

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.4.32](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.4.32)

УДК 534

УПРАВЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫМИ ЧАСТОТАМИ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ПОМОЩЬЮ ПРОВОЛОЧНЫХ АКТУАТОРОВ

А.О. Каменских, С.В. Лекомцев, В.П. Матвеевко

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Полгие оболочки находят широкое применение в авиационной и аэрокосмической промышленности. В этих отраслях проблема контролируемого изменения собственных частот колебаний конструкции не теряет своей актуальности и на сегодняшний день. Использование с этой целью механических актуаторов на основе проволок из сплава с памятью формы выглядит перспективным ввиду их компактности и способности развивать значительные усилия. В данной работе численно исследуется возможность управления собственными частотами колебаний сегмента пологой цилиндрической оболочки с помощью таких устройств. Деформации в оболочке определяются нелинейными соотношениями с учётом гипотез теории Рейсснера–Миндлина, которые затем линеаризуются относительно состояния с малым отклонением от положения начального равновесия, вызванным сокращением длины проволок. Для снижения вычислительных затрат эффект памяти формы напрямую не моделируется. Вместо этого задаётся эквивалентная деформация проволок на некоторую величину. Математическая постановка задачи динамики базируется на вариационном принципе возможных перемещений, учитывающем предварительное напряжённое состояние. Положение проволок по окружной координате и их начальная деформация (укорачивание) находятся для каждой частоты (формы) колебаний в отдельности из решения задачи оптимизации с ограничениями. При отыскании значений целевой функции используются возможности программного обеспечения ANSYS Mechanical APDL, в котором методом конечных элементов вычисляются собственные частоты колебаний рассматриваемой конструкции. Достоверность полученных результатов подтверждается путём сопоставления с представленными в литературе данными для круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением. Проведённая серия расчётов показала, что сокращение длины проволок приводит не только к изменению собственных частот колебаний в большую и меньшую стороны, но и качественно влияет на соответствующие им формы и порядок их следования в спектре. Также установлено, что увеличение выпуклости оболочки (подъём относительно плоскости) снижает эффективность работы проволочных актуаторов.

Ключевые слова: полгие цилиндрические оболочки, собственные частоты колебаний, предварительное напряжённое состояние, метод конечных элементов

CONTROL OF NATURAL VIBRATION FREQUENCIES OF SHALLOW SHELLS USING WIRE-TYPE ACTUATORS

A.O. Kamenskikh, S.V. Lekomtsev and V.P. Matveenko

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

Shallow shells are widely used in the aeronautical and aerospace industries, where the problem of controlled variation in the natural frequencies of the structure remains relevant nowadays. In this context, the use of mechanical actuators based on shape memory alloy wires offers considerable promise due to their compact design and ability to develop significant forces. In this work, the possibility of using such devices to control the natural frequencies of a segment of a shallow cylindrical shell is investigated numerically. The strains developed in the shell are found from the nonlinear relations taking into account the hypotheses of the Reissner-Mindlin theory. These relations are then linearized with respect to a state with a small deviation from the initial equilibrium caused by a decrease in the wire length. In order to reduce the computational cost, the shape memory effect is not simulated directly. Instead, an equivalent wire deformation of a certain value is prescribed. A mathematical formulation of the dynamic problem is based on the variational principle of virtual displacements, which takes into account the prestress state. The position of wires with respect to the circumferential coordinate and their initial deformation (shortening) are determined separately for each frequency (mode shape) of vibration by solving the optimization problem with constraints. The values of the objective function are determined using the capabilities of the ANSYS Mechanical APDL software, in which the natural frequencies of the examined structure are calculated by the finite element method. The reliability of the results is confirmed by comparing them with the data presented in the literature for a circular cylindrical shell subjected to internal pressure. A series of calculations showed that wire shortening leads not only to a change in the natural frequencies of vibrations up and down, but also has a qualitative effect on the corresponding mode shapes and their sequential order in the spectrum. It was also found that an increase in the convexity of the shell (its elevation relative to the plane) reduces the efficiency of the wire actuators.

Key words: shallow cylindrical shells, natural frequencies of vibrations, prestress, finite element method

1. Введение

Тонкие оболочки и конструктивные элементы на их основе широко используются в современной авиационной промышленности. При проектировании деталей летательных аппаратов первоначально ставятся задачи определения напряжённо-деформированного состояния и несущей способности таких тонкостенных конструкций. Наряду с этим рассматриваются вопросы снижения вибраций, демпфирования или предотвращения резонанса. Осуществить последнее можно путём смещения собственных частот колебаний в безопасный диапазон за счёт локального механического воздействия, приводящего к возникновению напряжённого состояния. Данный эффект известен достаточно давно и его можно легко продемонстрировать на примере натяжения гитарной струны. Ужесточение требований по габаритам и

массе для авиации будущего в некоторой степени ограничивают действующие технические решения. В этом контексте применение актуаторов на основе проволоки из сплава с памятью формы (СПФ) выглядит перспективным [1–4]. Свойство псевдоупругости позволяет материалу испытывать большие деформации и при этом возвращаться в первоначальное состояние после снятия нагрузки [5]. Эффект памяти формы проявляется в свою очередь в способности материала восстанавливать исходное состояние после неупругих деформаций, которые достигают 5% при развиваемых напряжениях до 600 МПа [6]. Перечисленные выше преимущества открывают возможности для создания из СПФ компактных и мощных проволоочных актуаторов, которые способны управлять динамическими характеристиками конструкции.

В литературе представлено довольно большое число публикаций, посвящённых данной тематике (см. обзорные работы [7–9]). Традиционно выделяется три способа управления динамическими характеристиками конструкции с помощью СПФ: пассивный, активный и полуактивный.

Пассивный механизм основан на эффекте псевдоупругости и направлен на увеличение демпфирующих свойств системы. В качестве примеров можно привести публикации [10, 11], где проволоки из нитинола (NiTi) использовались в качестве демпферов. В прототипе устройства, предложенного в [11], проволока наматывалась между подвижной и неподвижной опорами. Авторы экспериментально продемонстрировали работоспособность такого демпфера при различных внешних условиях (температура, частота колебаний, амплитуда деформации).

Активное управление связано с эффектом памяти формы. В результате удаётся либо изменять форму конструкции вместе с её динамическими характеристиками, либо создавать локальные напряжения без существенного влияния на геометрию. В работе [12] авторы использовали пару актуаторов из нитинола для активного подавления колебаний консольной балки по первой моде. Схема управления базировалась на деформировании конструкции в противофазе колебаниям. В тексте отмечается, что такой способ не применим для демпфирования в частотном диапазоне выше 10 Гц, так как актуаторы из сплавов с памятью формы обладают большой инерционностью. Возможность повышения низшей собственной частоты колебаний балки с 200 до 300 Гц за счёт встроенных проволоочных актуаторов из никелида титана показана в статье [13]. В [14] в двумерной постановке проведён расчёт активного управления колебаниями массы на упругих опорах с помощью двух перекрёстно лежащих проволок из СПФ. Результаты демонстрируют снижение амплитуды вынужденных колебаний конструкции в четыре раза.

Главное отличие полуактивных систем управления от активных заключается в том, что они изменяют характеристики системы дискретно. Например, в статье [15] изменение жёсткости металлического кольца осуществлялось с помощью актуатора из нитинола, закреплённого по диаметру. Кольцо могло находиться только в двух состояниях: мягком (проволока в мартенситной фазе) и жёстком (проволока в аустенитной фазе). При переходе от первого ко второму жёсткость конструкции повышалась в среднем в четыре раза, что также сказывалось и на её динамических характеристиках. В работах [16, 17] изготовлен полуактивный демпфер из СПФ и магнитореологической жидкости. Его использование для диссипации энергии во время землетрясений позволило снизить амплитуду колебаний многоэтажных зданий в два раза.

В данной работе численно исследуется возможность применения актуаторов в виде проволок из СПФ для управления спектром собственных частот колебаний сегмента полой цилиндрической оболочки. С целью снижения вычислительных затрат при проведении серии расчётов эффект памяти формы напрямую не моделируется. Вместо этого задаётся эквивалентная деформация проволоки на заданную величину, соответствующую конечной точке процесса структурного превращения в материале.

2. Математическая постановка задачи и её численная реализация

Рассмотрим задачу изменения собственных частот колебаний сегмента полой цилиндрической оболочки длиной L , с хордой C и толщиной h . Механизмом управления будут служить встраиваемые внутрь неё тонкие проволоки диаметром d (Рис. 1а), которые способны укорачиваться относительно своей

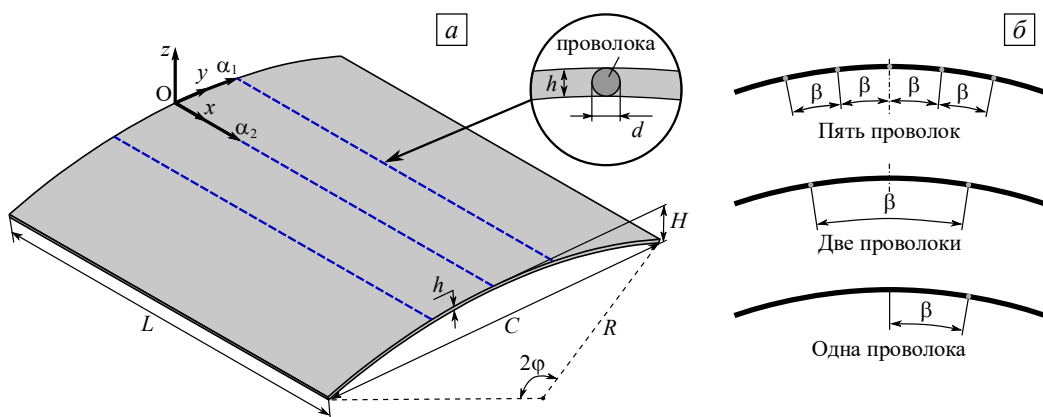


Рис. 1. Сегмент полой цилиндрической оболочки с проволоками (а) и положение проволок в окружном направлении (б)

первоначальной длины на величину Δl и за счёт этого создавать в конструкции напряжённое состояние практически без изменения её геометрии. Оценим эффективность данного способа управления.

Деформации в оболочке определим с использованием нелинейных соотношений на основе теории Рейсснера–Миндлина, которые запишем в криволинейной системе координат $O\alpha_1\alpha_2z$, применяя введённые в [18] обозначения:

$$\varepsilon_{11} = \tilde{\varepsilon}_{11} + zk_{11}, \quad \varepsilon_{22} = \tilde{\varepsilon}_{22} + zk_{22}, \quad \varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{12} = \tilde{\varepsilon}_{12} + zk_{12}, \quad \varepsilon_{13} = \tilde{\varepsilon}_{13} + zk_{13}, \quad \varepsilon_{23} = \tilde{\varepsilon}_{23} + zk_{23}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{11} &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varpi_1^2 + \theta_1^2), & \tilde{\varepsilon}_{22} &= \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_2^2 + \varpi_2^2 + \theta_2^2), & \tilde{\varepsilon}_{12} &= \varpi_1 + \varpi_2 + \varepsilon_1\varpi_2 + \varepsilon_2\varpi_1 + \theta_1\theta_2, \\ \tilde{\varepsilon}_{13} &= \psi_1 + \theta_1 + \psi_1\varepsilon_1 + \psi_2\varpi_1, & \tilde{\varepsilon}_{23} &= \psi_2 + \theta_2 + \psi_1\varepsilon_2 + \psi_2\varpi_2, \\ k_{11} &= \chi_1 + \varepsilon_1\chi_1 + \varpi_1\tau_1 + \theta_1\chi_{13}, & k_{22} &= \chi_2 + \varepsilon_2\chi_2 + \varpi_2\tau_2 + \theta_2\chi_{23}, & k_{12} &= \tau_1^* + \tau_2^*, \\ k_{13} &= \chi_{13} + \psi_1\chi_1 + \psi_2\tau_1, & k_{23} &= \chi_{23} + \psi_1\chi_2 + \psi_2\tau_2, \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha_1} + \frac{v_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{w_0}{R_1}, & \varpi_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial v_0}{\partial \alpha_1} + \frac{u_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, & \theta_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_1} - \frac{u_0}{R_1}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial v_0}{\partial \alpha_2} + \frac{u_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{w_0}{R_2}, & \varpi_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha_2} + \frac{v_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, & \theta_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha_2} - \frac{v_0}{R_2}, \\ \chi_1 &= k_1 - \frac{\varepsilon_1}{R_1}, & \tau_1 &= t_1 - \frac{\varpi_1^2}{R_1}, & \chi_{13} &= -\frac{\psi_1}{R_1} - \frac{\theta_1}{R_1}, & k_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\psi_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, & t_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\psi_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}, \\ \chi_2 &= k_2 - \frac{\varepsilon_2}{R_2}, & \tau_2 &= t_2 - \frac{\varpi_2^2}{R_2}, & \chi_{23} &= -\frac{\psi_2}{R_2} - \frac{\theta_2}{R_2}, & k_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\psi_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, & t_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\psi_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}, \\ \tau_1^* &= \tau_1 + \tau_1\varepsilon_2 + \varpi_2\chi_1 + \theta_2\chi_{13}, & \tau_2^* &= \tau_2 + \tau_2\varepsilon_1 + \varpi_1\chi_2 + \theta_1\chi_{23}, \end{aligned}$$

а также приняты обозначения: u_0, v_0, w_0 — составляющие вектора перемещений срединной поверхности оболочки в направлении координатных линий α_1, α_2, z (в дальнейшем нижний индекс «0» опускается); ψ_1, ψ_2 — углы поворота нормали к срединной поверхности; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности; A_1, A_2 — параметры Ламе, с помощью которых находятся приращения дуг координатных линий α_1 и α_2 .

Компоненты вектора деформаций ε , входящие в соотношения (1), представим в матричном виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \{\tilde{\varepsilon}_{11}, \tilde{\varepsilon}_{22}, \tilde{\varepsilon}_{12}, \tilde{\varepsilon}_{13}, \tilde{\varepsilon}_{23}, k_{11}, k_{22}, k_{12}, k_{13}, k_{23}\}^T = \bar{\varepsilon} + \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{e}, \\ \bar{\varepsilon} &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varpi_1 + \varpi_2, \psi_1 + \theta_1, \psi_2 + \theta_2, \chi_1, \chi_2, \tau_1 + \tau_2, \chi_{13}, \chi_{23}\}^T, \\ \mathbf{e} &= \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varpi_1, \varpi_2, \theta_1, \theta_2, \psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2, \tau_1, \tau_2, \chi_{13}, \chi_{23}\}^T. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\bar{\varepsilon}$ — линейная часть деформации, \mathbf{E} — матрица линейных множителей:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \varpi_1 & 0 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \varpi_2 & 0 & \theta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varpi_2 & \varpi_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \theta_2 & \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 & \varpi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & \varpi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_1 & 0 & \tau_1 & 0 & \chi_{13} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 & \varpi_1 & 0 & \theta_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 & \tau_2 & 0 & \chi_{23} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & \varpi_2 & 0 & \theta_2 \\ \tau_2 & \tau_1 & \chi_2 & \chi_1 & \chi_{23} & \chi_{13} & 0 & 0 & \varpi_2 & \varpi_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \theta_2 & \theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_1 & \tau_1 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_2 & \tau_2 & 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Соотношения упругости, связывающие вектор усилий и моментов \mathbf{m} с вектором обобщённых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, запишем следующим образом:

$$\mathbf{m} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, Q_{13}, Q_{23}\}^T = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

где \mathbf{D} — матрица упругих постоянных изотропного материала [18].

Математическая постановка задачи о собственных колебаниях тонкостенной оболочки основывается на вариационном принципе возможных перемещений. Представим его с использованием выражений (1)–(3) в матричном виде:

$$\int_{S_s} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{m} dS + \int_{V_s} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{m} и \mathbf{u} — векторы усилий и моментов и обобщённых перемещений, ρ — плотность материала, точками обозначена вторая производная по времени.

Линеаризуем соотношения (2) относительно состояния с малым отклонением от положения начального равновесия [19–21], вызванным локальным механическим воздействием, и после ряда упрощений перепишем уравнение (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_{S_s} \delta(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)})^T \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} dS + \int_{V_s} \delta(\mathbf{u}^{(1)})^T \rho \ddot{\mathbf{u}}^{(1)} dV + \int_{S_s} \delta(\mathbf{e}^{(1)})^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{e}^{(1)} dS + \\ & + \int_{S_s} \delta(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)})^T \mathbf{D} \mathbf{E}^{(0)} \mathbf{e}^{(1)} dS + \int_{S_s} \delta(\mathbf{e}^{(1)})^T (\mathbf{E}^{(0)})^T \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} dS = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где верхние индексы «(0)» и «(1)» соответствуют начальному равновесному состоянию и малому отклонению от него, а элементы матрицы $\boldsymbol{\sigma}_0$ находятся из условия $(\mathbf{E}^{(1)})^T \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(0)} = \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{e}^{(1)}$ после решения статической задачи о предварительном нагружении.

Аналогичные соотношения сформулируем для каждой из проволок на основе теории балок Тимошенко. Используя концепцию кусочно-однородного упругого тела и условие идеального контакта, получим связанную систему уравнений. Представляя движение в форме экспоненты $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) e^{i\lambda t}$, где $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ — некоторая функция координат, i — мнимая единица, $\lambda = \omega + i\gamma$, ω — угловая собственная частота колебаний, γ — показатель, характеризующий демпфирование (или устойчивость) системы, t — время, и применяя известные процедуры метода конечных элементов, придём к обобщённой задаче на собственные значения:

$$(-\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_G) \tilde{\mathbf{u}} = 0. \quad (6)$$

Здесь \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{K}_G — матрицы масс, жёсткости и геометрической жёсткости.

Формирование и решение уравнения (6) осуществим в программном обеспечении ANSYS Mechanical APDL. Криволинейную поверхность пологой оболочки представим в виде совокупности плоских четырёхугольных сегментов. Для преодоления проблемы сдвигового запираения используем 8-узловые конечные элементы (shell281) со смешанной интерполяцией компонент тензора деформаций [22–24].

Эффективность изменения спектра собственных частот колебаний конструкции зависит от количества проволок N , их положения по окружной координате β (Рис. 1б) и величины Δl , на которую они укорачиваются в свободном состоянии. При выборе последнего параметра необходимо учитывать, что в случае встраивания проволок в упругое тело фактическое изменение их длины будет меньше из-за реактивных сил. С другой стороны, чрезмерно большое значение Δl может привести к потере устойчивости оболочки или к разрушению самих проволок. С целью исключения возможности наступления этих явлений варьируемые параметры N , β и Δl определим для каждой частоты (формы) колебаний в отдельности из решения задачи оптимизации с ограничениями:

$$\begin{aligned} & \Delta \omega_i(N, \beta, \Delta l) \rightarrow \min; \\ & \max \sigma_{xx}(\mathbf{x}) < \sigma_B, \quad \mathbf{x} \in V_w, \quad \begin{cases} \omega_i > 0, \\ \gamma_i \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Delta\omega_i = (\omega_i - \omega_i^*)/\omega_i^*$, а ω_i^* — i -я собственная частота колебаний системы до укорачивания проволок, σ_{xx} — напряжение в направлении оси Ox , σ_B — предел прочности материала, V_w — область, занимаемая проволоками.

Выражение в (7) с фигурной скобкой является условием устойчивости, которому должны удовлетворять все анализируемые частоты (формы) колебаний. В данной работе ограничимся рассмотрением трёх низших мод ($i=1, 2, 3$) и количеством проволок не более пяти ($N=1, 2, \dots, 5$). Решение задачи (7) позволяет находить параметры, которые обеспечивают наибольшее снижение собственных частот колебаний. Наряду с этим определённый практический интерес представляет их изменение в большую сторону. В таком случае первое выражение в (7) заменим на следующее:

$$\Delta\omega_i(N, \beta, \Delta l) \rightarrow \max. \quad (8)$$

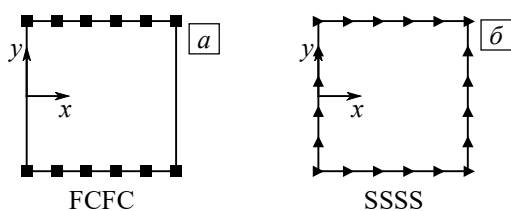


Рис. 2. Граничные условия для оболочки (вид сверху): ■ $u=v=w=0$ (а), ► $u=w=0$ и ▲ $u=v=w=0$ (б)

Используемые в расчётах кинематические граничные условия, задаваемые на краях оболочки, обозначим, согласно рисунку 2, с помощью следующих сокращений: S — свободное опирание ($u=w=0$ или $v=w=0$), C — жёсткое закрепление ($u=v=w=0$), F — свободный край.

3. Верификация

Достоверность решения, получаемого с помощью представленной выше математической модели и её конечно-элементной реализации, продемонстрирована на рисунке 3. Приведены собственные частоты колебаний жёстко закреплённой на обоих краях круговой цилиндрической оболочки без проволок ($E=2 \times 10^{11}$ Н/м²; $\nu=0,32$; $\rho=7916$ кг/м³; $h=1,524 \times 10^{-4}$ м; $R/h=666,67$; $L=0,6096$ м) в зависимости от величины внутреннего давления. Для сравнения представлены экспериментальные [25] и численные [26] результаты, полученные другими авторами. Количество полуволн в окружном направлении обозначено через j . При проведении расчётов параметры конечно-элементной сетки определялись из условия асимптотического поведения решения при увеличении количества узловых неизвестных.

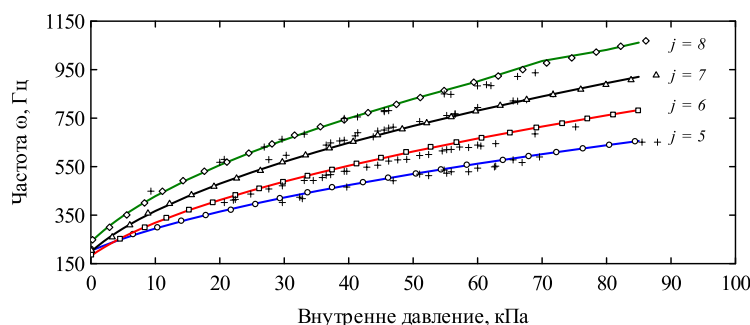


Рис. 3. К сравнению собственных частот колебаний круговой цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением: крестики — эксперимент из [25], символы \diamond , Δ , \square , \circ — МКЭ расчёт из [26], сплошные линии — результаты авторов

4. Результаты расчётов

В следующих примерах продемонстрирована возможность воздействия на собственные частоты колебаний пологой оболочки ($C=L=1$ м, $L/h=1000$) с разной H (высотой подъёма относительно плоскости) за счёт предварительного напряжённого состояния, возникающего в результате укорачивания проволок ($d=1$ мм) на величину Δl . Физико-механические характеристики материалов конструкции приведены в таблице 1.

Таблица 1. Физико-механические характеристики материалов

Элемент конструкции \ Параметр	Модуль упругости E , ГПа	Коэффициент Пуассона ν	Плотность ρ , кг/м ³
Оболочка	69	0,3	2700
Проволока	60	0,3	6925

Результаты решения задачи определения напряжённо-деформированного состояния оболочки с граничными условиями FCFC (см. Рис. 2а) представлены на рисунках 4 и 5 для случая $H/h=0$. Расположение проволок выбрано так, чтобы максимально снижалась первая собственная частота колебаний. Параметр $\Delta\omega$ после решения задачи (7) составил 88,74, 92,71 и 91,80%, соответственно, для одной, двух и трёх проволок. Несмотря на локальный характер механического воздействия, происходит перераспределение напряжений по всей оболочке и возникает их концентрация в крайних точках закрепления проволок. Это хорошо видно на рисунке 4 и в деталях изображено на рисунке 5, где приведены срезы изоповерхностей вдоль характерных направлений. Развивающиеся усилия приводят не только к изменению значений собственных частот, но и качественно влияют на соответствующие им формы колебаний и порядок их следования в спектре (Рис. 6). Так, в рассмотренном случае первая и вторая формы колебаний при $N=2$ меняются местами относительно их положения в спектре, полученном для оболочки без проволок.

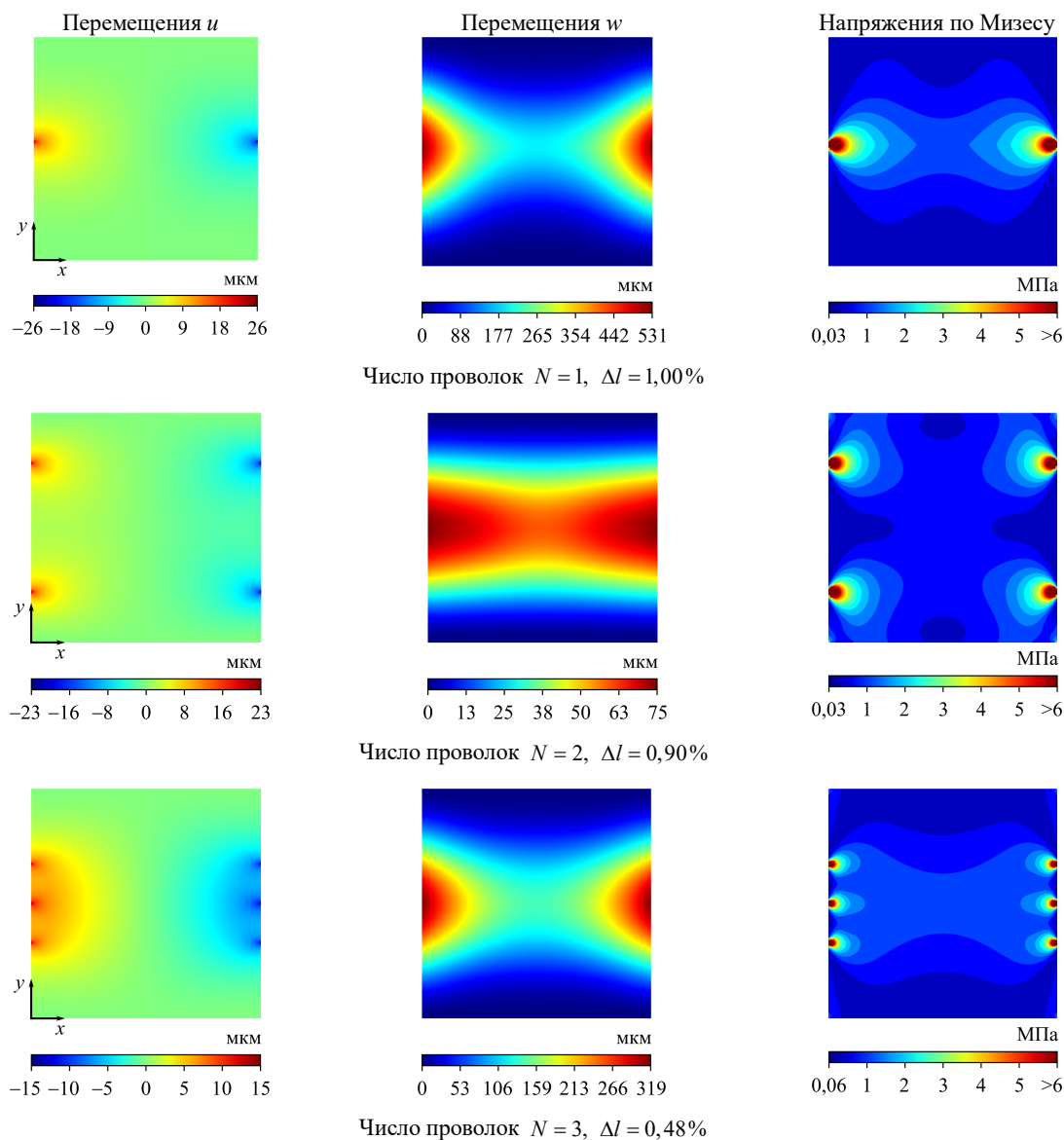


Рис. 4. Перемещения и изолинии напряжений по Мизесу в полой оболочке с проволоками (вид сверху) при их оптимальном расположении для первой формы ($H/h=0$)

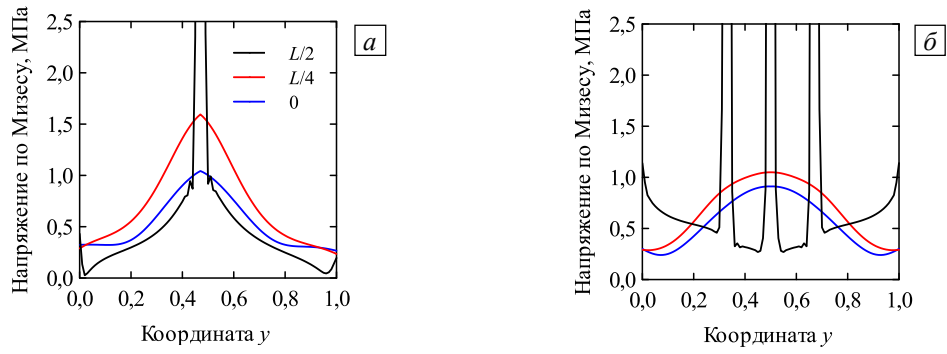


Рис. 5. Распределение напряжений по Мизесу вдоль линий $x = \text{const}$ в полой оболочке с проволоками при их оптимальном расположении для первой формы ($H/h=0$): $a - N = 1, \Delta l = 1,00\%$; $б - N = 3, \Delta l = 0,48\%$

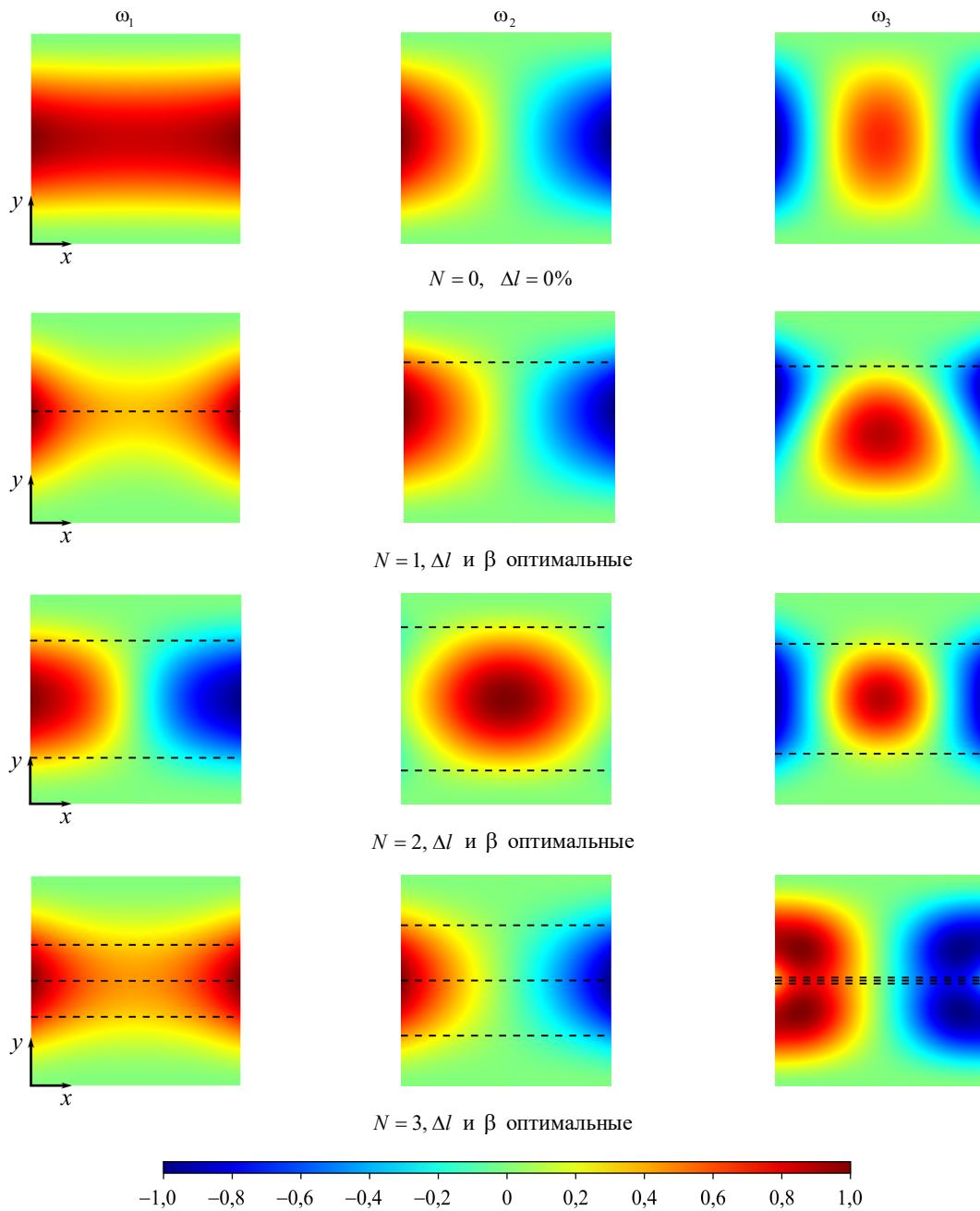


Рис. 6. Собственные формы колебаний полой оболочки с проволоками (вид сверху) ($H/h=0$); цветовая шкала соответствует нормированному перемещению w

В таблице 2 показано относительное изменение трёх низших собственных частот колебаний ω_i ($i = 1, 2, 3$) полой оболочки при разной высоте подъёма H . Жирным шрифтом выделены максимальные значения, которые оказалось возможным обеспечить для каждой из мод в отдельности. Из представленных результатов видно, что путём сжатия проволок можно осуществлять смещение собственных частот вверх и вниз по спектру. Эффективность механизма уменьшается с ростом величины H/h . Это связано не только с повышением жёсткости конструкции за счёт придания ей выпуклой геометрии при подъёме на высоту H относительно плоскости Oxy , но и с увеличением количества полуволн в окружном направлении у рассматриваемых форм колебаний. Вследствие последнего проволоки, расположенные продольно, работают менее эффективно.

Таблица 2. Относительное изменение собственных частот колебаний полой оболочки в зависимости от количества проволок при граничных условиях вида FCFC (см. Рис. 2а)

Число проволок N	$H/h = 0$						$H/h = 5$					
	Повышение частоты, %			Понижение частоты, %			Повышение частоты, %			Понижение частоты, %		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
1	–	–	5,16	88,74	33,46	40,76	0,56	3,12	4,40	0,22	2,41	0,62
2	–	–	9,56	92,71	68,13	71,52	0,15	7,32	9,33	2,26	8,26	0,32
3	–	50,19	11,22	91,80	45,81	22,34	0,15	6,10	10,90	34,40	48,58	2,79
4	68,18	122,42	49,28	95,20	44,99	39,87	0,15	7,16	11,13	85,10	68,72	15,67
5	84,42	146,60	65,39	86,71	47,99	44,06	0,15	8,27	11,25	88,49	69,15	40,24
Число проволок N	$H/h = 10$						$H/h = 20$					
	Повышение частоты, %			Понижение частоты, %			Повышение частоты, %			Понижение частоты, %		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
1	0,51	1,82	2,20	0,09	1,25	0,42	0,24	0,93	5,05	0,05	0,15	1,05
2	0,42	3,28	7,00	0,64	2,70	0,78	0,66	3,17	11,30	0,14	0,23	1,92
3	0,42	4,40	11,79	2,52	8,21	0,17	1,23	6,24	18,25	0,12	0,27	0,05
4	0,42	5,80	15,18	53,34	51,53	1,03	1,61	9,55	25,18	0,24	0,00	2,12
5	27,33	6,51	17,65	62,07	51,12	21,12	1,81	12,75	30,70	0,92	0,23	0,04

В следующей группе примеров рассмотрены оболочки, свободно опёртые по периметру (граничные условия SSSS, см. Рис. 2б). Анализ полученных результатов позволяет сделать выводы, качественно не отличающиеся от сформулированных выше. Соответствующие данные приведены в таблице 3. В скобках обозначено количество проволок, при котором получено значение. В случае такого закрепления эффективность управления собственными частотами колебаний также снижается с увеличением

Таблица 3. Максимальное относительное изменение собственных частот колебаний полой оболочки при граничных условиях SSSS (см. Рис. 2б)

H/h	Продольное расположение проволок					
	Повышение частоты, %			Понижение частоты, %		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
0	108,53 (5)	50,99 (5)	57,37 (5)	34,86 (5)	66,06 (3)	50,83 (3)
5	8,95 (2)	–	6,66 (2)	96,85 (5)	78,34 (4)	77,91 (5)
10	3,73 (2)	8,51 (3)	0,34 (2)	94,00 (5)	35,66 (5)	35,21 (5)
20	3,98 (5)	3,11 (5)	4,97 (4)	7,10 (4)	6,29 (4)	7,84 (5)
H/h	Окружное расположение проволок					
	Повышение частоты, %			Понижение частоты, %		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
5	8,43 (3)	0,53 (1)	5,29 (2)	58,63 (5)	57,99 (5)	61,01 (5)
10	12,54 (1)	2,57 (2)	0,71 (1)	16,23 (5)	7,94 (5)	19,95 (5)
20	2,50 (4)	10,80 (5)	19,00 (5)	12,62 (5)	9,17 (5)	3,03 (5)

высоты подъёма H . Возможным решением этой проблемы является расположение актуаторов не в меридиональном (продольном), а в окружном направлении. Проведённые расчёты показали, что добиться повышения эффективности управления можно при $H/h \geq 20$, но для меньшего значения этого отношения результаты становятся хуже (см. Табл. 3).

5. Заключение

С помощью разработанного численного алгоритма осуществлена серия вычислительных экспериментов, в которых продемонстрирована возможность управления собственными частотами колебаний сегмента пологой цилиндрической оболочки за счёт использования проволочных актуаторов. Анализ полученных результатов позволил сделать следующие выводы:

- собственные частоты колебаний можно изменять в большую и меньшую стороны;
- эффективность воздействия зависит от положения проволок и их количества;
- укорачивание проволок может привести к потере конструкцией устойчивости;
- подъём оболочки относительно плоскости (выпуклость) снижает эффективность управления её динамическими характеристиками.

Практическое исполнение описанного механизма для управления спектром частот возможно на этапе производства деталей из композиционных материалов. Современное роботизированное оборудование способно в автоматическом режиме осуществлять укладку проволочных актуаторов в эпоксидную матрицу. Путём подбора состава сплава для изготовления проволоки можно добиться реализации эффекта памяти формы при требуемой температуре.

Исследование выполнено в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня «Сверхзвук» на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования России (соглашение от 21 апреля 2022 года № 075-15-2022-329).

Литература

1. *Sofla A.Y.N., Meguid S.A., Tan K.T., Yeo W.K.* Shape morphing of aircraft: Status and challenges // *Materials and Design*. 2010. Vol. 31. P. 1284-1292. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.09.011>
2. *Kim N.-G., Han M.-W., Iakovleva A., Park H.-B., Chu W.-S., Ahn S.-H.* Hybrid composite actuator with shape retention capability for morphing flap of unmanned aerial vehicle (UAV) // *Compos. Struct.* 2020. Vol. 243. 112227. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112227>
3. *Sinn T., Barrett R.* Design, manufacturing and test of a high lift secondary flight control surface with shape memory alloy post-buckled precompressed actuators // *Actuators*. 2015. Vol. 4. P. 156-171. <https://doi.org/10.3390/act4030156>
4. *Kreitzman J.R., Calkins F.T., Nicholson D.E., Lafranchi A.F., Dodge C.A., Cattafesta L.N.* Active acoustic liners enabled by shape memory alloy technology // *AIAA AVIATION 2020 FORUM*. 2020. <https://doi.org/10.2514/6.2020-2617>
5. *Jiang D., Kyriakides S., Bechle N.J., Landis C.M.* Bending of pseudoelastic NiTi tubes // *Int. J. Solids Struct.* 2017. Vol. 124. P. 192-214. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.06.032>
6. *Тихомирова К.А.* Разработка и численная реализация одномерной феноменологической модели фазовой деформации в сплавах с памятью формы // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 2. С. 192-206. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.2.17>
7. *Saadat S., Salichs J., Noori M., Hou Z., Davoodi H., Bar-on I., Suzuki Y., Masuda A.* An overview of vibration and seismic application of NiTi shape memory alloy // *Smart Mater. Struct.* 2002. Vol. 11. P. 218-229. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/11/2/305>
8. *Tabrizikahou A., Kuczma M., Nowotarski P., Kwiatek M., Javanmardi A.* Sustainability of civil structures through the application of smart materials: A review // *Materials*. 2021. Vol. 14. 4824. <https://doi.org/10.3390/ma14174824>
9. *Tabrizikahou A., Kuczma M., Łasecka-Plura M., Farsangi E.N., Noori M., Gardoni P., Li S.* Application and modelling of shape-memory alloys for structural vibration control: state-of-the-art review // *Construct. Build. Mater.* 2022. Vol. 342. 127975. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.127975>
10. *Aiken I.D., Kelly J.M.* Earthquake simulator testing and analytical studies of two energy-absorbing systems for multistory structures. 1990. Report No. UCB/EERC-90-03. 300 p.
11. *Clark P.W., Aiken I.D., Kelly J.M., Higashino M., Krumme R.* Experimental and analytical studies of shape-memory alloy dampers for structural control // *Proc. of the Smart Structures and Materials*. 1995: Passive Damping. San Diego, CA, United States, 26 February – 3 March, 1995. P. 241-251. <https://doi.org/10.1117/12.208891>
12. *Baz A., Imam K., McCoy J.* Active vibration control of flexible beams using shape memory actuators // *J. Sound Vib.* 1990. Vol. 140. P. 437-456. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90760-W](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90760-W)
13. *Bidaux J.-E., Manson J.-A.E., Gotthardt R.* Active stiffening of composite materials by embedded shape-memory-alloy fibres. *MRS Online Proceedings Library*. 1996. Vol. 459. P. 107-117. <https://doi.org/10.1557/PROC-459-107>
14. *Shahin A.R., Meckl P.H., Jones J.D.* Modeling of SMA tendons for active control of structures // *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 1997. Vol. 8. P. 51-70. <https://doi.org/10.1177/1045389X9700800106>

15. Heinonen J., Vessonen I., Klinge P., Järvinen E. Controlling stiffness of a frame spring by changing the boundary condition with an SMA actuator // *Comput. Struct.* 2008. Vol. 86. P. 398-406. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.02.008>
16. Zareie S., Zabihollah A. A semi-active SMA-MRF structural stability element for seismic control in marine structures // *Appl. Ocean Res.* 2020. Vol. 100. 102161. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apor.2020.102161>
17. Zareie S., Hamidia M., Zabihollah A., Ahmad R., Dolatshahi K.M. Design, validation, and application of a hybrid shape memory alloy-magnetorheological fluid-based core bracing system under tension and compression // *Structures.* 2022. Vol. 35. P. 1151-1161. <http://dx.doi.org/10.1016/j.istruc.2021.08.094>
18. Ванин Г.А., Семенов Н.П., Емельянов Р.Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. Киев: Наукова думка, 1978. 212 с.
19. Клизман Е.П. Устойчивость и колебания вязкоупругих структурно неоднородных многослойных оболочек вращения / Дисс... канд. техн. наук: 01.02.04. Пермь, ИМСС УрО РАН, 1986. 175 с.
20. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Численное моделирование устойчивости нагруженных оболочек вращения при внутреннем течении жидкости // *ПМТФ.* 2008. Т. 49, № 2. С. 185-195. (English version <https://doi.org/10.1007/s10808-008-0043-1>)
21. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid // *Thin-Walled Struct.* 2015. Vol. 90. P. 12-22. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.01.001>
22. Bathe K.-J., Dvorkin E.N. A formulation of general shell elements — the use of mixed interpolation of tensorial components // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1986. Vol. 22. P. 697-722. <https://doi.org/10.1002/nme.1620220312>
23. Dvorkin E.N., Bathe K.-J. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis // *Eng. Comput.* 1984. Vol. 1. P. 77-88. <https://doi.org/10.1108/eb023562>
24. Бате К.-Ю. Методы конечных элементов. М: Физматлит, 2010. 1024 с.
25. Miserentino R., Volsteeen L.F. Vibration tests of pressurized thin-walled cylindrical shells. 1965. Report No. NASA TN D-3066. 50 p.
26. Zhang Y.L., Gorman G.D., Reese J.M. Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid // *Thin-Walled Struct.* 2003. Vol. 41. P. 1103-1127. [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(03\)00108-3](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(03)00108-3)

References

1. Sofla A.Y.N., Meguid S.A., Tan K.T., Yeo W.K. Shape morphing of aircraft: Status and challenges. *Materials and Design*, 2010, vol. 31, pp. 1284-1292. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.09.011>
2. Kim N.-G., Han M.-W., Iakovleva A., Park H.-B., Chu W.-S., Ahn S.-H. Hybrid composite actuator with shape retention capability for morphing flap of unmanned aerial vehicle (UAV). *Compos. Struct.* 2020, vol. 243, 112227. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112227>
3. Sinn T., Barrett R. Design, manufacturing and test of a high lift secondary flight control surface with shape memory alloy post-buckled precompressed actuators. *Actuators*, 2015, vol. 4, pp. 156-171. <https://doi.org/10.3390/act4030156>
4. Kreitzman J.R., Calkins F.T., Nicholson D.E., Lafranchi A.F., Dodge C.A., Cattafesta L.N. Active acoustic liners enabled by shape memory alloy technology. AIAA AVIATION 2020 FORUM. <https://doi.org/10.2514/6.2020-2617>
5. Jiang D., Kyriakides S., Bechle N.J., Landis C.M. Bending of pseudoelastic NiTi tubes. *Int. J. Solids Struct.* 2017, vol. 124, pp. 192-214. <https://doi.org/10.1016/j.ijstr.2017.06.032>
6. Tikhomirova K.A. Development and numerical implementation of one-dimensional phenomenological model for phase deformation in shape memory alloys. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 192-206. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.2.17>
7. Saadat S., Salichs J., Noori M., Hou Z., Davoodi H., Bar-on I., Suzuki Y., Masuda A. An overview of vibration and seismic application of NiTi shape memory alloy. *Smart Mater. Struct.* 2002, vol. 11, pp. 218-229. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/11/2/305>
8. Tabrizikahou A., Kuczma M., Nowotarski P., Kwiatek M., Javanmardi A. Sustainability of civil structures through the application of smart materials: A review. *Materials*, 2021, vol. 14, 4824. <https://doi.org/10.3390/ma14174824>
9. Tabrizikahou A., Kuczma M., Łasecka-Plura M., Farsangi E.N., Noori M., Gardoni P., Li S. Application and modelling of shape-memory alloys for structural vibration control: state-of-the-art review. *Construct. Build. Mater.* 2022, vol. 342, 127975. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2022.127975>
10. Aiken I.D., Kelly J.M. *Earthquake simulator testing and analytical studies of two energy-absorbing systems for multistory structures.* 1990. Report no. UCB/EERC-90-03. 300 p.
11. Clark P.W., Aiken I.D., Kelly J.M., Higashino M., Krumme R. *Proc. of the Smart Structures and Materials. 1995: Passive Damping. San Diego, CA, United States, 26 February – 3 March, 1995. P. 241-251.* <https://doi.org/10.1117/12.208891>
12. Baz A., Imam K., McCoy J. Active vibration control of flexible beams using shape memory actuators. *J. Sound Vib.*, 1990, vol. 140, pp. 437-456. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(90\)90760-W](https://doi.org/10.1016/0022-460X(90)90760-W)
13. Bidaux J.-E., Manson J.-A.E., Gotthardt R. Active stiffening of composite materials by embedded shape-memory-alloy fibres. *MRS Online Proceedings Library*, 1996, vol. 459, pp. 107-117. <https://doi.org/10.1557/PROC-459-107>
14. Shahin A.R., Meckl P.H., Jones J.D. Modeling of SMA tendons for active control of structures. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 1997, vol. 8, pp. 51-70. <https://doi.org/10.1177/1045389X9700800106>
15. Heinonen J., Vessonen I., Klinge P., Järvinen E. Controlling stiffness of a frame spring by changing the boundary condition with an SMA actuator. *Comput. Struct.* 2008, vol. 86, pp. 398-406. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.02.008>
16. Zareie S., Zabihollah A. A semi-active SMA-MRF structural stability element for seismic control in marine structures. *Appl. Ocean Res.*, 2020, vol. 100, 102161. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apor.2020.102161>
17. Zareie S., Hamidia M., Zabihollah A., Ahmad R., Dolatshahi K.M. Design, validation, and application of a hybrid shape memory alloy-magnetorheological fluid-based core bracing system under tension and compression. *Structures*, 2022, vol. 35, pp. 1151-1161. <http://dx.doi.org/10.1016/j.istruc.2021.08.094>

18. Vanin G.A., Semenyuk N.P., Emel'yanov R.F. *Ustoychivost' obolochek iz armirovannykh materialov* [Stability of shells made of reinforced materials]. Kiyev: Naukova dumka, 1978. 212 p.
19. Kligman E.P. *Ustoychivost' i kolebaniya vyzkouprugikh strukturno neodnorodnykh mnogosloynnykh obolochek vrashcheniya* [Stability and vibrations of viscoelastic structurally inhomogeneous multilayer shells of revolution]. PhD Dissertation, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, 1986. 175 p.
20. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. Numerical modelling of the stability of loaded shells of revolution containing fluid flows. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, pp. 313-322. <https://doi.org/10.1007/s10808-008-0043-1>
21. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Natural vibrations of loaded noncircular cylindrical shells containing a quiescent fluid. *Thin-Walled Struct.*, 2015, vol. 90, pp. 12-22. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2015.01.001>
22. Bathe K.-J., Dvorkin E.N. A formulation of general shell elements — the use of mixed interpolation of tensorial components. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1986, vol. 22, pp. 697-722. <https://doi.org/10.1002/nme.1620220312>
23. Dvorkin E.N., Bathe K.-J. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Eng. Comput.* 1984, vol. 1, pp. 77-88. <https://doi.org/10.1108/eb023562>
24. Bathe K.-J. *Finite element procedures*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996. 1037 p.
25. Miserentino R., Volsteen L.F. *Vibration tests of pressurized thin-walled cylindrical shells*. 1965. Report no. NASA TN D-3066. 50 p.
26. Zhang Y.L., Gorman G.D., Reese J.M. Vibration of prestressed thin cylindrical shells conveying fluid. *Thin-Walled Struct.* 2003, vol. 41, pp. 11031127. [https://doi.org/10.1016/S0263-8231\(03\)00108-3](https://doi.org/10.1016/S0263-8231(03)00108-3)

Поступила в редакцию 10.11.2022; после доработки 10.11.2022; принята к опубликованию 21.11.2022

Сведения об авторах

Каменских Александр Олегович, б/с, мнс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: kamenskikh.a@icmm.ru

Лекомцев Сергей Владимирович, кфмн, снс, ИМСС УрО РАН; e-mail: lekomtsev@icmm.ru

Матвеенко Валерий Павлович, дтн, академик РАН, дир., ИМСС УрО РАН; e-mail: mvp@icmm.ru