

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.1.4](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.1.4)

УДК 532.546; 622.253.35

## АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К РАСЧЕТУ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ПОДЗЕМНЫХ ВОД ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ФОРМИРОВАНИЯ ЛЕДОПОРОДНЫХ ОГРАЖДЕНИЙ

С.А. Бублик, М.А. Семин

*Горный институт УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

Рассматриваются три подхода к расчету фильтрационных течений подземных вод при формировании ледопородных ограждений (ЛПО) строящихся шахтных стволов. Первый подход – упрощенный, основывается на предположении, что скорость фильтрации зависит только от объемного содержания льда. Во втором подходе – аналитическом, полагается, что замороженная зона формируется и сохраняет во времени форму кругового цилиндра, следовательно, фильтрацию можно рассчитать из классических аналитических выражений для описания обтекания потоком жидкости кругового цилиндра. Третий подход – численный, решаются уравнения фильтрации Дарси и баланса массы. Численный подход, в силу своей формулировки, более точен, но время его реализации продолжительнее. В работе проводится сравнение результатов, получаемых при упрощенном и аналитическом подходах, с результатами численного решения, которое берется за эталонное. Целью такого анализа является выбор подхода, позволяющего оперативно и с приемлемой погрешностью относительно эталонного решения рассчитать фильтрацию. Задача формирования ЛПО рассматривается в цилиндрической области слоя грунта с круговым контуром замораживания. Модельный контур замораживания образуют восемь замораживающих колонок. Расчет температурного поля производится путем решения задачи конвекции–диффузии в энтальпийной постановке с учетом фазовых превращений влаги. Численное моделирование выполняется в полярных координатах с использованием метода конечных разностей. Аппроксимация дифференциальных уравнений осуществляется по пространству с помощью центральной схемы 2-го порядка, по времени – явной схемы Эйлера 1-го порядка. Полученные результаты свидетельствуют, что упрощенный подход может быть применен к расчету фильтрации лишь в узком диапазоне времен замораживания и скоростей фильтрации; аналитический подход дает небольшие отличия в рассчитанных значениях параметров по сравнению с численным подходом, однако аналитический подход требует доработки в случае отклонения геометрии замороженной зоны от кругового цилиндра при длительном замораживании и высоких скоростях фильтрации подземных вод.

*Ключевые слова:* искусственное замораживание пород, ледопородное ограждение, пористые среды, фильтрация, численное моделирование

## ANALYSIS OF APPROACHES TO THE CALCULATION OF GROUNDWATER FILTRATION FLOWS IN MODELING ARTIFICIAL FROZEN WALLS FORMATION

S.A. Bublik and M.A. Semin

*Mining Institute UB RAS, Perm, Russian Federation*

Three approaches to the calculation of groundwater filtration flows occurred during the formation of frozen walls (FW) in mine shafts under construction are considered. The first ‘simplified’ approach is based on the assumption that the filtration rate depends only on the volumetric ice content. The second ‘analytical’ approach implies that the frozen zone is formed and retains the shape of a circular cylinder in the course of time, therefore the filtration can be calculated from the classical analytical expressions describing the fluid flow around a circular cylinder. In the third ‘numerical’ approach, the Darcy and mass balance equations are used. Owing to its formulation, the numerical approach is most accurate, but it takes more time to implement it. The paper compares the results obtained by the simplified and analytical approaches with the values of the numerical solution taken as a reference solution. The purpose of such an analysis is to find a simplified method for calculating the filtration velocity field, which will make it possible to carry out calculations most quickly and with an acceptable error relative to the reference solution. A computational domain of the frozen wall formation problem is a circular area of the ground layer with a freezing contour around the designed mine shaft. The model freezing circuit consists of eight freeze pipes. The temperature field is calculated by solving the convection-diffusion problem in the enthalpy formulation, taking into account the phase transformations of moisture. Numerical simulation is carried out in polar coordinates by means of the finite difference method. Approximation of differential equations in space is performed using the second-order central scheme, in time - the explicit first-order Euler scheme. The obtained results demonstrate that the simplified approach to the calculation of filtration can be applied only to a narrow range of freezing times and filtration rates. The analytical approach gives small differences in the results obtained when compared with the numerical approach, but the analytical approach needs to be improved in case of deviation of the geometry of the frozen zone from a circular cylinder during prolonged freezing and high groundwater filtration rates.

*Key words:* artificial ground freezing, frozen wall, porous media, filtration, numerical simulation

### 1. Введение

Настоящая статья посвящена вопросу поиска и обоснования упрощенных математических моделей для решения задачи нестационарного теплопереноса в искусственно замораживаемых грунтах и породных массивах. С практической точки зрения этот вопрос важен для проведения оперативного анализа формирования ледопородных ограждений (ЛПО) вокруг строящихся подземных сооружений (стволов шахт, тоннелей метрополитенов). ЛПО представляет собой конструкцию из замороженных пород, создаваемую с целью недопущения затопления подземного сооружения грунтовыми водами и укрепления незакрепленных стенок сооружения до возведения постоянной крепи [1, 2]. Технически замораживание

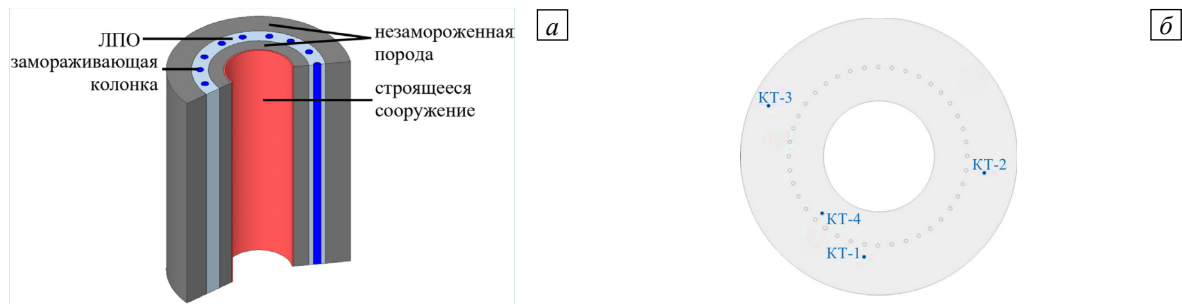


Рис. 1. Схематичное представление ЛПО (а) и пример расположения контрольно-термических (КТ) скважин (б) вблизи контура замораживания

грунтов и породных массивов осуществляется с помощью замораживающих скважин (колонок), пробуренных по периметру строящегося подземного сооружения (см. Рис. 1а).

Формирование ЛПО исследуется с как экспериментально, так и теоретически. Экспериментальные методы подразумевают мониторинг распределения температуры по глубине нескольких контрольно-термических скважин, пробуренных около контура замораживающих скважин (см. Рис. 1б) [3]. Измеренные распределения температуры используются для корректировки (калибровки) параметров математических моделей теплопереноса в замораживаемых средах [4, 5]. Далее откалиброванные математические модели применяются для оценки распределения температур во всем объеме замораживаемых грунтов и пород, для определения фактической толщины ЛПО, которое служит основным параметром задачи.

В практике искусственного замораживания грунтов и породных массивов возможны случаи, когда распределение температуры подвергается сильному влиянию массопереноса поровой воды в замораживаемых средах. Массоперенос может быть вызван наличием подземных течений. Такая ситуация, к примеру, имела место при мониторинге искусственного замораживания пород строящегося скипового (предназначенного для подъема руды на рудниках с большой производительностью) ствола Дарасинского рудника [6]. При подобных обстоятельствах, помимо теплопереноса, в рассматриваемой поровой среде необходимо принимать во внимание также и массоперенос. Тогда наиболее распространенным является решение уравнения фильтрации Дарси с учетом переменной относительной проницаемости породного массива [7, 8]. Кроме этого, в литературе встречается подход, основанный на введении буферной зоны между жидкой водой и льдом (*mushy zone*) [9].

При численной реализации однофазных задач фильтрации подземных вод наиболее распространен переход к уравнению Пуассона, записанному относительно гидростатического давления [10]. Численное решение данного уравнения на каждой временной итерации тепловой задачи является довольно трудозатратным в вычислительном плане, поскольку решение задачи теплопереноса в замораживаемых средах с выраженной фильтрацией грунтовых вод существенно усложняется. Исходя из опыта авторов настоящей статьи, учет фильтрации приводит к многократному возрастанию времени вычислений. В этом смысле представляет интерес поиск различных упрощений исходной численной задачи с целью минимизации вычислительных затрат и сохранения приемлемой точности результатов расчетов.

К настоящему времени в литературе описан ряд методов упрощенного решения задач искусственного замораживаемых средах [11–20]. Первыми в этом направлении являются работы Н.Г. Трупака [11] и Б.В. Бахолдина [12], в которых посредством полуаналитического решения одномерной задачи Стефана ищется распределение температуры от единичной замораживающей колонки и далее распространяется на случай множества замораживающих колонок. Идеи Б.В. Бахолдина существенно развиты китайскими исследователями [13–15]. Основной недостаток предложенных аналитических и полуаналитических решений задачи Стефана заключается в предположении четкого фронта фазового перехода, тогда как в действительности фазовый переход протекает в конечном интервале температур из-за влияния связанной воды [16], минерализации поровых вод [17] и другого. В работе [18] предложена аппроксимация непрерывного процесса фазового перехода грунта многоступенчатой системой фронтов фазового перехода. Также вопросами поиска упрощенных методов и приближенных решений задачи Стефана занималась научная школа университета McGill [19, 20]. Авторы [19] разработали аналитическое решение двухфазной задачи с использованием теории сингулярных возмущений. В [20] предложены новые полусопряженные модели замораживания пониженного порядка, которые точно прогнозируют отвод теплоты вдоль замораживающей колонки, благодаря чему существенно сокращается время вычислений.

В России вопросами поиска аналитических решений задачи Стефана и упрощенных методов численного решения данной задачи занимались исследователи из Московского горного института. В работе [21] получено алгебраическое уравнение для определения координатно-временного положения границы промерзания ЛПО произвольно расположенными в плане замораживающими колонками.

В научной литературе по искусственному замораживанию грунтов и породных массивов основное внимание уделяется приближенному определению поля температуры, в то время как поле скоростей фильтрации не рассматривается. В то же время, как отмечено выше, именно расчет фильтрации подземных

вод наиболее трудозатратен при численном решении. В целом опубликована серия исследований по поиску приближенных аналитических решений задачи ламинарного обтекания нескольких цилиндров произвольных размеров и взаиморасположения (см., например, [22]), но эти работы не касаются замораживания грунтов или пород, а потому не учитывают специфику вопроса. По данной причине представляют интерес исследования на основе аналитических методов определения поля скорости фильтрации с учетом искусственного замораживания пород.

## 2. Математическая модель замораживания грунта с фильтрацией

Рассматривается задача замораживания слоя грунта с помощью колонок, подключаемых к рассолопроводу. Расчетная область имеет вид круга радиусом 40 м. Замораживающие колонки числом 8 и радиусами 0.25 м располагаются по окружности радиусом 5 м, описывающей начало координат (см. Рис. 2). Для корректного задания граничного условия начало координат представляет собой круговую область радиусом 0.3 м.

Принимаются во внимание физические процессы, которые оказывают наибольшее влияние на распределение температуры и формирование ЛПО, а именно:

- фильтрация подземных вод;
- теплопроводность грунта;
- фазовый переход при замерзании подземных вод;
- теплоотдача между грунтом и замораживающими колонками.

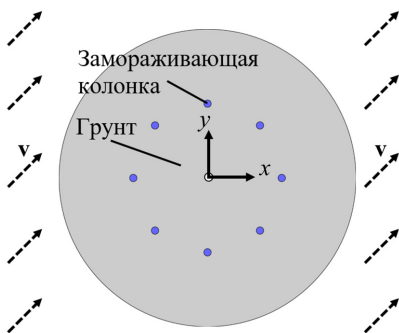


Рис. 2. Схема расчетной области вблизи контура замораживания ( $\mathbf{v}$  – вектор скорости подземных вод)

В математической модели учитываются следующие предположения:

- грунт полностью насыщен водой;
- теплофизические свойства в замороженной и незамороженной зонах изотропные и однородные;
- начальное распределение температуры однородно;
- тепло- и массоперенос в вертикальном направлении незначительны, так как рассматривается только один слой грунта и потому отсутствует его взаимодействие с другими слоями грунта;
- подземные воды и лед несжимаемые;
- поле скорости подземных вод на удалении от ЛПО однородно и постоянно во времени;
- жидкая и твердая фазы подземных вод находятся в тепловом равновесии.

В рамках принятых предположений задача о распределении температуры в породном массиве формулируется в виде уравнения конвекции–диффузии в энтальпийной постановке с соответствующими начальными и граничными условиями [23–25]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}H) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (1)$$

$$\lambda = (\lambda_{lq})^{1-\phi} \cdot (\lambda_{sd})^{\phi}, \quad (2)$$

$$H(T) = \begin{cases} \rho_{lq} c_{lq} (T - T_{lq}) + \rho_{lq} \omega L, & T_{lq} \leq T, \\ \rho_{lq} \omega L (1 - \phi), & T_{sd} \leq T \leq T_{lq}, \\ \rho_{sd} c_{sd} (T - T_{sd}), & T \leq T_{sd}, \end{cases} \quad (3)$$

$$S_{ice} = \begin{cases} 0, & T_{lq} \leq T, \\ \frac{T - T_{lq}}{T_{sd} - T_{lq}}, & T_{sd} \leq T \leq T_{lq}, \\ 1, & T \leq T_{sd}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} - \alpha (T_{fb} - T) \right]_{\Omega_{fb}} = 0, \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{\lambda_b}{2r_{fb} \xi} \text{Nu} = \frac{\lambda_b}{2r_{fb} \xi} \cdot 1,55 \left( \text{Pe} \frac{2r_{fb} \xi}{h} \right)^{0,33}, \quad (6)$$

$$\text{Pe} = \frac{2r_{fb} \xi \rho_b c_b v_b}{\lambda_b h}, \quad (7)$$

$$T|_{\Omega_{out}} = T_0, \quad (8)$$

$$T|_{\Omega_{in}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}|_{\Omega_{in}}, \quad (9)$$

$$T|_{t=0} = T_0. \quad (10)$$

Здесь:  $t$  — время, с;  $H$  — удельная энтальпия, Дж/м<sup>3</sup>;  $\mathbf{v}$  — скорость фильтрации подземных вод, м/с;  $\lambda_{lq}$ ,  $\lambda_{sd}$  — теплопроводность грунта в замороженной и незамерзшей зонах, Вт/(м·°C);  $c_{lq}$ ,  $c_{sd}$  — удельная теплоемкость грунта в замороженной и незамерзшей зонах, Дж/(кг·°C);  $\rho_{lq}$ ,  $\rho_{sd}$  — плотность грунта в замороженной и незамерзшей зонах, кг/м<sup>3</sup>;  $T_{lq}$  — температура начала кристаллизации подземных вод, °C;  $T_{sd}$  — температура полной кристаллизации подземных вод, °C;  $S_{ice}$  — объемное содержание льда в грунте (льдищность), м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>;  $L$  — удельная теплота кристаллизации воды, Дж/кг;  $\omega$  — начальное содержание влаги в грунте, кг/кг;  $T_{fb}$  — температура теплоносителя, °C;  $T_0$  — температура нетронутого грунта, °C;  $\alpha$  — коэффициент теплопередачи на стенках замораживающих колонок, Вт/(м<sup>2</sup>·°C);  $Nu$  — число Нуссельта;  $Pe$  — число Пекле;  $\lambda_b$  — теплопроводность теплоносителя, Вт/(м·°C);  $c_b$  — удельная теплоемкость теплоносителя, Дж/(кг·°C);  $\rho_b$  — плотность теплоносителя, кг/м<sup>3</sup>;  $r_{fb}$  — радиус замораживающих колонок, м;  $\xi = 0,29$  — безразмерный коэффициент, учитывающий долю поперечного сечения колонки, занятого восходящим потоком теплоносителя;  $v_b$  — средняя скорость теплоносителя в замораживающей колонке, м/с;  $h$  — высота замораживающей колонки, м;  $\Omega_{fb}$  — поверхность замораживающих колонок;  $\Omega_{out}$  — поверхность внешней границы расчетной области;  $\Omega_{in}$  — поверхность внутренней границы расчетной области (начала координат);  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности  $\Omega_{fb}$ .

Следует отметить, что под «замороженной зоной» понимается область с льдиственностью  $S_{ice} = 1$  м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup> или, что эквивалентно, с температурой, равной (или меньшей) температуре полной кристаллизации подземных вод  $T_{sd}$ . В таком случае считается, что подземные воды полностью заморожены.

Также необходимо прокомментировать соотношение (4), по которому находится величина льдиственности в породе. В данном соотношении предполагается, что фазовый переход поровой воды в диапазоне температур от  $T_{sd}$  до  $T_{lq}$  происходит по линейному закону. В общем случае это не всегда так, поскольку реальные кривые остаточной влажности грунтов и горных пород могут иметь существенно нелинейный профиль, а температура полного замерзания влаги в исследуемом температурном диапазоне может не достигаться. Одна из основных причин этого — наличие связанной воды в порах. Однако в настоящей работе рассматриваются преимущественно пески и песчаники, содержащие в поровом пространстве относительно малое количество связанной воды. Для таких типов пород интервал  $[T_{sd}, T_{lq}]$  фазового превращения воды в лед намного меньше характерного перепада температур в задаче, а потому гипотеза о линейности закона  $S_{ice}(T)$  на этом узком интервале температур приемлема и не влияет на результат [6].

### 3. Подходы к расчету фильтрации подземных вод

Как отмечалось выше, существует множество подходов к оценке фильтрации подземных вод в условиях замораживания грунта с помощью замораживающих колонок. Наиболее точным с физической точки зрения является решение уравнения фильтрации Дарси [26], которое из-за вида уравнения в обсуждаемой задаче можно осуществить только численно. Однако численный вид его решения совместно с расчетом теплопереноса приводит к значительному увеличению требуемых вычислительных ресурсов. В связи с этим для ускорения счета в данной работе рассматриваются упрощенный и аналитический подходы к расчету фильтрации подземных вод, и проводится их сравнение с численным решением уравнения Дарси.

#### 3.1. Упрощенный подход

Упрощенный подход строится на одном предположении, а именно: скорость фильтрации в элементарном объеме зависит лишь от содержания в нем льда. До момента смыкания ЛПО (то есть до образования сплошной замороженной зоны) упрощенный подход можно сформулировать в виде следующих уравнений:

$$\mathbf{v}(x, y) = \mathbf{v}_z \beta, \quad (11)$$

$$\beta = (1 - S_{ice})^2. \quad (12)$$

Здесь:  $x, y$  — горизонтальная и вертикальная координаты, м;  $v_\infty$  — вектор скорости фильтрации подземных вод на значительном удалении от замороженной зоны, м/с;  $\beta$  — коэффициент, занижающий скорость фильтрации  $v_\infty$  при приближении к замороженной зоне.

После смыкания ЛПО формула (11) корректируется с учетом того, что в области между началом координат и ЛПО скорость подземных вод становится равной нулю, так как в этой зоне устанавливается однородное давление:

$$v(x, y) = \begin{cases} v_\infty \beta, & (x, y) \notin \Omega_s, \\ 0, & (x, y) \in \Omega_s, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\Omega_s$  — область между началом координат и сплошным ЛПО.

Упрощенный подход, с точки зрения вычислительных затрат, является очень выгодным: он не нуждается в применении каких-либо численных схем и не содержит требовательных к вычислительным ресурсам функций. Однако он имеет серьезный недостаток — не соблюдается баланс массы и импульса. Это приводит к завышенным скоростям вблизи замороженной зоны (вдоль нормали к самой зоне) и к невозможности корректного описания обтекания замороженной зоны подземными водами.

### 3.2. Аналитический подход

За основу для аналитического расчета фильтрации подземных вод берется классическая теория обтекания кругового цилиндра потоком [27]. Принимается, что вокруг каждой замораживающей колонки формируется замороженная зона в виде кругового цилиндра. Кроме того, считается, что после смыкания ЛПО замороженная зона также представляет собой круговой цилиндр. В соответствии с теорией обтекания единичного цилиндра для описания потока используется функция тока в следующем виде:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \quad (14)$$

$$\psi_0 = v(x, y, x_0, y_0) \cdot y, \quad \psi_1 = -v(x, y, x_0, y_0) \cdot \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \cdot R^2, \quad (15)$$

$$v(x, y, x_0, y_0) = \begin{cases} v_\infty, & (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geq R^2, \\ 0, & (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2. \end{cases} \quad (16)$$

В уравнениях (14)–(16) обозначено:  $\psi$  — функция тока, м<sup>2</sup>/с;  $\psi_0$  — функция тока для потока на удалении от замороженной зоны (функция тока невозмущенного потока), м<sup>2</sup>/с;  $\psi_1$  — функция тока для потока вблизи замороженной зоны (представляет собой дипольное решение), м<sup>2</sup>/с;  $v$  — скорость фильтрации подземных вод, м/с;  $x_0, y_0$  — координаты центра поперечного сечения расчетного цилиндра, м;  $R$  — радиус

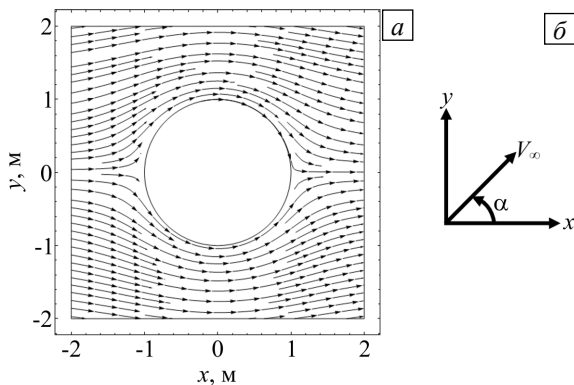


Рис. 3. Обтекание потоком подземных вод единичного цилиндра при аналитическом расчете фильтрации (а) и система координат для определения ориентации вектора скорости фильтрации (б)

замороженной зоны, м;  $v_\infty$  — скорость фильтрации подземных вод на удалении от расчетного цилиндра, м/с. Стоит отметить, что введение формулы (16) необходимо для того, чтобы внутри расчетной области гарантировать нулевую скорость фильтрации подземных вод, так как здесь вода принимается полностью замороженной. Кроме того, введение формулы (16) необходимо для исключения внутри цилиндра образования у функции тока диполя, который возникает в силу вида формулы (15).

Формулы (14)–(16) позволяют описывать только параллельные оси  $x$  течения (см. Рис. 3а). Для учета произвольного течения в расчетной области формулу (15) необходимо преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= v(x, y, x_0, y_0) \cdot (-x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha)), \\ \Psi_1 &= -v(x, y, x_0, y_0) \cdot \frac{-(x - x_0) \cdot \sin(\alpha) + (y - y_0) \cdot \cos(\alpha)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \cdot R_i^2, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\alpha$  — угол между вектором скорости фильтрации подземных вод на удалении от цилиндра и осью  $x$ . Угол  $\alpha$  отсчитывается против часовой стрелки, в соответствии с используемой системой координат (см. Рис. 3б).

При обтекании множества цилиндров функция тока записывается как суперпозиция:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N_b} (\Psi_{i0} + \Psi_i), \quad (18)$$

$$\Psi_{i0} = v(x, y, x_{i0}, y_{i0}) \cdot (-x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha)),$$

$$\Psi_i = -v(x, y, x_{i0}, y_{i0}) \cdot \frac{-(x - x_{i0}) \cdot \sin(\alpha) + (y - y_{i0}) \cdot \cos(\alpha)}{(x - x_{i0})^2 + (y - y_{i0})^2} \cdot R_i^2, \quad (19)$$

$$v(x, y, x_{i0}, y_{i0}) = \begin{cases} v_\infty, & (x - x_{i0})^2 + (y - y_{i0})^2 \geq R_i^2, \\ 0, & (x - x_{i0})^2 + (y - y_{i0})^2 < R_i^2. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь:  $i$  — номер цилиндра;  $N_b$  — количество цилиндров;  $x_{i0}, y_{i0}$  — координаты центра  $i$ -го цилиндра, м;  $R_i$  — радиус  $i$ -го цилиндра.

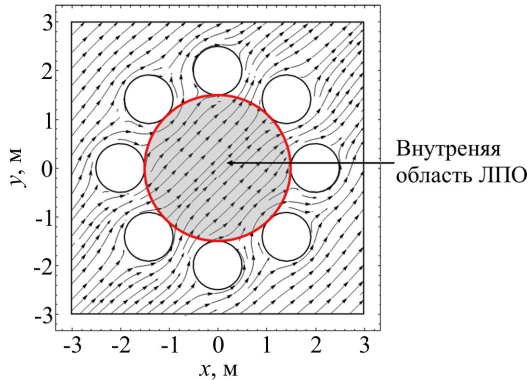


Рис. 4. Вид внутренней области ЛПО

Помимо обтекания множества цилиндров необходимо также учитывать постепенное снижение скорости фильтрации в области, которая условно названа «внутренней областью ЛПО». Ее геометрическое представление можно видеть на рисунке 4. Падение скорости здесь объясняется постепенным увеличением замороженной зоны контура, цилиндров, уменьшением ширины проточных зон к «внутренней области ЛПО» и из нее. При полном смыкании ЛПО скорость фильтрации в его «внутренней области» считается равной нулю. Таким образом, здесь скорость фильтрации, по аналогии с упрощенным подходом, рассчитывается согласно (13).

Снижение скорости во «внутренней области ЛПО» при определении скорости учитывается путем использования в формуле (20) аналитической

аппроксимации функции Хевисайда [28] и введением коэффициента степени сомкнутости ЛПО:

$$v(x, y, x_{i0}, y_{i0}) = \begin{cases} v_\infty H_1 + v_\infty (1 - \gamma) H_2, & (x - x_{i0})^2 + (y - y_{i0})^2 \geq R_i^2, \\ 0, & (x - x_{i0})^2 + (y - y_{i0})^2 < R_i^2, \end{cases} \quad (21)$$

$$H_1 = \frac{1}{1 + \text{Exp} \left[ -k \left( \sqrt{x^2 + y^2} - R_{\text{ЛПО}} \right) \right]}, \quad (22)$$

$$H_2 = \frac{1}{1 + \text{Exp} \left[ k \left( \sqrt{x^2 + y^2} - R_{\text{ЛПО}} \right) \right]}, \quad (23)$$

$$\gamma = \begin{cases} 2R_{\text{cp}}/l_{\text{cp}}, & 2R_{\text{cp}} < l_{\text{cp}}, \\ 1, & 2R_{\text{cp}} \geq l_{\text{cp}}. \end{cases} \quad (24)$$

Здесь:  $H_1, H_2$  — аппроксимации функции Хевисайда;  $k = 10$  — коэффициент сглаживания;  $R_{\text{ЛПО}}$  — радиус «внутренней области ЛПО», м;  $\gamma$  — коэффициент степени сомкнутости ЛПО ( $\gamma < 1$  — ЛПО не сомкнуто,  $\gamma = 1$  — ЛПО сомкнуто);  $R_{\text{cp}}$  — средний радиус цилиндров, м;  $l_{\text{cp}}$  — среднее расстояние между центрами цилиндров, м.

Описанный выше подход аналитического расчета фильтрации используется только до момента смыкания ЛПО. После смыкания образуется сплошная замороженная зона, и во «внутренней части ЛПО» скорость фильтрации становится равной нулю. Поэтому далее производится переключение с решения задачи обтекания замороженных зон, образующихся вокруг каждого замораживающего цилиндра, к решению задачи обтекания одного сплошного ЛПО, имеющего форму цилиндра. В этом случае обтекание описывается формулами (16), (17). Данный подход позволяет решить сразу несколько проблем: избежать нефизичного обтекания сплошного ЛПО, возникающего из-за некорректно работающих формул (18), (19) при пересечении границ цилиндров замороженной зоны; облегчить реализацию алгоритма, так как после образования сплошного ЛПО проблематично выделить из него отдельные замороженные зоны от каждого замораживающего цилиндра; сократить требуемые вычислительные ресурсы, так как задача обтекания одного цилиндра решается проще (этот пункт становится наиболее значимым при рассмотрении реальных объектов, когда число замораживающих колонок может достигать до 40).

Поскольку задача фильтрации подземных вод решается в круговой области, а замороженные зоны также имеют вид круговых цилиндров, то уравнения (19) лучше переписать в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \Psi_{i0} &= v(x, y, x_{i0}, y_{i0}) \cdot r \cdot \sin(\theta - \alpha), \\ \Psi_i &= -v(x, y, x_{i0}, y_{i0}) \cdot \frac{[r \cdot \sin(\theta - \alpha) - r_{i0} \cdot \sin(\theta_{i0} - \alpha)]}{r^2 - 2 \cdot r \cdot r_{i0} \cdot \cos(\theta - \theta_{i0}) + r_{i0}^2} \cdot R_i^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь:  $r$  — радиальная координата, м;  $\theta$  — угловая координата, рад;  $r_{i0}$  и  $\theta_{i0}$  — радиальная (в м) и угловая (в рад) координаты центра  $i$ -го цилиндра.

В итоге поле скорости получается путем аналитического дифференцирования функции тока по полярным координатам [30]:

$$\mathbf{v} = [v_r, v_\theta], \quad (26)$$

$$v_r = (1/r)(\partial\Psi/\partial\theta), \quad (27)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} \quad v_\theta = -(\partial\Psi/\partial r), \quad (28)$$

где  $v_r, v_\theta$  — компоненты вектора скорости, м/с. Получающиеся аналитические выражения для (27) и (28) не приводятся в силу их громоздкости.

Описанный аналитический подход получен из физических соотношений, удовлетворяющих балансу массы, поэтому позволяет корректно описывать обтекание потоком замороженной зоны в виде кругового цилиндра. Однако добавление условия снижения скорости во «внутренней зоне ЛПО» при постепенном смыкании ЛПО является в целом искусственным и выведено из простых физических умозаключений. В связи с этим корректность аналитического подхода будет проверена в дальнейшем при сравнении полученных при его помощи результатов с данными численного решения уравнения Дарси.

По сравнению с численным решением уравнения Дарси аналитический подход существенно увеличивает скорость счета. Хотя реализация аналитического подхода и будет осуществляться медленнее упрощенного расчета, но при должной оптимизации алгоритма потери в скорости будут незначительными. Аналитический подход будет хорошо работать только при относительно небольших скоростях фильтрации подземных вод, поэтому введенное предположение цилиндрической формы замороженной зоны в целом можно считать справедливым. При повышенных скоростях фильтрации подземных вод форма ЛПО в какой-то момент начнет терять свой цилиндрический вид и приобретать более сложную геометрию. В этом случае необходимо либо модифицировать аналитический подход под новую геометрию, либо комбинировать его с численным решением уравнения Дарси.

### 3.3. Численный подход

Основой для численного подхода служит уравнение фильтрации Дарси:

$$\mathbf{v} = -(k_r k / \mu) \nabla p, \quad (29)$$

где  $k_r$  — относительная проницаемость жидкости,  $k$  — абсолютная проницаемость пористой среды, м<sup>2</sup>,  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости, Па·с,  $p$  — гидростатическое давление жидкости, Па.

Относительная проницаемость жидкости зависит от объемного содержания льда в поровом пространстве:

$$k_r = \varepsilon + (1 - \varepsilon)(1 - S_{ice})^3, \quad (30)$$

где  $\varepsilon = 10^{-6}$  — малая величина, вводимая для обеспечения устойчивости численного счета. Исходя из уравнения (29), для расчета скорости фильтрации необходимо знать поле давления, которое можно найти из условия несжимаемости:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot ((k_r k / \mu) \nabla p) = 0. \quad (31)$$

Таким образом, расчет фильтрации сводится к решению стационарной задачи (29)–(31) для заданного временного промежутка. В связи с этим, в предположении однородности абсолютной проницаемости  $k$  и динамической вязкости жидкости  $\mu$  в задаче (29)–(31), можно перейти от давления к потенциальной функции  $\varphi$ ,  $\text{м}^2/\text{с}$ :

$$\varphi = -(k/\mu) \cdot p. \quad (32)$$

Тогда уравнения (29) и (31) можно переформулировать следующим образом:

$$\mathbf{v} = k_r \nabla \varphi, \quad (33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (k_r \nabla \varphi) = 0, \quad (34)$$

и дополнить граничным условием вида:

$$\mathbf{v}|_{\Omega_{\text{out}}} = \mathbf{v}_{\infty}. \quad (35)$$

Как отмечалось выше, расчет фильтрации из уравнения Дарси является наиболее точным и физически корректным в рамках принятых допущений о протекании процесса фильтрации, поскольку позволяет учитывать любой вид замороженной зоны. Однако из-за того, что дифференциальные уравнения решаются численно, данный подход наиболее затратен с точки зрения вычислительных ресурсов.

#### 4. Численная реализация

Численное решение задачи замораживания грунта осуществляется с помощью метода конечных разностей в полярной системе координат. Расчетная область разбивается на несколько концентрических колец, внутри которых строится регулярная, но неоднородная сетка (см. Рис. 5).

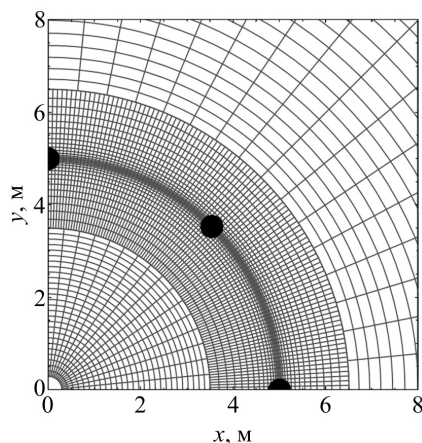


Рис. 5. Часть расчетной сетки (черные кружки – схематичное изображение замораживающих колонок)

На границе двух колец задаются граничные условия в виде равенства температур, теплового потока и скорости фильтрации между кольцами. Наибольшую плотность имеет сетка в кольце с замораживающими колонками. Оптимальная ширина кольца с замораживающими скважинами и размер ячеек сетки в каждом кольце подбираются исходя из данных предварительного моделирования. Главными критериями подбора параметров сетки служат условия независимости решения от характеристик сетки и минимальное время счета. Для дискретизации дифференциальных уравнений по пространству используется центральная схема 2-го порядка точности, а по времени явная схема Эйлера 1-го порядка точности.

С учетом того, что формирование ЛПО процесс относительно медленный, расчет фильтрации, без значительной потери в точности, проводится не на каждой временной итерации, а единожды за определенный период. Данный прием применяется для увеличения скорости вычислений.

#### 5. Результаты моделирования

При моделировании замораживания грунта рассматривался слой песчаника с теплофизическими свойствами, показанными в таблице 1. Замораживающий контур состоял из 8 колонок, расположенных вокруг начала координат по окружности радиусом 5 м. В таблице 2 приведены параметры колонок.



Таблица 1. Теплофизические параметры моделируемого песчаника

Параметр	Размерность	Значение
Плотность	кг/м <sup>3</sup>	2110
Теплопроводность незамороженной зоны	Вт/(м·°C)	2.47
Теплопроводность замороженной зоны	Вт/(м·°C)	3.35
Удельная теплоемкость незамороженной зоны	Вт/(м·°C)	1094
Удельная теплоемкость замороженной зоны	Вт/(м·°C)	870
Содержание воды нетронутого грунта	кг/кг	0.117
Температура начала кристаллизации подземных вод	°C	-0.08
Температура полной кристаллизации подземных вод	°C	-0.5
Удельная теплота кристаллизации подземных вод	Дж/кг	330 000
Температура нетронутого грунта	°C	9.5

Таблица 2. Параметры замораживающих колонок

Параметр	Размерность	Значение
Диаметр колонки	м	0.5
Суммарная высота замораживающей колонки	м	186
Плотность хладоносителя	кг/м <sup>3</sup>	1280
Теплоемкость хладоносителя	Дж/(кг·°C)	2659
Теплопроводность хладоносителя	Вт/(м·°C)	0.49
Вязкость хладоносителя	10 <sup>4</sup> Па·с	212.8
Температура подачи хладоносителя	°C	-35
Температура обратки хладоносителя	°C	-32

Моделирование проводилось для двух характерных времен — до смыкания ЛПО (25 суток замораживания) и после смыкания ЛПО (75 суток замораживания). На рисунке 6 представлены вычисленные распределения температуры и скорости фильтрации при расчете по уравнению Дарси. Магнитуа скорости фильтрации составляет 0.1 м/сут, угол между направлением вектора скорости фильтрации с горизонтом равняется 45°. Из векторных полей скоростей видно, что численно удается смоделировать ситуацию обтекания подземными водами замороженной зоны, а внутри нее скорость равняется нулю. При рассмотрении поля температур (Рис. 6а, в) можно заключить, что наблюдается вытягивание некоторых изолиний вдоль направления фильтрации подземных вод и вследствие этого их переход от круговой формы к эллипсовидной. Поскольку из всех описанных подходов к оценке фильтрации численный расчет на основе уравнения Дарси является наиболее корректным с физической точки зрения, то результаты, которые содержит рисунок 6, принимаются за «эталонные», и далее проводится сравнение с ними данных моделирования фильтрации с аналогичными параметрами при упрощенном и аналитическом подходах.

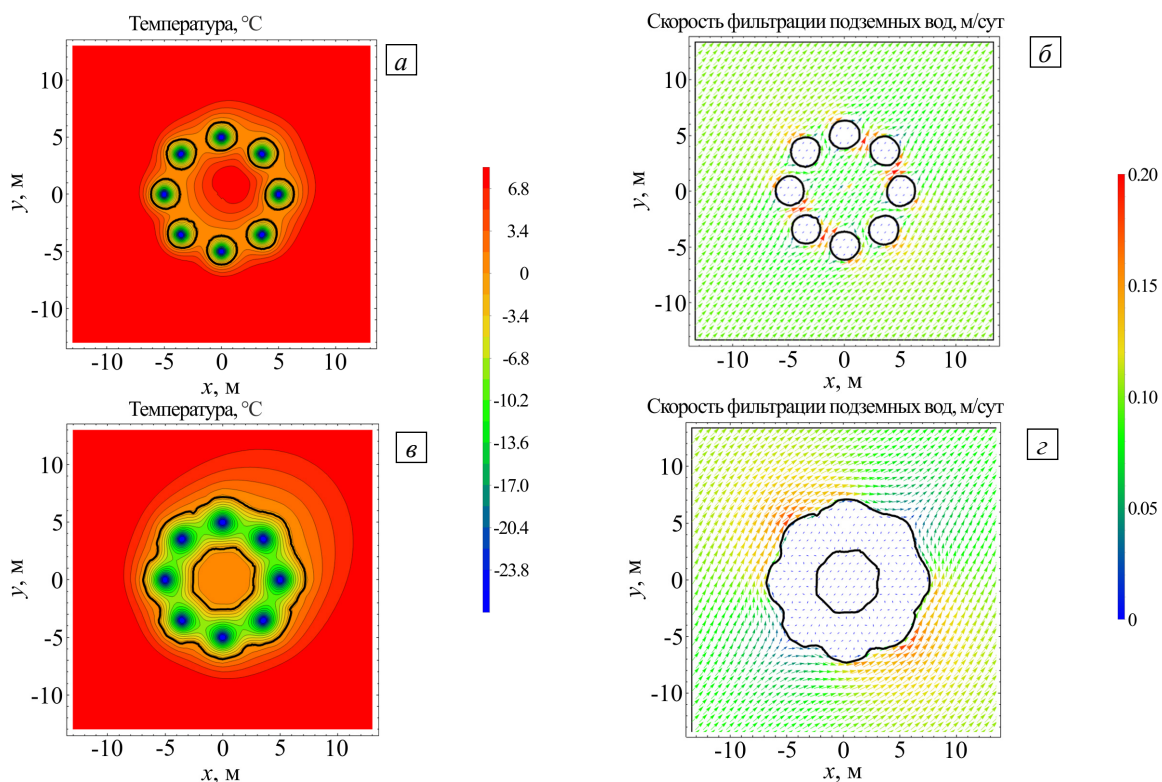


Рис. 6. Поля температуры и векторные поля скорости фильтрации подземных вод при численном расчете фильтрации до смыкания ЛПО (а, б) и после смыкания ЛПО (в, г) (черная линия – положение границы ЛПО); скорость фильтрации 0.1 м/сут

На рисунке 7 представлены поля скоростей фильтрации для каждого из подходов. Хорошо видны значительные различия в получаемых полях скоростей фильтрации при упрощенном и аналитическом подходах к расчету фильтрации. Как говорилось ранее, упрощенный подход не имеет возможности учета обтекания замороженной зоны. Таким образом, вблизи поверхности замороженной зоны не отслеживается перестроение направления потока и не обнуляется компонента скорости, направленная по нормали к границе замороженной зоны, как это получается при численном и аналитическом подходах. В совокупности упрощенный подход дает более высокие скорости фильтрации вблизи замороженной зоны, значительное смещение замороженной зоны и искажение ее формы по сравнению с численным и аналитическим подходами.

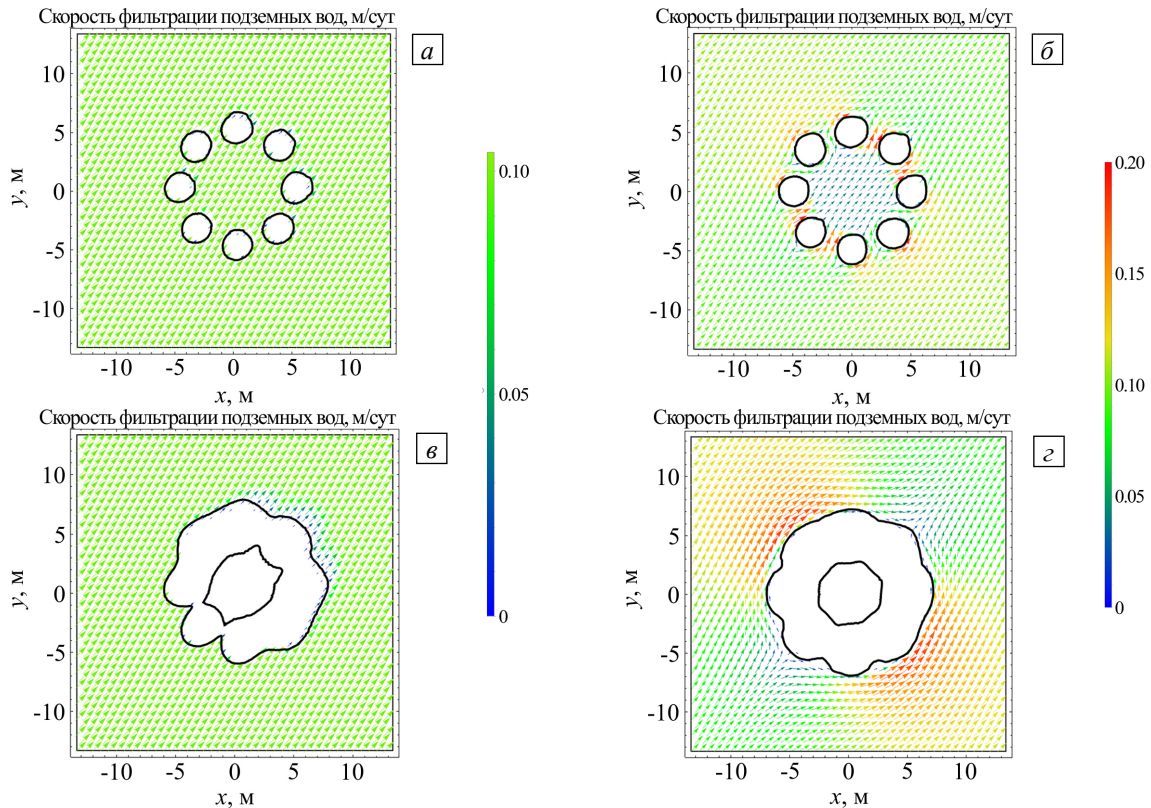
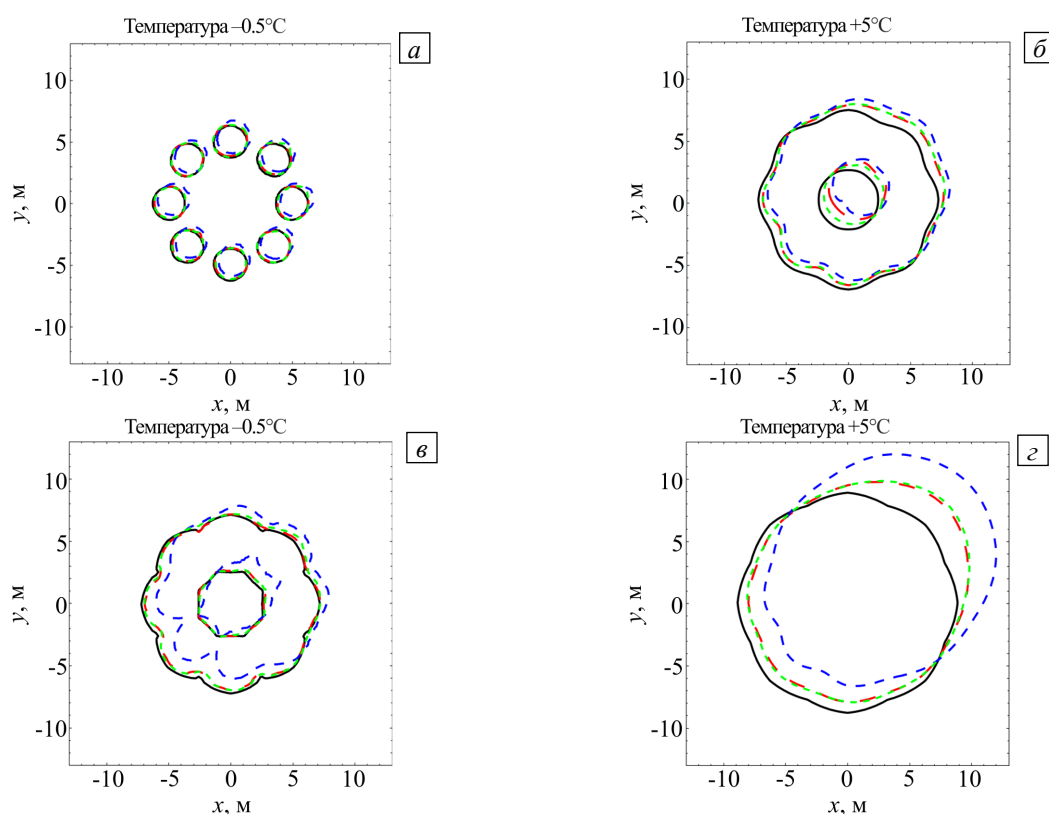


Рис. 7. Векторные поля скорости фильтрации подземных вод при упрощенном (а, в) и аналитическом (б, з) расчетах фильтрации до смыкания (а, б) и после смыкания (в, з) ЛПО; черная линия – положение границы ЛПО; скорость фильтрации 0,1 м/сут

При сравнении полей скорости при аналитическом (Рис. 7) и численном (Рис. 6) подходах к расчету фильтрации можно отметить их хорошее совпадение. Наблюдаются небольшие различия вблизи замороженной зоны после смыкания ЛПО, так как в аналитическом подходе принимается, что граница ЛПО представляет собой окружность, что оказывается не совсем корректным (см. на вид границы ЛПО на рисунках 6 и 7).

На рисунке 7 хорошо видны значительные различия в получаемых полях скоростей фильтрации при упрощенном и аналитическом подходах к расчету фильтрации. Как говорилось ранее, упрощенный подход не имеет возможности учесть обтекание замороженной зоны. Таким образом, вблизи поверхности замороженной зоны не отслеживается перестроение направления потока и не обнуляется компонента скорости, направленная по нормали к границе замороженной зоны, как это получается при численном и аналитическом подходах. В совокупности упрощенный подход дает более высокие скорости фильтрации вблизи замороженной зоны, значительное смещение замороженной зоны и искажение ее формы по сравнению с численным и аналитическим подходами.

Более показательны различия между подходами к расчету фильтрации отражает положение изотерм:  $-0.5$  и  $+5.0^{\circ}\text{C}$  (Рис. 8). Первая изотерма — температура границы ЛПО (температура полной кристаллизации подземных вод), вторая — температура на удалении от границы ЛПО. Выбор изотермы на удалении от границы ЛПО произвольный, главное, чтобы она отражала основную особенность при наличии фильтрации подземных вод — вытянутость поля температуры вдоль направления фильтрации. На рисунке 8 видно, что до смыкания изотермы при расчете фильтрации по упрощенному подходу незначительно отличаются от изотерм, полученных численно. Однако со временем различия в результатах двух подходов нарастают, и после смыкания ЛПО изотермы отличаются уже значительно. Это особенно заметно при анализе изотерм  $+5.0^{\circ}\text{C}$  на рисунке 8з. Следовательно, можно говорить, что упрощенный подход плохо моделирует фильтрацию, его применимость ограничивается небольшими временными



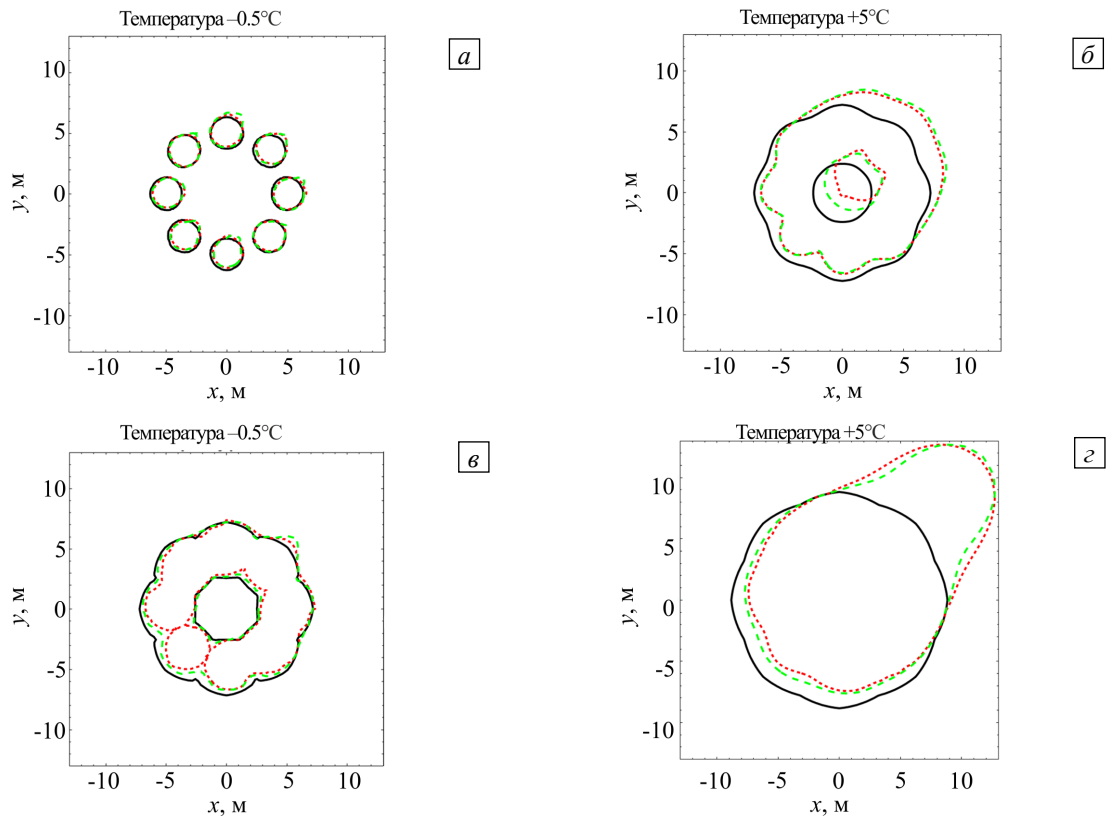
**Рис. 8.** Изотермы  $-0.5^{\circ}\text{C}$  (а, в) и  $+5.0^{\circ}\text{C}$  (б, г) до смыкания (а, б) и после смыкания (в, г) ЛПО; скорость фильтрации 0.1 м/сут; — без фильтрации; - - численный расчет; - - упрощенный расчет; - - аналитический подход

промежутками, либо он может использоваться как начальное приближение для какого-либо численного расчета.

При сравнении численного и аналитического подходов видно, что между ними имеется хорошее соответствие как до смыкания, так и после смыкания ЛПО. Следовательно, в целом погрешность аналитического подхода из-за аппроксимации границы ЛПО в виде окружности оказывается незначительной при принятых в расчетах условиях. Однако при рассмотрении рисунка 8в после смыкания ЛПО видно, что вид изотермы  $-0.5^{\circ}\text{C}$  эталонного решения незначительно отличается от окружности, и аналитический подход действительно, как и до смыкания ЛПО, позволяет с незначительной погрешностью описывать фильтрационные течения подземных вод. Если же заморозка будет продолжительной, то изотерма  $-0.5^{\circ}\text{C}$  может принять вид изотермы  $+5.0^{\circ}\text{C}$  (см. Рис. 8г). Тогда предположение о круглом виде границы ЛПО может привести при аналитическом подходе к существенной погрешности. Но если граница ЛПО не сильно отличается от окружности, то, как видно по полученным результатам, аналитический подход можно с незначительной погрешностью применять для расчета фильтрации вместо численного решения уравнения Дарси.

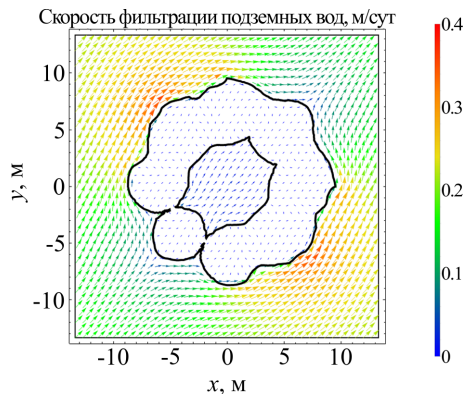
Интересным представляется анализ различных численного и аналитического подходов на рисунке 8б. Можно видеть, что во внутренней области ЛПО положение изотермы  $+5.0^{\circ}\text{C}$  в разных подходах заметно различается. Это объясняется величиной скорости фильтрации во внутренней области (см. Рис. 6б и 7б). В случае численного подхода снижение скорости во внутренней части ЛПО при постепенном его смыкании происходит значительно медленней, чем при аналитическом подходе. Вследствие этого, изотерма  $+5.0^{\circ}\text{C}$ , рассчитанная аналитически, смещается медленней, чем найденная численно. Из этого следует, что используемые в аналитическом подходе формулы (21)–(24), учитывающие снижение скорости фильтрации во внутренней области ЛПО, требуют доработки в дальнейшем для улучшения соответствия численному решению уравнения Дарси.

Помимо скорости фильтрации 0.1 м/сут, в вычислениях также использовалась скорость 0.2 м/сут, при которой происходит значительное «размытие» поля температуры. Временные промежутки были теми же. На рисунке 9 представлены изотермы  $-0.5$  и  $+5.0^{\circ}\text{C}$ , полученные при численном и аналитическом подходах к расчету фильтрации. Упрощенный подход для данного случая не рассматривался, так как с ростом скорости фильтрации лишь сильнее проявляются его недостатки. Рисунок свидетельствует, что при большей скорости фильтрации разница между изотермами  $+5.0^{\circ}\text{C}$ , установленными численно и аналитически, увеличивается. При этом до смыкания ЛПО различия характерны только для температуры во «внутренней области ЛПО». Также по изотерме  $-0.5^{\circ}\text{C}$  рисунка 9в можно говорить о неполном смыкании ЛПО при численном расчете фильтрации. Это следует из сравнения с рисунком 8в, где ЛПО имеет четко



**Рис. 9.** Изотермы  $-0.5^{\circ}\text{C}$  (а, в) и  $+5.0^{\circ}\text{C}$  (б, г) до смыкания (а, б) и после смыкания (в, г) ЛПО; скорость фильтрации 0.2 м/сут; — без фильтрации; - - численный расчет; - - аналитический подход

выраженную внутреннюю и внешнюю границы. На рисунке 9в присутствуют небольшие «окна», через которые вода может продолжать фильтроваться. Лучше всего «окна» на поле скорости видны на рисунке 10, где во внутренней части ЛПО возникает область с ненулевой скоростью фильтрации. При этом такое искажение изотермы при аналитическом подходе не наблюдается.



**Рис. 10.** Поле скорости фильтрации после смыкания ЛПО (численный подход); скорость фильтрации 0.2 м/сут

Выявленные при смыкании ЛПО расхождения между аналитическим и численным подходами можно объяснить идеализацией аналитического подхода за счет предположения о цилиндрической форме замороженной зоны. Это приводит к меньшему, чем при численном расчете, времени образования сплошного ЛПО. Однако в целом анализ результатов, позволяет сказать, что получаемая для времени смыкания ЛПО погрешность незначительна, и имеющие место расхождения в изотермах  $-0.5^{\circ}\text{C}$  не сказываются на общей картине формирования ЛПО.

Однако при дальнейшем увеличении скорости фильтрации сомкнутость ЛПО может быть значительно нарушена, и в таком случае аналитический подход станет неприемлемым.

## 6. Заключение

В рамках данной работы рассмотрены и сопоставлены между собой три различных подхода к расчету фильтрации подземных вод при замораживании грунта с целью возведения ледопородного ограждения:

1. Упрощенный подход опирается на предположение, что скорость фильтрации зависит только от объемного содержания льда. В силу такой простоты не соблюдается баланс массы и невозможно корректно описать обтекание замороженной зоны потоком подземных вод. Но при этом реализация упрощенного подхода не требует значительных вычислительных ресурсов.

2. Аналитический подход использует математический аппарат классической теории обтекания кругового цилиндра набегающим ламинарным потоком жидкости. Подход позволяет корректно учитывать обтекание подземными водами замороженной зоны в виде кругового цилиндра. В этом недостаток подхода: предположение, что контур замороженной зоны формируется и сохраняет вид окружности в плане может стать несправедливым при длительном замораживании под действием фильтрационных течений или

при слишком высоких скоростях фильтрации. Однако реализация аналитического подхода к расчету фильтрации, по сравнению с численным подходом, нуждается в значительно меньшем объеме вычислительных ресурсов, а, следовательно, и время счета пропорционально сократится.

3. Численный подход состоит в численном решении уравнений Дарси и несжимаемости. При всех вводимых допущениях этот подход считается наиболее точным, поскольку скорость фильтрации рассчитывается непосредственно по фундаментальному закону фильтрационных течений. Расчет фильтрации в рамках такого подхода требует наибольшее количество вычислительных ресурсов и, следовательно, время вычислений будет большим относительно упрощенного и аналитического подходов.

На основании полученных результатов сделан вывод, что упрощенный подход, несмотря на свои недостатки, может применяться при относительно небольших временах создания ЛПО и скоростях фильтрации. Либо подход может быть использован для получения некоторого начального приближения.

Сравнение результатов расчета фильтрации численно и аналитически показывает, что при скорости фильтрации подземных вод 0.1 м/сут, они имеют лишь незначительные отличия. Это остается справедливым как до смыкания ЛПО, так и после. Также оба подхода дают близкие результаты и при увеличенной до 0.2 м/сут скорости фильтрации подземных вод, когда поле температуры значительно вытянуто вдоль направления фильтрации. Однако во всех моделируемых случаях граница замороженной зоны сохраняет вид, близкий к окружности. При продолжительном замораживании и при еще больших скоростях фильтрации, когда граница замороженной зоны может потерять вид окружности, аналитический подход нуждается в дальнейшей доработке. В целом, исходя из полученных результатов и принципиальной возможности сокращения времени счета, можно сделать вывод, что разработка аналитических способов расчета фильтрационных течений подземных вод является перспективной.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 19-77-30008.

## Литература

1. Вакуленко И.С., Николаев П.В. Анализ и перспективы развития способа искусственного замораживания горных пород в подземном строительстве // ГИАБ. 2015. № 3. С. 338-346.
2. Амосов П.В., Лукичев С.В., Наговицын О.В. Влияние пористости породного массива и температуры хладоносителя на скорость создания сплошного ледопородного ограждения // Вестник КНЦ РАН. 2016. № 4(27). С. 43-50.
3. Levin L., Golovaty I., Zaitsev A., Pugin A., Semin M. Thermal monitoring of frozen wall thawing after artificial ground freezing: Case study of Petrikov Potash Mine // Tunnelling and Underground Space Technology. 2021. Vol. 107. 103685. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2020.103685>
4. Pimentel E., Papakonstantinou S., Anagnostou G. Numerical interpretation of temperature distributions from three ground freezing applications in urban tunnelling // Tunnelling and Underground Space Technology. 2012. Vol. 28. P. 57-69. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2011.09.005>
5. Левин Л.Ю., Семин М.А., Паршаков О.С. Совершенствование методов прогнозирования состояния ледопородного ограждения строящихся шахтных стволов с использованием распределенных измерений температуры в контрольных скважинах // Записки Горного института. 2019. Т. 237. С. 268-274. (English version <https://doi.org/10.31897/PMI.2019.3.274>)
6. Semin M., Golovaty I., Pugin A. Analysis of temperature anomalies during thermal monitoring of frozen wall formation // Fluids. 2021. Vol. 6. 297. <https://doi.org/10.3390/fluids6080297>
7. Muskat M., Meres M.W. The flow of heterogeneous fluids through porous media // Physics. 1936. Vol. 7. P. 346-363. <https://doi.org/10.1063/1.1745403>
8. Mualem Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media // Water Resour. Res. 1976. Vol. 12. P. 513-522. <https://doi.org/10.1029/WR012i003p00513>
9. Voller V.R., Prakash C. A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems // Int. J. Heat Mass Tran. 1987. Vol. 30. P. 1709-1719. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(87\)90317-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(87)90317-6)
10. Domenico P.A., Schwartz F.W. Physical and chemical hydrogeology. Wiley, 1997. 528 p.
11. Трунак Н.Г. Замораживание грунтов в подземном строительстве. М.: Недра, 1974. 280 с.
12. Бахолдин Б.В. Выбор оптимального режима замораживания грунтов в строительных целях. М.: Госстройиздат, 1963. 71 с.
13. Zhang S., Yue Z., Sun T., Zhang J. Huang B. Analytical determination of the soil temperature distribution and freezing front position for linear arrangement of freezing pipes using the undetermined coefficient method // Cold Regions Sci. Tech. 2021. Vol. 185. 103253. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2021.103253>
14. Hu X., She S., Yu R. Average temperature calculation for straight single-row-piped frozen soil wall // Sciences in Cold and Arid Regions. 2011. Vol. 3. P. 124-131.
15. Hu X.D., Yu J.Z., Ren H., Wang Y., Wang J.T. Analytical solution to steady-state temperature field for straight-row-piped freezing based on superposition of thermal potential // Appl. Therm. Eng. 2017. Vol. 111. P. 223-231. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2016.09.058>
16. Alzoubi M.A., Xu M., Hassani F.P., Poncet S., Sasmito A.P. Artificial ground freezing: A review of thermal and hydraulic aspects // Tunnelling and Underground Space Technology. 2020. Vol. 104. 103534. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2020.103534>
17. Semin M., Levin L., Bublik S., Brovka G., Brovka A., Agutin K. Parameterization of the model of artificial clay freezing considering the effect of pore water salinity // Fluids. 2022. Vol. 7. 186. <https://doi.org/10.3390/fluids7060186>
18. Li T., Zhou Y., Shi X.Y., Hu X.X., Zhou G.Q. Analytical solution for the soil freezing process induced by an infinite line sink // Int. J. Therm. Sci. 2018. Vol. 127. P. 232-241. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.01.013>

19. Xu M., Akhtar S., Zueter A.F., Auger V., Alzoubi M.A., Sasmito A.P. Development of analytical solution for a two-phase Stefan problem in artificial ground freezing using singular perturbation theory // *J. Heat Transfer*. 2020. Vol. 142. 122401. <https://doi.org/10.1115/1.4048137>
20. Zueter A.F., Xu M., Alzoubi M.A., Sasmito A.P. Development of conjugate reduced-order models for selective artificial ground freezing: Thermal and computational analysis // *Appl. Therm. Eng.* 2021. Vol. 190. 116782. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2021.116782>
21. Шуплик М.Н., Вакуленко И.С. Особенности формирования ледопородного ограждения после окончания подачи холодоносителя в замораживающие колонки // *ГИАБ*. 2019. № 5. С. 44-50. <https://doi.org/10.25018/0236-1493-2019-05-0-44-50>
22. DeLillo T.K., Mears J., Silva-Trujillo A. Potential flow in a multiply connected circle domain using series methods // *J. Comput. Appl. Math.* 2021. Vol. 391. 113445. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113445>
23. Семин М.А., Левин Л.Ю., Паршаков О.С. Исследование влияния фильтрационного потока грунтовых вод на искусственное замораживание породного массива // *ИФЖ*. 2021. Т. 94, № 1. С. 51-61. (English version <https://doi.org/10.1007/s10891-021-02272-2>)
24. Semin M., Levin L., Bogomyagkov A., Pugin A. Features of adjusting the frozen soil properties using borehole temperature measurements // *Modelling and Simulation in Engineering*. 2021. Vol. 2021. 8806159. <https://doi.org/10.1155/2021/8806159>
25. Желнин М.С., Костина А.А., Прохоров А.Е., Плехов О.А., Семин М.А., Агутин К.А. Верификация термогидромеханической модели промерзания влагонасыщенного грунта на основе лабораторных экспериментов // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2021. Т. 14, № 2. С. 144-158. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.12>
26. Heinemann Z., Mittermeir G. Fluid flow in porous media. PHDG, 2013. 206 p.
27. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 296 с.
28. Iliev A., Kyurkchiev N., Markov S. On the approximation of the step function by some sigmoid functions // *Math. Comput. Simulat.* 2017. Vol. 133. P. 223-234. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2015.11.005>

## References

1. Vakulenko I.S., Nikolaev P.V. Analysis and outlook for development of artificial freezing of rocks in underground construction. *GLAB – Mining informational and analytical bulletin*, 2015, no. 3, pp. 338-346.
2. Amosov P.V., Lukichev S.V., Nagovitsyn O.V. Influence of rock massif porosity and coolant's temperature on velocity of solid ice wall creation. *Vestnik KNTs RAN – Herald of the Kola Science Centre of RAS*, 2016, no. 4(27), pp. 43-50.
3. Levin L., Golovaty I., Zaitsev A., Pugin A., Semin M. Thermal monitoring of frozen wall thawing after artificial ground freezing: Case study of Petrikov Potash Mine. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2021, vol. 107, 103685. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2020.103685>
4. Pimentel E., Papakonstantinou S., Anagnostou G. Numerical interpretation of temperature distributions from three ground freezing applications in urban tunneling. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2012, vol. 28, pp. 57-69. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2011.09.005>
5. Levin L.Y., Semin M.A., Parshakov O.S. Improving methods of frozen wall state prediction for mine shafts under construction using distributed temperature measurements in test wells. *Journal of Mining Institute*, 2019, vol. 237, pp. 268-274. <https://doi.org/10.31897/PMI.2019.3.274>
6. Semin M., Golovaty I., Pugin A. Analysis of temperature anomalies during thermal monitoring of frozen wall formation. *Fluids*, 2021, vol. 6, 297. <https://doi.org/10.3390/fluids6080297>
7. Muskat M., Meres M.W. The flow of heterogeneous fluids through porous media. *Physics*, 1936, vol. 7, pp. 346-363. <https://doi.org/10.1063/1.1745403>
8. Mualem Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resour. Res.*, 1976, vol. 12, pp. 513-522. <https://doi.org/10.1029/WR012i003p00513>
9. Voller V.R., Prakash C. A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1987, vol. 30, pp. 1709-1719. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(87\)90317-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(87)90317-6)
10. Domenico P.A., Schwartz F.W. *Physical and chemical hydrogeology*. Wiley, 1997. 528 p.
11. Trupak N.G. *Zamorazhivaniye gruntov v podzemnom stroitel'stve* [Soil freezing in underground construction]. Moscow, Nedra, 1974. 280 p.
12. Bakholdin B.V. *Vybor optimal'nogo rezhima zamorazhivaniya gruntov v stroitel'nykh tselyakh* [Selection of the optimal mode of soil freezing for construction purposes]. Moscow, Gosstroyizdat, 1963. 71 p.
13. Zhang S., Yue Z., Sun T., Zhang J. Huang B. Analytical determination of the soil temperature distribution and freezing front position for linear arrangement of freezing pipes using the undetermined coefficient method. *Cold Regions Sci. Tech.*, 2021, vol. 185, 103253. <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2021.103253>
14. Hu X., She S., Yu R. Average temperature calculation for straight single-row-piped frozen soil wall. *Sciences in Cold and Arid Regions*, 2011, vol. 3, pp. 124-131.
15. Hu X.D., Yu J.Z., Ren H., Wang Y., Wang J.T. Analytical solution to steady-state temperature field for straight-row-piped freezing based on superposition of thermal potential. *Appl. Therm. Eng.*, 2017, vol. 111, pp. 223-231. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2016.09.058>
16. Alzoubi M.A., Xu M., Hassani F.P., Poncet S., Sasmito A.P. Artificial ground freezing A review of thermal and hydraulic aspects. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2020, vol. 104, 103534. <https://doi.org/10.1016/j.tust.2020.103534>
17. Semin M., Levin L., Bublik S., Brovka G., Brovka A., Agutin K. Parameterization of the model of artificial clay freezing considering the effect of pore water salinity. *Fluids*, 2022, vol. 7, 186. <https://doi.org/10.3390/fluids7060186>
18. Li T., Zhou Y., Shi X.Y., Hu X.X., Zhou G.Q. Analytical solution for the soil freezing process induced by an infinite line sink. *Int. J. Therm. Sci.*, 2018, vol. 127, pp. 232-241. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.01.013>

19. Xu M., Akhtar S., Zueter A.F., Auger V., Alzoubi M.A., Sasmito A.P. Development of analytical solution for a two-phase Stefan problem in artificial ground freezing using singular perturbation theory. *J. Heat Transfer*, 2020, vol. 142, 122401. <https://doi.org/10.1115/1.4048137>
20. Zueter A.F., Xu M., Alzoubi M.A., Sasmito A.P. Development of conjugate reduced-order models for selective artificial ground freezing: Thermal and computational analysis. *Appl. Therm. Eng.*, 2021, vol. 190, 116782. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2021.116782>
21. Shuplik M.N., Vakulenko I.S. Features of frozen wall formation after cooling agent delivery termination in freezing pipes. *GIAB – Mining informational and analytical bulletin*, 2019, no. 5, pp. 44-50. <https://doi.org/10.25018/0236-1493-2019-05-0-44-50>
22. DeLillo T.K., Mears J., Silva-Trujillo A. Potential flow in a multiply connected circle domain using series methods. *J. Comput. Appl. Math.*, 2021, vol. 391, 113445. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113445>
23. Semin M.A., Levin L.Yu., Parshakov O.S. Influence of groundwater seepage on artificial freezing of rock mass. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2021, vol. 94, pp. 45-55. <https://doi.org/10.1007/s10891-021-02272-2>
24. Semin M., Levin L., Bogomyagkov A., Pugin A. Features of adjusting the frozen soil properties using borehole temperature measurements. *Modelling and Simulation in Engineering*, 2021, vol. 2021, 8806159. <https://doi.org/10.1155/2021/8806159>
25. Zhelnin M.S., Kostina A.A., Prokhorov A.E., Plekhov O.A., Semin M.A., Agutin K.A. Validation of a thermo-hydro-mechanical model of freezing of water-saturated soil based on laboratory tests results. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2021, vol. 14, no. 2, pp. 144-158. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.12>
26. Heinemann Z., Mittermeir G. *Fluid flow in porous media*. PHDG, 2013. 206 p.
27. Vallander S.V. *Lektsii po gidroaeromekhanike* [Lectures on hydroaeromechanics]. Leningrad, Publishing House of Leningrad State University, 1978. 296 p.
28. Iliev A., Kyurkchiev N., Markov S. On the approximation of the step function by some sigmoid functions. *Math. Comput. Simulat.*, 2017, vol. 133, pp. 223-234. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2015.11.005>

Поступила в редакцию 20.09.2022; после доработки 11.11.2022; принята к опубликованию 29.11.2022