

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.4.33](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.4.33)

УДК 532.5

## СИНХРОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХ ПЛАСТИН В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А.М. Камалутдинов<sup>1</sup>, А.Н. Нуриев<sup>2</sup>, О.С. Жучкова<sup>2</sup>, О.Н. Зайцева<sup>2</sup><sup>1</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, Российская Федерация<sup>2</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Российская Федерация

Рассматриваются синхронные колебания двух длинных тонких пластин в тандемной компоновке, находящихся в вязкой несжимаемой жидкости. Изучается гидродинамическое воздействие на пластины со стороны жидкости. Для моделирования течений, индуцированных колебаниями пластин, решается полная нестационарная система уравнений Навье–Стокса. При этом пластины считаются абсолютно жёсткими, а течение жидкости полагается двумерным. Решение задачи осуществляется в подвижной системе координат, жёстко связанной с пластинами. Численная модель строится в свободном программном пакете OpenFOAM на основе метода конечных объёмов. Для анализа гидродинамического воздействия на пластины используется приближение Морисона, согласно которому гидродинамические силы представляются в виде суммы сил сопротивления и инерции. Проводится изучение изменения коэффициентов сопротивления и инерции в зависимости от расстояния между пластинами при разных значениях безразмерной амплитуды колебаний. Результаты исследования показывают, что, варьируя расстояние между пластинами, можно управлять структурой режимов обтекания,кратно изменяя гидродинамическое воздействие на конструкцию. Наиболее сильное влияние величина расстояния оказывает на силы сопротивления в диапазоне малых и умеренных амплитуд колебания. Удаляя пластины друг от друга, можно достичь эффекта изолированного поведения для каждой из них и, по сравнению с гидродинамическим сопротивлением одной пластины, двукратно повысить гидродинамическое сопротивление конструкции. При приближении пластин друг к другу, как выявлено в настоящем исследовании, в зазоре формируется застойная зона, что, позволяет трёхкратно снизить сопротивление конструкции (по сравнению с гидродинамическим сопротивлением одной пластины).

*Ключевые слова:* колебания тонких пластин, уравнение Навье–Стокса, численное моделирование, гидродинамические силы

## SYNCHRONOUS OSCILLATIONS OF TWO PLATES IN A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

A.M. Kamalutdinov<sup>1</sup>, A.N. Nuriev<sup>2</sup>, O.S. Zhuchkova<sup>2</sup> and O.N. Zaitseva<sup>2</sup><sup>1</sup>Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russian Federation<sup>2</sup>Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation

In this paper, we investigate the synchronous oscillations of two tandem-arranged long thin plates in a viscous incompressible fluid under the action of hydrodynamic forces. The hydrodynamic action exerted on the plates by the moving fluid is studied. The flows induced by the oscillating plates are modeled based on the complete non-stationary system of Navier-Stokes equations on the assumption that the plates move as rigid bodies, and the fluid flow caused by the oscillations of the plates are two-dimensional. The resulting flow problem is solved numerically in a moving coordinate system rigidly attached to the plates. A numerical model is constructed based on the free software package OpenFOAM using the finite volume method. The hydrodynamic influence on the plates is analyzed using the Morison approximation, according to which the hydrodynamic forces are represented as the sum of the resistance and inertia forces. The changes in the drag and inertia coefficients are investigated depending on the distance between the plates at different values of the dimensionless amplitude of oscillations. The results of the study show that by varying the distance between the plates, it is possible to control the structure of the streamline modes and multiply the hydrodynamic impact on the structure. The distance value has the strongest influence on the drag force in the range of small and moderate oscillation amplitudes. By removing the plates apart from each other, it is possible to produce the effect of isolated behavior for each plate and to double the hydrodynamic resistance of the structure compared to the hydrodynamic resistance of one plate. The study showed that when the plates move closer to each other, a stagnant zone is formed in the gap, which makes it possible to reduce the resistance of the structure by a factor of three (compared to the hydrodynamic resistance of one plate).

*Key words:* oscillation of thin plates, Navier–Stokes equation, numerical simulation, hydrodynamic forces

### 1. Введение

Исследования аэрогидродинамических эффектов, возникающих при колебаниях удлиненных цилиндрических тел (вибрационных актуаторов), активно развиваются в настоящее время в рамках целого спектра высокотехнологичных научных направлений, таких как разработка биомиметических движителей автономных подводных и летательных аппаратов [1], создание охлаждающих систем и харвестеров в микроэлектронике [2–5], проектирование измерительных элементов в атомной силовой микроскопии [6–8], разработка элементов насосов в микрофлюидных устройствах [9] и другое. За последние два десятилетия создана теория (в том числе аналитическая), описывающая аэрогидродинамические эффекты при колебаниях единичного актуатора пластинчатого или балочного типа в безграничной вязкой жидкости [10–15]. Однако на практике такая теория часто имеет ограниченную применимость в связи с тем, что конструкции большинства устройств предполагают наличие границ, стенок или нескольких актуаторов, расположенных в непосредственной близости друг от друга. В таких условиях при решении задачи нужно учитывать влияние на гидродинамические течения всех элементов конструкции и соответствующие гидродинамические воздействия на них. Подобных исследований к настоящему времени проведено

относительно немного [16–19], но все они указывают на чрезвычайно высокую значимость взаимодействия (в контексте изменения гидродинамики) близкорасположенных элементов при колебательном движении. Настоящая работа посвящена анализу гидродинамического воздействия на пару колеблющихся пластин.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим синхронные гармонические колебания, происходящие вдоль оси  $Ox$ , двух одинаковых тонких длинных абсолютно жёстких пластин, расположенных параллельно плоскости  $Oyz$  и смещённых относительно друг друга по оси  $Ox$  на расстояние  $c = \text{const}$ . Пластины находятся в вязкой несжимаемой жидкости. Схема их расположения изображена на рисунке 1. Предполагая, что  $L \gg b \gg h$ , где  $h, b, L$  — толщина, ширина и длина пластин соответственно, сведём задачу к исследованию двумерных течений около бесконечно тонких пластин в плоскостях, параллельных  $Oxy$ .

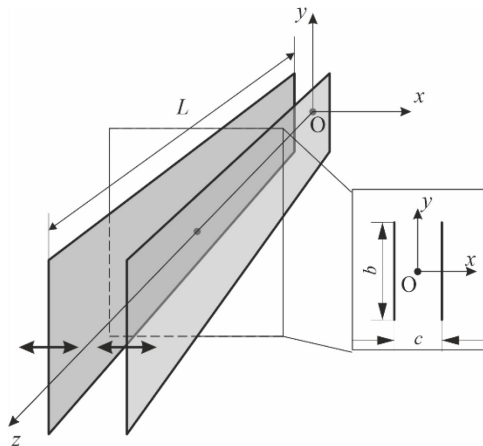


Рис. 1. Схема пластин в тандемной компоновке; жирные стрелки обозначают направление колебаний пластин

. Для решения этой задачи перейдём в подвижную систему координат, в которой пластины неподвижны, а жидкость на бесконечности совершает колебания со скоростью

$$U_p = U_0 \cos(\omega \tilde{t}).$$

Для описания динамики жидкости запишем уравнение Навье–Стокса и уравнение неразрывности в безразмерной формулировке:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p + \frac{1}{KC\beta} \nabla^2 \mathbf{U},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0.$$

Здесь:  $\mathbf{U} = (u, v)$  — безразмерная скорость ( $u, v$  — её безразмерные компоненты);  $p$  — фиктивное давление,

равное сумме истинного давления  $\hat{p}$  и инерционной составляющей  $\bar{p}$ , которая возникает в результате перехода в подвижную систему координат. Для нормирования пространственных координат, времени и скорости используются величины  $b, bU_0^{-1}, U_0$  соответственно. Параметры  $\beta$  и  $KC$

$$\beta = \frac{b^2 \omega}{2\pi \nu}, \quad KC = 2\pi \frac{U_0}{b\omega}$$

определяют безразмерную частоту и амплитуду колебаний, где  $\omega$  — частота колебаний,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости. Помимо них, третьим безразмерным параметром задачи является относительное расстояние между пластинами:

$$\xi = c/b.$$

На каждой пластине с границей  $\Omega$  в новой системе зададим условия прилипания:

$$u_\Omega = v_\Omega = 0.$$

На бесконечности изменение скорости запишем в виде гармонического закона:

$$u_\infty = \cos\left(\frac{2\pi}{KC}t\right), \quad v_\infty = 0.$$

Вычисление гидродинамической силы, действующей на пластины со стороны жидкости в направлении распространения колебаний в представленной безразмерной постановке осуществляется согласно формуле:

$$\mathbf{F} = \left( \int_\Omega p \mathbf{n} ds - \int_\Omega \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n} ds \right) \cdot \mathbf{i},$$

где  $\Sigma$  — тензор вязких напряжений,  $\mathbf{n}$  — внутренняя единичная нормаль к границе пластины,  $\mathbf{i}$  — единичный вектор в направлении оси колебания.

Заметим, что в подвижной системе координат величина гидродинамической силы найдена по фиктивному давлению и поэтому содержит вклад от его инерционной составляющей  $\bar{p}$ , который рассчитывается следующим образом [20]:

$$F_{kf} = \left( \frac{2\pi}{KC} \sin\left(\frac{2\pi}{KC}t\right) \int_{\Omega} x n ds \right) \cdot \mathbf{i}.$$

Как можно видеть, для рассматриваемого случая бесконечно тонких пластин он равен нулю.

Для определения продольной составляющей гидродинамической силы  $\mathbf{F}$  воспользуемся аппроксимацией Морисона [20], согласно которой сила представляется в виде суммы двух компонент: силы сопротивления (демпфирования), пропорциональной квадрату скорости, и инерционной силы, пропорциональной ускорению осцилляционного движения. Аппроксимирующую функцию запишем в виде:

$$F = \frac{\pi}{2} C_M \frac{du_{\infty}}{dt} + C_D |u_{\infty}| u_{\infty},$$

где  $C_M$  и  $C_D$  — соответственно коэффициенты инерции (присоединённых масс) и сопротивления (демпфирования) соответственно. Вычисление этих коэффициентов будем проводить на каждом периоде колебания  $T = KC$  с помощью интегрирования:

$$C_M = -\frac{2}{\pi^2} \int_{t_0}^{T+t_0} F \sin\left(\frac{2\pi}{KC}t\right) dt, \quad C_D = \frac{3\pi}{4T} \int_{t_0}^{T+t_0} F \cos\left(\frac{2\pi}{KC}t\right) dt.$$

Здесь  $t_0$  — время начала периода.

### 3. Численная схема

Для решения результирующей задачи применялась ранее адаптированная авторами в рамках исследований [21, 22] численная схема из пакета OpenFOAM. Плоскость течения ограничивалась прямоугольной областью размерами  $70 \times 40$ , стороны которой устанавливались параллельно основным осям координат. Обтекаемые пластины помещались в центре расчётной области симметрично относительно начала координат.

Дискретизация расчётной области производилась с помощью блочных сеток (Рис. 2). Ячейки сеток в расчётной плоскости имели форму четырёхугольников. Вблизи обтекаемых пластин разрешающая способность сеток повышалась с помощью измельчения ячеек. У внешних границ для снижения вычислительных затрат выполнялось разрежение узлов сетки. Характерная расчётная сетка имела следующие параметры: общее количество ячеек  $\sim 1,6 \cdot 10^5$ , минимальный объём ячеек вблизи пластин  $\sim 6,9 \cdot 10^{-5}$ , число ячеек на границе пластин  $\sim 420$ , максимальный объём ячеек  $\sim 0,2$ .

Дискретизация системы уравнений движения жидкости проводилась согласно методу конечных объёмов (FVM) в декартовой системе координат. Дискретные значения составляющих скорости и давления локализовались в центрах ячеек расчётных сеток. Для вычисления объёмных интегралов по контрольному объёму использовалась общая процедура Гаусса. Для аппроксимации градиента давления в расчётах применялась линейная интерполяция. В диффузионных слагаемых при дискретизации оператора Лапласа нормальные градиенты скорости на поверхности ячейки представлялись с помощью симметричной схемы второго порядка с поправкой на неортогональность [23, 24].

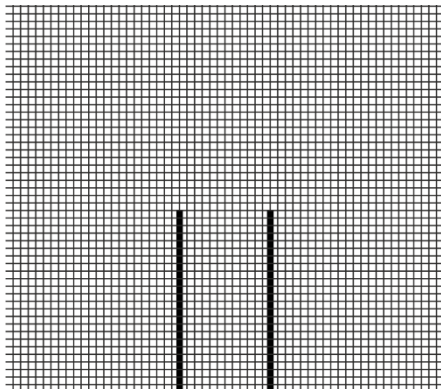


Рис. 2. Характерная структура расчётной сетки вблизи торцов пластин,  $\xi = 0,1$

Для интерполяции переменных в конвективных слагаемых прибегали к гибридной схеме Спалдинга, предложенной в работах [25, 26] — аналогу широко распространенной в конечно-элементной дискретизации схемы Streamline upwind [27]. Схема Спалдинга представляет собой комбинацию линейной и противопоточной интерполяций. Линейная интерполяция приемлема в области, где сеточное число

Рейнольдса (или число Пекле)  $Re_h < 2$ . В остальных случаях используется противопоточная интерполяция. Схема позволяет избежать нефизичных осцилляций решения в зонах с недостаточной разрешающей способностью расчётных сеток (что особенно актуально вблизи внешних границ расчётной области) и обеспечивает устойчивость и сходимость всего процесса решения. Однако обращение со схемой требует особой аккуратности. Так, первый порядок точности противопоточной интерполяции может привести к существенному влиянию на решение так называемой численной диффузии [28]. Как показывают результаты работ [29, 30], для рассматриваемого класса задач гибридная схема обеспечивает хорошее согласование результатов расчёта с экспериментальными данными в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Негативное влияние численной диффузии при этом можно минимизировать повышением разрешающей способности сетки вблизи обтекаемого тела и контролировать её посредством изучения сеточной сходимости.

Для дискретизации системы уравнений по времени использовалась неявная схема Эйлера. Шаг по времени во всех расчётах являлся постоянным и удовлетворял двум условиям: 1) максимальное число Куранта не превышало значения 0,1; 2) минимальное число шагов за период составляло не менее 500.

Решение дискретного аналога поставленной в разделе 2 задачи проводилось с помощью метода PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) [31], являющегося расширением алгоритма SIMPLE. Решение системы уравнений для давления выполнялось на основе метода сопряжённых градиентов (PCG) с геометро-алгебраическим многосеточным предобуславливателем (GAMG). Системы уравнений для компонент скорости решались методом бисопряжённых градиентов (PBiCG) с предиктором на основе неполной LU факторизации. Расчёты были распределёнными и производились по технологии MPI с применением метода декомпозиции области решения.

При апробации численной схемы проверялась сеточная сходимость, а также результаты, полученные на её основе сравнивались с данными из [21].

#### 4. Результаты расчётов

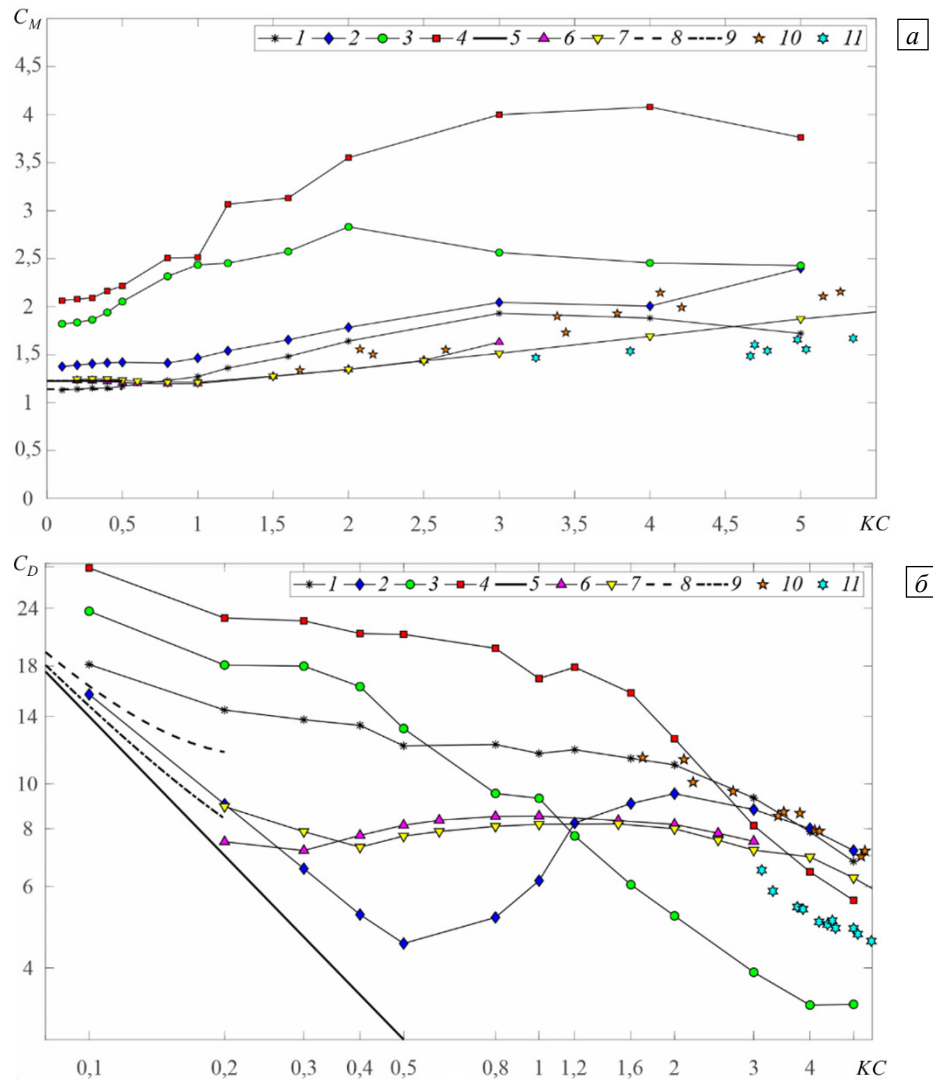
Исследование гидродинамических характеристик проводилось в диапазоне параметров задачи:  $\beta = 430$ ;  $\xi = 0; 0,1; 0,5; 1$ ;  $0,1 \leq KC \leq 5$ . В ходе расчётов определялись поля давления и скорости вблизи пластин в течение 50 периодов колебаний, затем по ним строились поля завихрённости, функция тока, а также вычислялись гидродинамические силы, действующие на пластины.

Рассмотрим изменение гидродинамического воздействия на пластины. Как и в случае одной пластины [21], при колебаниях пары пластин почти во всём диапазоне параметров задачи устанавливаются периодические или квазипериодические режимы течения. После интервала установления (занимающего от 8 до 25 периодов колебаний) значения коэффициентов сопротивления  $C_D$  и присоединённых масс  $C_M$  либо выходят на постоянные значения (в периодических режимах), либо изменяются периодически не более чем на 10–15% на интервалах из нескольких периодов колебаний (в квазипериодических режимах). Далее для анализа при всех заданных параметрах задачи будем использовать характерные величины коэффициентов  $C_D$ ,  $C_M$ , отвечающие их средним значениям за последних 15 периодов колебаний.

Зависимости  $C_M(KC)$  и  $C_D(KC)$  представлены на рисунке 3. Как видно, за счёт выбора расстояния между пластинами можно кратно изменять гидродинамическое воздействие на общую конструкцию. Значения коэффициента  $C_M$  в диапазоне  $0 \leq \xi \leq 1$  увеличиваются с ростом  $\xi$  (Рис. 3а). Рассматривая граничные значения, заметим, что  $C_M(\xi=1)$  в среднем в два раза больше  $C_M(\xi=0)$  для всех безразмерных амплитуд колебаний  $KC$ . Поскольку при  $\xi=1$  площадь конструкции в два раза больше, чем при  $\xi=0$  (для одинарной пластины), можно говорить, что взаимодействие пластин (или течений, индуцированных их колебаниями) почти не оказывает влияния на величину коэффициента присоединённых масс  $C_M$ . Внутри диапазона значения  $C_M$  в зависимости от  $\xi$  под влиянием формирующихся около пластин нелинейных течений изменяются немонотонно.

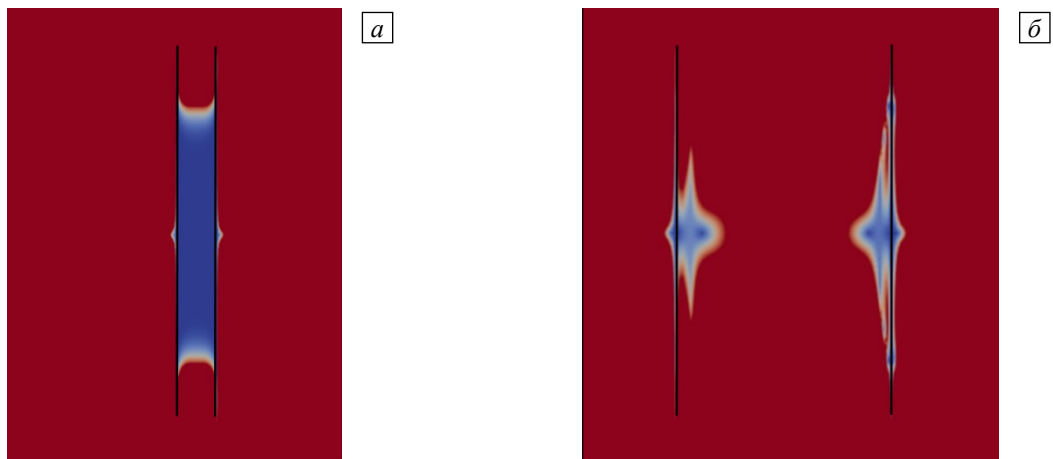
Наиболее сильно (изменения доходят до 450%) параметр  $\xi$  сказывается на силах сопротивления, характеризующихся коэффициентом  $C_D$  (Рис. 3б). Прогнозируемое поведение  $C_D(KC)$  наблюдается для  $\xi \geq 0,5$  при малых амплитудах колебаний ( $KC < 0,5$ ). Здесь хорошо виден кратный рост (в среднем в 1,6 и 1,25 раз при  $\xi=1$  и  $\xi=0,5$ ) сопротивления по сравнению с одной пластиной ( $\xi=0$ ). Однако за счёт тандемного эффекта при обтекании двух пластин двукратное увеличение сопротивления не наблюдается, в отличие от изолированного обтекания каждой из пластин.

При уменьшении зазора между пластинами (см.  $\xi=0,1$ ), гидродинамика в расчётной области качественно меняется, что приводит к кратному снижению сопротивления пары пластин по сравнению с одной изолированной бесконечно тонкой пластиной (см. диапазон  $KC < 2$ ). В этом случае две близко



**Рис. 3.** Зависимость коэффициентов присоединённых масс  $C_M$  (а) и сопротивления  $C_D$  (б) от параметра задачи  $KC$ : авторские расчёты для  $\beta = 430$ ,  $\xi = 0; 0,1; 0,5; 1$  (кривые 1–4); результаты из других работ: из [32] для  $\beta = 430$ ,  $\xi = 0$ ,  $\Delta = 0,1$  (кривые 5); из [21] для  $\beta = 300; 500$ ,  $\xi = 0$ ,  $\Delta = 0,1$  (кривые 6, 7); из [33] для  $\beta = 430$ ,  $\xi = 0$ ,  $\Delta = 0; 0,1$  (кривые 8, 9); из [34] (кривые 10); из [35] (кривые 11); случай  $\xi = 0$  соответствует колебаниям одной пластины

расположенных пластины начинают действовать как одна более толстая пластина. Это подтверждается сравнением полученных оценок для  $C_D$  с данными для пластин с соотношением сторон  $\Delta = h/b = 0,1$  (см. Рис. 3б). Между близко расположенными пластинами, как видно на рисунке 4, фактически формируется



**Рис. 4.** Модуль скорости в момент времени  $t/T = 39$  при  $KC = 0,2$  и различном значении параметра задачи – расстояния  $\xi$ : 0,1 (а), 0,5 (б); цветом обозначены зоны: ■ – с нулевой скоростью, ■ – со скоростью выше 0,1

застойная зона. Попадание жидкости в зазор между пластинами происходит лишь в окрестности торцов, где образуются вихревые ячейки. Наличие вихревых ячеек расширяет область устойчивости симметричного режима обтекания, по сравнению с зоной устойчивости данного режима у одинарной пластины (Рис. 5а), что позволяет дополнительно существенно снизить сопротивление пары пластин в диапазоне  $0,3 \leq KC \leq 1,2$  (Рис. 3б).

При  $KC > 1,2$  (и для  $\xi = 0; 0,5; 1$  при  $KC > 0,8$ ) наблюдается область интенсивного вихреобразования. Сопротивление начинает сильно зависеть от положения точек отрыва вихрей и структуры вихревых режимов обтекания. Интересно, что пара пластин с маленьким зазором ( $\xi = 0,1$ ) продолжает действовать как одна пластина (см. режимы течения для  $\xi = 0,1$  и  $\xi = 0$  на рисунке 5б), при этом значения  $C_D$  у тонкой, толстой ( $\Delta = 0,1$ ) и пары тонких пластин становятся близкими друг к другу.

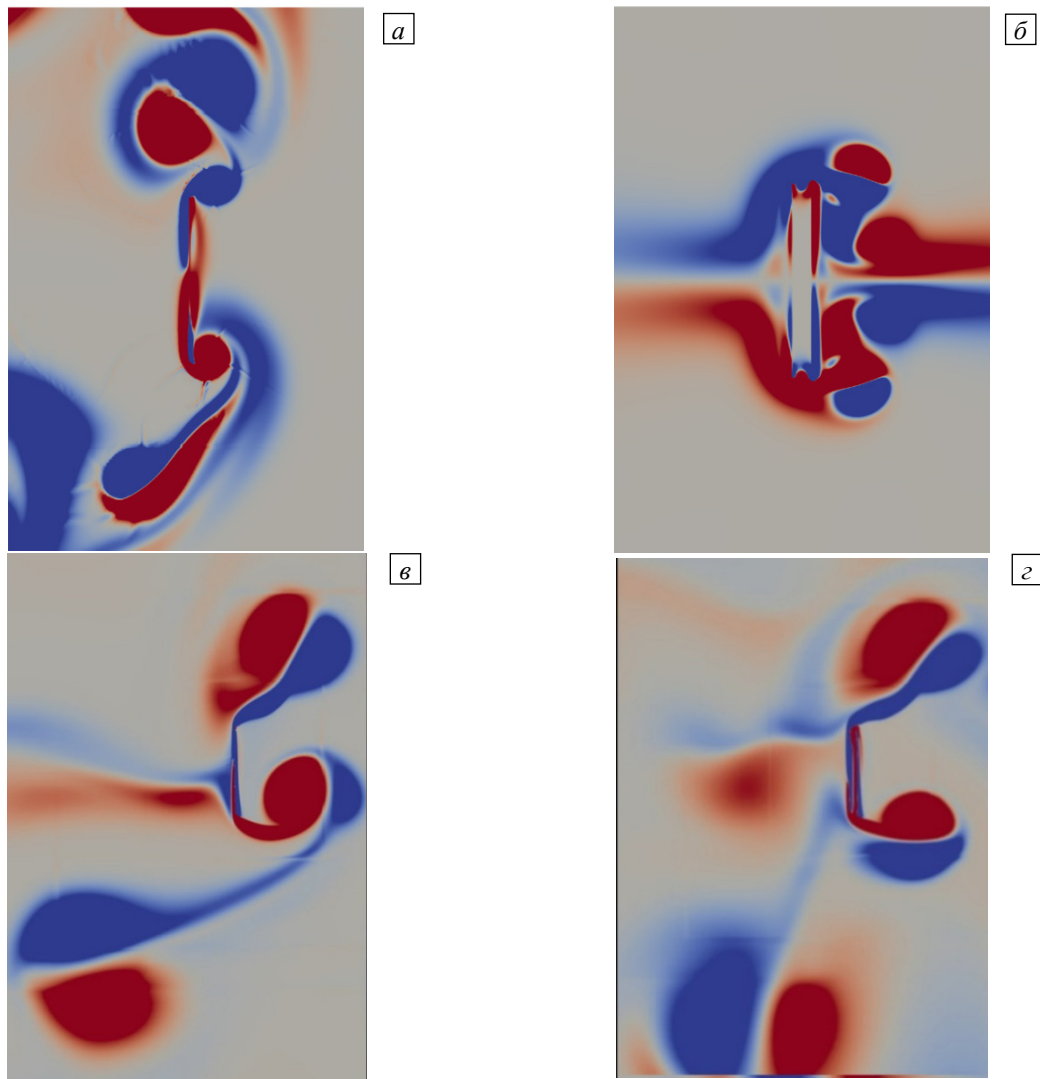


Рис. 5. Мгновенная картина течения в момент времени  $t/T = 39$  при различном сочетании параметров задачи  $KC$ : 1 (а), 5 (б), и  $\xi$ : 0 (а, в), 0,1 (б, г)

## 5. Заключение

Поведено численное исследование гидродинамических сил, действующих на пару длинных тонких пластин, совершающих синхронные колебания в вязкой несжимаемой жидкости. Полученные результаты показывают, что варьирование расстояния между пластинами  $\xi$  приводит к существенным изменениям гидродинамического воздействия на общую конструкцию. В диапазоне параметра задачи  $0 \leq \xi \leq 1$  практически двукратно увеличивается сила присоединённых масс: для близко расположенных пластин (в работе представлен случай  $\xi = 0,1$ ) значения коэффициента присоединённых масс  $C_M$  лишь на несколько процентов выше соответствующих значений для одной пластины; для  $\xi = 1$  значение  $C_M$  становится



практически таким же, как у двух независимых пластин. Еще более сильное влияние параметр  $\xi$  оказывает на силы сопротивления. За счёт изменения зазора между пластинами можно как двукратно повысить гидродинамическое сопротивление конструкции (по сравнению с гидродинамическим сопротивлением одной пластины), так и почти трёхкратно снизить его. Снижение сопротивления наблюдается у близко расположенных пластин ( $\xi = 0,1$ ) в области малых и умеренных амплитуд колебаний и происходит это вследствие того, что они начинают действовать как одна — более толстая — пластина, коэффициент сопротивления которой существенно ниже. Одновременно с этим при обтекании пары близко расположенных пластин увеличивается область устойчивости симметричного режима течения, что дополнительно снижает сопротивление тандемной конструкции при умеренных амплитудах колебаний.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-38-60023.

## Литература

1. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section // J. Fluid Mech. 2022. Vol. 941. A23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.287>
2. Bidkar R.A., Kimber M., Raman A., Bajaj A.K., Garimella S.V. Nonlinear aerodynamic damping of sharp-edged flexible beams oscillating at low Keulegan-Carpenter numbers // J. Fluid Mech. 2009. Vol. 634. P. 269-289. <https://doi.org/10.1017/S0022112009007228>
3. Ebrahimi N.D., Eldredge J.D., Ju Y.S. Wake vortex regimes of a pitching cantilever plate in quiescent air and their correlation with mean flow generation // J. Fluid. Struct. 2019. Vol. 84. P. 408-420. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2018.11.010>
4. Erturk A., Inman D.J. Piezoelectric energy harvesting. John Wiley & Sons, 2011. 416 p. <https://doi.org/10.1002/9781119991151>
5. Oh M.H., Seo J., Kim Y.-H., Choi M. Endwall effects on 3D flow around a piezoelectric fan // Eur. J. Mech. B Fluid. 2019. Vol. 75. P. 339-351. <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechflu.2018.10.021>
6. Zhu H., Zhang P., Zhong Z., Xia J., Rich J., Mai J., Su X., Tian Z., Bachman H., Rufo J., Gu Y., Kang P., Chakrabarty K., Witelski T.P., Huang T.J. Acoustohydrodynamic tweezers via spatial arrangement of streaming vortices // Sci. Adv. 2021. Vol. 7. eabc7885. <https://doi.org/10.1126/sciadv.abc7885>
7. Semati A., Amani E., Saffaraval F., Saffar-Avval M. Numerical simulation of oscillating plates at the visco-inertial regime for bio-inspired pumping and mixing applications // Phys. Fluids. 2020. Vol. 32. 101906. <https://doi.org/10.1063/5.0023539>
8. Sader J.E. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // J. Appl. Phys. 1998. Vol. 84. P. 64-76. <https://doi.org/10.1063/1.368002>
9. Kimber M., Lonergan R., Garimella S.V. Experimental study of aerodynamic damping in arrays of vibrating cantilevers // J. Fluids Struct. 2009. Vol. 25. P. 1334-1347. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2009.07.003>
10. Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M., Zaitseva O. Hydrodynamics around long vibrating beams // J. Fluids Struct. 2021. Vol. 101. 103203. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.103203>
11. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N. Evaluation of aerodynamic forces acting on oscillating cantilever beams based on the study of the damped flexural vibration of aluminium test samples // J. Sound Vib. 2018. Vol. 421. P. 334-347. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.02.006>
12. Facci A.L., Porfiri M. Nonlinear hydrodynamic damping of sharp-edged cantilevers in viscous fluids undergoing multi-harmonic base excitation // J. Appl. Phys. 2012. Vol. 112. 124908. <https://doi.org/10.1063/1.4769307>
13. Tao L., Thiagarajan K. Low KC flow regimes of oscillating sharp edges. II. Hydrodynamic forces // Appl. Ocean Res. 2003. Vol. 25. P. 53-62. [https://doi.org/10.1016/S0141-1187\(03\)00046-4](https://doi.org/10.1016/S0141-1187(03)00046-4)
14. Tao L., Thiagarajan K. Low KC flow regimes of oscillating sharp edges. I. Vortex shedding observation // Appl. Ocean Res. 2003. Vol. 25. P. 21-35. [https://doi.org/10.1016/S0141-1187\(03\)00031-2](https://doi.org/10.1016/S0141-1187(03)00031-2)
15. Aureli M., Porfiri M. Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids // Appl. Phys. Lett. 2010. Vol. 96. 164102. <https://doi.org/10.1063/1.3405720>
16. Бужинский В.А., Петряхин Д.А., Соломонов Е.В. Колебания в жидкости пластин с ребрами жесткости // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 1. С. 39-46. <https://doi.org/10.31857/S0568528122010029>
17. Xiong C., Cheng L., Tong F., An H. Oscillatory flow regime for a circular cylinder near a plane boundary // J. Fluid Mech. 2018. Vol. 844. P. 127-161. <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.164>
18. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Газизуллин Р.К., Шишкин В.М. Аэродинамическая составляющая демпфирования консольно-закрепленных тест-образцов при колебаниях вблизи жесткого экрана // Вестник ПНИПУ. Механика. 2018. № 2. С. 62-71. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.06>
19. Камалутдинов А.М., Нуриев А.Н. Гидродинамическое демпфирование колебаний балок вблизи экрана // Изв. РАН. МЖГ. 2021. № 5. С. 61-75. <https://doi.org/10.31857/S0568528121050054>
20. Morison J.R., Johnson J.W., Schaaf S.A. The force exerted by surface waves on piles // J. Pet. Technol. 1950. Vol. 2. P. 149-154. <https://doi.org/10.2118/950149-G>
21. Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M., Egorov A.G. A numerical investigation of fluid flows induced by the oscillations of thin plates and evaluation of the associated hydrodynamic forces // J. Fluid Mech. 2019. Vol. 874. P. 1057-1095. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.477>
22. Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M. Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid // J. Fluid Mech. 2021. Vol. 913. A40. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1180>
23. OpenFOAM. User Guide. <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide> (дата обращения: 19.08.2022)
24. Jasak H. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows / PhD Dissertation. London: Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996. 394 p.

25. Spalding D.B. A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1972. Vol. 4. P. 551-559. <https://doi.org/10.1002/nme.1620040409>
26. Patankar S.V., Spalding D.B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows // *Int. J. Heat Mass Tran.* 1972. Vol. 15. P. 1787-1806. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(72\)90054-3](https://doi.org/10.1016/0017-9310(72)90054-3)
27. Brooks A.N., Hughes T.J.R. Streamline upwind/Petrov–Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes equations // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1982. Vol. 32. P. 199-259. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90071-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90071-8)
28. Leonard B.P., Lock A.P., MacVean M.K. Extended numerical integration for genuinely multidimensional advective transport insuring conservation // *Proc. of the 9th Int. Conf. on the Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows.* Atlanta, July 10-14, 1995. Vol. 1. P. 1-12.
29. Zhao M., Cheng L., Teng B., Dong G. Hydrodynamic forces on dual cylinders of different diameters in steady currents // *J. Fluids Struct.* 2007. Vol. 23. P. 59-83. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2006.07.003>
30. An H., Cheng L., Zhao M. Steady streaming around a circular cylinder in an oscillatory flow // *Ocean Eng.* 2009. Vol. 36. P. 1089-1097. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2009.06.010>
31. Ferziger J.H., Peric M. *Computational methods for fluid dynamics.* Springer, 2002. 426 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>
32. Aureli M., Basaran M.E., Porfiri M. Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids // *J. Sound Vib.* 2012. Vol. 331. P. 1624-1654. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.12.007>
33. Phan C.N., Aureli M., Porfiri M. Finite amplitude vibrations of cantilevers of rectangular cross sections in viscous fluids // *J. Fluids Struct.* 2013. Vol. 40. P. 52-69. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.03.013>
34. Keulegan G.H., Carpenter L.H. Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid // *J. Res. Natl. Bur. Stand.* 1958. Vol. 60, No. 5. P. 423-440. <https://doi.org/10.6028/JRES.060.043>
35. Singh S. *Forces on bodies in oscillatory flow / PhD Dissertation.* London: Imperial College, University of London, 1979. 367 p.

## References

1. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section. *J. Fluid Mech.*, 2022, vol. 941, A23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.287>
2. Bidkar R.A., Kimber M., Raman A., Bajaj A.K., Garimella S.V. Nonlinear aerodynamic damping of sharp-edged flexible beams oscillating at low Keulegan-Carpenter numbers. *J. Fluid Mech.*, 2009, vol. 634, pp. 269-289. <https://doi.org/10.1017/S0022112009007228>
3. Ebrahimi N.D., Eldredge J.D., Ju Y.S. Wake vortex regimes of a pitching cantilever plate in quiescent air and their correlation with mean flow generation. *J. Fluid. Struct.*, 2019, vol. 84, pp. 408-420. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2018.11.010>
4. Erturk A., Inman D.J. *Piezoelectric energy harvesting.* John Wiley & Sons, 2011. 416 p. <https://doi.org/10.1002/9781119991151>
5. Oh M.H., Seo J., Kim Y.-H., Choi M. Endwall effects on 3D flow around a piezoelectric fan. *Eur. J. Mech. B Fluid.*, 2019, vol. 75, pp. 339-351. <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechflu.2018.10.021>
6. Zhu H., Zhang P., Zhong Z., Xia J., Rich J., Mai J., Su X., Tian Z., Bachman H., Rufo J., Gu Y., Kang P., Chakrabarty K., Witelski T.P., Huang T.J. Acoustohydrodynamic tweezers via spatial arrangement of streaming vortices. *Sci. Adv.*, 2021, vol. 7, eabc7885. <https://doi.org/10.1126/sciadv.abc7885>
7. Semati A., Amani E., Saffaraval F., Saffar-Avval M. Numerical simulation of oscillating plates at the visco-inertial regime for bio-inspired pumping and mixing applications. *Phys. Fluids*, 2020, vol. 32, 101906. <https://doi.org/10.1063/5.0023539>
8. Sader J.E. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope. *J. Appl. Phys.*, 1998, vol. 84, pp. 64-76. <https://doi.org/10.1063/1.368002>
9. Kimber M., Lonergan R., Garimella S.V. Experimental study of aerodynamic damping in arrays of vibrating cantilevers. *J. Fluids Struct.*, 2009, vol. 25, pp. 1334-1347. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2009.07.003>
10. Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M., Zaitseva O. Hydrodynamics around long vibrating beams. *J. Fluids Struct.*, 2021, vol. 101, 103203. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.103203>
11. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N. Evaluation of aerodynamic forces acting on oscillating cantilever beams based on the study of the damped flexural vibration of aluminium test samples. *J. Sound Vib.*, 2018, vol. 421, pp. 334-347. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.02.006>
12. Facci A.L., Porfiri M. Nonlinear hydrodynamic damping of sharp-edged cantilevers in viscous fluids undergoing multi-harmonic base excitation. *J. Appl. Phys.*, 2012, vol. 112, 124908. <https://doi.org/10.1063/1.4769307>
13. Tao L., Thiagarajan K. Low KC flow regimes of oscillating sharp edges. II: Hydrodynamic forces. *Appl. Ocean Res.*, 2003, vol. 25, pp. 53-62. [https://doi.org/10.1016/S0141-1187\(03\)00046-4](https://doi.org/10.1016/S0141-1187(03)00046-4)
14. Tao L., Thiagarajan K. Low KC flow regimes of oscillating sharp edges. I. Vortex shedding observation. *Appl. Ocean Res.*, 2003, vol. 25, pp. 21-35. [https://doi.org/10.1016/S0141-1187\(03\)00031-2](https://doi.org/10.1016/S0141-1187(03)00031-2)
15. Aureli M., Porfiri M. Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids. *Appl. Phys. Lett.*, 2010, vol. 96, 164102. <https://doi.org/10.1063/1.3405720>
16. Buzhinskii V.A., Petryakhin D.A., Solomonov E.V. Oscillations of plates with stiffeners in fluid. *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, pp. 37-44. <https://doi.org/10.1134/S0015462822010025>
17. Xiong C., Cheng L., Tong F., An H. Oscillatory flow regime for a circular cylinder near a plane boundary. *J. Fluid Mech.*, 2018, vol. 844, pp. 127-161. <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.164>
18. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gazizullin R.K., Shishkin V.M. The aerodynamic component of the damping of cantilevered test specimens oscillating near a rigid shield. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 2, pp. 62-71. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.2.06>



19. Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N. Hydrodynamic damping of beam oscillations near a surface. *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, pp. 657-671. <https://doi.org/10.1134/S0015462821050050>
20. Morison J.R., Johnson J.W., Schaaf S.A. The force exerted by surface waves on piles. *J. Pet. Technol.*, 1950, vol. 2, pp. 149-154. <https://doi.org/10.2118/950149-G>
21. Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M., Egorov A.G. A numerical investigation of fluid flows induced by the oscillations of thin plates and evaluation of the associated hydrodynamic forces. *J. Fluid Mech.*, 2019, vol. 874, pp. 1057-1095. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.477>
22. Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M. Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 913, A40. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1180>
23. OpenFOAM. User Guide. <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide> (accessed 19 August 2022)
24. Jasak H. *Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows*. PhD Dissertation. London, Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996. 394 p.
25. Spalding D.B. A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1972, vol. 4, pp. 551-559. <https://doi.org/10.1002/nme.1620040409>
26. Patankar S.V., Spalding D.B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1972, vol. 15, pp. 1787-1806. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(72\)90054-3](https://doi.org/10.1016/0017-9310(72)90054-3)
27. Brooks A.N., Hughes T.J.R. Streamline upwind/Petrov–Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1982, vol. 32, pp. 199-259. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90071-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90071-8)
28. Leonard B.P., Lock A.P., MacVean M.K. *Proc. of the 9th Int. Conf. on the Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flows. Atlanta, July 10-14, 1995. Vol. 1. Pp. 1-12.*
29. Zhao M., Cheng L., Teng B., Dong G. Hydrodynamic forces on dual cylinders of different diameters in steady currents. *J. Fluids Struct.*, 2007, vol. 23, pp. 59-83. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2006.07.003>
30. An H., Cheng L., Zhao M. Steady streaming around a circular cylinder in an oscillatory flow. *Ocean Eng.*, 2009, vol. 36, pp. 1089-1097. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2009.06.010>
31. Ferziger J.H., Peric M. *Computational methods for fluid dynamics*. Springer, 2002. 426 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>
32. Aureli M., Basaran M.E., Porfiri M. Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids. *J. Sound Vib.*, 2012, vol. 331, pp. 1624-1654. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.12.007>
33. Phan C.N., Aureli M., Porfiri M. Finite amplitude vibrations of cantilevers of rectangular cross sections in viscous fluids. *J. Fluids Struct.*, 2013, vol. 40, pp. 52-69. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.03.013>
34. Keulegan G.H., Carpenter L.H. Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid. *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 1958, vol. 60, no. 5, pp. 423-440. <https://doi.org/10.6028/JRES.060.043>
35. Singh S. *Forces on bodies in oscillatory flow*. PhD Dissertation. London: Imperial College, University of London, 1979. 367 p.

Поступила в редакцию 23.09.2022; после доработки 21.11.2022; принята к опубликованию 21.11.2022

---

#### Сведения об авторах

Камалутдинов Айрат Марсович, кфмн, снс, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ (КНИТУ – КАИ), 420111, г. Казань, ул. К. Маркса, д. 10; e-mail: amkamalutdinov@mail.ru

Нуриев Артем Наилевич, кфмн, доц., Казанский (Приволжский) федеральный университет (К(П)ФУ), 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18; e-mail: Artem.Nuriev@kpfu.ru

Жучкова Ольга Сергеевна, кфмн, доц., К(П)ФУ; e-mail: OSZaharova@kpfu.ru

Зайцева Ольга Николаевна, кпн, снс, К(П)ФУ; e-mail: olga\_fdpi@mail.ru