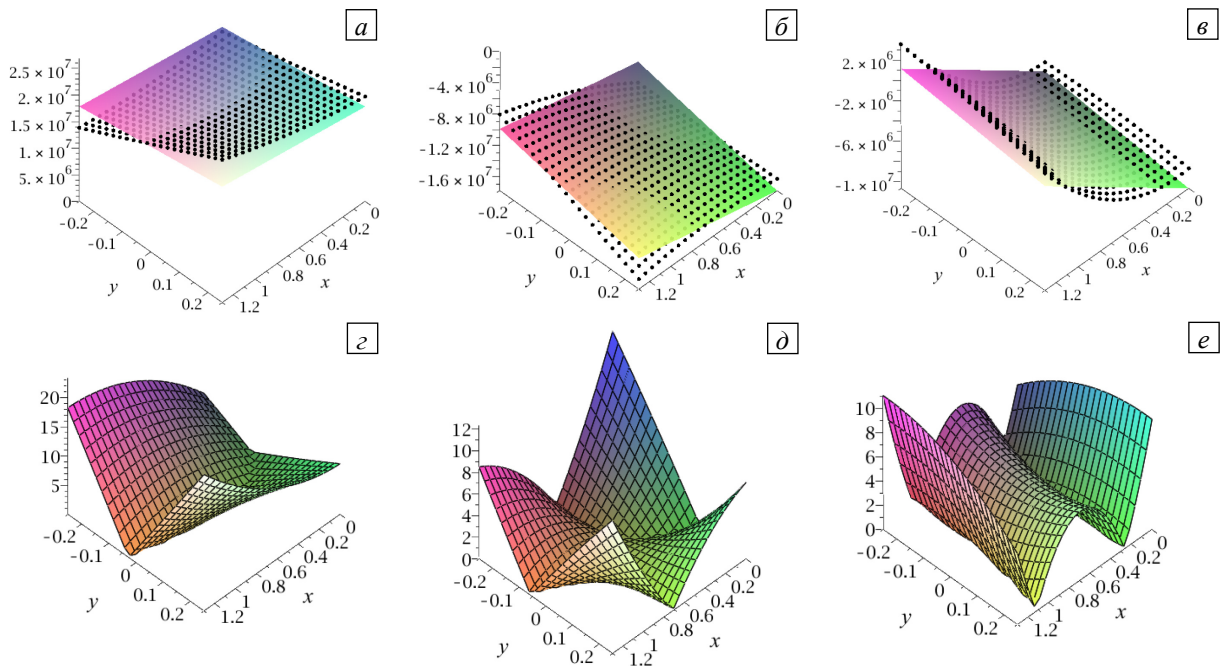


Рис. 8. Реконструкция ПНС I после 12 итераций; компоненты, Па: $\tilde{\sigma}_{11}^0$ (а), $\tilde{\sigma}_{22}^0$ (б), $\tilde{\sigma}_{12}^0$ (в) (цветные поверхности – истинные функции ПН, точки – результат реконструкции); относительные погрешности, %: δ_{11} (г), δ_{22} (д), δ_{12} (е)

3.5.3. *Реконструкция ПНС I, 2 частоты.* Рассмотрим теперь всего 2 частоты ($\omega_1 = 225$ Гц, $\omega_2 = 953$ Гц) для каждого из 3-х выбранных нагружений. В этом случае СЛАУ (14) состоит из 6-ти уравнений). На рисунке 9 представлены результаты реконструкции после 5 итераций.

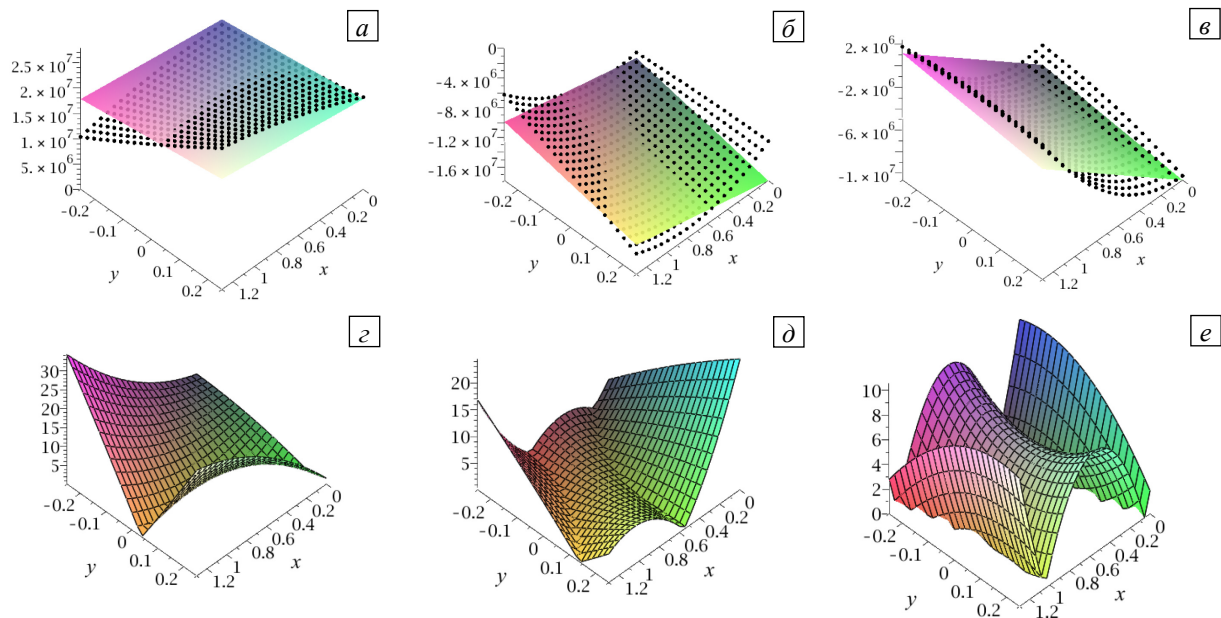


Рис. 9. Реконструкция ПНС I после 5 итераций; компоненты ПН, Па: $\tilde{\sigma}_{11}^0$ (а), $\tilde{\sigma}_{22}^0$ (б), $\tilde{\sigma}_{12}^0$ (в) (цветные поверхности – истинные функции ПН, точки – результат реконструкции); относительные погрешности, %: δ_{11} (г), δ_{22} (д), δ_{12} (е) (соответствующие средние значения погрешностей: $\bar{\delta}_{11} = 8.7\%$, $\bar{\delta}_{22} = 4.3\%$ и $\bar{\delta}_{12} = 4.2\%$)

3.5.4. *Реконструкция ПНС II, 4 частоты.* Результаты реконструкции ПНС II при 4-х частотах колебаний: $\omega_1 = 230$ Гц, $\omega_2 = 1020$ Гц, $\omega_3 = 2020$ Гц, $\omega_4 = 2060$ Гц, после 8-ми итераций приведены на рисунке 10.

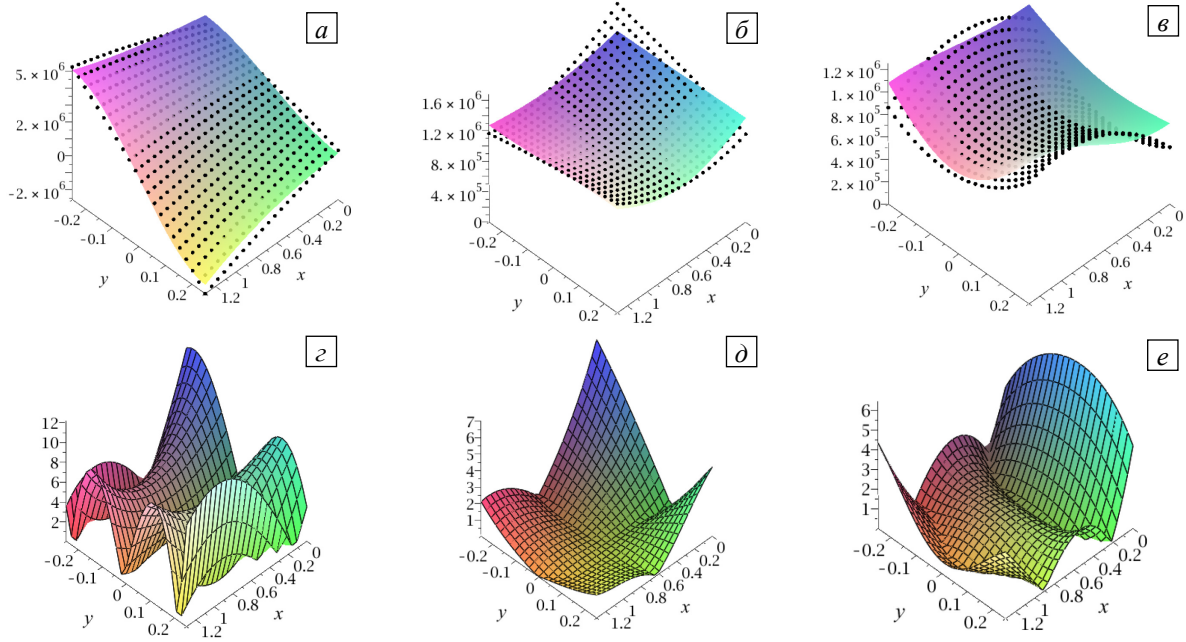


Рис. 10. Реконструкция ПНС II; компоненты, Па: $\tilde{\sigma}_{11}^0$ (а), $\tilde{\sigma}_{22}^0$ (б), $\tilde{\sigma}_{12}^0$ (е) (цветные поверхности – истинные функции ПН, точки – результат реконструкции); относительные погрешности, %: δ_{11} (з), δ_{22} (д), δ_{12} (е) (соответствующие средние значения погрешностей: $\bar{\delta}_{11} = 4.2\%$, $\bar{\delta}_{22} = 1\%$ и $\bar{\delta}_{12} = 1.3\%$)

3.5.5. *Реконструкция ПНС II, 3 частоты.* При рассмотрении 3-х частот $\omega_1 = 223$ Гц, $\omega_2 = 952$ Гц, $\omega_3 = 969$ Гц реконструкция представлена на рисунке 11.

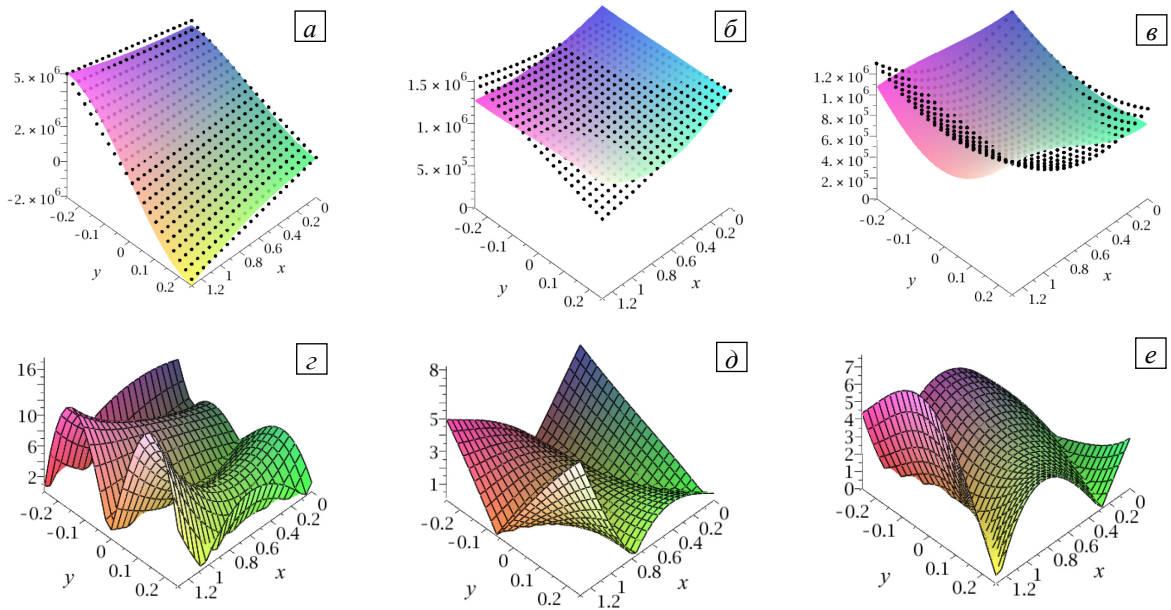


Рис. 11. Реконструкция ПНС II; компоненты ПН, Па: $\tilde{\sigma}_{11}^0$ (а), $\tilde{\sigma}_{22}^0$ (б), $\tilde{\sigma}_{12}^0$ (е) (цветные поверхности – истинные функции ПН, точки – результат реконструкции); относительные погрешности, %: δ_{11} (з), δ_{22} (д), δ_{12} (е) (соответствующие средние значения погрешностей: $\bar{\delta}_{11} = 4.3\%$, $\bar{\delta}_{22} = 1.4\%$ и $\bar{\delta}_{12} = 2\%$)

Отметим, что при восстановлении с использованием 2-х частот колебаний точность реконструкции существенно снижается, что позволяет сделать вывод о том, что в рамках рассмотренной задачи для реконструкции существенно нелинейного ПНС требуется измерение амплитуд смещений по меньшей мере при 3-х частотах колебаний. В случае же близости поля ПН к линейному в ряде случаев достаточно провести зондирование 3-мя способами нагружения при 2-х частотах колебаний.

Также обобщим некоторые наблюдения:

– приемлемый результат реконструкции ПН для выбранных режимов зондирующего нагружения требует проведения измерений, как минимум, на 3-х частотах колебаний; наилучшая реконструкция соответствует измерению на 4-х и более частотах;

– несмотря на то, что наибольшее влияние ПН на АЧХ наблюдается в окрестности резонансных частот, при задании частот в процессе зондирования не следует выбирать их слишком близкими к резонансным (относительная разность частоты зондирования и частоты резонанса не должна быть менее 0.3%), иначе точность реконструкции резко снижается.

4. Заключение

Представлено несколько форм постановки задачи исследования планарных колебаний предварительно напряженной тонкой пластины на основе линеаризованной модели. Рассмотрена обратная задача восстановления начального плоского напряженного состояния по дополнительной информации об измеренных амплитудах перемещений на части границы пластины в некотором частотном диапазоне. Согласно разработанной ранее линеаризованной теории обратных задач для предварительно напряженных тел, с помощью проекционного метода и МКЭ построена итерационно-регуляризирующая процедура, сводящая сформулированную задачу на каждой итерации к решению плохо обусловленной СЛАУ относительно поправок к параметрам разложения искомой функции напряжений.

В ранних работах [19, 21] авторами описаны результаты применения аналогичной методики для восстановления различных законов неоднородности ПН при одном режиме нагружения для набора частот; исследование позволило выявить, что воздействие только одним видом зондирующего нагружения дает возможность восстановить поля ПН в лучшем случае в классе линейных функций. В то же время одновременный учет нескольких режимов динамического нагружения, как показано в настоящей статье, расширяет класс восстанавливаемых функций и повышает точность реконструкции даже при существенно неоднородных и немонокотных законах всех трех компонент начального ПНС. Анализ чувствительности компонент ПН к видам динамического зондирующих нагружений позволил определить наиболее эффективные из них, а также выбрать наиболее благоприятные частотные диапазоны.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-71-10045 <https://rscf.ru/project/18-71-10045/> в Южном федеральном университете.

Литература / References

1. James M.N. Residual stress influences on structural reliability // Eng. Fail. Anal. 2011. Vol. 18. P. 1909-1920. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2011.06.005>
2. Vaara J., Kunnari A., Frondelius T. Literature review of fatigue assessment methods in residual stressed state // Eng. Fail. Anal. 2020. Vol. 110. 104379. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2020.104379>
3. Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G. Methods of measuring residual stresses in components // Materials and Design. 2012. Vol. 35. P. 572-588. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.08.022>
4. Guo J., Fu H., Pan B., Kang R. Recent progress of residual stress measurement methods: A review // Chin. J. Aeronaut. 2021. Vol. 34. P. 54-78. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2019.10.010>
5. Lei Zh., Zou J., Wang D., Guo Zh., Bai R., Jiang H., Yan Ch. Finite-element inverse analysis of residual stress for laser welding based on a contour method // Optic. Laser Tech. 2020. Vol. 129. 106289. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2020.106289>
6. Suresh S., Giannakopoulos A.E. A new method for estimating residual stresses by instrumented sharp indentation // Acta Mater. 1998. Vol. 46. P. 5755-5767. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(98\)00226-2](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(98)00226-2)
7. Greco A., Sgambitterra E., Furgiuele F. A new methodology for measuring residual stress using a modified Berkovich nano-indenter // Int. J. Mech. Sci. 2021. Vol. 207. 106662. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106662>
8. Jun T.-S., Korsunsky A.M. Evaluation of residual stresses and strains using the eigenstrain reconstruction method // Int. J. Solids Struct. 2010. Vol. 47. P. 1678-1686. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.03.002>
9. Korsunsky A., Regino G., Nowell D. Variational determination of eigenstrain sources of residual stress // Proc. of the Int. Conf. on Computational and Experimental Engineering and Science. ICCES2004. Madeira, Portugal, July 26-29, 2004. P. 1717-1722.
10. Korsunsky A.M., Regino G.M., Nowell D. Variational eigenstrain analysis of residual stresses in a welded plate // Int. J. Solids Struct. 2007. Vol. 44. P. 4574-4591. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.11.037>
11. Xu Y., Liu H., Bao R., Zhang X. Residual stress evaluation in welded large thin-walled structures based on eigenstrain analysis and small sample residual stress measurement // Thin-Walled Struct. 2018. Vol. 131. P. 782-791. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.07.049>
12. Shokrieh M.M., Jalili S.M., Kamangar M.A. An eigen-strain approach on the estimation of non-uniform residual stress distribution using incremental hole-drilling and slitting techniques // Int. J. Mech. Sci. 2018. Vol. 148. P. 383-392. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.08.035>
13. Naskar S., Banerjee B. A mixed finite element based inverse approach for residual stress reconstruction // Int. J. Mech. Sci. 2021. Vol. 196. 106295. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106295>
14. Hoger A. On the determination of residual stress in an elastic body // J. Elasticity. 1986. Vol. 16. P. 303-324. <https://doi.org/10.1007/BF00040818>

15. *Holzappel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W.* A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models // *J. Elasticity*. 2000. Vol. 61. P. 1-48. <https://doi.org/10.1023/A:1010835316564>
16. *Gou K., Walton J.R.* Reconstruction of nonuniform residual stress for soft hyperelastic tissue via inverse spectral techniques // *Int. J. Eng. Sci.* 2014. Vol. 82. P. 46-73. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2014.05.004>
17. *Nedin R.D., Vatulyan A.O.* Advances in modeling and identification of prestresses in modern materials // *Advanced materials modelling for mechanical, medical and biological applications* / Ed. H. Altenbach, V.A. Eremeyev, A. Galybin, A. Vasiliev. Springer, 2022. P. 357-374. https://doi.org/10.1007/978-3-030-81705-3_19
18. *Nedin R.D., Vatulyan A.O.* Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate // *ZAMM J. Appl. Math. Mech.* 2014. Vol. 94. P. 142-149. <https://doi.org/10.1002/zamm.201200195>
19. *Nedin R.D., Vatulyan A.O., Bogachev I.V.* Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2018. Vol. 41. P. 1600-1618. <https://doi.org/10.1002/mma.4688>
20. *Nedin R.D., Vatulyan A.O.* Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates // *Int. J. Solids Struct.* 2013. Vol. 50. P. 2107-2114. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.03.008>
21. *Nedin R., Dudarev V., Vatulyan A.* Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress // *Eng. Struct.* 2017. Vol. 151. P. 391-405. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.08.007>
22. *Tikhonov A.N., Arsenin V.Y.* Solution of ill-posed problems. Halsted Press, 1977. 258 p.
23. *Hecht F.* New development in freefem++ // *J. Numer. Math.* 2012. Vol. 20. P. 251-265. <https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013>

Поступила в редакцию 17.10.2022; после доработки 28.11.2022; принята к опубликованию 05.12.2022

Сведения об авторах

Ватulyян Александр Ованесович, дфмн, проф., зав. каф., Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (ИММиКН ЮФУ), 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а; e-mail: aovatulyan@sfedu.ru

Недин Ростислав Дмитриевич, кфмн, доц., ИММиКН ЮФУ; e-mail: rnedin@sfedu.ru