

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.3.26](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.3.26)

УДК 532.68; 53.06

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ ОКРУЖАЮЩЕГО ВОЗДУХА НА ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ СВОЙСТВ ЖИДКОСТИ В ЛЕВИТИРУЮЩЕЙ КАПЛЕ

В.В. Коновалов

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

В настоящей работе рассмотрены малоамплитудные капиллярные колебания капли жидкости, имеющей в равновесии сферическую форму и помещенной в объем неподвижного легкого газа. В приближении малой вязкости сред, а также при условии, что среды сильно отличаются по своей плотности, найдена поправка к собственной частоте и оценен коэффициент вязкого затухания. Выводы теории, установленные автором аналитически, проверены в численных расчетах, выполненных для капель воды либо ртути в воздухе. Показано, что вклады вязкости и инерции газа в вещественную частоту свободных колебаний системы незначительны. Что касается коэффициента затухания, то вязкость газа дает вклад, определяемый как корень квадратный из кинематической вязкости газа, которым зачастую уже нельзя пренебрегать. Рассчитанный относительно линейного по вязкости вклада жидкости коэффициент затухания растет как корень четвертой степени из размера капли. Так, он составляет порядка десяти процентов для капли воды диаметром 5 мм, находящейся в воздухе, а для такой же по размеру капли ртути в тех же условиях относительная величина вклада достигает пяти процентов. Полученные результаты необходимы для улучшения метода «левитирующей» капли, который является разновидностью динамического метода капиллярных волн, применяемого для бесконтактного измерения коэффициентов вязкости и поверхностного натяжения. Предложено обобщение формулы Ламба для расчета вязкости жидкости, в которую, помимо декремента затухания квадрупольной моды и размера капли, входят плотность и вязкость газа, а также собственная частота колебаний системы. Расчет же коэффициента поверхностного натяжения может осуществляться по формуле Релея, которая, как оказывается, не требует коррекции.

Ключевые слова: динамический метод капиллярных волн, измерение вязкости жидкости

INFLUENCE OF AMBIENT AIR VISCOSITY ON THE ACCURACY OF MEASUREMENTS OF LIQUID PROPERTIES IN A LEVITATING DROP

V.V. Kononov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

In this paper, we consider low-amplitude capillary oscillations of a liquid droplet that has a spherical shape in equilibrium and is placed in an immobile light gas volume. In the approximation of low medium viscosity, and under the condition that the media differ greatly in density, a correction to natural frequency was determined and the viscous damping coefficient was estimated. Theoretical predictions were obtained analytically and verified by performing numerical calculations for water or mercury drops in the air. It is shown that the contributions of the viscosity and inertia of the gas to the real frequency of free oscillations of the system are insignificant. As regards the damping factor, the gas viscosity makes a contribution determined by the square root of its kinematic viscosity, which can no longer be neglected. The damping coefficient calculated relative to the liquid contribution linear in viscosity increases as the fourth root of the droplet size. For the water drop of 5 mm diameter, it is about ten percent, and for the mercury drop of the same size, the relative contribution reaches five percent. The results obtained are necessary for improving the "levitating" drop method, which is a variation of the dynamic capillary wave method used for non-contact measurement of viscosity coefficients and surface tension. A generalization of the Lamb formula for calculating liquid viscosity is proposed, which, in addition to the damping decrement of the quadrupole mode and the drop size, includes the density and viscosity of the gas, as well as the natural frequency of the system. The surface tension coefficient can be calculated using the Rayleigh formula, which, as it turns out, does not require a correction.

Key words: dynamic capillary wave method, liquid viscosity measurement

1. Введение

Одним из известных способов бесконтактного измерения коэффициентов поверхностного натяжения и вязкости жидкого материала является метод «левитирующей» капли, развиваемый в ряде работ (см. например [1, 2]). Метод чаще всего применяется при работе с расплавленными металлами и сплавами, где необходим контроль температуры и соблюдение химической чистоты. За отсутствием контакта капли с какой-либо твердой подложкой она «висит» в акустическом [3, 4] или электромагнитном поле [5–7], либо эксперимент проводится в условиях невесомости. Нестационарные возмущения поверхности образца сканируются внешней видеосистемой, что позволяет после компьютерной обработки с выделением спектра Фурье вычислить собственные частоты и амплитуды мод. Похожая методика заключается в контролируемом возбуждении вынужденных колебаний системы с последующим определением резонансных пиков [8]. Если же требование отсутствия контакта с сосудом не так важно, то очевидными преимуществами обладают измерения при наблюдении капиллярных волн на плоской в равновесии свободной поверхности жидкости [9].

Для вычисления коэффициента поверхностного натяжения γ наиболее приемлема формула Релея [10]:

$$\omega_2 = \sqrt{32\pi\gamma/(3m)},$$

в которую, помимо искомого коэффициента γ , входят собственная частота квадрупольной моды ω_2 и масса жидкой капли m . Выражение показывает хорошую точность в отсутствие силы тяжести, однако в ситуации поддерживающего каплю внешнего поля ее форма приобретает асферичность. Это, согласно [11], приводит к расщеплению спектра собственных частот по азимутальному числу моды. Похожий эффект описан для составной капли в случае ее малой неконцентричности [12], но оно оказывается уже второго, а не первого порядка (см. [11]) по величине отклонения конфигурации капли от ее идеальной формы.

Так как амплитуда квадрупольной моды демонстрирует вязкое затухание, то из вычисленного значения его декремента λ_2 можно найти коэффициент кинематической вязкости жидкости ν . Такую связь дает формула Ламба [13]:

$$\lambda_2 = 5\nu/R^2,$$

где R — радиус жидкой капли в равновесии. Однако, как показано в [14], наличие активного вещества, адсорбированного в поверхностном слое, может существенным образом влиять на точность измерений.

При использовании метода «левитирующей» капли зачастую не учитывается вязкость окружающего каплю воздуха либо другого газа. Но, как следует из [15], указанный параметр важен для достаточно длинных волн на плоской в равновесии границе раздела вода–воздух. Более того, при длинах волн, больших примерно двадцати сантиметров, вклад вязкой диссипации в воздушной среде начинает превосходить рассчитанный по Ламбу [13] декремент затухания для свободной поверхности воды. В [16] теория [15] расширена путем учета эффекта фазового перехода на межфазной поверхности жидкость–пар.

Численные расчеты [17], проведенные с соблюдением всех условий, при которых метод «левитирующей» капли дает адекватные результаты, говорят о том, что вязкость газа, действительно, в ряде случаев можно не принимать во внимание. На практике полезным представляется простое выражение, оценивающее пренебрежение вязкостью окружающей каплю среды и задающее критерий применимости приближения Ламба. Получение такого критерия является целью настоящей работы.

2. Затухание колебаний капли маловязкой жидкости в объеме легкого газа

Рассмотрим сферическую в равновесии жидкую каплю радиуса R , взвешенную в объеме легкого газа, неподвижного вдали от капли. Материальные параметры сред представлены их плотностями ρ_j , а также коэффициентами кинематической вязкости ν_j . Здесь и далее индекс j указывает на жидкость внутри капли ($j = 1$) либо на внешний газ ($j = 2$), а величина без индекса может относиться к любой из этих сред. На межфазной поверхности действует поверхностное натяжение, заданное коэффициентом γ .

Приведем описывающие проблему уравнения к безразмерному виду, выбрав за единицу длины равновесный радиус капли R , за единицу времени — капиллярное время $\tau = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)R^3/\gamma}$, за единицу давления — капиллярное давление γ/R . В качестве контролирующих параметров используем безразмерные плотности сред

$$\tilde{\rho}_j = \frac{\rho_j}{\rho_1 + \rho_2},$$

для которых выполняется соотношение $\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2 = 1$, а также числа Рейнольдса

$$\text{Re}_j = \frac{1}{\nu_j} \frac{R^2}{\tau}.$$

Тогда течение, вызванное малоамплитудными колебаниями системы, управляется следующими линеаризованными уравнениями Навье–Стокса для вязкой несжимаемой среды:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} = -\frac{\nabla p_j}{\tilde{\rho}_j} + \frac{1}{\text{Re}_j} \Delta \mathbf{u}_j, \quad (1)$$

а также уравнениями непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_j = 0. \quad (2)$$

Здесь t — время, а \mathbf{u}_j и p_j — поля скорости и давления соответственно.

Начало сферической системы координат $Or\vartheta\phi$ выберем в центре равновесной капли. Тогда линеаризованные граничные условия,несенные на невозмущенную границу раздела сред ($r = 1$), примут следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = u_{r1}, \quad (3)$$

$$[u_r] = 0, \quad (4)$$

$$[u_\vartheta] = 0, \quad (5)$$

$$[u_\phi] = 0, \quad (6)$$

$$\left[\frac{\tilde{\rho}}{\operatorname{Re}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} \right) \right] = 0, \quad (7)$$

$$\left[\frac{\tilde{\rho}}{\operatorname{Re}} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \right) \right] = 0, \quad (8)$$

$$\left[-p + \frac{2\tilde{\rho}}{\operatorname{Re}} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] = 2f + \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \quad (9)$$

Здесь f — возмущение формы межфазной поверхности, а квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины на границе раздела при переходе из газа в жидкость.

Согласно [18], уравнения (2) допускают в сферической системе координат разделение переменных двух видов, а именно азимутальное и меридиональное. Как известно (см. [19]), к деформации формы поверхности капли, а значит и к капиллярным колебаниям, приводят лишь меридиональные возмущения системы. Моды же азимутального вида всегда испытывают в вязкой среде аperiодическое затухание. Поэтому ищем решение задачи как

$$u_{rj} = \frac{l(l+1)}{r^2} U_j(r) Y_l^m(\vartheta, \phi) \exp(i\tilde{\omega}_l t) + \text{к.с.}, \quad (10)$$

$$u_{\vartheta j} = \frac{1}{r} \frac{dU_j}{dr} \frac{\partial}{\partial \vartheta} Y_l^m(\vartheta, \phi) \exp(i\tilde{\omega}_l t) + \text{к.с.}, \quad (11)$$

$$u_{\phi j} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{dU_j}{dr} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_l^m(\vartheta, \phi) \exp(i\tilde{\omega}_l t) + \text{к.с.}. \quad (12)$$

Здесь $\tilde{\omega}_l$ — безразмерная собственная частота гармоник с меридиональным и азимутальным числами l и m , соответственно, описываемая сферической функцией $Y_l^m(\vartheta, \phi)$; буквы к.с. означают комплексное сопряжение.

Следствием уравнений (1) и (2) являются уравнения Лапласа для давления $\Delta p_j = 0$, решения которых представляются в следующем виде:

$$p_j = \Pi_j(r) Y_l^m(\vartheta, \phi) \exp(i\tilde{\omega}_l t) + \text{к.с.}, \quad (13)$$

где для функций радиальной координаты $\Pi_j(r)$ выполняются соотношения:

$$\frac{d^2 \Pi_j}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\Pi_j}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \Pi_j = 0. \quad (14)$$

При помощи подстановки формул (10)–(13) в уравнения (1) приходим к выражениям:

$$\frac{d^2 U_j}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U_j - i\tilde{\omega}_l \operatorname{Re}_j U_j = \frac{\operatorname{Re}_j}{\tilde{\rho}_j} \frac{r^2}{l(l+1)} \frac{d\Pi_j}{dr}. \quad (15)$$

Их следует дополнить граничными условиями (3)–(9), переписанными в терминах функций $U_j(r)$ и амплитуды F деформации поверхности капли около ее сферической формы ($r = 1$), когда

$$f = FY_l^m(\vartheta, \phi) \exp(i\tilde{\omega}_l t) + \text{к.с.} . \quad (16)$$

В результате при $r = 1$ имеем:

$$i\tilde{\omega}_l F = \frac{l(l+1)}{r^2} U_1, \quad (17)$$

$$[U] = 0, \quad (18)$$

$$\left[\frac{dU}{dr} \right] = 0, \quad (19)$$

$$\left[\frac{\tilde{\rho}}{\operatorname{Re}} \left\{ \frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} U \right\} \right] = 0, \quad (20)$$

$$\left[-\Pi + \frac{\tilde{\rho}}{\operatorname{Re}} \frac{2l(l+1)}{r^2} \left(\frac{dU}{dr} - \frac{2U}{r} \right) \right] = -(l-1)(l+2)F. \quad (21)$$

Решения уравнений (14) и (15), для которых выполнены условия ограниченности в центре капли ($r = 0$) и затухания на бесконечности ($r \rightarrow \infty$), записываются как

$$\Pi_1 = a_1 r^l, \quad (22)$$

$$\Pi_2 = \frac{b_1}{r^{l+1}}, \quad (23)$$

$$U_1 = \frac{i}{l+1} \frac{a_1}{\tilde{\rho}_1 \tilde{\omega}_l} r^{l+1} + a_2 r \frac{j_l(x_1 r)}{j_l(x_1)}, \quad (24)$$

$$U_2 = -\frac{i}{l} \frac{b_1}{\tilde{\rho}_2 \tilde{\omega}_l} \frac{1}{r^l} + b_2 r \frac{y_l(x_2 r)}{y_l(x_2)}. \quad (25)$$

Здесь $x_1 = \sqrt{-i\tilde{\omega}_l \operatorname{Re}_1}$ и $x_2 = \sqrt{-i\tilde{\omega}_l \operatorname{Re}_2}$, а $j_l(x)$ и $y_l(x)$ — сферические функции Бесселя и Неймана порядка l соответственно.

Решения (24) и (25) можно представить как суммы потенциальных и погранслоиных частей (см. [20]):

$$U_j = U_j^I + U_j^{II}. \quad (26)$$

Для потенциальных слагаемых

$$U_1^I = \frac{i}{l+1} \frac{a_1}{\tilde{\rho}_1 \tilde{\omega}_l} r^{l+1}, \quad (27)$$

$$U_2^I = -\frac{i}{l} \frac{b_1}{\tilde{\rho}_2 \tilde{\omega}_l} \frac{1}{r^l}, \quad (28)$$

что легко проверить, выполняются соотношения:

$$\frac{d^2 U_j^I}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U_j^I = 0. \quad (29)$$

Погранслоиные же части

$$U_1'' = a_2 r \frac{j_l(x_1 r)}{j_l(x_1)}, \quad (30)$$

$$U_2'' = b_2 r \frac{y_l(x_2 r)}{y_l(x_2)} \quad (31)$$

являются общими решениями уравнений (15), а следовательно,

$$\frac{d^2 U_j''}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U_j'' - i\tilde{\omega}_l \text{Re}_j U_j'' = 0. \quad (32)$$

Далее представим серию преобразований граничного условия (20) в результате последовательного применения тождеств (17)–(19), (26), (29) и (32). Тогда

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\tilde{\rho}}{\text{Re}} \left\{ \frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} U \right\} \right] \Rightarrow \\ & \left[\frac{\tilde{\rho}}{\text{Re}} \left\{ \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) (U' + U'') + \frac{2l(l+1)}{r^2} U - \frac{2}{r} \frac{dU_1}{dr} \right\} \right] \Rightarrow \\ & \left[\frac{\tilde{\rho}}{\text{Re}} \left\{ i\tilde{\omega}_l \text{Re} U'' + 2i\tilde{\omega}_l F - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} (U_1' + U_1'') \right\} \right] \Rightarrow \\ & i\tilde{\omega}_l (\tilde{\rho}_1 U_1'' - \tilde{\rho}_2 U_2'') + 2i\tilde{\omega}_l \left(\frac{\tilde{\rho}_1}{\text{Re}_1} - \frac{\tilde{\rho}_2}{\text{Re}_2} \right) F - \frac{2}{r} \left(\frac{\tilde{\rho}_1}{\text{Re}_1} - \frac{\tilde{\rho}_2}{\text{Re}_2} \right) \left(\frac{dU_1'}{dr} + \frac{dU_1''}{dr} \right). \quad (33) \end{aligned}$$

При этом исходим из предположения, что граница раздела тяжелой жидкости и легкого газа является практически свободной, и выполняются следующие оценки:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1 & \gg \tilde{\rho}_2, \\ \frac{\tilde{\rho}_1}{\text{Re}_1} & \gg \frac{\tilde{\rho}_2}{\text{Re}_2}, \\ \tilde{\rho}_1 U_1'' & \gg \tilde{\rho}_2 U_2''. \end{aligned} \quad (34)$$

Последняя из них будет уточнена ниже в соответствии с найденными решениями для U_1'' и U_2'' .

Подстановка соотношений (16), (24), (27), (30) в (17) и (33) приводит, с учетом требований (34), к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} i\tilde{\omega}_l F &= i \frac{l}{\tilde{\rho}_1 \tilde{\omega}_l} a_1 + l(l+1) a_2, \\ i\tilde{\rho}_1 \tilde{\omega}_l \left(a_2 + \frac{2F}{\text{Re}_1} \right) - \frac{2\tilde{\rho}_1}{\text{Re}_1} Q(x_1) a_2 - \frac{2i}{\tilde{\omega}_l \text{Re}_1} a_1 &\approx 0, \end{aligned}$$

в которые входят амплитуды a_1 и a_2 , относящиеся к жидкости, и где введено обозначение:

$$Q(x) = l + 1 - \frac{x j_{l+1}(x)}{j_l(x)}.$$

Отсюда, после упрощения в пределе малой вязкости жидкости ($\text{Re}_1 \gg 1$), получаем конечные формулы для амплитуд в жидкости:

$$a_1 \approx \frac{\tilde{\rho}_1 \tilde{\omega}_l^2}{l} F, \quad (35)$$

$$a_2 \approx -\frac{2(l-1)}{l} \frac{F}{\text{Re}_1}. \quad (36)$$

Соотношения (18) и (19), выраженные через решения (24) и (25), имеют следующий вид:

$$\frac{i}{l+1} \frac{a_1}{\tilde{\rho}_1 \tilde{\omega}_l} + a_2 = -\frac{i}{l} \frac{b_1}{\tilde{\rho}_2 \tilde{\omega}_l} + b_2,$$

$$\frac{i}{\tilde{\rho}_1 \tilde{\omega}_l} a_1 + Q(x_1) a_2 = \frac{i}{\tilde{\rho}_2 \tilde{\omega}_l} b_1 + P(x_2) b_2.$$

Здесь $P(x) = l+1 - \frac{xy_{l+1}(x)}{y_l(x)}$. Главные части их решений для амплитуд в газе b_1 и b_2 в случае маловязких жидкости и газа при $\text{Re}_1 \gg 1$ и $\text{Re}_2 \gg 1$, с учетом оценок (35) и (36), есть

$$b_1 \approx -\frac{\tilde{\rho}_2 \tilde{\omega}_l^2}{l+1} F, \quad (37)$$

$$b_2 \approx \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{i \tilde{\omega}_l}{P(x_2)} F. \quad (38)$$

Заметим, что при выводе приближенных выражений для амплитуд (35)–(38) использован тот факт, что

$$\lim_{\text{Im} x_1 \rightarrow -\infty} Q(x_1) \rightarrow i x_1, \quad (39)$$

$$\lim_{\text{Im} x_2 \rightarrow -\infty} P(x_2) \rightarrow i x_2. \quad (40)$$

Исходя из данных выше определений для x_1 и x_2 , следует, что соотношения (39), (40) справедливы для затухающих периодических колебаний в пределах малых вязкостей сред.

Вернемся к граничному условию (21), которое при соблюдении (18) и (19) может быть переписано как

$$\Pi_2 - \Pi_1 + \left(\frac{\tilde{\rho}_1}{\text{Re}_1} - \frac{\tilde{\rho}_2}{\text{Re}_2} \right) \frac{2l(l+1)}{r^2} \left(\frac{dU_1}{dr} - \frac{2U_1}{r} \right) = -(l-1)(l+2)F. \quad (41)$$

После подстановки в (17), (33) и (41) решений (22)–(24), (27), (30) и (31), а также учета оценок (37)–(40) и требований (34) приходим к следующему дисперсионному соотношению для безразмерной собственной частоты $\tilde{\omega}_l$:

$$\tilde{\omega}_l^2 - 2\tilde{\omega}_l \left\{ \frac{(2l+1)(l-1)}{\text{Re}_1} i + \frac{i^{3/2}}{2} \frac{(2l+1)^2}{(l+1)} \frac{\tilde{\rho}_2 \sqrt{\tilde{\omega}_l}}{\sqrt{\text{Re}_2}} \right\} - \frac{l(l^2-1)(l+2)}{(l+1)\tilde{\rho}_1 + l\tilde{\rho}_2} + \dots = 0, \quad (42)$$

в котором порядок первого отброшенного вязкого слагаемого составляет $O(\text{Re}_1^{-3/2})$.

Следующий из выражения (42) главный порядок безразмерной собственной частоты

$$\tilde{\omega}_{l0} = \sqrt{\frac{l(l^2-1)(l+2)}{(l+1)\tilde{\rho}_1 + l\tilde{\rho}_2}} \quad (43)$$

отвечает свободным незатухающим колебаниям капли жидкости в объеме газа. Главная же часть безразмерной поправки к собственной частоте есть

$$\Delta \tilde{\omega}_l = \frac{(2l+1)(l-1)}{\text{Re}_1} i + \frac{i^{3/2}}{2} \frac{(2l+1)^2}{(l+1)} \frac{\tilde{\rho}_2 \sqrt{\tilde{\omega}_{l0}}}{\sqrt{\text{Re}_2}} \quad (44)$$

и содержит как линейный вклад типа Ламба со стороны вязкой жидкости, так и корневой вклад со стороны вязкого погранслоя в газе. Размерная же поправка $\Delta\omega_l = \Delta\tilde{\omega}_l \tau$ получается путем умножения на капиллярное время: $\tau = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2) R^3 / \gamma}$.

Напомним, что осуществленный выше приближенный анализ построен на предположении $\tilde{\rho}_1 U_1'' \gg \tilde{\rho}_2 U_2''$. С помощью выражений (35), (37) и (43) в пределах $\tilde{\rho}_1 \rightarrow 1$ и $\tilde{\rho}_2 \rightarrow 0$ оно сводится к критерию:

$$\frac{\rho_1 \sqrt{\text{Re}_2}}{\rho_2 \text{Re}_1} \gg \frac{\sqrt{l(l-1)(l+2)}}{2(l^2-1)},$$

который, как легко показать, выполняется для капель жидкости в среде газа при их любом разумном размере.

Для численной проверки применимости оценки (44) следует подставить решения (16), (22)–(25), (27), (28), (30) и (31) в граничные условия (17)–(19), (33) и (41). Это дает однородную линейную систему уравнений для амплитуд a_1, a_2, b_1, b_2 и F . Имеет смысл находить ее определитель численно, например

методом исключения Гаусса. Требование равенства нулю действительной и мнимой частей комплексного определителя формально приводит к системе двух дисперсионных уравнений. Решения последней для действительной (действительная частота) и мнимой (коэффициент затухания) частей собственной частоты ω_l осуществлялись численно, методом покоординатного спуска.

Расчеты производились для капель воды либо ртути, имеющих диаметр $D = 2R$ от 1 мм до 2 см. Капли помещались в воздушную среду

Таблица 1. Материальные параметры систем

Вода–воздух	Ртуть–воздух
$\rho_1 = 998,2 \text{ кг/м}^3$	$\rho_1 = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$
$\rho_2 = 1,27 \text{ кг/м}^3$	$\rho_2 = 1,27 \text{ кг/м}^3$
$\gamma = 0,0728 \text{ Н/м}$	$\gamma = 0,472 \text{ Н/м}$
$\nu_1 = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$	$\nu_1 = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$
$\nu_2 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$	$\nu_2 = 15 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$

при нормальной температуре и атмосферном давлении. Как правило, в экспериментах по «левитации» капль их размер не должен превышать 1 см. Однако, с учетом того, что целью данной работы является получение и верификация оценочного выражения для поправки к собственной частоте, которое будет пригодно для многих экспериментальных ситуаций, диапазон диаметров капли для численной проверки взят с некоторым запасом. По этой же причине для демонстрации результатов выбраны вода и ртуть, которые значительно отличаются друг от друга по физическим свойствам. Материальные параметры сред перечислены в таблице 1.

Результаты расчетов для квадрупольной моды свободных колебаний системы с меридиональным числом $l=2$ представлены на рисунке 1. Можно видеть, что оценка (44) безразмерной поправки к действительной части собственной частоты не точна (см. Рис. 1а, в). Ее относительная ошибка для случая малых капель может достигать десятков процентов. В то же время интересующий декремент затухания (см. Рис. 1б, г) для таких маловязких жидкостей, как вода и ртуть, превосходно, с ошибкой менее 1%, находится согласно построенной выше теории возмущений для того диапазона диаметров жидких капель, который задан для исследования выше.

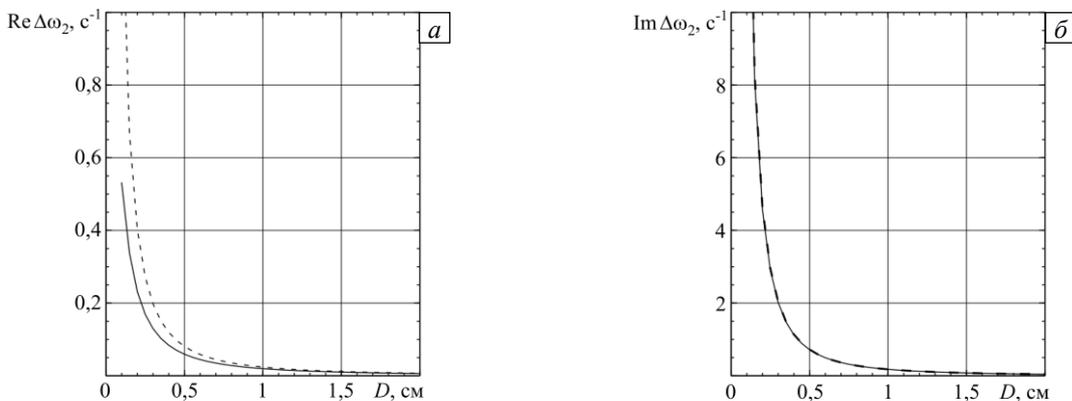


Рис. 1. Зависимости от диаметра капли в воздухе поправки к собственной частоте (а, в) и декремента затухания (б, г) для воды (а, б) и ртути (в, г) при квадрупольной моде свободных колебаний (сплошные линии); штриховыми линиями показаны результаты, полученные согласно оценочному выражению (44)

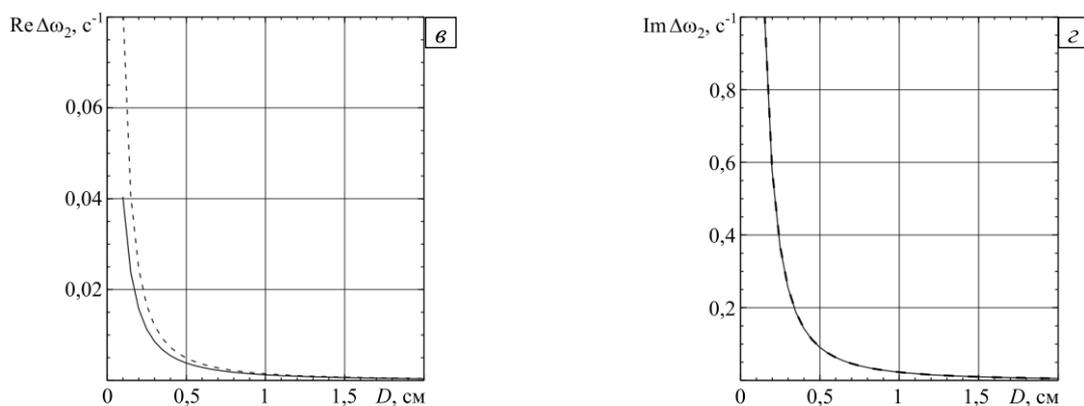


Рис. 1. Продолжение

3. Эффект плотности и вязкости газа в методе «левитирующей» капли

Методом «левитирующей» капли определяются, как правило, либо коэффициент поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости, либо ее кинематическая вязкость. Причем, если для измерения первой характеристики необходимо знать собственную частоту свободных колебаний системы, то коэффициент вязкости находится с помощью данных о декременте затухания.

Вследствие малой величины отношения плотности воздуха к плотности используемых в экспериментах жидких материалов эффектом инерции газа зачастую пренебрегают. Тогда коэффициент поверхностного натяжения γ получается (по Релею [10]) из собственной частоты квадрупольной моды ω_2 и массы жидкой капли m :

$$\gamma = 3m\omega_2^2 / (32\pi).$$

Необходимо выяснить, оказывает ли вязкость газа такое же незначительное воздействие на частоту свободных колебаний, как и его инерция. Для сравнения на рисунке 2 представлены зависимости относительной поправки к собственной частоте, вызванной инерцией воздуха и его вязкостью. Видно, что для капель воды (ртути) обсуждаемого размера оба из указанных факторов вполне можно исключить из рассмотрения. Причем для капель большего диаметра относительное влияние вязкой диссипации в газе проявляется в еще меньшей степени.

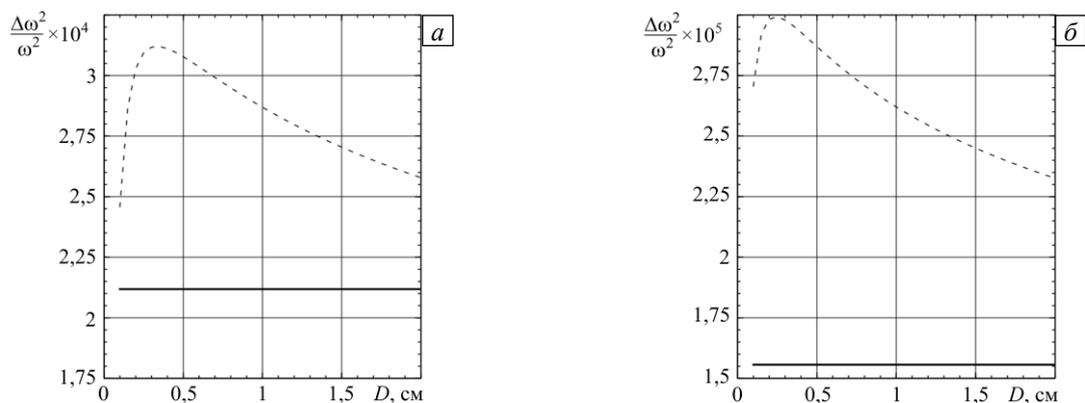


Рис. 2. Относительная поправка к собственной частоте, вызванная инерцией воздуха (сплошная линия) и его вязкостью (штриховая линия), в зависимости от диаметра капли воды (а) и ртути (б)

Перейдем к анализу поправки к декременту затухания, главная часть которой, согласно полученным выше результатам, может быть выражена следующим образом:

$$\lambda_l = \frac{(2l+1)(l-1)v_1}{R^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(2l+1)^2}{(l+1)} \frac{\rho_2 \sqrt{v_2}}{\rho_1} \frac{\sqrt{\omega_{l0}}}{R}, \quad (45)$$

где $\omega_{l0} = \sqrt{\frac{l(l^2-1)(l+2)}{(l+1)\rho_1+l\rho_2}} \frac{\gamma}{R^3}$. При этом следует учитывать, что для плотностей сред имеет место неравенство $\rho_2 \ll \rho_1$.

На точность измерения коэффициента кинематической вязкости жидкости ν_1 методом «левитирующей» капли с использованием формулы Ламба [13] для квадрупольной моды

$$\nu_1 = \lambda_2 R^2 / 5 \tag{46}$$

очевидно влияние величины отношения вкладов жидкости и газа в соответствии с (45), что и представлено на рисунке 3. Отношение увеличивается в пропорции с радиусом капли как $R^{1/4}$. Отметим, что относительная величина вклада вязкости воздуха, окружающего каплю воды, равная десяти процентам, достигается при диаметре капли около 5 мм. Для капли же ртути пренебрежение вязкостью воздуха должно привести к приблизительно вдвое меньшей относительной ошибке.

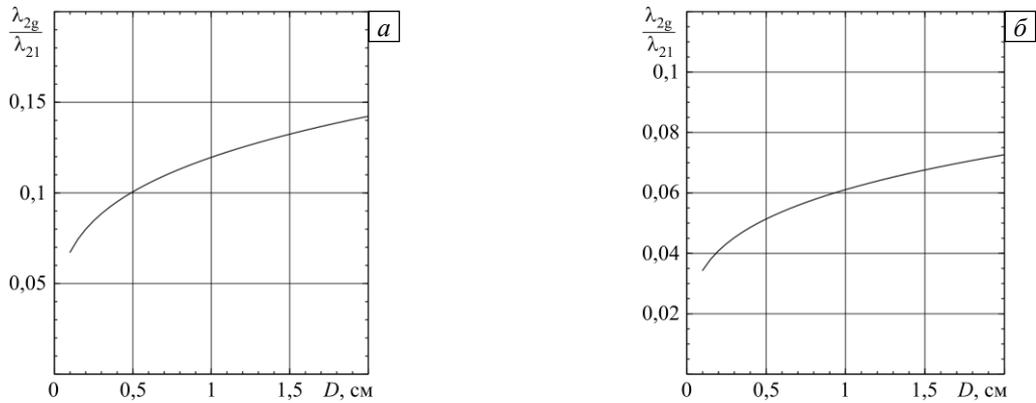


Рис. 3. Отношение вклада в декремент затухания вязкости воздуха к вкладу вязкости жидкости в зависимости от диаметра капли воды (а) и ртути (б)

Точность измерения вязкости жидкости методом «левитирующей» капли можно существенно повысить, если вместо (46) использовать формулу:

$$\nu_1 = \frac{\lambda_2 R^2}{5} - \frac{5R}{6} \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\frac{\nu_2 \omega_2}{2}}. \tag{47}$$

Обращаем внимание, что в (47) кроме декремента затухания λ_2 входит собственная частота квадрупольной моды ω_2 , также определяемая в эксперименте. Имеет смысл ввести эффективный декремент затухания λ_{eff} , равный

$$\lambda_{eff} = \lambda_2 - \frac{25}{6R} \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\frac{\nu_2 \omega_2}{2}}$$

и меньший, чем λ_2 . Таким образом избегаем завышения значения вычисленной посредством (46) кинематической вязкости жидкости ν_1 . Напомним, что условием применимости описанной выше теории возмущений является малость вязкости сред, о чем можно судить по величине чисел Рейнольдса $Re_j \gg 1$.

Заметим, что подобное (45) выражение, но уже для взвешенного в жидкости газового пузыря, может быть составлено так, чтобы оно включало линейный ламбовский вклад [13], а также корневую по вязкости часть:

$$\lambda_l = \frac{(2l+1)(l+2)\nu_2}{R^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(2l+1)^2}{l} \frac{\rho_1 \sqrt{\nu_1}}{\rho_2} \frac{\sqrt{\omega_{l0}}}{R}. \tag{48}$$

Последнюю, как и соответствующий вклад в оценке (45), можно получить феноменологическим образом из декремента затухания

$$\lambda_l = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{(2l+1)^2}{(l+1)\rho_1 + l\rho_2} \frac{\rho_1\rho_2\sqrt{v_1v_2}}{\rho_1\sqrt{v_1} + \rho_2\sqrt{v_2}} \frac{\sqrt{\omega_{l0}}}{R}$$

для случая сферической границы раздела двух маловязких сред [21]. Для этого следует устремить плотность одной из них к нулю. Тогда для квадрупольной моды с меридиональным числом $l=2$ получаем:

$$v_2 = \lambda_{eff} R^2 / 20, \quad (49)$$

где

$$\lambda_{eff} = \lambda_2 - \frac{25}{4R} \frac{\rho_1}{\rho_2} \sqrt{\frac{v_1\omega_2}{2}}. \quad (50)$$

В соотношениях (48)–(50) приняты обозначения: ρ_1 , ρ_2 , v_1 и v_2 — плотности и коэффициенты кинематической вязкости газа в пузырьре ($j=1$) и внешней жидкости ($j=2$) соответственно. Представленный здесь результат требует, однако, более строгой проверки.

4. Заключение

То, что вязкость воздуха может оказывать существенное влияние на затухание гравитационно-капиллярных волн на плоской в равновесии свободной поверхности воды, — факт известный. Для измерения кинематической вязкости жидкости и коэффициентов поверхностного натяжения используются разные способы, но из бесконтактных наиболее часто применяется метод «левитирующей» капли. Показано, что поверхностное натяжение можно измерять, не принимая во внимание вязкость и плотность окружающего каплю легкого газа, чего нельзя сказать о нахождении коэффициента вязкости.

Предложена модификация формулы Ламба для квадрупольной моды собственных колебаний системы капля–газ, которая позволяет учесть диссипацию в вязком погранслое газа и таким образом повысить точность метода «левитирующей» капли.

Литература

1. *Egry I., Lohöfer G., Seyhan I., Schneider S., Feuerbacher B.* Viscosity and surface tension measurements in microgravity // *Int. J. Thermophys.* 1999. Vol. 20. P. 1005-1015. <https://doi.org/10.1023/A:1022686316437>
2. *Egry I., Giffard H., Schneider S.* The oscillating drop technique revisited // *Meas. Sci. Technol.* 2005. Vol. 16. P. 426-431. <https://doi.org/10.1088/0957-0233/16/2/013>
3. *Kremer J., Kilzer A., Petermann M.* Simultaneous measurement of surface tension and viscosity using freely decaying oscillations of acoustically levitated droplets // *Rev. Sci. Instrum.* 2018. Vol. 89. 015109. <https://doi.org/10.1063/1.4998796>
4. *Shao X., Fredericks S.A., Saylor J.R., Bostwick J.B.* A method for determining surface tension, viscosity, and elasticity of gels via ultrasonic levitation of gel drops // *J. Acoust. Soc. Am.* 2020. Vol. 147. P. 2488-2498. <https://doi.org/10.1121/10.0001068>
5. *Egry I., Brillo J.* Surface tension and density of liquid metallic alloys measured by electromagnetic levitation // *J. Chem. Eng. Data.* 2009. Vol. 54. P. 2347-2352. <https://doi.org/10.1021/jc900119n>
6. *Zhou K., Wang H.P., Wei B.* Determining thermophysical properties of undercooled liquid Ti–Al alloy by electromagnetic levitation // *Chem. Phys. Lett.* 2012. Vol. 521. P. 52-54. <https://doi.org/10.1016/j.cplett.2011.09.061>
7. *Heintzmann P., Yang F., Schneider S., Lohöfer G., Meyer A.* Viscosity measurements of metallic melts using the oscillating drop technique // *Appl. Phys. Lett.* 2016. Vol. 108. 241908. <https://doi.org/10.1063/1.4953871>
8. *Perez M., Salvo L., Suéry M., Bréchet Y., Papoular M.* Contactless viscosity measurement by oscillations of gas-levitated drops // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61. P. 2669-2675. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.2669>
9. *Shmyrov A., Mizev A., Shmyrova A., Mizeva I.* Capillary wave method: An alternative approach to wave excitation and to wave profile reconstruction // *Phys. Fluids.* 2019. Vol. 31. 012101. <https://doi.org/10.1063/1.5060666>
10. *Strutt J.W.* VI. On the capillary phenomena of jets // *Proc. R. Soc. Lond.* 1879. Vol. 29. P. 71-97. <https://doi.org/10.1098/rspl.1879.0015>
11. *Cummings D.L., Blackburn D.A.* Oscillations of magnetically levitated aspherical droplets // *J. Fluid Mech.* 1991. Vol. 224. P. 395-416. <https://doi.org/10.1017/S0022112091001817>
12. *Lyubimov D.V., Konovalov V.V., Lyubimova T.P., Egry I.* Oscillations of a liquid spherical drop encapsulated by a non-concentric spherical layer of dissimilar liquid // *European Journal of Mechanics – B/Fluids.* 2012. Vol. 32. P. 80-87. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2011.11.002>
13. *Lamb H.* *Hydrodynamics.* Cambridge University Press, 1895. 604 p.
14. *Lyubimov D.V., Konovalov V.V., Lyubimova T.P., Egry I.* Small amplitude shape oscillations of a spherical liquid drop with surface viscosity // *J. Fluid Mech.* 2011. Vol. 677. P. 204-217. <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.76>

15. Dore B.D. Some effects of the air-water interface on gravity waves // *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*. 1978. Vol. 10. P. 215-230. <https://doi.org/10.1080/03091927808242638>
16. Konovalov V.V., Lyubimova T.P. A long-wave estimation for the damping coefficient at a flat water–water vapour interface with a phase transition // *J. Fluid Mech.* 2019. Vol. 869. P. 417-438. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.201>
17. Bayazitoglu Y., Suryanarayana P.V.R. Dynamics of oscillating viscous droplets immersed in viscous media // *Acta Mech.* 1992. Vol. 95. P. 167-183. <https://doi.org/10.1007/BF01170811>
18. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press, 1961. 652 p.
19. Prosperetti A. Normal mode analysis for the oscillations of a viscous liquid drop in an immiscible liquid // *Journal de Mécanique*. 1980. Vol. 19. P. 149-182.
20. Cerda E.A., Tirapegui E.L. Faraday's instability in viscous fluid // *J. Fluid Mech.* 1998. Vol. 368. P. 195-228. <https://doi.org/10.1017/S0022112098001578>
21. Miller C., Scriven L. The oscillations of a fluid droplet immersed in another fluid // *J. Fluid Mech.* 1968. Vol. 32. P. 417-435. <https://doi.org/10.1017/S0022112068000832>

References

1. Egly I., Lohöfer G., Seyhan I., Schneider S., Feuerbacher B. Viscosity and surface tension measurements in microgravity. *Int. J. Thermophys.*, 1999, vol. 20, pp. 1005-1015. <https://doi.org/10.1023/A:1022686316437>
2. Egly I., Giffard H., Schneider S. The oscillating drop technique revisited. *Meas. Sci. Technol.*, 2005, vol. 16, pp. 426-431. <https://doi.org/10.1088/0957-0233/16/2/013>
3. Kremer J., Kilzer A., Petermann M. Simultaneous measurement of surface tension and viscosity using freely decaying oscillations of acoustically levitated droplets. *Rev. Sci. Instrum.*, 2018, vol. 89, 015109. <https://doi.org/10.1063/1.4998796>
4. Shao X., Fredericks S.A., Saylor J.R., Bostwick J.B. A method for determining surface tension, viscosity, and elasticity of gels via ultrasonic levitation of gel drops. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2020, vol. 147, pp. 2488-2498. <https://doi.org/10.1121/10.0001068>
5. Egly I., Brillo J. Surface tension and density of liquid metallic alloys measured by electromagnetic levitation. *J. Chem. Eng. Data*, 2009, vol. 54, pp. 2347-2352. <https://doi.org/10.1021/je900119n>
6. Zhou K., Wang H.P., Wei B. Determining thermophysical properties of undercooled liquid Ti–Al alloy by electromagnetic levitation. *Chem. Phys. Lett.*, 2012, vol. 521, pp. 52-54. <https://doi.org/10.1016/j.cplett.2011.09.061>
7. Heintzmann P., Yang F., Schneider S., Lohöfer G., Meyer A. Viscosity measurements of metallic melts using the oscillating drop technique. *Appl. Phys. Lett.*, 2016, vol. 108, 241908. <https://doi.org/10.1063/1.4953871>
8. Perez M., Salvo L., Suéry M., Bréchet Y., Papoulet M. Contactless viscosity measurement by oscillations of gas-levitated drops. *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 61, pp. 2669-2675. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.2669>
9. Shmyrov A., Mizev A., Shmyrova A., Mizeva I. Capillary wave method: An alternative approach to wave excitation and to wave profile reconstruction. *Phys. Fluids*, 2019, vol. 31, 012101. <https://doi.org/10.1063/1.5060666>
10. Strutt J.W. VI. On the capillary phenomena of jets. *Proc. R. Soc. Lond.*, 1879, vol. 29, pp. 71-97. <https://doi.org/10.1098/rspl.1879.0015>
11. Cummings D.L., Blackburn D.A. Oscillations of magnetically levitated aspherical droplets. *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 224, pp. 395-416. <https://doi.org/10.1017/S0022112091001817>
12. Lyubimov D.V., Konovalov V.V., Lyubimova T.P., Egly I. Oscillations of a liquid spherical drop encapsulated by a non-concentric spherical layer of dissimilar liquid. *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, 2012, vol. 32, pp. 80-87. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2011.11.002>
13. Lamb H. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1895. 604 p.
14. Lyubimov D.V., Konovalov V.V., Lyubimova T.P., Egly I. Small amplitude shape oscillations of a spherical liquid drop with surface viscosity. *J. Fluid Mech.*, 2011, vol. 677, pp. 204-217. <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.76>
15. Dore B.D. Some effects of the air-water interface on gravity waves. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 1978, vol. 10, pp. 215-230. <https://doi.org/10.1080/03091927808242638>
16. Konovalov V.V., Lyubimova T.P. A long-wave estimation for the damping coefficient at a flat water–water vapour interface with a phase transition. *J. Fluid Mech.*, 2019, vol. 869, pp. 417-438. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.201>
17. Bayazitoglu Y., Suryanarayana P.V.R. Dynamics of oscillating viscous droplets immersed in viscous media. *Acta Mech.*, 1992, vol. 95, pp. 167-183. <https://doi.org/10.1007/BF01170811>
18. Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Clarendon Press, 1961. 652 p.
19. Prosperetti A. Normal mode analysis for the oscillations of a viscous liquid drop in an immiscible liquid. *Journal de Mécanique*, 1980, vol. 19, pp. 149-182.
20. Cerda E.A., Tirapegui E.L. Faraday's instability in viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 1998, vol. 368, pp. 195-228. <https://doi.org/10.1017/S0022112098001578>
21. Miller C., Scriven L. The oscillations of a fluid droplet immersed in another fluid. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 32, pp. 417-435. <https://doi.org/10.1017/S0022112068000832>

Поступила в редакцию 14.07.2022; после доработки 06.09.2022; принята к опубликованию 16.09.2022

Сведения об авторе

Коновалов Владимир Владиславович, кфмн, нс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: konovalov@icmm.ru