

DOI: [10.7242/1999-6691/2023.16.1.10](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.1.10)

УДК 532.5.013.3: 532.59: 537.3

## СТОЯЧИЕ КОНВЕКТИВНЫЕ ВОЛНЫ В СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

О.О. Некрасов

*Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация*

Исследуется влияние постоянного электрического поля на конвективные волновые режимы движения слабопроводящей вязкой несжимаемой жидкости, содержащейся в плоском бесконечном горизонтальном конденсаторе. Жидкость помещена в гравитационное поле и неоднородно нагрета сверху. На верхней обкладке конденсатора автономно и униполярно инжектируется постоянный заряд. Инжекция является основным механизмом возникновения конвективной неустойчивости, а в присутствии сил плавучести, направленных противоположно силам Кулона, появляются различные нестационарные колебания. Задача рассматривается в полной постановке, то есть учитывается перераспределение электрического поля внутри конденсатора за счет подвижности зарядов в электрическом поле и их конвективного переноса. Ее решение находится численно при помощи явных конечно-разностных схем при двух наборах вертикальных граничных условий: чисто периодических и ограниченно периодических, запрещающих движение жидкости вдоль горизонтали. Во всех случаях конвекция возникает путем прямой бифуркации колебательным образом. При втором наборе условий на границе получается решение, неустойчивое при прочих граничных условиях. При изучении режимов стоячих волн анализируются временные ряды и пространственные распределения физических функций с использованием Фурье-анализа по пространственным гармоникам. Обнаружены стоячие волны (standing waves – SW), в которых отсутствует горизонтальное движение конвективных структур, и модулированные стоячие волны (modulated standing waves – MSW), в которых уменьшение интенсивности волны сопровождается проявлением высшей (второй) пространственной гармоники. Бифуркационная диаграмма движения жидкости дополнена неустойчивыми режимами. Продемонстрирован ряд свойств, общих как для устойчивых, так и для неустойчивых решений.

*Ключевые слова:* инжекция заряда, конвекция, постоянное электрическое поле, стоячая волна, колебательная неустойчивость, численное моделирование

## STANDING CONVECTIVE WAVES IN POOR CONDUCTING LIQUID

O.O. Nekrasov

*Perm State University, Perm, Russian Federation*

The paper investigates the impact of a steady electric field on convective wave regimes in the poorly conducting viscous incompressible liquid contained inside the infinite horizontal flat capacitor. The liquid is placed in the gravity field and heated from above. A constant electric charge is injected unipolar and autonomously on the top plate of the capacitor. Injection is the main mechanism responsible for the onset of convection instability, and the buoyancy forces directed against the Coulomb forces cause the appearance of non-stationary oscillations. A complete problem formulation is considered. This allows taking into account the electric field redistribution inside the capacitor due to the motion of charges in the electric field and their convective transport. The problem is solved numerically by applying the explicit finite difference schemes. Two sets of vertical boundary conditions are used: completely periodic conditions and limited periodic conditions, inhibiting the liquid motion along the horizontal direction. In both cases, convection occurs as result of forward bifurcation and is of oscillatory nature. In the case of the second set of boundary conditions, we obtain a solution that is unstable under other periodic conditions. When studying the standing wave regimes, the time series and the spatial distributions of the physical parameters of the system are investigated using the Fourier analysis of spatial harmonics. The analysis has revealed standing waves (SW) in which the horizontal motion of convective patterns is absent and modulated standing waves (MSW) where a decrease in wave intensity is accompanied by the appearance of the higher (second) spatial harmonic. The bifurcation diagram of the liquid flow is completed with the unstable standing wave regimes. The same properties are shown for both stable and unstable solutions.

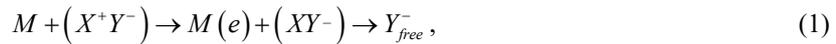
*Key words:* charge injection, convection, steady electric field, standing wave, oscillatory instability, numerical modeling

### 1. Введение

Объектом изучения электрогидродинамики являются так называемые слабопроводящие жидкости, обладающие малой электропроводностью ( $\sigma \leq 10^{-7} - 10^{-12} \text{ Ом}^{-1}\text{см}^{-1}$ ) [1]. Таковыми можно считать широкий класс жидких материалов, активно используемых в промышленности и технике: топлива, углеродные масла и жидкие диэлектрики. Малая проводимость позволяет рассматривать в них лишь электростатические взаимодействия и пренебрегать магнитными эффектами [2].

Механизм возникновения течений в подобных жидкостях под влиянием электрического поля напрямую связан со способом генерации в жидкости свободных или поляризованных зарядов [2–9]. Если генерация вызывается инжекцией, то свободный заряд появляется на границе жидкость–электрод вследствие окислительно-восстановительных электрохимических реакций [5, 10]: в приграничных зонах образуется скопление зарядов со знаком, совпадающим со знаком электродов. Вследствие одинаковости знаков заряды начинают отталкиваться от электрода, то есть в жидкости наводятся силы, влияющие на ее элементарные объемы и способные привести их в движение, возбудить течение жидкости в электрическом поле [10–12]. Этот эффект в последнее время с успехом используется в микрофлюидике [13–15].

В данной статье рассматривается униполярная инжекция с катода. В этом случае находящаяся у электрода нейтральная примесь захватывает электроны и превращается в смесь отрицательных ионов [10]:



где  $M$  — металлический электрод, отдающий ионной паре  $(X^+Y^-)$  электрон  $e$ ,  $Y_{free}^-$  — инжектируемый ион. Схема (1) представляет классический пример униполярной инжекции с катода.

Отрицательный заряд, инжектируемый в жидкость вблизи катода, начинает распространяться вглубь сплошной среды. Сила Кулона, действующая на заряд в жидкости, выступает в роли возбудителя массопереноса.

В изотермической жидкости присутствие постоянного электрического поля может привести к возникновению стационарной конвекции путем обратной бифуркации [11, 12]. В зависимости от напряжения на электродах жидкость находится либо в состоянии ионной проводимости и отсутствия движения сплошной среды, либо в режиме конвективного течения под действием силы Кулона с наличием гистерезисного перехода между этими двумя состояниями. В неизотермическом же случае, кроме этих состояний, существуют надкритические нелинейные волновые структуры, разнообразие которых представляет интерес и с теоретической, и с практической точек зрения. Важным для приложений результатом подобных исследований является возможность управления теплопереносом в жидкости как в сторону его усиления [16, 17], так и ослабления [18]. С позиции теории имеют интерес, например, наблюдения хаотических колебательных течений при нагреве замкнутой полости сбоку [19].

Результаты анализа надкритических режимов конвекции в электрическом поле при нагреве сверху, проведенного в безындукционном приближении для заряда на катоде, пропорционального приложенному полю [10, 20, 21], демонстрируют возникновение в жидкости колебательной неустойчивости и повышение порога при переходе к стационарным режимам. В результате прямой бифуркации Хопфа рождаются волновые конвективные течения: стоячая волна (SW), бегущая волна (TW), модулированная бегущая волна (MTW), модулированная стоячая волна (MSW), которые могут реализоваться в горизонтальном слое или кольцевом канале. Такое поведение слабопроводящей жидкости связано с перераспределением заряженной примеси в объеме и в некотором смысле представляется аналогом конвекции бинарных смесей [22], в которых при эволюции колебательных возмущений могут образовываться стационарные и волновые структуры, в том числе стоячие и бегущие волны, активно изучаемые путем численного моделирования [23, 24].

Текущее исследование является продолжением работы [25], в которой изучаются нелинейные устойчивые режимы конвекции в постоянном электрическом поле при униполярной автономной инжекции заряда и нагреве сверху в полной электрической постановке. В данной работе найдены и проанализированы режимы неустойчивых стоячих волн, а также построена полная бифуркационная диаграмма волновых конвективных решений.

## 2. Постановка задачи

Вязкая несжимаемая слабопроводящая жидкость с динамической вязкостью  $\eta$ , температуропроводностью  $\chi$ , подвижностью зарядов  $K$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  помещена в плоский бесконечный конденсатор толщиной  $d$ . На обкладках конденсатора поддерживается постоянная разность температур  $\Theta$  и постоянная разность потенциалов  $V_0$  таким образом, что жидкость нагревается сверху, и на верхней же обкладке конденсатора производится автономная униполярная инжекция отрицательных зарядов с плотностью  $q_0$  (верхняя обкладка является катодом). Помимо прочего, на жидкость действует сила тяжести  $\mathbf{g}$ .

Рассмотрим вертикальный разрез конденсатора. Проведем ось  $x$  вдоль верхней обкладки конденсатора, а ось  $z$  внутрь слоя жидкости. Тогда получим геометрию задачи (Рис. 1). Положим линейной зависимостью между плотностью жидкости  $\rho$  и отклонением

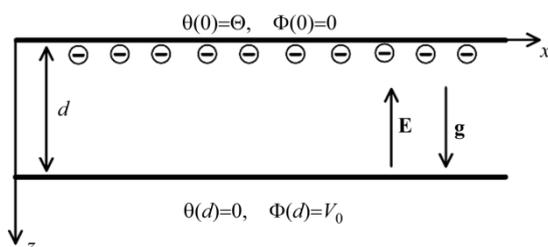


Рис. 1. Геометрия задачи и граничные условия

температуры от средних значений  $\theta$ :  $\rho = \rho_0(1 - \beta\theta)$ , где  $\rho_0$  — плотность жидкости при средней температуре, а  $\beta$  — коэффициент объемного расширения жидкости. Жидкость считаем несжимаемой, так что зависимость плотности жидкости от давления во внимание не принимаем.

В силу малости в уравнении динамики жидкости как коэффициента объемного расширения жидкости, так и

конвективных слагаемых по сравнению с массовыми силами, неоднородность плотности можно учесть лишь в слагаемых, связанных с этими силами (то есть следует воспользоваться приближением Буссинеска [26]). Другим важным приближением является так называемое ЭГД-приближение, согласно которому, ввиду малой электропроводности жидкости и токов зарядов в ней, игнорируются магнитные эффекты [1]. Кроме того, при электропроводности жидкости в пределах  $10^{-9} - 10^{-11}$  Ом $^{-1}$ м $^{-1}$  и напряженности электрического поля  $|E|^2 < 10^5$  В/м в уравнении теплопроводности можно пренебречь слагаемым, связанным с джоулевым нагревом [2].

Для записи основных уравнений системы в безразмерной форме применим при обезразмеривании параметров следующие масштабы: для длины —  $d$ ; времени —  $d^2\rho_0/\eta$ ; скорости —  $\eta/(\rho_0d)$ ; температуры —  $\Theta$ ; давления —  $\eta^2/(\rho_0d^2)$ ; электрического потенциала  $\Phi$  —  $V_0$ ; плотности заряда  $q$  —  $\epsilon_0\epsilon V_0/d^2$ , где  $\epsilon_0$  — диэлектрическая постоянная.

Система физических уравнений, решением которой являются стоячие конвективные волны в слабопроводящей жидкости, включает уравнение Навье–Стокса, закон сохранения заряда, уравнение теплопроводности, условие несжимаемости жидкости и дифференциальный закон Гаусса в терминах потенциала и объемной плотности заряда (уравнение Пуассона) [11, 16, 26]. С учетом принятых приближений они выглядят так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} - \frac{T^2}{M^2} q \nabla \Phi - \frac{Ra}{Pr} \theta \mathbf{e}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)q = \frac{T}{M^2} (q^2 - \nabla \Phi \cdot \nabla q), \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\theta = \frac{1}{Pr} \Delta \theta, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \Delta \Phi = -q, \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $t$  — время,  $\mathbf{v}$  — скорость,  $p$  — давление,  $q$  — плотность заряда,  $\Phi$  — электрический потенциал,  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, сонаправленный с осью  $z$ ,  $\nabla$  и  $\Delta$  — стандартные дифференциальные операторы. Наличие уравнения Пуассона в системе (2) свидетельствует о том, что во внимание берется изменение электрического поля внутри конденсатора, обусловленное перераспределением заряда, то есть задача рассматривается в полной электрической постановке.

Запишем граничные условия. Считаем обкладки конденсатора идеально проводящими с условием прилипания жидкости, тогда на горизонтальных границах имеем:

$$\begin{array}{l} z = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \theta = 1, \quad \Phi = 0, \quad q = C, \\ z = 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \theta = 0, \quad \Phi = 1. \end{array} \quad (3)$$

Система уравнений (2) и условия (3) содержат ряд безразмерных комплексов, имеющих следующий смысл: число Релея  $Ra = \frac{\rho_0 g \beta d^3 \theta}{\eta \chi}$ ; электрическое число Релея  $T = \frac{\epsilon_0 \epsilon V_0 \rho_0}{K \eta}$  (параметр, характеризующий конвекцию в электрическом поле и пропорциональный напряжению на обкладках); число Прандтля  $Pr = \frac{\eta}{\rho_0 \chi}$ ; параметр подвижности ионов  $M = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{K^2 \rho_0}}$ ; постоянный параметр инжекции  $C = \frac{q_0 d^2}{V_0 \epsilon_0 \epsilon}$ , где  $q_0$  — плотность заряда, инжектируемого на катоде.

Необходимо отметить, что течения заряженных сред часто представляются другой моделью — моделью Нернста–Планка [27], где физические носители заряда (анионы и катионы) имеют разные знаки. Для униполярной инжекции (1) характерен только один тип носителей — отрицательный заряд, который создается на катоде за счет окислительно-восстановительных электрохимических реакций. Диэлектрическая жидкость не обладает остаточной проводимостью и, следовательно, не имеет положительных носителей.

Проанализируем систему (2) совместно с граничными условиями (3). В уравнении Навье–Стокса, описывающем динамику сплошной среды, присутствуют слагаемые, отвечающие за внешние силы, действующие на элементарный объем жидкости, то есть за силу Кулона и за силу плавучести (силу Архимеда).

Сила Кулона совпадает по направлению с силой тяжести, и растворенный в жидкости отрицательный заряд от верхней обкладки конденсатора (катада) перемещается вниз. Если бы жидкость была

изотермической, то при превышении напряжением на обкладках конденсатора некоторых критических значений произошло бы жесткое возбуждение конвективного движения [11, 12]. Однако в рассматриваемой задаче жидкость находится под постоянным нагревом сверху, силы плавучести возвращают ее обратно к катоду, что приводит к существованию области надкритических волновых режимов. Вместе с тем, если бы силы Кулона отсутствовали или были незначительными по сравнению с силами плавучести, то при умеренном нагреве сверху жидкость оставалась бы устойчивой и движение бы в ней не возникало.

Таким образом, в данной постановке ответственным за конвекцию в жидкости можно считать инжекционный механизм, а термогравитационный механизм неустойчивости (при нагреве сверху) сам по себе конвекцию не вызывает, но порождает колебательные режимы течения.

### 3. Метод решения задачи

Сформулированная постановка задачи подразумевает ряд упрощений, которыми необходимо воспользоваться для подготовки к численному решению.

Во-первых, имеет смысл рассмотреть лишь двумерные возмущения:  $\mathbf{v} = (v_x, 0, v_z)$ . С одной стороны, это корректно по причине отсутствия в системе (2) слагаемых, содержащих силы, направленные перпендикулярно вертикальной плоскости задачи, а значит уравнения инвариантны относительно выбора направления оси  $x$ . С другой стороны, в реальных задачах определенной геометрии (например, в кольцевых зазорах большого радиуса) возникают именно квазидвумерные волновые режимы [21, 25]. Двумерность задачи позволяет прибегать к классическому двухполюсовому методу, исключаящему из уравнений Навье–Стокса давление.

Согласно двухполюсовому методу, введем две функции, связанные со скоростью жидкости:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = (\text{rot } \mathbf{v})_y = -\Delta \psi, \quad (4)$$

где  $\psi(x, z, t)$  называется функцией тока, а  $\omega(x, z, t)$  — вихрем скорости. Тогда условия на горизонтальных границах примут вид:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 1, \quad \Phi = 0, \quad q = C, \\ z = 1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0, \quad \Phi = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Второе допущение, принятое в постановке, — бесконечность слоя вдоль горизонтального направления, требует введения определенных граничных условий, которые будут представлены в следующем разделе.

Систему дифференциальных уравнений с граничными условиями, записанную для функций  $\psi$ ,  $\omega$ ,  $q$ ,  $\theta$  и  $\Phi$ , проинтегрируем численно, при помощи методов конечных разностей [12, 31].

В [28] показано, что явная схема с центральными разностями, применяемая к конвективным и вязким слагаемым в уравнении Навье–Стокса, будет зависимой от локального критерия устойчивости, в качестве которого здесь выступает сеточное число Рейнольдса. При превышении этим числом некоторого критического значения для сохранения устойчивости решения необходимо переключаться на схему с разностями против потока, которая имеет меньший порядок аппроксимации, чем центрально-разностная, но устойчива при достаточно малых шагах по времени. Гладкий переход между двумя явными схемами реализует специальная процедура.

Уравнения теплопроводности и закон сохранения заряда аппроксимируем явными схемами против потока. Оба уравнения Пуассона (для электрического потенциала и для функции тока) разрешим методом последовательной верхней релаксации на каждом временном шаге. На горизонтальных границах для вихря скорости  $\omega$  применим условия Тома [12, 28].

Для дискретизации расчетной области используем сетку с  $21 \times 41$  узлами и шагом по пространству  $h = 0,05$ , шаг по времени выберем в соответствии с критериями устойчивости конечноразностных схем в зависимости от скорости движения жидкости. Измельчение выбранной сетки не приводит к качественным изменениям в результатах [25].

Для анализа решения задачи рассмотрим как локальные, так и интегральные характеристики системы. Основной исследуемой функцией является функция тока  $\psi$ , поэтому возьмем ее максимальное значение внутри ячейки в каждый момент времени:  $\psi_{\max}(t) = \max[\psi_{i,j}(t_k)]$ . Координаты максимального значения функции внутри ячейки отвечают положению центра одного из конвективных валов. Помимо этого, построим распределения основных функций системы внутри ячейки.

Пространственно-временное распределение полей функции тока в ряды Фурье по гармоникам  $\hat{F}_n(t)$  (например, в горизонтальном направлении в сечении, соответствующем середине высоты слоя  $z = 1/2$ ):

$$F\left(x, z = \frac{1}{2}, t\right) = \hat{F}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n(t) e^{iknx}, \quad (6)$$

позволяет охарактеризовать особенности различных течений жидкости. Для описания возникающих в жидкости структур в анализируемом случае достаточно информации о первой —  $\hat{\psi}_1(t)$ , и второй —  $\hat{\psi}_2(t)$ , модах разложения функции тока; вклад третьей гармоники  $\hat{\psi}_3(t)$  в общее решение мал (не превышает 1%).

#### 4. Результаты исследования

Для численного моделирования системы использовались те же значения безразмерных параметров, что и в [25]: число Релея  $Ra = -2500$ ; число Прандтля  $Pr = 10$ . Параметр подвижности ионов  $M$ , способный принимать широкий набор значений  $4 < M < 120$ , в рассматриваемой задаче принимался равным 14,14 (это наиболее часто применяемое значение [8, 10, 15]). Параметр  $C = -0,224$  соответствовал умеренной униполярной инжекции ( $0,2 < C < 5$ ) [11]. В качестве жидкости с подобными параметрами может выступать этиловый спирт с ионами хлора, в размерных величинах значения параметров системы отвечали толщине зазора  $d \sim 1,5$  мм и напряжению на обкладках конденсатора  $V_0 \sim 4,2$  кВ.

##### 4.1. Покоящаяся жидкость

В случае, когда управляющий параметр системы (электрическое число Релея) мал, жидкость покоится (конвективный массоперенос не возникает). Кроме того, в данной задаче в слое жидкости отсутствует горизонтальная анизотропия, и все функции зависят лишь от вертикальной координаты. Таким образом, задача поддается аналитическому решению. При этом уравнение теплопроводности сводится к тривиальному дифференциальному уравнению с решением для отклонения температуры от средних значений в равновесном состоянии в виде линейной зависимости:

$$\theta_0 = 1 - z,$$

а уравнение сохранения заряда — к одномерному нелинейному дифференциальному уравнению, которое имеет псевдоаналитическое решение для равновесного распределения заряда  $q_0$  и потенциала  $\Phi_0$ :

$$q_0 = \frac{3\bar{C}^2 (2\bar{C}z + 1)^{-1/2}}{1 - (2\bar{C} + 1)^{3/2}}, \quad \Phi_0 = \frac{1 - (2\bar{C}z + 1)^{3/2}}{1 - (2\bar{C} + 1)^{3/2}},$$

где  $C = \frac{3\bar{C}^2}{1 - (2\bar{C} + 1)^{3/2}}$ . Видно, что получить обратную аналитическую зависимость  $\bar{C} = f(C)$  нельзя, однако

можно для каждого рассматриваемого значения  $C$  численно определять величину  $\bar{C}$ . Например, принятому в данной работе значению  $C = -0,224$  соответствует значение  $\bar{C} = 0,25$ . Стоит отметить, что найденные для  $q_0$  и  $\Phi_0$  решения качественно и количественно совпадают с таковыми в том случае, когда инжектируемый заряд зависит от напряженности электрического поля [10]. Они позволяют анализировать поведение параметров системы с точки зрения отклонений от равновесных значений.

##### 4.2. Периодические граничные условия по горизонтали

В работе [25] изучались бегущие волны в задаче аналогичной геометрии (см. Рис. 1) при периодических граничных условиях по горизонтали с периодом  $l = 2$  (такому периоду отвечает волновое число  $k = 2\pi/l = \pi$  — критическое значение возникновения термогравитационной конвекции). При этом жидкость нагревалась снизу в отсутствие электрических взаимодействий:

$$F(x, z, t) = F(x + l, z, t), \quad (7)$$

где  $F$  — любая из функций системы (2)–(4). Кратко напомним результаты, важные для дальнейшего изложения. Далее используются обозначения, принятые в работе [25].

При последовательном увеличении управляющего параметра  $T$  в равновесной жидкости образуется конвекция путем прямой бифуркации Хопфа в виде смешанного режима (M) при значении  $T_{C1} = 6805$ . С увеличением значения электрического числа Релея жидкость переходит к режиму бегущих волн (TW), характеризующемуся смещением конвективной структуры (смещением полей функции тока, температуры, электрических заряда и потенциала) вдоль горизонтального направления с постоянной фазовой скоростью. Режим бегущих волн является основным режимом конвекции в надкритической области и существует при  $T \in [T_{C2} = 6818, 7037]$ . Перед тем, как перейти к высокоинтенсивному режиму стационарной конвекции (SOC) при  $T \geq T_{C4} = 7061$ , в системе непродолжительное время наблюдается режим модулированных бегущих волн (MTW) при  $T \in [T_{C3} = 7038, 7060]$ . Остановимся на смешанном режиме (M) более подробно.

Смешанный режим M во многом похож на стоячие волны (Рис. 2). В течение большей части периода в ячейке наблюдаются два конвективных вала, закрученных в противоположные стороны. Интенсивность конвекции в них периодически то уменьшается, то увеличивается, а при достижении интенсивностью конвекции минимальных значений конвективные валы меняются местами. Отличие от «чистых» стоячих волн обнаруживается как раз в те моменты времени, когда интенсивность конвекции в валах мала и конвективная структура смещается вдоль горизонтального направления скачком, что и приводит к перестановке валов. Скорее всего такой режим возникает из-за того, что две волновые компоненты функции тока, двигающиеся во встречных направлениях и образующие итоговое распределение, не идентичны друг другу и в них проявляются высшие гармоники.

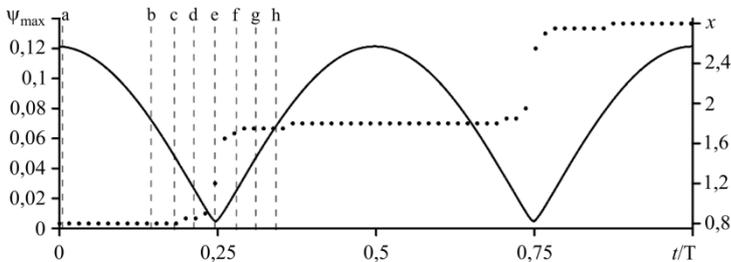


Рис. 2. Зависимость от времени максимального значения функции тока в ячейке (сплошная линия и левая вертикальная ось) и  $x$ -координаты максимума функции тока в ячейке (пунктирная линия и правая вертикальная ось) в смешанном режиме M;  $T = 6815$ ; буквами a, b, ..., h обозначены характерные моменты времени

Смешанный режим показывает, что в системе есть потенциал для существования чисто стоячих волн (SW), как в задачах конвекции в постоянном [8, 16] или переменном поле [23, 24]. Но при использовании полностью периодических условий в данной постановке, и даже при модуляции потенциала на обкладках со временем [31], стоячие волны являются неустойчивыми. Поэтому, для их отыскания требуется задание специальных граничных условий на вертикальных границах, исключающих существование бегущих волн.

### 4.3. Граничные условия для моделирования стоячих волн

Для температуры, потенциала и заряда, как и ранее, запишем периодические граничные условия, а для функции тока будем иметь:

$$\psi(nl, z, t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Такие граничные условия из всего набора периодических по горизонтали решений выделяют решение с узлами функции тока на вертикальных границах, что соответствует стоячей волне. Можно представить, что внутри конденсатора на расстоянии  $l$  друг от друга помещаются вертикальные мембраны, которые

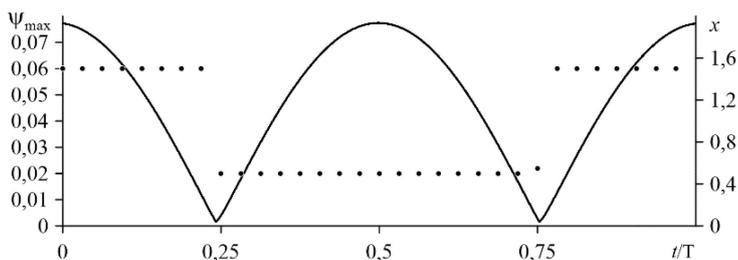


Рис. 3. Зависимость от времени максимального значения функции тока в ячейке (сплошная линия и левая вертикальная ось) и  $x$ -координаты максимума функции тока в ячейке (пунктирная линия и правая вертикальная ось) в режиме стоячих волн SW;  $T = 6810$

идеально тепло- и электропроводны, но не пропускают через себя жидкость. С таким ограничением конвекция в жидкости появляется при том же критическом значении электрического числа Релея —  $T_{C1} = 6805$ , путем прямой бифуркации колебательным образом, но теперь в виде чисто стоячих волн SW (Рис. 3).

Сравним поведение системы в режиме стоячих волн (SW) и смешанном режиме (M) (Рис. 3 и 2). Как можно заметить,

на графиках обнаруживается два существенных различия. Во-первых, в режиме стоячих волн при смене положения конвективных валов интенсивность конвекции в них действительно стремится к нулю, а не к какому-то малому значению, как в смешанном режиме. Во-вторых, положение максимумов функции тока (центров конвективных валов) меняется скачкообразно, а не плавно в режиме смешанных волн.

На рисунке 4 изображено пространственное распределение некоторых характеристик системы вблизи максимума интенсивности конвекции в режиме стоячих волн SW. Качественно они не отличаются от аналогичных распределений в смешанном режиме М [20].

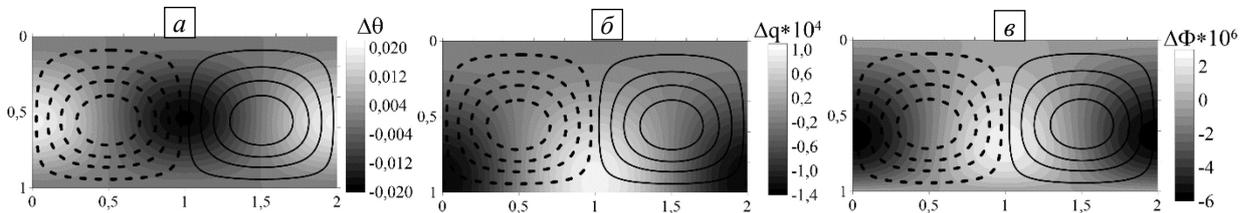


Рис. 4. Распределения в ячейке отклонений от равновесных значений: отклонения температуры (а), плотности заряда (б), электрического потенциала (в) в режиме стоячих волн SW,  $T = 6810$ ; на каждом из распределений показаны изолинии функции тока (сплошная линия – положительные значения, штриховая – отрицательные)

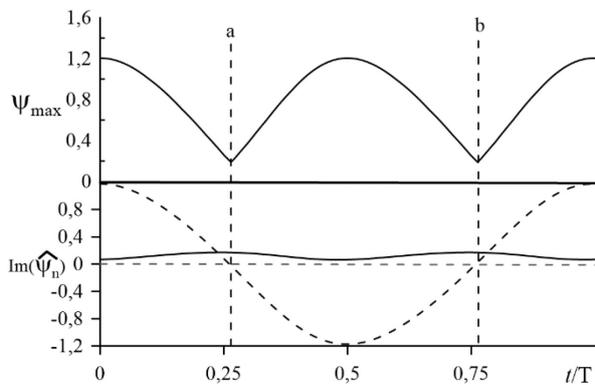


Рис. 5. Зависимость от времени максимального значения функции тока в ячейке (верхний график) и коэффициентов разложения в ряд Фурье функции тока (нижний график, штриховая линия – первая гармоника, сплошная линия – вторая гармоника) в режиме модулированных стоячих волн MSW,  $T = 6910$

Режим стоячих волн существует при  $T \in [T_{C1} = 6805, 6864]$ . При  $T \in [T'_{C2} = 6865, 6018]$  в системе реализуется режим модулированных стоячих волн (MSW). Символом со штрихом обозначены критические числа  $T$ , соответствующие переходам между различными неустойчивыми решениями. Режим MSW отличается от режима стоячих волн тем, что при уменьшении интенсивности конвекции в ячейке перестановка конвективных валов выглядит как появление в системе второй пространственной гармоники. Видно, что в те моменты времени, когда интенсивность конвекции в ячейке достигает минимальных (но ненулевых) значений (см. моменты а и б, Рис. 5), мода первой пространственной гармоники становится равной нулю, но при этом мода второй пространственной гармоники (7)

положительна и максимальна. Ввиду этого в ячейке наблюдаются две пары закрученных в противоположные стороны конвективных валов (Рис. 6).

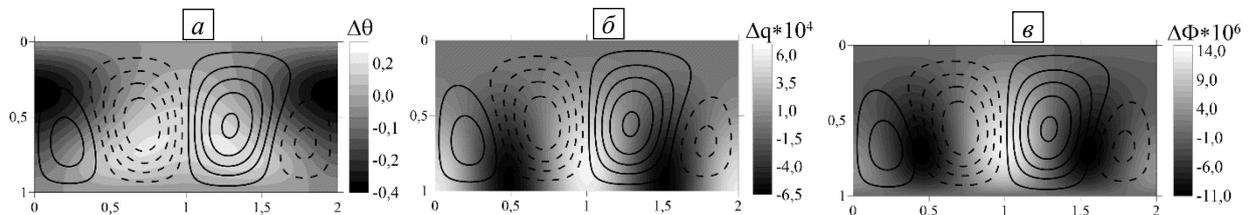
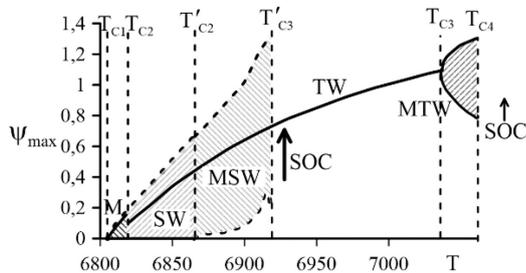


Рис. 6. Распределения в ячейке отклонений от равновесных значений: отклонения температуры (а), плотности заряда (б), электрического потенциала (в) в режиме модулированных стоячих волн MSW;  $T = 6910$ ; распределения соответствуют разрезу а рисунка 5, на каждом из них показаны изолинии функции тока (сплошная линия – положительные значения, штриховая – отрицательные)

При значениях  $T \geq T'_{C3} = 6019$  система переходит к высокоинтенсивному режиму стационарной конвекции SOC. Обобщить данное исследование можно добавлением обнаруженного неустойчивого режима стоячих волн (Рис. 7) к бифуркационной диаграмме устойчивых надкритических режимов конвекции, описанных выше в разделе 4.2 и в статье [20].

Здесь имеет смысл обратить внимание на два наблюдения: во-первых, в случае как устойчивых, так и неустойчивых режимов конвекция возникает одинаково, при одном и том же критическом значении управляющего параметра путем прямой бифуркации колебательным образом; во-вторых, переход к высокоинтенсивному режиму движения жидкости происходит в тот момент, когда максимальное значение функции тока в ячейке достигает одинакового критического значения  $\psi_{max} = 1,31$ .

Ранее конвекция в слабопроводящей жидкости рассматривалась для случая нагрева сверху и униполярной инжекции в зависимости от напряженности электрического поля:  $q(z=0) = -A \cdot Ez$  [10, 20]. Однако, в дополнение к бегущим и модулированным бегущим волнам, карта бифуркаций содержит решения в виде устойчивых стоячих волн, которые при автономной инжекции отсутствуют. Следует отметить, что в обеих задачах (с постоянной инжекцией и с зависящей от напряженности электрического поля) на картах бифуркаций имеются общие черты: волновые режимы конвекции возникают в результате прямой бифуркации; при достаточно больших значениях электрического числа Релея волновые решения становятся неустойчивыми и происходит интенсивная стационарная конвекция.



**Рис. 7.** Бифуркационная диаграмма режимов конвекции в виде зависимости максимального значения функции тока от электрического числа Релея; сплошные линии соответствуют устойчивым режимам конвекции, штриховые – неустойчивым; заштрихованные области подразумевают, что в них максимальное значение функции тока с течением времени меняется в некоторых пределах

## 5. Заключение

Обнаружены и изучены режимы стоячих и модулированных стоячих волн в заполняющей плоский горизонтальный конденсатор слабопроводящей вязкой несжимаемой жидкости при наличии автономной униполярной инжекции заряда с катода и нагреве жидкости сверху. Анализ пространственных распределений и гармоник функции тока показал, что в режиме модулированных стоячих волн в ячейке периодически появляется структура, содержащая две пары закрученных в противоположные стороны конвективных валов (четыре конвективных вала).

Построена полная бифуркационная диаграмма волновых режимов течения жидкости при нагреве снизу/сверху и при воздействии/в отсутствие электрического поля. Показано, что условия возникновения и исчезновения (разрушения) надкритических режимов одинаковы для устойчивых и неустойчивых решений.

## Литература

1. Жакин А.И. Электрогидродинамика // УФН. 2012. Т. 185, № 5. С. 495-520. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0182.201205b.0495>
2. Болога М.К., Гросу Ф.П., Кожухарь Э.И. Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977. 320 с.
3. Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979. 322 с.
4. Gross M.J., Porter J.E. Electrically induced convection in dielectric liquids // Nature. 1966. Vol. 212. P. 1343-1345. <https://doi.org/10.1038/2121343a0>
5. Стишков Ю.К., Остапенко А.А. Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989. 173 с.
6. Smorodin B.L., Gershuni G.Z., Velarde M.G. On the parametric excitation of thermoelectric instability in a liquid layer open to air // Int. J. Heat Mass Tran. 1999. Vol. 42. P. 3159-3168. [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(98\)00351-2](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(98)00351-2)
7. Pontiga F., Castellanos A. Physical mechanisms of instability in a liquid layer subjected to an electric field and a thermal gradient // Phys. Fluids. 1994. Vol. 6. P. 1684-1701. <https://doi.org/10.1063/1.868231>
8. Панкратьева И.Л., Полянский В.А. Основные механизмы электризации слабопроводящих многокомпонентных сред // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 5. С. 15-22. <https://doi.org/10.7868/S0568528117050024>
9. Ватажин А.Б., Улыбышев К.Е. Модель формирования электрического тока выноса в каналах авиационных реактивных двигателей // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 139-148. (English version <https://doi.org/10.1023/A:1026603201746>)
10. Мордвинов А.Н., Смородин Б.Л. Электроконвекция при инжекции с катода и нагреве сверху // ЖЭТФ. 2012. Т. 141, № 5. С. 997-1005. (English version <https://doi.org/10.1134/S1063776112030181>)
11. Lacroix J.C., Atten P., Hopfinger E.J. Electro-convection in a dielectric liquid layer subjected to unipolar injection // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 69. P. 539-563. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001553>
12. Верещага А.Н., Тарунин Е.Л. Надкритические режимы униполярной конвекции в замкнутой полости // Численное и экспериментальное моделирование гидродинамических явлений в невесомости / Под ред. В.А. Бриксмана. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 93-99.
13. Demekhin E.A., Ganchenko G.S., Gorbacheva E.V., Amiroudine S. Stability of two layers dielectric-electrolyte micro-flow subjected to an alternating external electric field // Electrophoresis. 2018. Vol. 39. P. 1777-1785. <https://doi.org/10.1002/elps.201700472>
14. Navarkar A., Amiroudine S., Demekhin E.A. On two-liquid AC electroosmotic system for thin films // Electrophoresis. 2016. Vol. 37. P. 727-735. <https://doi.org/10.1002/elps.201500132>
15. Demekhin E.A., Ganchenko G.S., Navarkar A., Amiroudine S. The stability of two layer dielectric-electrolyte micro-flow subjected to an external electric field // Phys. Fluids. 2016. Vol. 28. 092003. <https://doi.org/10.1063/1.4961976>

16. Traore Ph., Perez A.T., Koulova D., Romat H. Numerical modelling of finite-amplitude electro-thermo-convection in a dielectric liquid layer subjected to both unipolar injection and temperature gradient // *J. Fluid Mech.* 2010. Vol. 658. P. 279-293. <https://doi.org/10.1017/S0022112010001709>
17. Wu J., Traore P. A finite-volume method for electro-thermoconvective phenomena in a plane layer of dielectric liquid // *Numer. Heat Tran.* 2015. Vol. 68. P. 471-500. <https://doi.org/10.1080/10407782.2014.986410>
18. Li T.-F., Luo K., Yi H.-L. Suppression of Rayleigh-Bénard secondary instability in dielectric fluids by unipolar charge injection // *Phys. Fluids.* 2019. Vol. 31. 064106. <https://doi.org/10.1063/1.5100124>
19. Selvakumar R.D., Wu J, Huang J., Traoré P. Electro-thermo-convection in a differentially heated square cavity under arbitrary unipolar injection of ions // *Int. J. Heat Fluid Flow.* 2021. Vol. 89. 108787. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2021.108787>
20. Ильин В.А., Александрова В.Н. Волновые режимы электроконвекции слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции заряда в постоянном электрическом поле // *ЖЭТФ.* 2020. Т. 157, № 2. С. 349-356. <https://doi.org/10.31857/50044451020020133>
21. Смородин Б.Л. Волновые режимы электроконвекции при инжекции с катода и нагреве сверху // *ЖЭТФ.* 2022. Т. 161, № 1. С. 137-148. <http://dx.doi.org/10.31857/S0044451022010126>
22. Любимова Т.П., Зубова Н.А. Возникновение и нелинейные режимы конвекции трехкомпонентной смеси в прямоугольной области пористой среды с учетом эффекта Соре // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2019. Т. 12, № 3. С. 249-262. <http://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3>
23. Smorodin B.L., Cherepanov I.N. Convection of colloidal suspensions stratified by thermodiffusion and gravity // *Eur. Phys. J. E.* 2014. Vol. 37. 118. <http://dx.doi.org/10.1140/epje/i2014-14118-x>
24. Черепанов И.Н. Течение коллоида в горизонтальной ячейке при подогреве сбоку // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 2. С. 135-144. <http://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.2.12>
25. Некрасов О.О., Смородин Б.Л. Электроконвекция слабопроводящей жидкости при униполярной инжекции и нагреве сверху // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2022. Т. 15, № 3. С. 116-132. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.24>
26. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
27. Probst R.F. Physicochemical hydrodynamics. John Wiley & Sons, 1994. 400 p.
28. Верецага А.Н. Численные исследования электроконвекции в слабопроводящих жидкостях с различными физическими свойствами / Дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Пермь, ИМСС УрО РАН, 1990. 125 с.
29. Смородин Б.Л., Тараут А.В. Параметрическая конвекция слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле // *Изв. РАН. МЖГ.* 2010. Т. 45, № 1. С. 3-11. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462810010011>)
30. Смородин Б.Л., Тараут А.В. Динамика волновых электроконвективных течений в модулированном электрическом поле // *ЖЭТФ.* 2014. Т. 145, № 1. С. 180-188. (English version <https://doi.org/10.1134/S1063776114010178>)
31. Nekrasov O., Smorodin B. The electroconvective flows of a weakly conducting liquid in the external DC and AC electric fields // *Microgravity Sci. Technol.* 2022. Vol. 34. 75. <https://doi.org/10.1007/s12217-022-10002-3>

## References

1. Zhakin A.I. Electrohydrodynamics. *Phys.-Usp.*, 2012, vol. 55, pp. 465-488. <https://doi.org/10.3367/UFNe.0182.201205b.0495>
2. Bologa M.K., Grosu F.P., Kozhukhar' I.A. *Elektrokonveksiya i teploobmen* [Electroconvection and Heat Transfer]. Kishinev, Shtiintsa, 1977. 320 p.
3. Ostroumov G.A. *Vzaimodeystviye elektricheskikh i gidrodinamicheskikh poley* [Interaction of electric and hydrodynamic fields]. Moscow, Nauka, 1979. 322 p.
4. Gross M.J., Porter J.E. Electrically induced convection in dielectric liquids. *Nature*, 1966, vol. 212, pp. 1343-1345. <https://doi.org/10.1038/2121343a0>
5. Stishkov Yu.K., Ostapenko A.A. *Elektrohidrodinamicheskiye techeniya v zhidkikh dielektrikakh* [Electrohydrodynamic flows in liquid dielectrics]. Leningrad, Leningrad University, 1989. 173 p.
6. Smorodin B.L., Gershuni G.Z., Velarde M.G. On the parametric excitation of thermoelectric instability in a liquid layer open to air. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1999, vol. 42, pp. 3159-3168. [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(98\)00351-2](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(98)00351-2)
7. Pontiga F., Castellanos A. Physical mechanisms of instability in a liquid layer subjected to an electric field and a thermal gradient. *Phys. Fluids*, 1994, vol. 6, pp. 1684-1701. <https://doi.org/10.1063/1.868231>
8. Pankrat'eva I.L., Polyanskii V.A. Basic mechanisms of electrification of weakly conductive multicomponent media. *Fluid Dyn.*, 2017, vol. 52, pp. 610-616. <https://doi.org/10.1134/S0015462817050027>
9. Vatazhin A.B., Ulybshev K.E. Model of formation of the electric current in aircraft jet engine ducts. *Fluid Dyn.*, 2000, vol. 35, pp. 748-755. <https://doi.org/10.1023/A:1026603201746>
10. Mordvinov A.N., Smorodin B.L. Electroconvection under injection from cathode and heating from above. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2012, vol. 114, pp. 870-877. <https://doi.org/10.1134/S1063776112030181>
11. Lacroix J.C., Atten P., Hopfinger E.J. Electro-convection in a dielectric liquid layer subjected to unipolar injection. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 69, pp. 539-563. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001553>
12. Vereshchaga A.N., Tarunin E.L. Nadkriticheskiye rezhimy unipolyarnoy konveksii v zamknutoy polosti [Supercritical modes of unipolar convection in a closed cavity]. Chislennoye i eksperimental'noye modelirovaniye gidrodinamicheskikh yavleniy v nevesomosti [Numerical and Experimental Simulation of Hydrodynamic Phenomena under Weightlessness], ed. by V.A. Briskman. Sverdlovsk: UrO AN SSSR, 1988. 93-99.
13. Demekhin E.A., Ganchenko G.S., Gorbacheva E.V., Amiroudine S. Stability of two layers dielectric-electrolyte micro-flow subjected to an alternating external electric field. *Electrophoresis*, 2018, vol. 39, pp. 1777-1785. <https://doi.org/10.1002/elps.201700472>
14. Navarkar A., Amiroudine S., Demekhin E.A. On two-liquid AC electroosmotic system for thin films. *Electrophoresis*, 2016, vol. 37, pp. 727-735. <https://doi.org/10.1002/elps.201500132>

15. Demekhin E.A., Ganchenko G.S., Navarkar A., Amiroudine S. The stability of two layer dielectric-electrolyte micro-flow subjected to an external electric field. *Phys. Fluids*, 2016, vol. 28, 092003. <https://doi.org/10.1063/1.4961976>
16. Traore Ph., Perez A.T., Koulova D., Romat H. Numerical modelling of finite-amplitude electro-thermo-convection in a dielectric liquid layer subjected to both unipolar injection and temperature gradient. *J. Fluid Mech.*, 2010, vol. 658, pp. 279-293. <https://doi.org/10.1017/S0022112010001709>
17. Wu J., Traore P. A finite-volume method for electro-thermoconvective phenomena in a plane layer of dielectric liquid. *Numer. Heat Tran.*, 2015, vol. 68, pp. 471-500. <https://doi.org/10.1080/10407782.2014.986410>
18. Li T.-F., Luo K., Yi H.-L. Suppression of Rayleigh-Bénard secondary instability in dielectric fluids by unipolar charge injection. *Phys. Fluids.*, 2019, vol. 31, 064106. <https://doi.org/10.1063/1.5100124>
19. Selvakumar R.D., Wu J, Huang J., Traoré P. Electro-thermo-convection in a differentially heated square cavity under arbitrary unipolar injection of ions. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 2021, vol. 89, 108787. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2021.108787>
20. Il'in V.A., Aleksandrova V.N. Wave regimes of electroconvection of a low conducting liquid under unipolar injection of a charge in a steady electric field. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2020, vol. 130, pp. 293-300. <https://doi.org/10.1134/S1063776120010045>
21. Smorodin B.L. Wave regimes of electroconvection under cathode injection and heating from above. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2022, vol. 134, pp. 112-122. <https://doi.org/10.1134/S1063776121120153>
22. Lyubimova T.P., Zubova N.A. Onset and nonlinear regimes of convection of ternary mixture in a rectangular porous cavity taking into account Soret effect. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no. 3, pp. 249-262. <https://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.21>
23. Smorodin B.L., Cherepanov I.N. Convection of colloidal suspensions stratified by thermodiffusion and gravity. *Eur. Phys. J. E*, 2014, vol. 37, 118. <http://dx.doi.org/10.1140/epje/i2014-14118-x>
24. Cherepanov I.N. Colloid flow in a horizontal cell subjected to heating from sidewall. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2017, vol. 58, pp. 1181-1191. <https://doi.org/10.1134/S0021894417070021>
25. Nekrasov O.O., Smorodin B.L. Electroconvection of a weakly conducting liquid subjected to unipolar injection and heated from above. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2022, vol. 15, no. 3, pp. 116-132. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.24>
26. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid mechanics*. Oxford, Pergamon Press, 1987. 539 p.
27. Probstein R.F. *Physicochemical hydrodynamics*. John Wiley & Sons, 1994. 400 p.
28. Vereshchaga A.N. *Chislennyye issledovaniya elektrokonveksii v slaboprovodyashchikh zhidkostyakh s razlichnymi fizicheskimi svoystvami* [Numerical investigations of electroconvection in poor conducting liquids with different physical properties]. PhD Dissertation, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, 1990. 125 p.
29. Smorodin B.L., Taraut A.V. Parametric convection of a low-conducting liquid in an alternating electric field. *Fluid Dyn.*, 2010, vol. 45, pp. 1-9. <https://doi.org/10.1134/S0015462810010011>
30. Smorodin B.L., Taraut A.V. Dynamics of electroconvective wave flows in a modulated electric field. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2014, vol. 118, pp. 158-165. <https://doi.org/10.1134/S1063776114010178>
31. Nekrasov O., Smorodin B. The electroconvective flows of a weakly conducting liquid in the external DC and AC electric fields. *Microgravity Sci. Technol.*, 2022, vol. 34, 75. <https://doi.org/10.1007/s12217-022-10002-3>

Поступила в редакцию 05.11.2022; после доработки 26.12.2022; принята к опубликованию 05.01.2023