

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.4.29](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.4.29)

УДК 534.26

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА МНОЖЕСТВЕ ЗВУКОПРОНИЦАЕМЫХ СФЕР В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Э.Ш. Насибуллаева

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Российская Федерация

При изучении рассеяния акустической волны на множестве сферических препятствий малых размеров одной из важнейших задач является определение основных характеристик этого явления, в том числе полного сечения рассеяния. Знание характеристик позволяет наиболее полно интерпретировать численные результаты, получаемые при исследовании эффектов многократного рассеяния волны на малых препятствиях. Обзор научной литературы показал, что на сегодняшний день все теоретические и численные изыскания посвящены системам, состоящим из одного/двух рассеивателей, или ограничены некоторыми предельными случаями, сводящими задачу рассеяния на множестве сфер к рассеянию на одиночной двухфазной области или не рассматривающими обратное рассеяние между соседними рассеивателями, что не дает возможности в полной мере учитывать влияние сферических препятствий друг на друга. Основными целями настоящей работы являются вывод явной формулы для полного сечения рассеяния на множестве взаимодействующих звукопроницаемых сфер и проведение на ее основе численного анализа многократного рассеяния на системах сфер, находящихся в так называемых базовых конфигурациях. С помощью теорем сложения для сферических волновых функций такая формула получена. Она применима для любого числа сфер различных радиусов, свободно расположенных в трехмерном пространстве при наличии произвольного внешнего звукового поля. Вычислительные эксперименты выполнены при воздействии сферической волны от монополярного источника излучения на системы: из пары сфер, расположенных на одинаковом расстоянии от монополярного источника излучения; из трех сфер, расположенных в четырех базовых конфигурациях; с плоской равномерной конфигурацией из 11×11 сфер одинакового радиуса. В результате исследования полного сечения рассеяния с учетом и без учета взаимовлияния сфер, и при изменении основных параметров системы (плотности и скорости звука вокруг и внутри сфер, частоты внешнего поля, расстояния между центрами сфер, расположения сфер относительно друг друга) удалось выявить параметрическую область, в которой эффектами многократного рассеяния пренебрегать нельзя.

Ключевые слова: многократное рассеяние, звукопроницаемая сфера, акустическая волна, полное сечение рассеяния, монополярный источник излучения, вычислительный эксперимент

NUMERICAL ANALYSIS OF MULTIPLE SCATTERING OF AN ACOUSTIC WAVE ON A SET OF SOUND-PERMEABLE SPHERES IN 3D SPACE

E.Sh. Nasibullaeva

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russian Federation

In the study of the scattering of an acoustic wave by a set of spherical obstacles of small sizes, one of the most important problems is to determine the main characteristics of this phenomenon, including the total scattering cross-section. Knowledge of the characteristics allows the most complete interpretation of the numerical results obtained in the study of multiple scattering effects on small obstacles. A review of the scientific literature showed that today all theoretical and numerical studies are devoted to the systems consisting of one or two scatterers, or are limited by the cases that reduce the scattering problem on a set of spheres to scattering on a single two-phase region or ignore the backscattering between neighboring scatterers; the interaction between spherical obstacles cannot be completely taken into account in these limiting cases. The main purposes of this work are to derive an explicit formula for the total scattering cross section on a set of interacting sound-permeable spheres and to conduct on this basis a numerical analysis of multiple scattering on systems of spheres located in so-called basic configurations. Such a formula was obtained using the summation theorems for spherical wave functions. It is applicable to any number of spheres of different radii freely located in 3D space in the presence of an arbitrary external sound field. Computational experiments were performed for the systems consisting of: two spheres located at the same distance from a monopole radiation source, three spheres located in four basic configurations, and identical spheres of a 11×11 planar uniform configuration. It was assumed that all these systems are subjected to a spherical wave from a monopole radiation source. As a result of studying the total scattering cross-section, with and without taking into account the interaction between the spheres, which was performed at varying system parameters (the density and speed of sound around and inside the spheres, the external field frequency, the distance between the sphere centers, and the location of the spheres relative to each other), it was possible to identify a parameter space where the effects of multiple scattering cannot be neglected.

Key words: multiple scattering, sound-permeable sphere, acoustic wave, total scattering cross section, monopole radiation source, computational experiment

1. Введение

Исследование рассеяния звуковой волны на препятствиях малых размеров имеет важное значение как для изучения самой природы данного явления, так и с точки зрения практического использования. Рассеяние лежит в основе многих применений акустических волн, таких как гидролокация [1, 2], зондирование атмосферы и океана [1–3], неразрушающий контроль металлоизделий [4], сканирование в медицине [5, 6], создание позиционируемого 3D звука (выделение из множественного звукового потока индивидуального потока и нахождение в 3D пространстве его местоположения) [7], управление звуковыми волнами,

переносимыми водой с помощью метаповерхностей (поверхностей, способных менять направление движения звуковых волн, фокусировать их, ограничивать их пропускание или менять частоту, например, за счет содержания полостей) [8–10] и организация микроструктуры в случайных средах [11, 12]. При встрече с множеством препятствий волны звука, рассеенные каждым из них, рассеиваются повторно и многократно другими препятствиями, то есть имеет место образование дополнительных звуковых полей, поэтому задача определения основных характеристик процесса — полного и позиционного сечений рассеяния, сечения обратного рассеяния и другого, является актуальной и важной. Ее решение позволит установить, при каких параметрах системы взаимодействие между частицами существенно и им нельзя пренебрегать или, наоборот, незначительно, и достаточно анализировать множество одиночных частиц. Основные характеристики рассеяния волн на одиночном сферическом препятствии, хорошо отражены в научной литературе [13–22]. Обзор исследований до 1950 г. содержит работа [13]. Следует отметить классическую работу [14], в которой авторы одними из первых для интерпретации рассеяния на одиночном препятствии рассмотрели полное сечение рассеяния (scattering cross section). Теоретические результаты для одиночных газовых пузырьков в воде, достаточно подробно изложены в обзорной работе [15] и монографии [16], а также в статьях [17, 18], где основное внимание уделено резонансным свойствам пузырьков. Одной из первых работ, которая позволяет получить формулу для определения полного сечения рассеяния на идеальной (звуконепроницаемой) жесткой сфере, является работа [19]. Наиболее полно выражения и анализ основных характеристик рассеяния плоской волны на идеальных и звукопроницаемых одиночных сферах представлены в [16]. По аналогии с этой работой в [20] и [21] дается вывод формулы полного сечения рассеяния для случая падения сферической волны от монополярного источника излучения на одиночные звуконепроницаемую и звукопроницаемую сферы соответственно, а также расчет данной характеристики в зависимости от основных параметров системы «окружающая среда–сфера». Заслуживает внимания также работа [22], где найдено выражение сечения рассеяния на движущейся жесткой сфере малого радиуса с постоянной скоростью, много меньшей скорости звука, в приближении малых волновых радиусов.

Ряд публикаций посвящен отысканию основных характеристик рассеяния волны на паре сфер. Теоретическая работа [23] является одной из первых, где с помощью теорем сложения для сферических волновых функций [24] получено выражение сечения рассеяния для двух акустически жестких или мягких сфер одного и того же радиуса при падении плоской волны. Численные расчеты сечения обратного рассеяния и его аппроксимации на бесконечности содержит работа [25] при рассмотрении системы двух сфер с различными краевыми условиями на их поверхностях в зависимости от расстояния между сферами и угла падения плоской волны. В работе [26] представлены результаты расчета интегрального сечения рассеяния плоской акустической волны на двух близко расположенных импедансных сферах, а в работе [27] — выражение сечения рассеяния для системы из двух пузырьков в приближении, что расстояние между центрами пузырьков меньше длины волны. В части работ исследуется величина, называемая формфункцией (form function), которая определяется как квадратный корень из соответствующего сечения рассеяния. Так, например, в [28] численно анализируется формфункция для обратного рассеяния в случае пары взаимодействующих звуконепроницаемых сфер в широких частотных диапазонах (от средних до резонансных значений), а также при расстояниях между сферами в интервале от очень близких, когда сферы соприкасаются друг с другом, до удаленных. Численные расчеты формфункции на бесконечности для системы двух жестких сфер в зависимости от волнового радиуса для различных расстояний между сферами приведены в работе [29], где также сравниваются величины формфункций для двух сфер из нержавеющей стали в воде, установленные экспериментально и теоретически. Аналитические выражения для формфункции системы, состоящей из двух сфер (как проницаемых, так и непроницаемых), одна из которых имеет акустически малый радиус, получены в [30]. Особо следует отметить экспериментальную работу [31], в которой представлены результаты определения обратного рассеяния звука от системы двух воздушных пузырьков в воде. С ними автор настоящей работы сравнивал свои расчетные данные и получил хорошее согласование. Существующие работы, направленные на нахождение сечений рассеяния от множества (более двух) сфер либо сводятся к случаю одиночной сферы, либо ограничиваются рассмотрением некоторых упрощенных случаев. Так, в работе [32] задача рассеяния на множестве воздушных пузырьков сведена к рассеянию на сфере, заполненной пузырьками воздуха различных радиусов, имитирующей промысловый косяк пузырьных рыб ограниченных размеров, и численно исследовалось сечение обратного рассеяния данной сферической (одиночной) двухфазной области, а в [33] подобным образом определялась величина эффективного поперечного сечения поглощения сферической волны. В статье [34] представлены численные расчеты обратного сечения рассеяния для простых кластеров из двух и трех пузырьков в различных конфигурациях и при разных углах падения плоской волны. В работе [35] выводится формула для полного сечения рассеяния для множества пузырьков в приближении, позволяющем пренебречь обратным рассеянием между отдельными препятствиями, в результате чего формула сводится к выражению полного сечения рассеяния для одиночной звукопроницаемой сферы, содержащей рассматриваемую систему пузырьков.

Анализ литературы по определению основных характеристик рассеяния показал, что в настоящее время нет формулы, по которой можно вычислить полное сечение рассеяния звука на системе, состоящей из множества сфер, с учетом многократного рассеяния между препятствиями.

Целями настоящей работы является вывод явной формулы для полного сечения рассеяния на множестве взаимодействующих звукопроницаемых сфер, а также численный анализ многократного рассеяния на системах сфер, расположенных в базовых конфигурациях, включая конфигурацию, рассмотренную в экспериментах [31], где пары сфер (воздушные пузырьки) находятся на одном расстоянии от источника монопольного излучения.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается акустическое рассеяние на системе N звукопроницаемых сфер различных радиусов a_1, a_2, \dots, a_N , произвольным образом распределенных в бесконечном трехмерном пространстве, заполненном однородной средой, при воздействии внешнего поля. В декартовой системе координат $Oxyz$ центры сфер имеют координаты $\mathbf{r}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$ ($v = 1, \dots, N$). Окружающая среда характеризуется плотностью ρ_0 и

скоростью звука c_0 , среда внутри сфер — плотностью ρ_v и скоростью звука c_v . Внешнее поле в виде сферической волны создает монопольный источник излучения, расположенный в точке $M_{ms}(x_{ms}, y_{ms}, z_{ms})$ пространства. Схема для системы сфер и основные обозначения представлены на рисунке 1. Предполагается, что центры сфер неподвижны и отсутствует радиальное движение сферической поверхности.

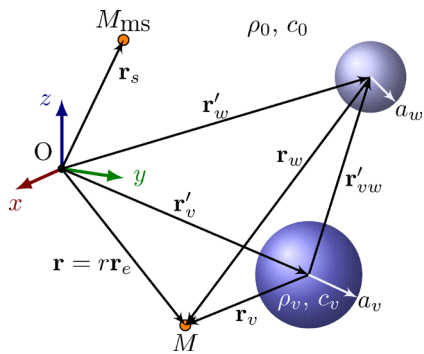


Рис. 1. Схема задачи и основные обозначения в разных системах отсчета

Задача рассеяния звука на множестве звукопроницаемых сфер сводится к решению уравнений Гельмгольца для комплексных потенциалов $\psi(\mathbf{r})$ (вне сфер) и $\psi_{int}^{(v)}$ (внутри v -й сферы) [16, 36]:

$$\nabla^2 \psi + k_0^2 \psi = 0, \quad \nabla^2 \psi_{int}^{(v)} + k_v^2 \psi_{int}^{(v)} = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями, выражающими равенства потенциала и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности препятствия, сквозь которую проходит волна:

$$\left(\psi(\mathbf{r}) - \psi_{int}^{(v)} \right) \Big|_{r=a_v} = 0, \quad \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \psi_{int}^{(v)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a_v} = 0, \quad v = 1, \dots, N.$$

В формуле (1) k_0 и k_v — волновые числа для сред вне и внутри сфер.

Потенциал внешнего поля представляется как сумма потенциалов падающего поля — $\psi_{in}(\mathbf{r})$, и поля рассеяния — $\psi_{scat}(\mathbf{r})$, [34, 37]:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{in}(\mathbf{r}) + \psi_{scat}(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Поскольку потенциал поля рассеяния удовлетворяет первому уравнению Гельмгольца в (1), а также условию излучения Зоммерфельда [38], соответствующему затуханию волны на бесконечности, его общее решение определяется как [36]

$$\psi_{scat}(\mathbf{r}) = \sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^{(v)m} S_n^m(\mathbf{r}_v).$$

Здесь: $A_n^{(v)m}$ — коэффициенты разложения по мультиполям; $S_n^m(\mathbf{r}_v) = h_n(k_0 r_v) Y_n^m(\theta_v, \varphi_v)$ — мультиполь порядка n и степени m ; $h_n(z)$ — сферические функции Ханкеля 1-го типа; $Y_n^m(\theta_v, \varphi_v)$ — ортогональные сферические гармоники, вычисляемые по формуле:

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

где $P_n^m(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра [39]. В соответствии с методом повторного разложения по мультиполям [34, 37] коэффициенты $A_n^{(v)m}$ находятся из решения системы линейных уравнений, которая для рассматриваемой задачи записывается в следующем матричном виде [36]:

$$\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{D}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{A} = \{A_u\} = (\mathbf{A}^{(1)}, \dots, \mathbf{A}^{(N)}) = \left(\left\{ A_l^{(1)s} \right\}^T, \dots, \left\{ A_l^{(N)s} \right\}^T \right)^T,$$

$$\mathbf{D} = \{D_i\} = (\mathbf{D}^{(1)}, \dots, \mathbf{D}^{(N)}) = \left(\left\{ D_n^{(1)m} \right\}^T, \dots, \left\{ D_n^{(N)m} \right\}^T \right)^T,$$

$$\mathbf{L} = \{L_{u_0 t_0}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{(11)} & \mathbf{L}^{(12)} & \dots & \mathbf{L}^{(1N)} \\ \mathbf{L}^{(21)} & \mathbf{L}^{(22)} & \dots & \mathbf{L}^{(2N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{L}^{(N1)} & \mathbf{L}^{(N2)} & \dots & \mathbf{L}^{(NN)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\{ L_{u_1 t_1}^{(11)} \right\} & \left\{ L_{u_1 t_1}^{(12)} \right\} & \dots & \left\{ L_{u_1 t_1}^{(1N)} \right\} \\ \left\{ L_{u_1 t_1}^{(21)} \right\} & \left\{ L_{u_1 t_1}^{(22)} \right\} & \dots & \left\{ L_{u_1 t_1}^{(2N)} \right\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\{ L_{u_1 t_1}^{(N1)} \right\} & \left\{ L_{u_1 t_1}^{(N2)} \right\} & \dots & \left\{ L_{u_1 t_1}^{(NN)} \right\} \end{pmatrix},$$

$$A_{u_0} = A_l^{(v)s}, \quad D_{t_0} = D_n^{(w)m} = -\frac{j_n(k_0 a_w) j_n'(k_w a_w) - \kappa_w j_n'(k_0 a_w) j_n(k_w a_w)}{h_n(k_0 a_w) j_n'(k_w a_w) - \kappa_w h_n'(k_0 a_w) j_n(k_w a_w)} C_{in,n}^m(\mathbf{r}'_w),$$

$$L_{u_0 t_0} = L_{u_1 t_1}^{(vw)} = \begin{cases} \frac{j_l(k_0 a_w) j_l'(k_w a_w) - \kappa_w j_l'(k_0 a_w) j_l(k_w a_w)}{h_l(k_0 a_w) j_l'(k_w a_w) - \kappa_w h_l'(k_0 a_w) j_l(k_w a_w)} (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw}) & \text{для } v \neq w, \\ \delta_{u_1 t_1} & \text{для } v = w, \end{cases}$$

$$u_0 = (v-1)(n_{tr}+1)^2 + (l+1)^2 - (l-s), \quad u_1 = (l+1)^2 - (l-s),$$

$$t_0 = (w-1)(n_{tr}+1)^2 + (n+1)^2 - (n-m), \quad t_1 = (n+1)^2 - (n-m),$$

$$l = 0, 1, \dots, n_{tr}; \quad s = -l, \dots, l; \quad n = 0, 1, \dots, n_{tr}; \quad m = -n, \dots, n; \quad v, w = 1, \dots, N.$$

Здесь: $j_n(z)$ и $j_n'(z)$ — сферические функции Бесселя 1-го типа и их производные [39]; $\kappa_w = (k_0 \rho_w)/(k_w \rho_0)$ — введенный параметр; $C_{in,n}^m(\mathbf{r}'_w)$ — коэффициенты разложения потенциала падающего поля ψ_{in} около $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_w$; $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw})$ — коэффициенты перехода при повторном разложении по мультиполям [37]; $\delta_{u_1 t_1}$ — символ Кронекера; n_{tr} — число членов ряда после его усечения. Важно, что при численной реализации решения система уравнений (3) должна быть конечной, поэтому необходимо проводить усечение рядов при разложении по l и n . Вопрос выбора числа n_{tr} при усечении рядов, используемых в настоящей работе, будет рассмотрен далее, в разделе 4.

3. Формула полного сечения рассеяния для системы взаимодействующих сфер

Величина полного сечения рассеяния σ_s определяется как отношение мощности рассеянной волны P_{scat} к интенсивности падающей волны I_0 (см., например, [16, 41]), то есть

$$\sigma_s = \frac{P_{scat}}{I_0} = \frac{1}{I_0} \int_{(S)} I_{scat} dS, \quad (4)$$

где I_{scat} — интенсивность рассеянной волны; интеграл берется по сферической поверхности $S = 4\pi r^2$ радиуса r , окружающей препятствие. Физический смысл величины σ_s — это площадь перпендикулярной потоку области (круга), попадая в которую налетающая волна испытывает рассеяние.

Для одиночной звукопроницаемой сферы σ_s вычисляется по формуле [21]:

$$\sigma_s = B_0 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |B_l|^2, \quad (5)$$

в которой коэффициенты для монопольного источника излучения имеют следующий вид:

$$B_0 = 4\pi d^2, \quad B_l = \frac{j_l(k_0 a) j_l'(k_1 a) - \kappa j_l'(k_0 a) j_l(k_1 a)}{h_l(k_0 a) j_l'(k_1 a) - \kappa h_l'(k_0 a) j_l(k_1 a)} h_l(k_0 d).$$

Чтобы найти полное сечение рассеяния для системы, состоящей из множества сфер, нужно знать интенсивность рассеянной волны. Она определяется как [16]

$$I_{\text{scat}} = \text{Re}(p_{\text{scat}} \cdot v_{rs}^*) / 2. \quad (6)$$

Здесь: $v_{rs} = (\partial p_{\text{scat}} / \partial r) / (i\omega\rho_0)$ — колебательная скорость рассеянной волны в радиальном направлении; $\partial p / \partial r$ — частная производная функции p по переменной r ; знак «*» в верхнем индексе обозначает сопряженную величину. Интенсивность падающей волны равна $I_0 = |p_0|^2 / (2\rho_0 c_0)$, где p_0 — давление в дальнем поле. Связь между акустическим давлением p и потенциалом ψ имеет вид: $p = \rho_0 (\partial\psi / \partial t) = i\omega\rho_0\psi$.

С учетом формулы (4) и асимптотик для сферической функции Ханкеля и ее производной по аргументу $k_0 r_v$ при $k_0 r_v \rightarrow \infty$ [39]

$$h_n(k_0 r_v) \Big|_{k_0 r_v \rightarrow \infty} = (-i)^{n+1} e^{ik_0 r_v} / (k_0 r_v), \quad h_n'(k_0 r_v) \Big|_{k_0 r_v \rightarrow \infty} = i h_n(k_0 r_v),$$

а также асимптотики для экспоненты [34]

$$e^{ik_0 r_v} / r_v \approx e^{ik_0(r - \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_e)} / r,$$

где \mathbf{r}_e — единичный вектор вдоль направления рассеяния, получаются следующие выражения:

$$p_{\text{scat}} = \frac{i\omega\rho_0}{k_0} \frac{e^{ik_0 r}}{r} \sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^{(v)m} (-i)^{n+1} e^{-ik_0(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_e)} Y_n^m(\theta, \varphi),$$

$$v_{rs} = \frac{e^{ik_0 r}}{r} \sum_{w=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l A_l^{(w)s} (-i)^l e^{-ik_0(\mathbf{r}_w \cdot \mathbf{r}_e)} Y_l^s(\theta, \varphi).$$

После их подстановки в формулу (6) и некоторых преобразований следует формула для интенсивности рассеянной волны:

$$I_{\text{scat}} = \frac{1}{2} \frac{\omega\rho_0}{k_0 r^2} \text{Re} \left(\sum_{v,w=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l (-1)^n i^{n+l} A_n^{(v)m} (A_l^{(w)s})^* e^{ik_0(\mathbf{r}_w \cdot \mathbf{r}_e)} Y_n^m(\theta, \varphi) Y_l^{s*}(\theta, \varphi) \right).$$

Можно видеть, что все величины в ее правой части являются известными, поскольку коэффициенты $A_n^{(v)m}$ определены из решения системы линейных уравнений (3).

С учетом ортонормированности поверхностных сферических гармоник и соотношения $Y_l^{s*}(\theta, \varphi) = (-1)^s Y_l^{-s}(\theta, \varphi)$ [39], значение полного сечения рассеяния (4) преобразуется к следующему виду:

$$\sigma_s = \frac{\omega\rho_0}{2k_0 I_0} \left(\sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |A_n^{(v)m}|^2 + \frac{1}{4\pi} \text{Re} \left(\sum_{v,w=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l (-1)^{n+m} i^{n+l} A_n^{(v)m} (A_l^{(w)s})^* \times \right. \right.$$

$$\times \sqrt{(2n+1)(2l+1) \frac{(n-|m|)!(l-|s|)!}{(n+|m|)!(l+|s|)!} \cdot \text{Int}_{nl}^{(vw)ms}} \Bigg), \tag{7}$$

где в правой части интеграл $\text{Int}_{nl}^{(vw)ms}$ равен:

$$\text{Int}_{nl}^{(vw)ms} = \int_0^{2\pi} e^{i(m-s)\varphi} \int_0^\pi e^{ik_0 r'_{vw} \cos\theta} P_n^{|m|}(\cos\theta) P_l^{|s|}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \tag{8}$$

В осесимметричном случае, подробно рассмотренном в работе [42], когда центры всех сфер располагаются на одной оси, которая к тому же является координатной осью Oz , выражение интеграла в правой части упрощается:

$$\text{Int}_{nl}^{(vw)ms} = 2\pi \delta_{ms} (-1)^{-m} \int_0^\pi e^{ik_0 r'_{vw} \cos\theta} P_n^{|m|}(\cos\theta) P_l^{|m|}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta. \tag{9}$$

Для записи интегралов (8) и (9) в явном виде следует применить формулы разложения произведения двух присоединенных функций Лежандра и интегрального представления волновых функций (см., например, работу [24]):

$$P_n^m(\cos\theta) P_l^s(\cos\theta) = \sum_{i_i=|n-l|}^{n+l} b_{i_i}^{(nmls)} P_{i_i}^{m-s}(\cos\theta),$$

$$\int_0^{2\pi} e^{im\beta} \int_0^\pi e^{ik_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{R}} P_n^m(\cos\alpha) \sin\alpha \, d\alpha \, d\beta = 4\pi i^n j_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

где $b_{i_i}^{(nmls)}$ — коэффициенты Клебша–Гордана, значения которых могут быть вычислены, например, как в книге [24]; векторы \mathbf{n} и \mathbf{R} имеют сферические координаты $(1, \alpha, \beta)$ и (r, θ, φ) . Тогда с учетом свойства присоединенных функций Лежандра:

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x),$$

для полного сечения рассеяния (7) получаются следующие выражения:
– в общем виде

$$\sigma_s = \frac{\omega P_0}{2k_0 I_0} \left(\sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=-n}^n |A_n^{(v)m}|^2 + \text{Re} \left[\sum_{\substack{v,w=1 \\ v \neq w}}^N \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=-n}^n \sum_{l=0}^\infty \sum_{s=-l}^l (-1)^{n+m} i^{n+l} A_n^{(v)m} (A_l^{(w)s})^* \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sqrt{(2n+1)(2l+1) \frac{(n-|m|)!(l-|s|)!}{(n+|m|)!(l+|s|)!} c^{(m,s)} e^{i(m-s)\varphi_{vw}} \sum_{i_i=|n-l|}^{n+l} b_{i_i}^{(nmls)} i^{i_i} j_{i_i}(k_0 r'_{vw}) P_{i_i}^{m-s}(\cos\theta_{vw})} \right] \right); \tag{10}$$

– в осесимметричном случае

$$\sigma_s = \frac{\omega P_0}{2k_0 I_0} \left(\sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=-n}^n |A_n^{(v)m}|^2 + \text{Re} \left[\sum_{\substack{v,w=1 \\ v \neq w}}^N \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=-n}^n \sum_{l=0}^\infty (-1)^{n+m} i^{n+l} A_n^{(v)m} (A_l^{(w)m})^* \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sqrt{(2n+1)(2l+1) \frac{(n-|m|)!(l-|m|)!}{(n+|m|)!(l+|m|)!} \sum_{i_i=|n-l|}^{n+l} b_{i_i}^{(n,|m|,l,|m|)} i^{i_i} j_{i_i}(k_0 r'_{vw})} \right] \right). \tag{11}$$

В формуле (10) коэффициенты $c^{(m,s)}$ определяются из следующих выражений:

$$c^{(m,s)} = \begin{cases} 1, & \text{для } m \geq 0 \text{ и } s \geq 0; \\ (-1)^{-|m|} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}, & \text{для } m < 0 \text{ и } s \geq 0; \\ (-1)^{-|s|} \frac{(l+|s|)!}{(l-|s|)!}, & \text{для } m \geq 0 \text{ и } s < 0; \\ (-1)^{-|m|-|s|} \frac{(n+|m|)!(l+|s|)!}{(n-|m|)!(l-|s|)!}, & \text{для } m < 0 \text{ и } s < 0. \end{cases}$$

Интенсивность падающей сферической волны от монопольного источника излучения на системе сфер может быть вычислена как

$$I_0 = \frac{\omega \rho_0 V_0^2 k_0}{32 \pi^2 d_{ms}^2},$$

где $\omega = 2\pi f$ — угловая частота, f — частота внешнего поля, V_0 — производительность монопольного источника излучения, d_{ms} — расстояние от монопольного источника M_{ms} до геометрического центра системы сфер.

4. Численные результаты

Расчет полного сечения рассеяния по формулам (10) или (11) осуществляется с помощью разработанного автором программного кода на языке Fortran 90 для Windows со стандартной сборкой компиляторов (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64) с подключением библиотеки LAPACK [43] для решения системы (3). Специальные сферические функции $h_l(z)$, $j_l(z)$ и присоединенные функции Лежандра $P_l^s(z)$ и их производные вычислялись с помощью адаптированных программных кодов, написанных на языке Fortran 77 для специальных цилиндрических функций и полиномов Лежандра [44]. Вычислительные эксперименты проводились в ОС Windows 10 на процессоре Intel Core i7-4702MQ (4 ядра и 8 потоков по 2,2 ГГц, кэш 6 Мб) с 32 Гб ОЗУ. Затраченное на выполнение программы общее время $t_{срм}$ определялось консольной командой *time*.

Ряды, использовавшиеся при разложениях, являлись сходящимися. При проведении вычислительных число членов ряда при усечении (n_{tr}) выбиралось таким образом, чтобы обеспечивалась заданная точность δ_{fix} в соответствии с подходом, изложенным в [40], то есть когда относительная погрешность двух последовательных значений суммы искомого ряда (Σ_i и Σ_{i+1}) становилась меньше δ_{fix} : $|\frac{\Sigma_i - \Sigma_{i+1}}{\Sigma_i}| \cdot 100 \% < \delta_{fix}$, число n_{tr} полагалось равным i : $n_{tr} = i$.

Рассматривалась бистатическая акустическая система, воздействующая на пару рассеивателей, что соответствовало лабораторным экспериментам, представленным в работе [31]. Это позволило провести верификацию авторского общего численного алгоритма [36], примененного в настоящей работе для отыскания полного сечения рассеяния системы.

В экспериментах [31] исследовалась пара воздушных пузырьков в воде, помещенных на очень тонкую нить на одинаковом расстоянии от комбинированного луча двух, лежащих на одной оси преобразователей. Один из преобразователей являлся источником акустической волны (монопольный источник в точке M_{ms}), а второй — приемником рассеянной волны (в расчетной точке M). На рисунке 2 показаны схема эксперимента и обозначения основных параметров. Значения физических параметров (плотности ρ и скорости звука c) приведены в таблице 1; геометрические параметры, использованные при расчетах, были

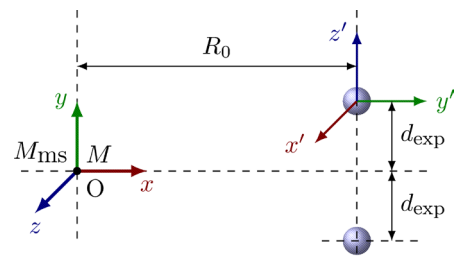


Рис. 2. Схема эксперимента с парой рассеивателей (воздушных пузырьков) [31] и обозначения основных параметров; системы координат: $Oxyz$ – общий алгоритм [36], $Ox'y'z'$ – осесимметричный алгоритм [42]

Таблица 1. Значения физических параметров при 20°C

Вещество	ρ , кг/м ³	c , м/с
Воздух	1,205	343,1
Вода	998	1484
Дихлорэтан	1252,6	1034

следующими: расстояние между преобразователями равнялось нулю (в представленных экспериментах $M \equiv M_{ms}$), ось, соединяющая центры пузырьков, отстояла от преобразователей на расстоянии $R_0 = 0,58$ м; внешнее поле имело частоту $f = 80$ и 140 кГц; радиусы пузырьков составляли $a_1 = a_2 \equiv a = 585 \pm 35$ мкм.

На рисунке 3а для сравнения изображены данные лабораторных (см. символы) [31] и вычислительных (линии) экспериментов для функции

$$TS = 20 \lg \left| \frac{\Psi(r_1)}{\Psi_{in}(r_1)} r_1 \right|,$$

выраженной в децибелах, которая характеризует обратное рассеяние в точке $M \equiv M_{ms}$. Следует отметить, что для расчета полного потенциала (2), который используется в последней формуле, к решению системы уравнений (3) применен общий оптимизированный алгоритм [36], позволяющий найти коэффициенты разложения потенциала поля рассеяния. Общее время расчета t_{cpu} при числе усечения рядов $n_{tr} = 10$, отвечающем условию $\delta_{fix} = 10^{-4}\%$, и шаге по $k_0 d_{exp}$, равном $\Delta h = 0,05$, составляет 4,21 с. Поскольку в экспериментах образовывались пузырьки среднего радиуса $a = 585 \pm 35$ мкм, то каждая пара линий (сплошных или штриховых) устанавливает верхнюю (при $a = 620$ мкм) и нижнюю (при $a = 550$ мкм) границы для соответствующих экспериментальных данных. Видно, что численные данные качественно и количественно согласуются с экспериментальными. Отметим, что для пары пузырьков также может быть использован упрощенный осесимметричный алгоритм, рассмотренный в работе [42], если в качестве оси Oz выбрать ось, соединяющую центры сфер. При этом общее время расчета сокращается: $t_{cpu} = 0,82$ с.

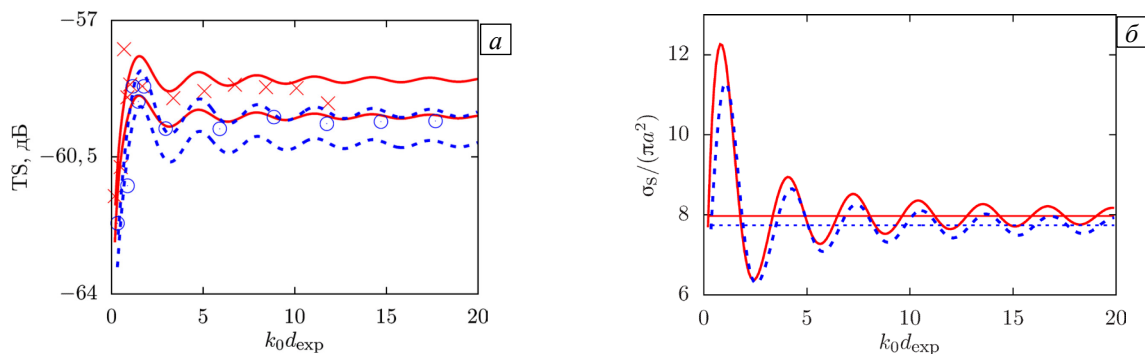


Рис. 3. К сравнению расчетных (линии) и экспериментальных (символы) [31] данных при $a = 585 \pm 35$ мкм (а) и нормированное полное сечение рассеяния $\sigma_s / (\pi a^2)$ для $a = 585$ мкм, рассчитанное по формуле (11) (б); зависимости построены для двух воздушных пузырьков в воде при монополюсном источнике излучения с разной частотой f , кГц: 80 (сплошные линии и крестики) и 140 (штриховые линии и кружки); горизонтальные линии на (б) – суммы значений $\sigma_s / (\pi a^2)$, полученные согласно формуле (5) для двух одиночных не взаимодействующих пузырьков

Для численного анализа эффектов многократного рассеяния вводились обозначения: σ_s^+ и σ_s^- — значения полного сечения рассеяния с учетом и без учета взаимодействия между сферами. При этом σ_s^+ определялось по формуле (10) (в общем случае) и (11) (в осесимметричном случае), а σ_s^- имело вид суммы значений одиночных сфер (5). Относительное отклонение величины σ_s^+ от σ_s^- задавалось как

$$\delta = \frac{\sigma_s^+ - \sigma_s^-}{\sigma_s^-} \cdot 100\%. \quad (12)$$

На рисунке 3б для сравнения представлено нормированное значение полного сечения рассеяния $\sigma_s / (\pi a^2)$ с величиной σ_s , рассчитанной по формуле (11) (σ_s^+) при среднем радиусе пузырька

$a = 585$ мкм. Горизонтальные прямые показывают нормированное значение полного сечения рассеяния в случае невзаимодействующих пузырьков (σ_s^-).

Следует отметить, что когда отношения упругостей вещества сферы ($\chi_v = \rho_v c_v^2$) и внешней среды ($\chi_0 = \rho_0 c_0^2$), а также отношения плотностей внутренней (ρ_v) и внешней (ρ_0) сред стремятся к бесконечности ($\chi_v/\chi_0 \rightarrow \infty$ и $\rho_v/\rho_0 \rightarrow \infty$), то имеет место согласование со случаем малых мягких сфер (см. например [16]), причем для воздушных пузырьков согласование возможно вне области резонанса (при $k_0 a \gg 0,013$). Для одиночных мягких сфер при малых волновых числах ($k_0 a \ll 1$) значение $\sigma_s/(\pi a^2) \approx 4$, а для пары сфер при $k_0 a \ll 1$ и $k_0 d_{\text{exp}} \gg 1$ в работе [23] получено, что значение $\sigma_s/(\pi a^2) \approx 8$. Если посмотреть на рисунок 3б, то для пары воздушных пузырьков при $f = 80$ кГц, для которой $k_0 a \approx 0,2$, также можно видеть, что значение $\sigma_s/(\pi a^2) \rightarrow 8$ при $k_0 d_{\text{exp}} \rightarrow \infty$. Это согласуется с результатами для пары мягких звуконепроницаемых сфер (см. [23]).

На рисунке 4а представлен характер безразмерного значения $\sigma_s/(\pi a^2)$, когда рассеивателями служат две капли воды в воздухе, для которых выполняются условия: $\chi_v/\chi_0 \gg 1$ и $\rho_v/\rho_0 \gg 1$. Это согласуется со случаем малых жестких сфер. Для малых волновых чисел $k_0 a \ll 1$ одиночная жесткая сфера имеет сечение рассеяния $\sigma_s/(\pi a^2) \approx (7/9)(k_0 a)^4$, которое во много раз меньше ее геометрического сечения [16]. Расчеты для пары капель воды в воздухе показали, что при $k_0 a \rightarrow 0$ и $k_0 d_{\text{exp}} \rightarrow \infty$ безразмерное сечение рассеяния составляет $\sigma_s/(\pi a^2) \approx (14/9)(k_0 a)^4$, то есть стремится к сумме сечений рассеяния на двух одиночных жестких сферах. Вычислительный эксперимент по рассеянию коротких волн ($k_0 a \gg 1$) при $k_0 d_{\text{exp}} \rightarrow \infty$ показал, что как для пары воздушных пузырьков в воде, так и для пары капель воды в воздухе сечение рассеяния $\sigma_s/(\pi a^2) \rightarrow 4$, что также согласуется с результатом для одиночных мягких и жестких сфер, при которых $\sigma_s/(\pi a^2) \rightarrow 2$ [16].

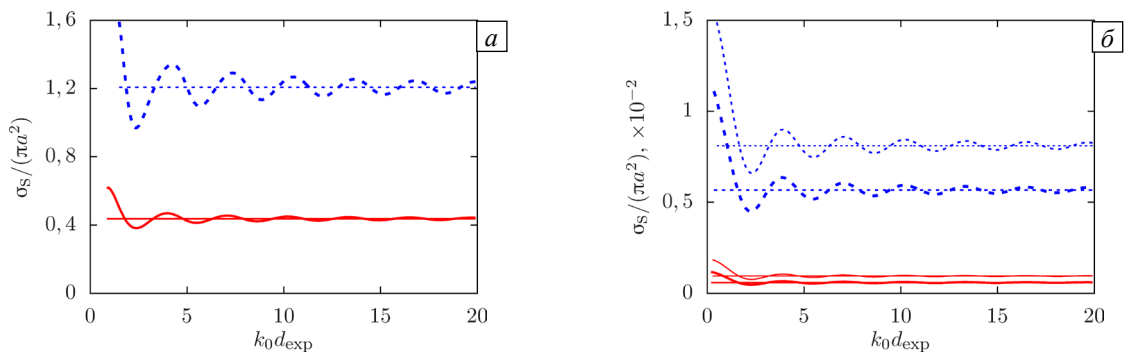


Рис. 4. Нормированное полное сечение рассеяния $\sigma_s/(\pi a^2)$, рассчитанное по формуле (11), для капель воды в воздухе (а), капля дихлорэтана в воде (толстые линии) и капля воды в дихлорэтана (тонкие линии) (б) в зависимости от параметра $k_0 d_{\text{exp}}$ при $a = 585$ мкм и монополюсном источнике излучения с разной частотой f , кГц: 80 (сплошные линии) и 140 (штриховые линии); горизонтальные линии – суммы значений $\sigma_s/(\pi a^2)$ при двух одиночных невзаимодействующих каплях, рассчитанные по формуле (5)

На рисунке 4б представлены промежуточные случаи: капли дихлорэтана в воде ($\chi_v/\chi_0 \approx 0,6$ и $\rho_v/\rho_0 \approx 1,3$, толстые линии) и капли воды в дихлорэтана ($\chi_v/\chi_0 \approx 1,6$ и $\rho_v/\rho_0 \approx 0,8$, тонкие линии). При данных параметрах рассеяние от пары капель жидкости, помещенных в другую жидкость, незначительно. При $k_0 d_{\text{exp}} \rightarrow \infty$ значение $\sigma_s/(\pi a^2)$ для пары взаимодействующих капель также стремится к сумме значений данной величины для двух невзаимодействующих звукопроницаемых капель.

Из рисунков 3 и 4 видно, что наибольшее по абсолютной величине рассеяние имеет место в системе с воздушными пузырьками в воде, где модуль отклонения $|\delta|$ относительного сечения рассеяния при частотах 80 и 140 кГц в точках максимума (при $k_0 d_{\text{exp}}$, равном 0,79 и 1,03) составляет 53,82 и 46,02%, а в точках минимума (при $k_0 d_{\text{exp}}$, равном 2,38 и 2,51), соответственно 19,72 и 18,76%. Наименьшее по абсолютной величине рассеяние наблюдается в системе с каплями дихлорэтана в воде, но при этом

модуль отклонения $|\delta|$ в точках максимума и минимума становится больше: при частотах 80 и 140 кГц в точках максимума (при соприкосновении сфер) отклонение, соответственно, достигает 98,82 и 95,91%, а в точках минимума (при $k_0 d_{\text{exp}} = 2,28$ и $2,21$) — 20,86 и 20,73%. В случаях воздушных пузырьков в воде, капель дихлорэтана в воде и капель воды в дихлорэтана модуль отклонения $|\delta|$ не превышает 5% при $k_0 d_{\text{exp}} > 9$ и не зависит от частоты, а для капель воды в воздухе — при $k_0 d_{\text{exp}} > 5,7$ и $f = 80$ кГц, при $k_0 d_{\text{exp}} > 9,2$ и $f = 140$ кГц. Таким образом, для разных сред вокруг и внутри сфер получено, что эффектами многократного рассеяния при близком расположении препятствий (в общем случае при $k_0 d_{\text{exp}} \leq 9,2$) пренебрегать нельзя.

В трехмерном пространстве представляет интерес система из трех ($N = 3$) звукопроницаемых сфер для четырех базовых конфигураций (I–IV), в которых центры первой и третьей сфер смещаются вдоль оси Oy в противоположных направлениях, а центр второй сферы располагается по-разному (Рис. 5а):

- в конфигурации I зафиксирован и лежит на одной линии с центрами первой и второй сфер;
- в конфигурации II движется вдоль оси Ox к монополюсному источнику излучения M_{ms} ;
- в конфигурации III удаляется по оси Ox от монополюсного источника излучения M_{ms} ;
- в конфигурации IV из своего первоначального положения сдвигается по оси Oz .

Во всех конфигурациях начало декартовых осей координат совпадало с положением монополюсного источника излучения (см. точку M_{ms}); система из трех сфер имела основные параметры: $R_0 = 0,58$ м; $f = 80$ и 400 кГц; радиусы сфер $a_i \equiv a = 585$ мкм ($i = 1, 2, 3$). Начальное значение безразмерного параметра $k_0 d_0$ определялось из условия, что сферы соприкасаются.

Вычислительные эксперименты проводились для двух случаев, когда внешняя и внутренняя среды существенно отличались упругостью: воздушные пузырьки в воде и капли воды в воздухе. Для всех конфигураций и заданной точности решения $\delta_{\text{fix}} = 1\%$ при частоте $f = 80$ кГц оказалось достаточным число усечения рядов $n_{\text{tr}} = 8$, а при частоте $f = 400$ кГц — $n_{\text{tr}} = 6$ для воздушных пузырьков в воде и $n_{\text{tr}} = 7$ для капель воды в воздухе. При шаге по координате $k_0 d$, равном $\Delta h = (20 - k_0 d_0) / 200$ (с одинаковым количеством расчетных точек в каждом вычислительном эксперименте), общее время расчета (t_{cpu}) для $n_{\text{tr}} = 8$ составило 85 с, для $n_{\text{tr}} = 7$ — 47 с и для $n_{\text{tr}} = 6$ — 30 с.

На рисунках 5б представлены зависимости нормированной величины $\sigma_s / (\pi a^2)$ от безразмерного параметра $k_0 d$ для конфигураций воздушных пузырьков в воде с учетом взаимодействия между сферами (σ_s^+ , толстые линии) для случая, когда полное сечение рассеяния определяется по формулам (11) для конфигурации I или (10) для конфигураций II–IV, и без взаимодействия (σ_s^- , тонкие линии). Рисунки 5в демонстрируют аналогичные графики в случае капель воды в воздухе. В таблицах 2 и 3 приведены следующие данные: $k_0 d_0$ — начальное значение, при котором сферы соприкасаются; значения δ_{max} и $k_0 d_{\text{max}}$, отвечающие максимальному отклонению δ , вычисленному по формуле (12) (максимальный рост рассеяния); значения δ_{min} и $k_0 d_{\text{min}}$, соответствующие минимальному отклонению δ (максимальное падение рассеяния); $k_0 d_{10\%}$ и $k_0 d_{5\%}$ — минимальные значения, начиная с которых выполняются условия $|\delta| < 10\%$ и $|\delta| < 5\%$. Параметры системы, рассмотренные для конфигураций пузырьков в воде, дают волновые радиусы $k_0 a$, лежащие вне монополюсного резонанса, и резонансов, возникающих при более высоких частотах [17], то есть эффекты, связанные с резонансом в пузырьковых системах, исключены из исследований.

Анализ численных результатов (см. Рис. 5 и Табл. 2 и 3) показал следующее. Частота колебаний величины полного сечения рассеяния σ_s зависит от конфигурации системы (период колебаний при конфигурации I в 4 раза больше, чем при конфигурациях II и III, и в 2 раза — при конфигурации IV), и на его величине не сказываются физические параметры системы (плотность и скорость звука окружающей и внутренней сред). При одних конфигурациях системы характер многократного рассеяния меняется несущественно (как при конфигурациях II и III), а при других — значительно (как при конфигурациях I, II (или III) и IV). Эффекты многократного рассеяния проявляются максимально в основном на некотором волновом расстоянии $k_0 d$ между сферами, а при его дальнейшем увеличении эти эффекты затухают. Значение предельного волнового расстояния между центрами сфер $k_0 d$, до которого эффекты многократного рассеяния являются существенными, для рассмотренных конфигураций и частот, можно определить с помощью таблиц 2 и 3.

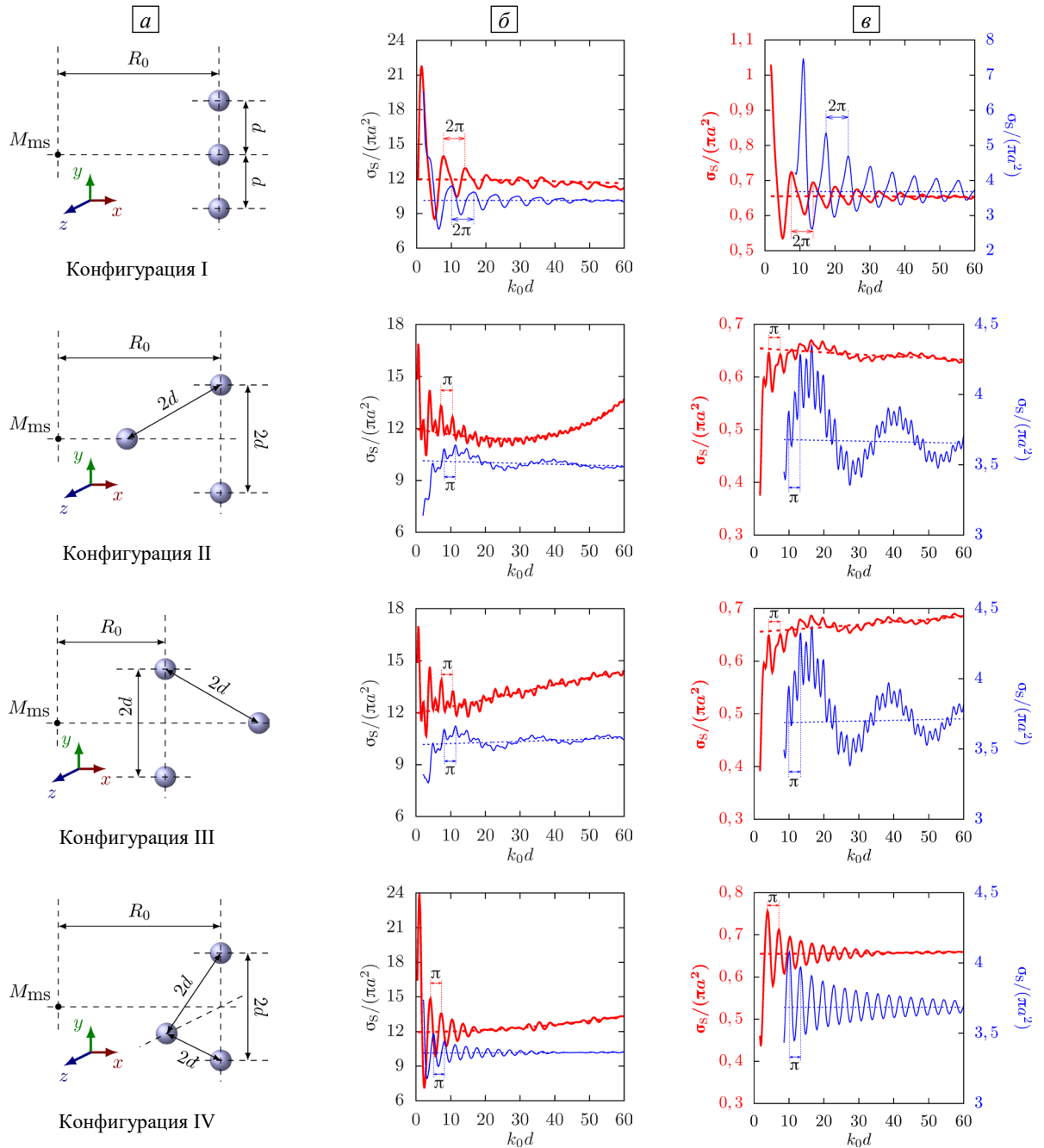


Рис. 5. Схема конфигурации (а), зависимость нормированного полного сечения рассеяния $\sigma_s / (\pi a^2)$ от безразмерного параметра k_0d для воздушных пузырьков в воде (б) и капель воды в воздухе (в) для двух значений частоты f , кГц: 80 (толстые линии) и 400 (тонкие линии), с учетом (сплошные линии) и без учета (штриховые линии) взаимодействия между сферами

Таблица 2. Результаты вычислительных экспериментов в случае системы из трех воздушных пузырьков в воде при воздействии монопольного источника излучения с разной частотой f (в скобках соответствующие значения волнового радиуса k_0a)

Конфигурация	$f = 80$ кГц ($k_0a \approx 0,20$)							$f = 400$ кГц ($k_0a \approx 0,99$)						
	k_0d_0	$\delta_{\max}, \%$	k_0d_{\max}	$\delta_{\min}, \%$	k_0d_{\min}	$k_0d_{10\%}$	$k_0d_{5\%}$	k_0d_0	$\delta_{\max}, \%$	k_0d_{\max}	$\delta_{\min}, \%$	k_0d_{\min}	$k_0d_{10\%}$	$k_0d_{5\%}$
I	0,40	82,33	1,39	-28,77	5,16	12,32	49,67	1,98	92,90	1,98	-24,62	6,43	13,39	25,96
II		41,51	0,59	-12,14	2,98	7,55	13,91		9,50	11,26	-31,26	1,98	4,30	15,13
III		41,84	0,59	-11,70	2,98	7,75	15,30		9,82	11,46	-21,85	3,53	4,30	15,13
IV		100,91	0,99	-40,86	2,38	9,14	13,91		45,26	1,98	-21,87	3,14	6,82	14,75

Таблица 3. Результаты вычислительных экспериментов в случае системы из трех капель воды в воздухе при воздействии монополюсного источника излучения с разной частотой f (в скобках соответствующие значения волнового радиуса $k_0 a$)

Конфигурация	$f = 80$ кГц ($k_0 a \approx 0,87$)							$f = 400$ кГц ($k_0 a \approx 4,33$)						
	$k_0 d_0$	$\delta_{\max}, \%$	$k_0 d_{\max}$	$\delta_{\min}, \%$	$k_0 d_{\min}$	$k_0 d_{10\%}$	$k_0 d_{5\%}$	$k_0 d_0$	$\delta_{\max}, \%$	$k_0 d_{\max}$	$\delta_{\min}, \%$	$k_0 d_{\min}$	$k_0 d_{10\%}$	$k_0 d_{5\%}$
I	1,71	57,19	1,71	-18,38	5,02	7,93	17,84	8,57	102,91	10,97	-28,89	13,37	49,20	58,46
II		3,33	16,48	-42,73	1,71	5,60	9,10		18,33	16,46	-8,67	27,43	20,23	42,17
III		3,60	16,48	-40,35	1,71	5,79	9,10		18,47	16,63	-8,55	27,43	20,23	42,17
IV		15,47	3,85	-33,50	1,91	5,79	12,01		10,76	10,11	-6,80	8,57	10,47	19,88

Выявлено, что на скорость затухания влияют расположение сфер, частота излучения монополюсного источника и физические параметры системы. Так, для воздушных пузырьков в воде наибольший вклад многократного рассеяния в величину полного сечения рассеяния дает конфигурация IV при $f = 80$ кГц. Для капель воды в воздухе наибольший рост данной величины относительно случая без взаимодействия сфер имеет место при конфигурации I и $f = 400$ кГц, а наибольшее падение — при конфигурациях II и III и $f = 80$ кГц.

Далее рассмотрена конфигурация системы препятствий, представленная в работе [37]: рассеивающий слой, состоящий из $N = 11 \times 11 = 121$ сфер одинакового радиуса $a = 1$. Сферы равномерно распределены в плоскости Oyz с наименьшим расстоянием между соседними центрами, которое равно δl (см. Рис. 6а). Но, в отличие от работы [37], где сферы являются звуконепроницаемыми и жесткими, в настоящем исследовании сферы звукопроницаемы. В связи с этим для возможности сравнения с численными результатами работы [37] выбрана внешняя среда с физическими свойствами воздуха, а внутренняя — со свойствами воды. Монополюсный источник излучения $M_{ms}(-10a, 0, 0)$ располагался на оси Ox на расстоянии $d = 10a$ от плоскости, проходящей через центры сфер, а точка расчета M — на оси Ox симметрично точке M_{ms} . На рисунке 6б представлены результаты расчета функции

$$STF = 20 \lg \left| \frac{\Psi|_M}{\Psi_{in}|_M} \right|,$$

характеризующей рассеяние в точке $M_{ms}(-10a, 0, 0)$, для волновых радиусов $k_0 a = 1, 3, 5$, полученные в работе [37] при $\delta l = 5a$ и фиксированного числа усечения рядов $n_{tr} = 5$ (закрашенные кружки большого радиуса) для звуконепроницаемых жестких сфер, и в настоящей работе для $k_0 a = 1, 5$ при $\delta l = 3a$ и $5a$, а также при n_{tr} , отвечающем заданной точности $\delta_{fix} = 1\%$ (см. Табл. 4), (средние и малые закрашенные

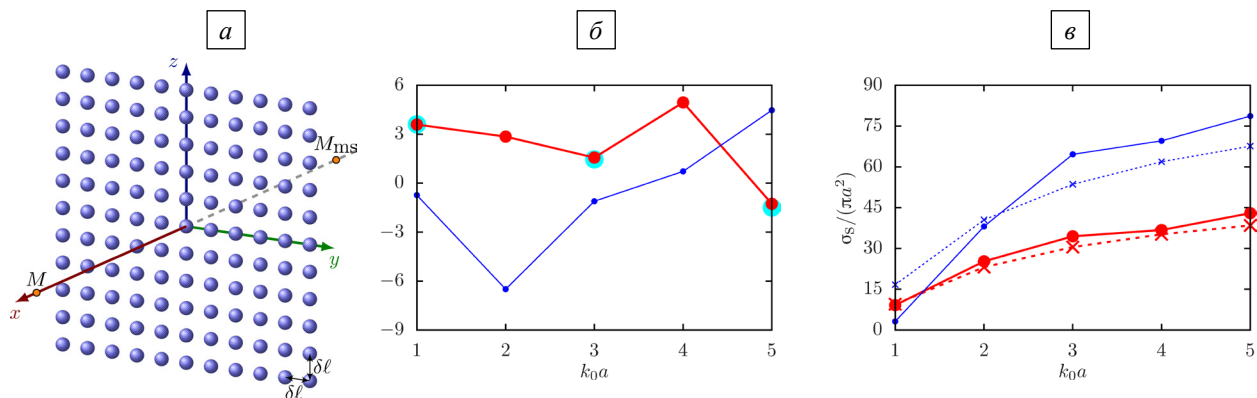


Рис. 6. Конфигурация рассеивающего слоя из капель воды числом 121, имеющих одинаковый радиус и равномерно распределенных в воздухе (а); зависимость функции STF в точке $M(10a, 0, 0)$ от волнового радиуса $k_0 a$, рассчитанная по алгоритму из [36] (толстые и тонкие линии с закрашенными кружками среднего и малого радиуса), и данные для слоя из жестких сфер [37] (закрашенные кружки большого радиуса) (б); характер нормированного полного сечения рассеяния $\sigma_s/(\pi a^2)$ в зависимости от $k_0 a$ (в) с учетом (сплошные линии) и без учета (штриховые линии) взаимодействия между сферами; на фрагментах (б) и (в) тонкие линии с символами отвечают расстоянию $\delta l = 3a$, толстые линии с символами — $\delta l = 5a$

кружки) для капель воды в воздухе. Относительные погрешности авторских результатов, отнесенных к расчетным данным работы [37] составили: 0,19% для $k_0a = 1$; 0,92% для $k_0a = 3$; 4,64% для $k_0a = 5$. Увеличение погрешности связано с тем, что с ростом волнового радиуса k_0a требуется большее n_{tr} , при котором достигается устойчивое решение (см. Табл. 4). Следовательно, растет отклонение конечного результата от случая малой жесткой сферы. Таблица 4 также содержит процессорное время t_{cpu} , затраченное на расчет в рассматриваемой точке.

Таблица 4. Значения числа усечения рядов n_{tr} , при котором достигается точность $\delta_{fix} = 1\%$ при расчете конфигурации из 121 сферы, и процессорное время t_{cpu} для различных значений δl и k_0a

δl	k_0a									
	1		2		3		4		5	
	n_{tr}	t_{cpu}, c	n_{tr}	t_{cpu}, c	n_{tr}	t_{cpu}, c	n_{tr}	t_{cpu}, c	n_{tr}	t_{cpu}, c
$3a$	4	38	7	550	9	1430	10	2464	12	6848
$5a$	3	12	5	112	8	1165	8	1153	12	6580

Рисунок 6в демонстрирует результаты расчетов нормированного полного сечения рассеяния $\sigma_s / (\pi a^2)$ с учетом взаимодействия между сферами. Видно, что для рассмотренных параметров системы учет взаимодействия между сферами является важным, хотя оно и уменьшается с ростом расстояния между центрами сфер: среднее арифметическое отклонение модуля величины δ , определяемой по формуле (12), составляет около 27,3 и 8,4%, соответственно, при $\delta l = 3a$ и $\delta l = 5a$.

5. Заключение

В настоящей работе для анализа многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопроницаемых сфер впервые получена явная формула для основной характеристики данного явления — полного сечения рассеяния, учитывающая взаимодействие между сферами в системе. Формула применима для любого числа сфер различных радиусов, произвольным образом расположенных в трехмерном пространстве, и при произвольном внешнем воздействии в границах применимости алгоритмов, используемых для общего [36] или осесимметричного [42] случаев.

На примерах систем сфер, имеющих базовые конфигурации, проведен анализ влияния основных параметров системы (плотности и скорости звука вокруг и внутри сфер, частоты внешнего воздействия, расстояния между центрами сфер, положения сфер относительно друг друга) путем сравнения полного сечения рассеяния, полученного с помощью формул (10) и (11) в общем и осесимметричном случаях, учитывающих взаимодействие между рассеивателями, и формулы (5) без учета взаимодействия.

Вычислительные эксперименты, выполненные с учетом и без учета взаимодействия между сферами, подтвердили, что эффектами многократного рассеяния при близком расположении сфер пренебрегать нельзя, а именно:

- для систем из двух сфер, расположенных на одинаковом расстоянии от монополюсного источника излучения, данные эффекты для капель воды в воздухе, то есть при выполнении условий $\chi_v / \chi_0 \gg 1$, $\rho_v / \rho_0 \gg 1$ и частоте $f = 80$ кГц, существенны при волновом расстоянии между центрами сфер $k_0 d_{exp} \leq 5,7$, а для большей частоты ($f = 140$ кГц) и других соотношений физических параметров сред (независимо от частоты) — при $k_0 d_{exp} \leq 9,2$. Дальнейшее увеличение волнового расстояния $k_0 d_{exp}$ дает модуль отклонения δ , определяемого по формуле (12), менее 5%;
- для систем из трех сфер (воздушных пузырьков в воде и капель воды в воздухе), образующих четыре базовых конфигурации, при частоте излучения 80 и 400 кГц установлена величина предельного волнового расстояния $k_0 d_{5\%}$, начиная с которого модуль отклонения $|\delta| < 5\%$ (см. Табл. 2 и 3);
- для системы из 121 сферы (капель воды в воздухе), центры которых равномерно расположены в одной плоскости [37], эффекты многократного рассеяния существенны при всех рассмотренных параметрах.

На примере систем из трех сфер также показано, что существуют конфигурации, где положение сфер при одних и тех же параметрах системы практически не влияет на характер многократного рассеяния. Однако в большинстве случаев эффекты многократного рассеяния существенно зависят не только от основных параметров системы, но и от положения сфер в конфигурации.

Литература

1. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с.
2. Сташкевич А.П. Акустика моря. Л.: Судостроение, 1966. 356 с.
3. Каллистратова М.А. Радиоакустическое зондирование атмосферы. М.: Наука, 1985. 197 с.
4. Алейшин Н.П., Щербинский В.Г. Радиационная, ультразвуковая и магнитная дефектоскопия металлоизделий. М.: Высшая школа, 1991. 271 с.
5. Применение ультразвука в медицине: Физические основы / Под ред. К. Хилла. М.: Мир, 1989. 589 с.
6. Демин И.Ю., Прончатов-Рубцов Н.В. Современные акустические методы исследований в биологии и медицине. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 121 с.
7. Технология создания позиционируемого 3D звука <https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html> (дата обращения: 12.10.2022).
8. Skvortsov A., MacGillivray I., Sharma G.S., Kessissoglou N. Sound scattering by a lattice of resonant inclusions in a soft medium // Phys. Rev. E. 2019. Vol. 99. 063006. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.063006>
9. Sharma G.S., Skvortsov A., MacGillivray I., Kessissoglou N. Sound scattering by a bubble metasurface // Phys. Rev. B. 2020. Vol. 102. 214308. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.102.214308>
10. Sharma G.S., Skvortsov A., MacGillivray I., Kessissoglou N. On superscattering of sound waves by a lattice of disk-shaped cavities in a soft material // Appl. Phys. Lett. 2020. Vol. 116. 041602. <https://doi.org/10.1063/1.5130695>
11. Rohfrütsch A., Conoir J., Marchiano R., Valier-Brasier T. Numerical simulation of two-dimensional multiple scattering of sound by a large number of circular cylinders // J. Acoust. Soc. Am. 2019. Vol. 145. P. 3320-3329. <https://doi.org/10.1121/1.5110310>
12. Rohfrütsch A., Conoir J., Valier-Brasier T., Marchiano R. Influence of the microstructure of two-dimensional random heterogeneous media on propagation of acoustic coherent waves // Phys. Rev. E. 2020. Vol. 101. 023001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.023001>
13. Martin P.A. Acoustic scattering by one bubble before 1950: Spitzer, Willis, and Division 6 // J. Acoust. Soc. Am. 2019. Vol. 146. P. 920-926. <https://doi.org/10.1121/1.5120127>
14. Foldy L.L. The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers // Phys. Rev. 1945. Vol. 67. P. 107-109. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.67.107>
15. Ainslie M.A., Leighton T.G. Review of scattering and extinction cross-sections, damping factors, and resonance frequencies of a spherical gas bubble // J. Acoust. Soc. Am. 2011. Vol. 130. P. 3184-3208. <https://doi.org/10.1121/1.3628321>
16. Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацьгура В.Т. Основы акустики. Киев: ИГМ НАНУ, 2009. 867 с.
17. Sage K.A., George J., Überall H. Multipole resonances in sound scattering from gas bubbles in a liquid // J. Acoust. Soc. Am. 1978. Vol. 63. S11. <https://doi.org/10.1121/1.2016503>
18. Латин А.Д. Резонансное рассеяние звука пузырьком газа в жидком слое // Акуст. журн. 1998. Т. 44, № 3. С. 426-427. http://www.akzh.ru/pdf/1998_3_426-427.pdf
19. Anderson V.C. Sound scattering from a fluid sphere // J. Acoust. Soc. Am. 1950. Vol. 22. P. 426-431. <https://doi.org/10.1121/1.1906621>
20. Насибуллаева Э.Ш. Исследование рассеяния от звуконепроницаемой одиночной сферы при внешнем воздействии // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 73-82. <https://doi.org/10.21662/uim2017.1.011>
21. Насибуллаева Э.Ш. Исследование акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 4. С. 79-91. <https://doi.org/10.21662/mfs2018.4.012>
22. Алексеев В.Н., Семенов А.Г. Рассеяние звука движущейся сферой // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 5. С. 789-797. http://www.akzh.ru/pdf/1992_5_789-797.pdf
23. Марневская Л.А. О рассеянии плоской волны на двух акустически жестких сферах // Акуст. журн. 1969. Т. 15, № 4. С. 579-583. http://www.akzh.ru/pdf/1969_4_579-583.pdf
24. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
25. Peterson B., Ström S. Matrix formulation of acoustic scattering from an arbitrary number of scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 1974. Vol. 56. P. 771-780. <https://doi.org/10.1121/1.1903325>
26. Лебедев А.В., Хилько А.И. Интегральный поперечник рассеяния плоской акустической волны на двух близко расположенных импедансных сферах // Акуст. журн. 1997. Т. 43, № 5. С. 661-667. http://www.akzh.ru/pdf/1997_5_661-667.pdf
27. Valier-Brasier T., Conoir J.-M. Resonant acoustic scattering by two spherical bubbles // J. Acoust. Soc. Am. 2019. Vol. 145. P. 301-311. <https://doi.org/10.1121/1.5087556>
28. Gaunard G.C., Huang H., Strifors H. Acoustic scattering by a pair spheres // J. Acoust. Soc. Am. 1995. Vol. 98. P. 495-507. <https://doi.org/10.1121/1.414447>
29. Gabrielli P., Mercier-Finidori M. Acoustic scattering by two spheres: Multiple scattering and symmetry considerations // J. Sound Vib. 2001. Vol. 241. P. 423-439. <https://doi.org/10.1006/Jsvi.2000.3309>
30. Румелиотис Д.А., Котсис А.Д. Рассеяние звуковых волн на двух сферических телах, одно из которых имеет малый радиус // Акуст. журн. 2007. Т. 53, № 1. С. 38-49. http://www.akzh.ru/pdf/2007_1_38-49.pdf
31. Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107. P. 3006-3017. <https://doi.org/10.1121/1.429330>
32. Бабайлов Э.П., Дубов А.А., Каневский В.А. Рассеяние звука поглощающей сферой // Акуст. журн. 1991. Т. 37, № 5. С. 851-857. http://www.akzh.ru/pdf/1991_5_851-857.pdf
33. Бабайлов Э.П., Дубов А.А. Отражение звука от скоплений газовых пузырей в жидкости // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 5. С. 779-783. http://www.akzh.ru/pdf/1989_5_779-783.pdf
34. Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am. 2003. Vol. 113. P. 3001-3011. <https://doi.org/10.1121/1.1572141>

35. Hahn T.R. Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles using effective medium theory // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. Vol. 122. P. 3252-3267. <https://doi.org/10.1121/1.2793610>
36. Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // *Вычислительные технологии.* 2022. Т. 27, № 2. С. 19-36. <https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.2.003>
37. Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. Vol. 112. P. 2688-2701. <https://doi.org/10.1121/1.1517253>
38. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
39. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
40. Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. Vol. 104. P. 3048-3058. <https://doi.org/10.1121/1.423886>
41. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
42. Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // *Вестник УГАТУ.* 2021. Т. 25, № 2(92). С. 93-101. https://doi.org/10.54708/19926502_2021_2529293
43. LAPACK — Linear Algebra PACKage <https://netlib.sandia.gov/lapack/> (дата обращения: 12.10.2022).
44. Zhang S., Jin J. Computation of special functions. Wiley, 1996. 717 p.

References

1. Ishimaru A. *Wave propagation scattering in random media.* New York: Academic Press, 1978. 272 p.
2. Stashkevich A.P. *Akustika morya* [Acoustics of the sea]. Leningrad, Sudostroyeniye, 1966. 356 p.
3. Kallistratova M.A. *Radioakusticheskoye zondirovaniye atmosfery* [Radio-acoustic sounding of the atmosphere]. Moscow, Nauka, 1985. 197 p.
4. Aleshin N.P., Shcherbinskiy V.G. *Radiatsionnaya, ul'trazvukovaya i magnitnaya defektoskopiya metalloizdeliy* [Radiation, ultrasonic and magnetic flaw detection of metal products]. Moscow, Vysshaya shkola, 1991. 271 p.
5. *Physical principles of medical ultrasonics*, eds. C.R. Hill. Ellis Horwood Ltd., 1986. 494 p.
6. Demin I.Yu., Pronchatov-Rubtsov N.V. *Sovremennyye akusticheskiye metody issledovaniy v biologii i meditsine* [Modern acoustic research methods in biology and medicine]. N. Novgorod, Izd-vo NNGU, 2007. 121 p.
7. <https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html> (accessed 12.10.2022).
8. Skvortsov A., MacGillivray I., Sharma G.S., Kessissoglou N. Sound scattering by a lattice of resonant inclusions in a soft medium. *Phys. Rev. E*, 2019, vol. 99, 063006. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.063006>
9. Sharma G.S., Skvortsov A., MacGillivray I., Kessissoglou N. Sound scattering by a bubble metasurface. *Phys. Rev. B*, 2020, vol. 102, 214308. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.102.214308>
10. Sharma G.S., Skvortsov A., MacGillivray I., Kessissoglou N. On superscattering of sound waves by a lattice of disk-shaped cavities in a soft material. *Appl. Phys. Lett.*, 2020, vol. 116, 041602. <https://doi.org/10.1063/1.5130695>
11. Rohfritsch A., Conoir J., Marchiano R., Valier-Brasier T. Numerical simulation of two-dimensional multiple scattering of sound by a large number of circular cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2019, vol. 145, pp. 3320-3329. <https://doi.org/10.1121/1.5110310>
12. Rohfritsch A., Conoir J., Valier-Brasier T., Marchiano R. Influence of the microstructure of two-dimensional random heterogeneous media on propagation of acoustic coherent waves. *Phys. Rev. E*, 2020, vol. 101, 023001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.023001>
13. Martin P.A. Acoustic scattering by one bubble before 1950: Spitzer, Willis, and Division 6. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2019, vol. 146, pp. 920-926. <https://doi.org/10.1121/1.5120127>
14. Foldy L.L. The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Phys. Rev.*, 1945, vol. 67, pp. 107-109. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.67.107>
15. Ainslie M.A., Leighton T.G. Review of scattering and extinction cross-sections, damping factors, and resonance frequencies of a spherical gas bubble. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, vol. 130, pp. 3184-3208. <https://doi.org/10.1121/1.3628321>
16. Grinchenko V.T., Vovk I.V., Matsypura V.T. *Osnovy akustiki* [Basics of acoustics]. Kiev, IGM NANU, 2009. 867 p.
17. Sage K.A., George J., Überall H. Multipole resonances in sound scattering from gas bubbles in a liquid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1978, vol. 63, S11. <https://doi.org/10.1121/1.2016503>
18. Lapin A.D. Rezonansnoye rasseyaniye zvuka puzyr'kom gaza v zhidkom sloye [Resonance Sound Scattering of a Gas Bubble in a Layer of Liquid]. *Akusticheskiy Zhurnal – Acoustical Physics*, 1998, vol. 44, no. 3, pp. 426-427.
19. Anderson V.C. Sound scattering from a fluid sphere. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1950, vol. 22, pp. 426-431. <https://doi.org/10.1121/1.1906621>
20. Nasibullaeva E.Sh. Investigation of scattering from soundproof single sphere under external influence. *Trudy Instituta mekhaniki im. R.R. Mavlyutova UNTs RAN – Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics*, 2017, vol. 12, no. 1, pp. 73-82. <https://doi.org/10.21662/uim2017.1.011>
21. Nasibullaeva E.Sh. The study of acoustic scattering from a single sound-permeable sphere. *Mnogofaznyye sistemy – Multiphase Systems*, 2018, vol. 13, no. 4, pp. 79-91. <https://doi.org/10.21662/mfs2018.4.012>
22. Alekseyev V.N., Semenov A.G. Rasseyaniye zvuka dvizhushcheysya sferoy [Sound scattering by moving sphere]. *Akusticheskiy Zhurnal – Acoustical Physics*, 1992, vol. 38, no. 5, pp. 789-797.
23. Marnevskaya L.A. O rasseyanii ploskoy volny na dvukh akusticheskikh zhestkikh sferakh [To scattering of a plane wave on two acoustic rigid spheres]. *Akusticheskiy Zhurnal – Acoustical Physics*, 1969, vol. 15, no. 4, pp. 579-583.
24. Ivanov Ye.A. *Diffraction of electromagnetic waves on two bodies.* Washington, National Aeronautics and Space Administration, 1970. 597 p.
25. Peterson B., Ström S. Matrix formulation of acoustic scattering from an arbitrary number of scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1974, vol. 56, pp. 771-780. <https://doi.org/10.1121/1.1903325>
26. Lebedev A.V., Khil'ko A.I. Integral'nyy poperechnik rasseyaniya ploskoy akusticheskoy volny na dvukh blizko raspolozhennykh impedantsnykh sferakh [The integral scattering cross section of a plane acoustic wave from two dose impedance spheres]. *Akusticheskiy Zhurnal – Acoustical Physics*, 1997, vol. 43, no. 5, pp. 661667

27. Valier-Brasier T., Conoir J.-M. Resonant acoustic scattering by two spherical bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2019, vol. 145, pp. 301-311. <https://doi.org/10.1121/1.5087556>
28. Gaunaurd G.C., Huang H., Strifors H. Acoustic scattering by a pair spheres. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1995, vol. 98, pp. 495-507. <https://doi.org/10.1121/1.414447>
29. Gabrielli P., Mercier-Finidori M. Acoustic scattering by two spheres: Multiple scattering and symmetry considerations. *J. Sound Vib.*, 2001, vol. 241, pp. 423-439. <https://doi.org/10.1006/Jsvi.2000.3309>
30. Roumeliotis J.A., Kotsis A.D. Acoustic scattering from two spheres, one with a small radius. *Acoustical Physics*, 2007, vol. 53, pp. 33-43. <https://doi.org/10.1134/S1063771007010046>
31. Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2000, vol. 107, pp. 3006-3017. <https://doi.org/10.1121/1.429330>
32. Babailov E.P., Dubov A.A., Kanevskii V.A. Rasseyaniye zvuka pogloshchayushchey sferoy [Sound scattering by an absorbing sphere]. *Akusticheskiy Zhurnal – Acoustical Physics*, 1991, vol. 37, no. 5, pp. 851-857.
33. Babailov E.P., Dubov A.A. Otrazheniye zvuka ot skopleniy gazovykh puzyrey v zhidkosti [Sound reflection from gas bubble groupings in a liquid]. *Akusticheskiy Zhurnal – Acoustical Physics*, 1989, vol. 35, no. 5, pp. 779-783.
34. Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2003, vol. 113, pp. 3001-3011. <https://doi.org/10.1121/1.1572141>
35. Hahn T.R. Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles using effective medium theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2007, vol. 122, pp. 3252-3267. <https://doi.org/10.1121/1.2793610>
36. Nasibullaeva E.Sh. Simulation of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres in 3D space. *Vychislitel'nye tekhnologii – Computational technologies*, 2022, vol. 27, no. 2, pp. 19-36. <https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.2.003>
37. Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2002, vol. 112, pp. 2688-2701. <https://doi.org/10.1121/1.1517253>
38. Vladimirov V.S. *Equations of mathematical physics*. NY: Marcell Dekker Inc., 1971. 427 p.
39. Korn G.A., Korn Th.M. *Mathematical handbook for scientists and engineers*. McGraw Hill Book Company, 1968. 943 p.
40. Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1998, vol. 104, pp. 3048-3058. <https://doi.org/10.1121/1.423886>
41. Shenderov E.L. *Izlucheniyе i rasseyaniye zvuka [Radiation and scattering sound]*. Leningrad, Sudostroyeniye, 1989. 304 p.
42. Nasibullaeva E.Sh. Numerical analysis of acoustic scattering from sound-permeable spheres under external influence. *Vestnik UGATU – Scientific journal of Ufa State Aviation Technical University*, 2021, vol. 25, no. 2(92), pp. 93-101. https://doi.org/10.54708/19926502_2021_2529293
43. <https://netlib.sandia.gov/lapack/> (accessed 12.10.2022).
44. Zhang S., Jin J. *Computation of special functions*. Wiley, 1996. 717 p.

Поступила в редакцию 07.07.2022; после доработки 14.10.2022; принята к опубликованию 14.10.2022