

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.3.25](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.3.25)

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРШИНЕ V-ОБРАЗНОГО НАДРЕЗА ПРИ ЕГО НЕПОЛНОМ ЗАПОЛНЕНИИ МАТЕРИАЛОМ

В.П. Матвеевко, А.Ю. Фёдоров, Е.Б. Галкина

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

Одним из способов уменьшения уровня напряжений в окрестности V-образных надрезов является их заполнение материалом. От механических характеристик этого материала в значительной мере зависит эффективность достижения требуемого результата. Исследование напряжённого состояния в окрестности вершины V-образного надреза, заполненного материалом, связано с рассмотрением задачи для составного клина, которая в рамках классической теории упругости может иметь сингулярные решения с бесконечными значениями напряжений в его вершине. В работе приводятся решения для составного замкнутого клина, позволяющие определить область значений механических характеристик и углов составного клина, при которых сингулярность напряжений в вершине клина отсутствует. Приводится разработанная авторами методика на основе метода конечных элементов, с помощью которой получена зависимость напряжений в окрестности вершины клина, обеспечивающая вычисление показателей сингулярности напряжений и констант, называемых коэффициентами интенсивности сингулярности. В реальных технологиях заполнения другим материалом в окрестности вершины надреза, как правило, остаётся незаполненная область (полость). Наиболее ярко такой дефект проявляется при малых углах надреза. При наличии полости у вершины надреза сингулярное решение существует при любых механических характеристиках заполняющего материала. На основе созданного алгоритма установлены величины коэффициентов интенсивности сингулярности для V-образного надреза, частично заполненного материалами, как устраняющими, так и не устраняющими сингулярность напряжений при полном заполнении надреза. Полученные результаты демонстрируют, что в окрестности вершины надреза при его частичном заполнении другим материалом можно существенно снизить коэффициент интенсивности сингулярности.

*Ключевые слова:* составной замкнутый клин, сингулярность напряжений, концентрация напряжений, V-образный надрез, конечно-элементный анализ

## NUMERICAL INVESTIGATION OF STRESS CONCENTRATION AT THE TIP OF THE V-NOTCH PARTIALLY FILLED WITH MATERIAL

V.P. Matveenko, A.Yu. Fedorov and E.B. Galkina

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*

One of the ways to reduce the stress level in the vicinity of V-shaped notches is to fill them with material. The effectiveness of achieving this result is largely determined by the mechanical characteristics of the filling material. The study of the stress state in the vicinity of the tip of a V-shaped notch is generally related to consideration of the composite wedge problem, which in the framework of the classical theory of elasticity, can have singular solutions with infinite values of stresses at the wedge vertex. The paper presents solutions for a composite closed wedge, which allows us to determine the range of mechanical characteristics and angles of the composite wedge, at which there is no stress singularity at the vertex. The proposed variant of the computational procedure, which is based on the finite element method, makes it possible to find a relationship for stresses in the vicinity of the wedge vertex, providing the evaluation of the stress singularity indices and constants known as stress singularity intensity factors. In real industrial technologies currently used for filling notches with another material, a small region (cavity) generally remains unfilled in the vicinity of the notch tip. This defect becomes more pronounced at small notch angles. In the presence of a cavity at the notch tip, a singular solution exists at any mechanical characteristics of the filling material. The developed algorithm has been used to calculate the values of the intensity factor of singularity for a V-shaped notch partially filled with materials, which either eliminate or preserve the stress singularity in the case of complete filling. The results obtained demonstrate that at the tip of the notch partially filled with another material the singularity intensity factor can be significantly reduced.

*Key words:* closed composite wedge, stress singularity, stress concentration, V-notch, finite element analysis

### 1. Введение

В классической теории упругости имеют место сингулярные решения с бесконечными значениями напряжений в особых точках, к которым относятся точки нарушения гладкости внешней поверхности, точки смена типа граничных условий, края поверхности соединения разнородных материалов. Задачам построения сингулярных решений посвящены многочисленные работы, которые достаточно полно отражены в ряде обзоров [1–7]. Среди них, в первую очередь, следует выделить обзор Синклера в двух частях [1, 2], содержащий 409 ссылок, в котором всесторонне рассматриваются различные типы сингулярности напряжений, характерные для линейной теории упругости. Обзорные статьи [3, 4] ограничены обсуждением исследований сингулярности напряжений, возникающих на краях поверхности соединения различных материалов. В обзоре [5] описаны примеры, демонстрирующие возможности применения сингулярных интегральных уравнений для смешанных краевых задач механики трещин и контактных взаимодействий. Работа [6] сосредоточена на публикациях, посвященных анализу

сингулярных напряжений вблизи вершин однородных и составных клиновидных областей, а [7] представляет собой краткий обзор публикаций с анализом пространственных эффектов вблизи вершин трещин и острых надрезов. Сингулярные решения, наряду с их теоретическим значением, имеют важные практические приложения, которые опираются на зависимость сингулярности напряжений от геометрии и механических характеристик материалов в окрестности особых точек. В ряде работ, в том числе в [8–15], теоретически и экспериментально показано, что отсутствие концентрации напряжений в окрестности особых точек связано с их несингулярным поведением. Так, в [8] обнаружено, что комбинации значений углов и механических свойств, отвечающие решениям без сингулярности напряжений, обеспечивают малонапряжённое состояние в окрестности края поверхности составного тела. Аналогичные по содержанию исследования проведены на соединениях областей из разных материалов встык [9–13] и внахлестку [14, 15]. В работе [16] установлено, что оптимальное или близкое к нему распределение напряжений в окрестности особых точек наблюдается при параметрах геометрии и свойствах материалов, определяющих границу решений с сингулярностью и без сингулярности напряжений.

Наибольшие практические приложения имеет задача для однородного клина с гранями, свободными от напряжений. Интерес обусловлен тем, что её частный случай — при угле клина, равном  $2\pi$ , представляет математическую трещину, которая является одним из основных объектов исследования в механике разрушения материалов. Задачи с вариантами угла раствора клина от  $\pi$  до  $2\pi$ , соответствующие задачам с V-образными надрезами, также важны для практики, так как окрестность вершины таких надрезов, как правило, — зона сильной концентрации напряжений.

Одним из приёмов уменьшения уровня напряжений в окрестности V-образных надрезов служит скругление их вершины (или использование U-надреза). Скругление существенно изменяет напряжения в вершине V-образного надреза (или трещины), поскольку устраняется сингулярность напряжений. Но распределение напряжений на расстояниях от вершины надреза, превышающих половину радиуса скругления, остается практически неизменным, если радиус скругления достаточно мал по отношению к глубине надреза (или длине трещины) [17].

Другой приём уменьшения уровня напряжений в окрестности V-образного надреза заключается в заполнении его полости каким-либо материалом («залечивание»). Этот способ широко применяется в стоматологии — при восстановлении V-образных дефектов в зубах [18–20], в строительстве — для ремонта бетонных конструкций [21–23], в горных выработках — для стабилизации стен шахтных туннелей распылением материала, заполняющего трещины, для предотвращения или замедления их распространения [24, 25]. Одним из основных требований к материалу, заполняющему V-образный надрез, является обеспечение им минимального уровня напряжений у вершины надреза. Напряжения могут быть установлены на основе результатов решения задачи для замкнутого составного (состоящего из двух материалов) клина. Построение общих решений для составного клина детально рассмотрено в работах [2, 4, 26, 27]. Большой объём численных результатов для этой задачи приведён в работах [2, 28–30], где демонстрируется зависимость характера поведения напряжений в окрестности вершины клина, в том числе их сингулярное и несингулярное поведение, от соотношения углов составляющих клин областей и механических характеристик их материалов. В работах [24, 30] представлены зависимости, которые позволяют выбрать свойства заполняющего материала, при которых отсутствует сингулярность напряжений, соответствующая варианту нагрузок, оцениваемых в механике хрупкого разрушения по критерию  $K_I$  (коэффициенту интенсивности напряжений).

Важно, что для большого диапазона угла раскрытия надреза можно подобрать заполняющие материалы, жёсткость которых на несколько порядков меньше жёсткости основного материала (материала, в котором надрез находится). При этом заполняющие материалы являются существенно малосжимаемыми. Выбор для заполнения материала с малой жёсткостью позволяет устранить сингулярность напряжений, но не решает всех проблем, связанных с концентрацией напряжений. Так, технологически крайне сложно полностью заполнить надрез с малым углом раскрытия другим материалом. При наличии полости в окрестности его вершины сингулярность напряжений сохраняется при любых заполняющих материалах. Данная проблема и определяет цель настоящей работы, в которой приводятся результаты численного исследования влияния размера незаполненной области (пустоты) вблизи вершины V-образного надреза на напряжённое состояние при различных углах раскрытия и разных отношениях модулей упругости основного и заполняющего материалов.

Далее представлен раздел, посвящённый построению аналитическими методами собственных решений для составного замкнутого клина при плоско-деформированном состоянии и антиплоской деформации, а также пример их анализа для получения областей параметров задачи, при которых отсутствует сингулярность напряжений в вершине составного замкнутого клина.

## 2. Аналитические результаты анализа сингулярности напряжений в вершине составного замкнутого клина

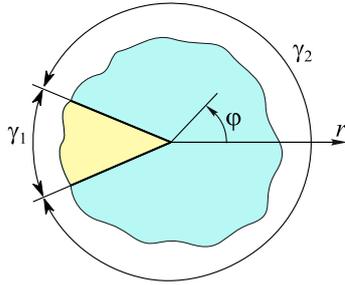


Рис. 1. Составной замкнутый клин в полярных координатах  $r, \varphi, z$  (ось  $z$  направлена перпендикулярно плоскости  $\{r, \varphi\}$ )

Одно из направлений исследования поведения напряжений в окрестности особых точек связано с построением собственных решений для составного замкнутого клина. Расчётная область задачи представлена на рисунке 1. Собственные решения в каждой из подобластей  $i = 1, 2$  имеют вид [31]:

$$u_r^{ki} = r^{\lambda_k} \xi_r^{ki}(\varphi); \quad u_\varphi^{ki} = r^{\lambda_k} \xi_\varphi^{ki}(\varphi), \quad (1)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots, \lambda_k$  — собственные значения,  $\xi_r^{ki}, \xi_\varphi^{ki}$  — собственные функции,  $u_r^{ki}, u_\varphi^{ki}$  — перемещения в полярной системе координат. Наличие в спектре собственных значений  $\lambda_k$  с  $\text{Re} \lambda_k < 1$  будет определять сингулярное поведение напряжений в окрестности вершины составного клина.

Построение собственных решений излагается в [27, 28], где также приводится трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений:

$$\begin{aligned} & \left( (1+\beta)^2 \sin^2 p\gamma_1 - p^2 (\beta-\alpha) \sin^2 \gamma_1 \right) \left( (1-\beta)^2 \sin^2 p\gamma_2 - (\beta-\alpha)^2 p^2 \sin^2 \gamma_2 \right) + (1-\alpha^2) \sin^2 p(\pi-\gamma_1) \times \\ & \times \left[ 2p^2 (\beta-\alpha)^2 \sin^2 \gamma_1 + 2(1-\beta)^2 \sin p\gamma_1 \sin p\gamma_2 - (1-\alpha^2) \sin^2 p(\pi-\gamma_1) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь:  $p = 1 - \lambda$ ;  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — углы раствора частей клина;  $\alpha = \frac{\Gamma(\kappa_1 + 1) - (\kappa_2 + 1)}{\Gamma(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)}$ ,  $\beta = \frac{\Gamma(\kappa_1 - 1) - (\kappa_2 - 1)}{\Gamma(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)}$  — комбинированные параметры упругих постоянных материалов (параметры Дандерса) [34], при этом  $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$  при плоско-деформированном состоянии (ПДС),  $\kappa_i = (3 - \nu_i)/(1 + \nu_i)$  при плоско-напряжённом состоянии (ПНС),  $\Gamma = G_2/G_1$ , где  $G_i = E_i/2(1 + \nu_i)$ ,  $\nu_i, G_i$  — коэффициенты Пуассона и модули сдвига,  $i = 1, 2$ . Так как  $\gamma_1 + \gamma_2 = 2\pi$ , из соотношения (2) следует, что собственные значения зависят только от величины одного из углов и механических характеристик материалов  $\nu_1, \nu_2, G_2/G_1$ .

Наряду с исследованиями составного замкнутого клина при ПДС и ПНС представляет интерес антиплоская деформация клина. В работах [35, 36] показано, что результаты решения задач ПДС и антиплоской деформации для клиньев в плоскостях, перпендикулярных ребру пространственного клина, определяют вид сингулярных решений в точках, лежащих на его ребре. В связи с этим важно знать собственные решения антиплоской задачи для составного замкнутого клина:

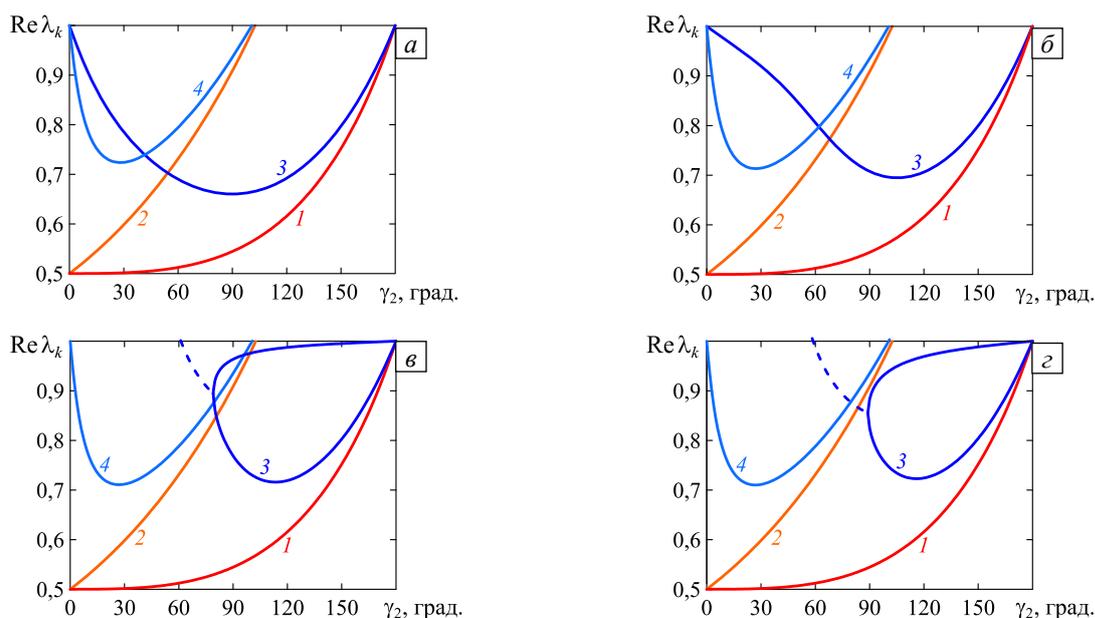
$$u_z = r^{\lambda_k} \xi_z(\varphi). \quad (3)$$

Трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений в антиплоской задаче имеет вид [30]:

$$(\sin \gamma_1 \lambda \cdot \sin(2\pi - \gamma_1) \lambda) (G_1^2 + G_2^2) + 2(1 - \cos \gamma_1 \lambda \cdot \cos(2\pi - \gamma_1) \lambda) G_1 G_2 = 0. \quad (4)$$

Трансцендентные уравнения (2), (4) позволяют получить собственные значения  $\lambda_k$  и после их анализа установить области параметров соответствующих задач, по которым можно судить о наличии или отсутствии сингулярных решений.

В качестве примера на рисунке 2 приведены собственные значения, характерные для однородного и составного замкнутого клиньев, в зависимости от величины угла  $\gamma_2$  в условиях ПДС. Результаты демонстрируют, что зависимости собственных значений от угла  $\gamma_2$  для различных коэффициентов Пуассона  $\nu_2$  существенно отличаются. При этом для симметричного относительно биссектрисы угла  $\gamma_2$  напряжённого состояния при слабосжимаемых заполняющих материалах имеются диапазоны значений  $\gamma_2$ , при которых сингулярность напряжений отсутствует (см. кривую 3 на Рис. 2в, г). В таблице 1 для  $\nu_1 = 0,3$ ,  $\nu_2 = 0,5$  и различных отношений  $E_2/E_1$  эти диапазоны представлены.



**Рис. 2.** Зависимость собственных значений  $\text{Re } \lambda_k < 1$  от угла  $\gamma_2$  для однородного (кривые 1 и 2) и составного (кривые 3 и 4) клиньев в условиях ПДС при разных значениях коэффициента Пуассона  $\nu_2$ : 0,3 (а); 0,45 (б); 0,49 (в); 0,5 (г); действительные собственные значения изображены сплошными линиями, комплексные – штриховыми; кривые 1 и 3 отвечают напряжениям, симметричным относительно биссектрисы угла  $\gamma_2$ , кривые 2 и 4 – антисимметричным

Таблица 1. Диапазоны значений угла  $\gamma_2$ , при которых отсутствует сингулярность напряжений в случае  $\nu_1 = 0,3$ ,  $\nu_2 = 0,5$

$E_2/E_1$	$\nu_2 = 0,5$
0,1	$0 \div 60,21^\circ$
0,01	$0 \div 31,95^\circ$
0,001	$0 \div 15,71^\circ$
0,0001	$0 \div 7,44^\circ$

### 3. Численное исследование напряжений в окрестности вершины V-образной трещины при её неполном заполнении другим материалом

Для численного анализа напряжённого состояния при наличии особых точек используется метод конечных элементов (МКЭ). Представлена методика, согласно которой из решения может быть выделена зависимость напряжений в окрестности вершины клина, обеспечивающая вычисление показателей сингулярности напряжений и констант, называемых коэффициентами интенсивности сингулярности. С помощью этой методики далее и будет исследован случай неполного заполнения V-образного надреза другим материалом.

Численная методика [37, 39] основана на решении в окрестности особых точек [31, 38]:

$$\sigma = A_1 r^{\lambda_1 - 1} + O(r^\lambda). \quad (5)$$

Здесь:  $r$  — расстояние от особой точки;  $\lambda_1$  — собственное значение с минимальной действительной частью  $\text{Re } \lambda_1$ , определяющей степень сингулярности напряжений;  $A_1$  — константа, называемая коэффициентом интенсивности сингулярности;  $O(r^\lambda)$  — все члены с  $r^{\lambda_k}$ , где  $k = 2, 3, \dots$ . При малых расстояниях  $r$  сингулярный член доминирует, и уравнение (5) имеет вид:

$$\sigma \sim A_1 r^{\lambda_1 - 1} \quad (6)$$

или

$$\log \sigma = \log A_1 + (\lambda_1 - 1) \log r. \quad (7)$$

Для отыскания параметра  $\lambda_1$  используется МКЭ со сгущающимися к особой точкам сетками конечных элементов. Для обнаружения зависимости (6) необходимо путём численных экспериментов найти такую дискретизацию, чтобы в окрестности особой точки в узловых точках  $r_1, r_2, \dots, r_n$  на радиальной линии, исходящей из особой точки, с достаточной точностью выполнялось условие:

$$\lambda_1 - 1 \approx \log\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) / \log\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \approx \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_3}\right) / \log\left(\frac{r_2}{r_3}\right) \approx \dots \approx \log\left(\frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}\right) / \log\left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right), \quad (8)$$

где  $r_1, r_2, \dots, r_n$  — расстояния от особой точки до узловых точек,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  — напряжения в этих точках;  $\lambda_1$  — искомый показатель сингулярности напряжений.

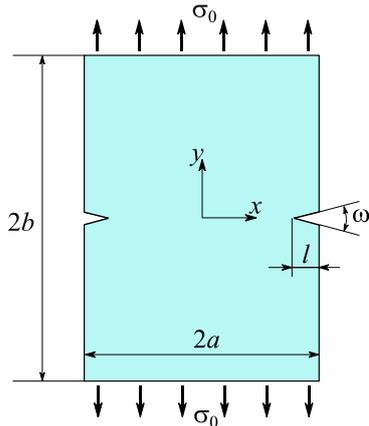


Рис. 3. Расчётная схема пластины, имеющей на боковых поверхностях V-образные надрезы с углом раствора  $\omega$

Найденная зависимость (8) позволяет вычислить значения  $\lambda_1$  и  $A_1$ . Необходимая точность расчётов достигается сгущением конечно-элементной сетки. Точность полученных численных результатов оценивается на основе погрешности выполнения естественных краевых условий, которые определяются соотношениями  $\sigma_n/P, \tau_n/P$  на свободной поверхности и соотношениями  $(\sigma_n^1 - \sigma_n^2)/P, (\tau_n^1 - \tau_n^2)/P$  на поверхности контакта разных материалов. Здесь:  $\sigma_n, \tau_n$  — нормальные и касательные напряжения на соответствующих поверхностях; верхний индекс указывает на принадлежность контактирующему материалу;  $P$  — максимальная величина внешней нагрузки. В проведённых расчётах использовались дискретизации, обеспечивающие выполнение естественных краевых условий с погрешностью не более 0,5% за пределами трёх-четырёх элементов, примыкающих к особой точке.

Методика апробирована на двумерных и трёхмерных задачах теории упругости путём сравнения показателей сингулярности напряжений, найденных согласно предлагаемому численному алгоритму и взятых из известных аналитических и численных решений [38–41]. Для получения напряжений вблизи вершины V-образного надреза с углом раскрытия  $5^\circ$ , заполненного другим материалом, решалась задача для пластины, с надрезами на боковых поверхностях; их углы раствора равнялись  $\omega$  (Рис. 3). Пластина имела размеры  $b/a = 4, l/a = 0,1$  и нагружалась по двум другим поверхностям растягивающими усилиями  $\sigma_0$ .

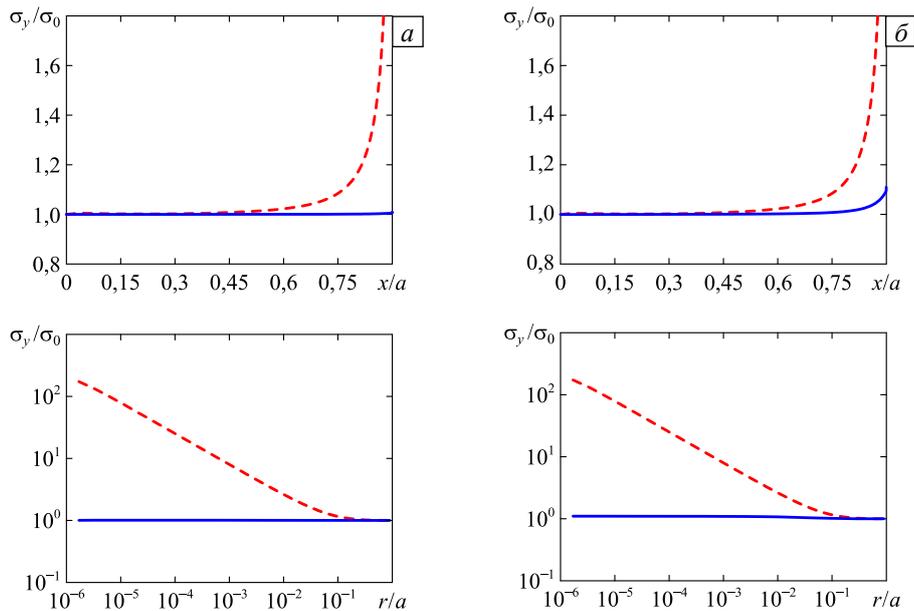


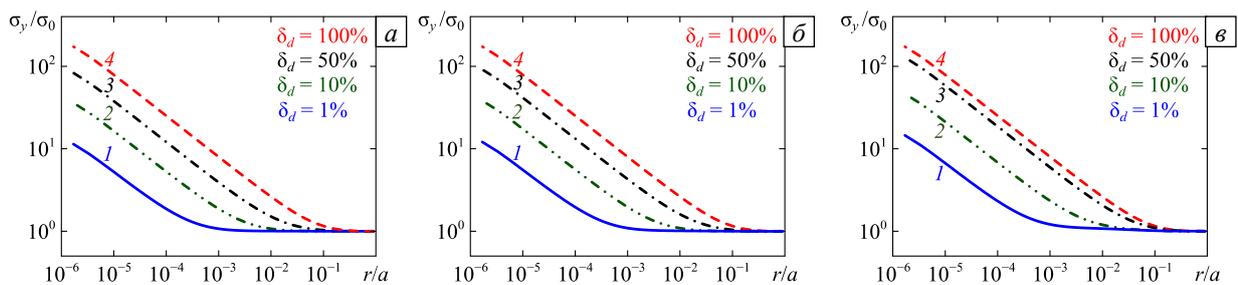
Рис. 4. Распределения напряжений  $\sigma_y/P$  в среднем по высоте сечения пластины в линейных и логарифмических осях с незаполненным V-образным надрезом (штриховые линии), с V-образным надрезом, заполненным материалом (сплошные линии): (a) —  $E_2/E_1 = 0,1, \nu_2 = 0,4825$ ; (б) —  $E_2/E_1 = 0,001, \nu_2 = 0,4998$

На рисунке 4 приведено распределение напряжений  $\sigma_y$  в среднем по высоте сечения пластины с V-образным надрезом из материала с  $\nu_1 = 0,3$ . Показан характер напряжений для случаев: надрез не заполнен, надрез заполнен материалом (далее заполняющий материал обозначается индексом 2). Заданные механические свойства контактирующих материалов в соответствующей задаче для составного клина не приводят к решениям с сингулярностью напряжений. В представленных примерах минимальные собственные значения  $\lambda_1$  единичные, что и определяет границу между решениями с сингулярностью и без сингулярности напряжений. Таким образом, результаты демонстрируют, что заполнение полости материалами со специально выбранными свойствами устраняет область ярко выраженной концентрации напряжений.

Далее на примере пластины с надрезами на боковых поверхностях (Рис. 3) рассмотрено неполное заполнение V-образного надреза с анализом влияния размера  $d$  пустоты у вершины надреза (Рис. 5) на уровень концентрации напряжений. Для этого был введён безразмерный параметр  $\delta_d$ :

$$\delta_d = \frac{d}{l} \cdot 100\% .$$

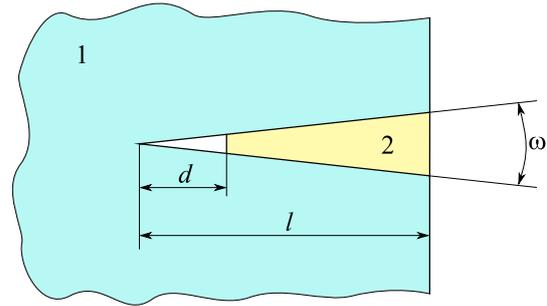
На рисунке 6 для трёх наборов механических характеристик заполняющего материала, устраняющих концентрацию напряжений вблизи вершины V-образного надреза при его полном заполнении этим материалом, представлены распределения напряжений  $\sigma_y$  в среднем по высоте сечения пластины из материала с  $\nu_1 = 0,3$  и V-образным надрезом при наличии полости у его вершины после заполнения. Видно, что приведённые на рисунке кривые в диапазоне  $1,7 \cdot 10^{-6} < r/a < 5 \cdot 10^{-5}$  включают наклонные прямолинейные участки, описываемые зависимостью (7). Участки имеют одинаковый наклон, определяемый, согласно (7), параметром  $\lambda$ . Для угла раствора  $\omega = 5^\circ$  при  $\gamma = \pi \cdot 5^\circ / 180^\circ$ , согласно трансцендентному уравнению (6),  $\lambda_1 = 0,500007$ . Показатель сингулярности напряжений, вычисленный согласно численной методике с использованием соотношения (8), получился равным:  $\lambda_1 = 0,501$ . Таким образом, отличие от предыдущего (аналитического) значения составляет менее 0,2%.



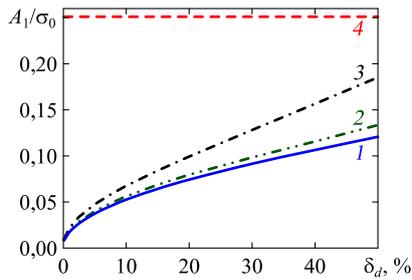
**Рис. 6.** Распределения напряжений  $\sigma_y/P$  в логарифмических осях в среднем по высоте пластины сечения при различных значениях параметра  $\delta_d$ , %: 1 (кривая 1), 10 (2), 50 (3), 100 (4); (а) –  $E_2/E_1 = 0,1$ ,  $\nu_2 = 0,4825$ ; (б) –  $E_2/E_1 = 0,01$ ,  $\nu_2 = 0,4983$ ; (в) –  $E_2/E_1 = 0,001$ ,  $\nu_2 = 0,4998$

С помощью зависимости (7) можно найти значения коэффициента  $A_1$ . На рисунке 7 для трёх наборов механических характеристик заполняющего материала представлены зависимости коэффициента  $A_1$  от параметра  $\delta_d$ . Результаты демонстрируют, что при неполном заполнении материалом V-образного надреза и сохранении сингулярности напряжений величина интенсивности сингулярности существенно уменьшается при всех отношениях  $E_2/E_1$  из рассмотренного диапазона (от 0,001 до 0,1).

Проанализировано напряжённое состояние вблизи вершины V-образного надреза материалом при его неполном заполнении с механическими характеристиками, при которых и при полном заполнении сингулярность напряжений не устраняется. На рисунке 8 представлены распределения напряжений  $\sigma_y$  в среднем по высоте сечения для пластины из материала с коэффициентом Пуассона  $\nu_1 = 0,3$



**Рис. 5.** Окрестность V-образного надреза, заполненного материалом не полностью

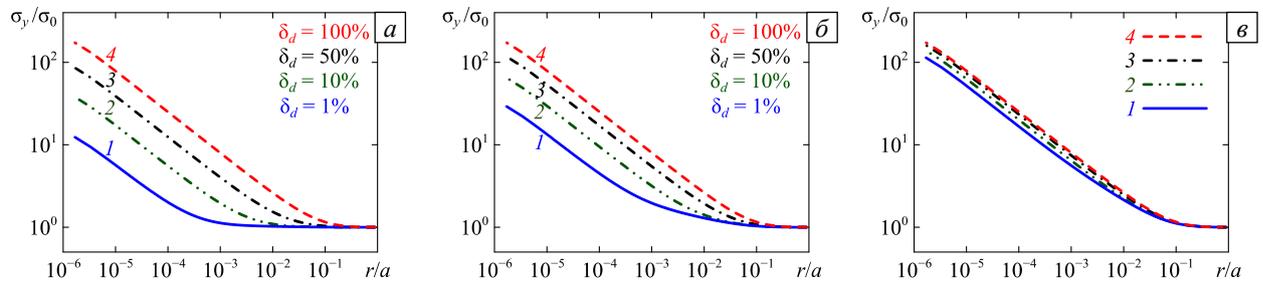


**Рис. 7.** Зависимость коэффициента интенсивности сингулярности  $A_1/\sigma_0$  от степени неполного заполнения  $\delta_d$  надреза с углом  $\omega = 5^\circ$ :  $E_2/E_1 = 0,1$ ,  $\nu_2 = 0,4825$  (кривая 1);  $E_2/E_1 = 0,01$ ,  $\nu_2 = 0,4983$  (2);  $E_2/E_1 = 0,001$ ,  $\nu_2 = 0,4998$  (3); без заполнения  $\delta_d = 100\%$  (4)

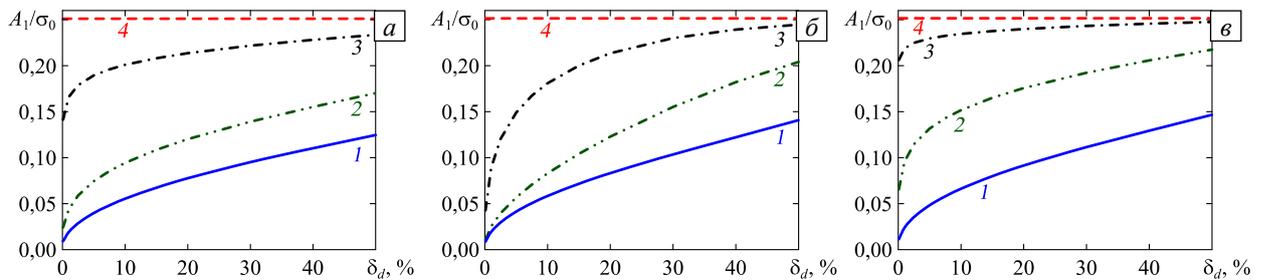
и V-образным надрезом в случае его неполного заполнения у вершины при различных значениях параметра  $\delta_d$ . Рисунок 9а содержит зависимости коэффициента  $A_1$  от параметра  $\delta_d$ .

Из анализа результатов, приведённых на рисунках 8 и 9а, следует, что при неполном заполнении V-образного надреза материалом, не устраняющим сингулярность напряжений, также удаётся существенно уменьшить величину коэффициента интенсивности сингулярности. Представленная методика вычислений позволяет получить количественную величину коэффициента  $A_1$  в зависимости от свойств заполняющего материала и степени заполнения V-образного надреза.

На рисунках 9б и 9в для угла  $\omega = 15^\circ$  представлены результаты, аналогичные показанным, соответственно, на рисунках 7 и 9а, но для угла  $\omega = 5^\circ$ . Они дают дополнительные качественные представления о зависимости коэффициента интенсивности сингулярности от угла раскрытия V-образного надреза при его неполном заполнении материалом.



**Рис. 8.** Распределения напряжений  $\sigma_y/P$  в логарифмических осях в среднем по высоте сечения пластины при различных значениях параметра  $\delta_d$ , %: 1 (кривая 1), 10 (2), 50 (3), 100 (4); (а) –  $E_2/E_1 = 0,1$ ,  $\nu_2 = 0,45$ ; (б) –  $E_2/E_1 = 0,01$ ,  $\nu_2 = 0,45$ ; (в) –  $E_2/E_1 = 0,001$ ,  $\nu_2 = 0,45$



**Рис. 9.** Зависимость коэффициента интенсивности сингулярности  $A_1/\sigma_0$  от степени неполного заполнения  $\delta_d$  надреза с разным углом раствора  $\omega$  при различных вариантах параметров материалов:  
 (а) –  $\omega = 5^\circ$ ,  $E_2/E_1 = 0,1$ ,  $\nu_2 = 0,45$  (кривая 1);  $E_2/E_1 = 0,01$ ,  $\nu_2 = 0,45$  (2);  $E_2/E_1 = 0,001$ ,  $\nu_2 = 0,45$  (3);  $\delta_d = 100\%$  (4);  
 (б) –  $\omega = 15^\circ$ ,  $E_2/E_1 = 0,1$ ,  $\nu_2 = 0,4825$  (кривая 1);  $E_2/E_1 = 0,01$ ,  $\nu_2 = 0,4983$  (2);  $E_2/E_1 = 0,001$ ,  $\nu_2 = 0,4998$  (3);  $\delta_d = 100\%$  (4);  
 (в) –  $\omega = 15^\circ$ :  $E_2/E_1 = 0,1$ ,  $\nu_2 = 0,45$  (кривая 1);  $E_2/E_1 = 0,01$ ,  $\nu_2 = 0,45$  (2);  $E_2/E_1 = 0,001$ ,  $\nu_2 = 0,45$  (3);  $\delta_d = 100\%$  (4)

### 5. Заключение

Характер напряжений вблизи вершины V-образного надреза может быть установлен на основе результатов решения задачи для замкнутого составного клина. Представлены трансцендентные уравнения, позволяющие оценить сингулярность напряжений в окрестности его вершины при плоскодеформированном состоянии и антиплоской деформации. Вычислены собственные значения, по которым можно судить о наличии или отсутствии сингулярных решений в вершине клина. Приведены результаты, демонстрирующие, что для составного замкнутого клина имеют место комбинации механических характеристик материалов и углов, при которых сингулярность напряжений отсутствует. Исходя из этого показана возможность выбора материала, при заполнении которым V-образного надреза концентрация напряжений в его вершине устраняется.

С учётом того, что полное заполнение V-образного надреза материалом, особенно при малых углах его раскрытия, является важной практической проблемой, представлен алгоритм оценки данных конечно-элементного расчёта напряжённо-деформированного состояния тела с V-образным надрезом, частично заполненным упругим материалом.

Продемонстрировано, что разработанный алгоритм позволяет рассчитать показатели сингулярности напряжений в вершине надреза, а также коэффициенты интенсивности сингулярности. Получено, что при неполном заполнении V-образного надреза материалом, устраняющим сингулярность напряжений, можно существенно снизить величину коэффициента интенсивности сингулярности. Количественно уменьшение коэффициента определяется механическими характеристиками основного и заполняющего материалов, углами V-образного надреза и степенью заполнения надреза. Приведены примеры, демонстрирующие, что величину коэффициента интенсивности сингулярности можно снизить, но в меньшей степени при использовании и других (не устраняющих сингулярность напряжений даже при полном заполнении) материалов, заполняющих не полностью V-образные надрезы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-77-30008).

## Литература

1. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis // *Appl. Mech. Rev.* 2004. Vol. 57. P. 251-298. <https://doi.org/10.1115/1.1762503>
2. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity – II: Asymptotic identification // *Appl. Mech. Rev.* 2004. Vol. 57. P. 385-439. <https://doi.org/10.1115/1.1767846>
3. *Mittelstedt C., Becker W.* Free-edge effects in composite laminates // *Appl. Mech. Rev.* 2007. Vol. 60. P. 217-245. <https://doi.org/10.1115/1.2777169>
4. *Paggi M., Carpinteri A.* On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // *Appl. Mech. Rev.* 2008. Vol. 61. 020801. <https://doi.org/10.1115/1.2885134>
5. *Erdogan F., Ozturk M.* On the singularities in fracture and contact mechanics // *J. Appl. Mech.* 2008. Vol. 75. 051111. <https://doi.org/10.1115/1.2936241>
6. *Carpinteri A., Paggi M.* Asymptotic analysis in linear elasticity: from the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today // *Eng. Fract. Mech.* 2009. Vol. 76. P. 1771-1784. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.03.012>
7. *Pook L.P.* A 50-year retrospective review of three-dimensional effects at cracks and sharp notches // *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.* 2013. Vol. 36. P. 699-723. <https://doi.org/10.1111/ffe.12074>
8. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. 338 с.
9. *Wu Z.* Design free of stress singularities for bi-material components // *Compos. Struct.* 2004. Vol. 65. P. 339-345. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.11.009>
10. *Xu L.R., Kuai H., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A biologically inspired design // *Exp. Mech.* 2004. Vol. 44. P. 608-615. <https://doi.org/10.1007/BF02428250>
11. *Xu L.R., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // *Exp. Mech.* 2004. Vol. 44. P. 616-621. <https://doi.org/10.1007/BF02428251>
12. *Wang P., Xu L.R.* Convex interfacial joints with least stress singularities in dissimilar materials // *Mech. Mater.* 2006. Vol. 38. P. 1001-1011. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2005.10.002>
13. *Baladi A., Arezoodar A.F.* Dissimilar materials joint and effect of angle junction on stress distribution at interface // *Int. J. Mech. Ind. Aerosp. Sci.* 2011. Vol. 5. P. 1184-1187. <https://doi.org/10.5281/zenodo.1331703>
14. *Lang T.P., Mallick P.K.* Effect of spew geometry on stresses in single lap adhesive joints // *Int. J. Adhes. Adhes.* 1998. Vol. 18. P. 167-177. [https://doi.org/10.1016/S0143-7496\(97\)00056-0](https://doi.org/10.1016/S0143-7496(97)00056-0)
15. *Tsai M.Y., Morton J.* The effect of a spew fillet on adhesive stress distributions in laminated composite single-lap joints // *Compos. Struct.* 1995. Vol. 32. P. 123-131. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(95\)00059-3](https://doi.org/10.1016/0263-8223(95)00059-3)
16. *Fedorov A.Yu., Matveenko V.P.* Optimization of geometry and mechanical characteristics of elastic bodies in the vicinity of singular points // *Acta Mech.* 2018. Vol. 229. P. 645-658. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1990-5>
17. *Radaj D.* State-of-the-art review on extended stress intensity factor concepts // *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.* 2014. Vol. 37. P. 1-28. <https://doi.org/10.1111/ffe.12120>
18. *Park J.-K., Hur B., Kim S.-K.* Stress distribution of Class V composite resin restorations: A three-dimensional finite element study // *J. Korean Acad. Conserv. Dent.* 2008. Vol. 33. P. 28-38. <https://doi.org/10.5395/JKACD.2008.33.1.028>
19. *Narayanaswamy S., Meena N., Shetty A., Kumari A., Naveen D.N.* Finite element analysis of stress concentration in Class V restorations of four groups of restorative materials in mandibular premolar // *J. Conserv. Dent.* 2008. Vol. 11. P. 121-126. <https://doi.org/10.4103/0972-0707.45251>
20. *Dikova T., Vasilev T., Hristova V., Panov V.* Finite element analysis of V-shaped tooth defects filled with universal nanohybrid composite using incremental technique // *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* 2021. Vol. 118. 104425. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2021.104425>
21. *Chen G., Zhou J., Zhao Q.* Crack treatment at Linhekou dam // *Int. Water Power Dam Constr.* 2006. <https://www.waterpowermagazine.com/features/featurecrack-treatment-at-linhekou-dam>
22. *Zheng K., Shi C., Lin Y., Lei M., Liu J.* Transfer station cracks induced by cutting anchor cables and crack stabilization: A case study // *Eng. Fail. Anal.* 2021. Vol. 126. 105460. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2021.105460>
23. *Kadhim B.M., Oweed K.M.* Study the effect of different additives on crack repair epoxy // *J. Eng. Sustain. Dev.* 2021. Vol. 25. P. 74-80. <https://doi.org/10.31272/jeasd.25.3.8>
24. *Fowkes N., Teixeira de Freitas J.A., Stacey R.* Crack repair using an elastic filler // *J. Mech. Phys. Solids.* 2008. Vol. 56. P. 2749-2758. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.06.001>

25. Chen L., Zhou Z., Liu G., Cui X., Dong Q., Cao H. Effects of substrate materials and liner thickness on the adhesive strength of the novel thin spray-on liner // *Adv. Mech. Eng.* 2020. Vol. 12. 168781402090457. <https://doi.org/10.1177/1687814020904574>
26. Bogy D.B. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading // *J. Appl. Mech.* 1968. Vol. 35. P. 460-466. <https://doi.org/10.1115/1.3601236>
27. Dempsey J.P., Sinclair G.B. On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge // *J. Elasticity.* 1981. Vol. 11. P. 317-327. <https://doi.org/10.1007/BF00041942>
28. Bogy D.B., Wang K.C. Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials // *Int. J. Solids Struct.* 1971. Vol. 7. P. 993-1005. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(71\)90077-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90077-1)
29. Chen D-H., Nisitani H. Singular stress field near the corner of jointed dissimilar materials // *J. Appl. Mech.* 1993. Vol. 60. P. 607-613. <https://doi.org/10.1115/1.2900847>
30. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P. Numerical and applied results of the analysis of singular solutions for a closed wedge consisting of two dissimilar materials // *Acta Mech.* 2020. Vol. 231. P. 2711-2721. <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02668-w>
31. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *J. Appl. Mech.* 1952. Vol. 19. P. 526-528. <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140730-111744170>
32. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
33. Leguillon D., Sanchez-Palencia E. Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity. Wiley, 1987. 200 p.
34. Dundurs J. Discussion: "Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading" (Bogy, D.B., 1968, *ASME J. Appl. Mech.*, 35, pp. 460-466) // *J. Appl. Mech.* 1969. Vol. 36. P. 650-652. <https://doi.org/10.1115/1.3564739>
35. Михайлов С.Е. Сингулярность напряжений в окрестности ребра в составном неоднородном анизотропном теле и некоторые приложения к композитам // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1979. № 5. С. 103-110.
36. Huang C.S., Leissa A.W. Stress singularities in bimaterial bodies of revolution // *Compos. Struct.* 2008. Vol. 82. P. 488-498. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.01.026>
37. Raju I., Crews J.H. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates // *Comput. Struct.* 1981. Vol. 14. P. 21-28. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90079-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90079-1)
38. Becker E.B., Dunham R.S., Stern M. Some stress intensity calculations using finite elements // *Finite element methods in engineering: proc. of the 1974 Int. Conf. on Finite Element Methods in Engineering* / Ed. V.A. Pulmans, A.P. Kabailla. Kensington: Unisearch Ltd., 1974. P. 117-138.
39. Корепанов В.В., Матвеевко В.П., Фёдоров А.Ю., Шардаков И.Н. Численный анализ сингулярных решений двумерных задач несимметричной теории упругости // *Изв. РАН. МТТ.* 2013. № 4. С. 50-58. (English version <https://doi.org/10.3103/S0025654413040067>)
40. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P., Shardaikov I.N. Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials // *Int. J. Civ. Eng. Technol.* 2018. Vol. 9. P. 1062-1075.
41. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P. Investigation of stress behavior in the vicinity of singular points of elastic bodies made of functionally graded materials // *J. Appl. Mech.* 2018. Vol. 85. 061008. <https://doi.org/10.1115/1.4039619>

## References

1. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity – I: Removal, interpretation, and analysis. *Appl. Mech. Rev.*, 2004, vol. 57, pp. 251-298. <https://doi.org/10.1115/1.1762503>
2. Sinclair G.B. Stress singularities in classical elasticity II: Asymptotic identification. *Appl. Mech. Rev.*, 2004. vol. 57, pp. 385-439. <https://doi.org/10.1115/1.1767846>
3. Mittelstedt C., Becker W. Free-edge effects in composite laminates. *Appl. Mech. Rev.*, 2007, vol. 60, pp. 217-245. <https://doi.org/10.1115/1.2777169>
4. Paggi M., Carpinteri A. On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion. *Appl. Mech. Rev.*, 2008, vol. 61, 020801. <https://doi.org/10.1115/1.2885134>
5. Erdogan F., Ozturk M. On the singularities in fracture and contact mechanics. *J. Appl. Mech.*, 2008, vol. 75, 051111. <https://doi.org/10.1115/1.2936241>
6. Carpinteri A., Paggi M. Asymptotic analysis in linear elasticity: from the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today. *Eng. Fract. Mech.*, 2009, vol. 76, pp. 1771-1784. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2009.03.012>
7. Pook L.P. A 50-year retrospective review of three-dimensional effects at cracks and sharp notches. *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2013, vol. 36, pp. 699-723. <https://doi.org/10.1111/ffe.12074>
8. Chobanyan K.S. *Napryazheniya v sostavnykh uprugikh telakh* [Stress state in compound elastic bodies]. Yerevan, Armenian Academy of Sciences Press, 1987. 338 p.
9. Wu Z. Design free of stress singularities for bi-material components. *Compos. Struct.*, 2004, vol. 65, pp. 339-345. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.11.009>
10. Xu L.R., Kuai H., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part I. A biologically inspired design. *Exp. Mech.*, 2004. vol. 44, pp. 608-615. <https://doi.org/10.1007/BF02428250>
11. Xu L.R., Sengupta S. Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis. *Exp. Mech.*, 2004, vol. 44, pp. 616-621. <https://doi.org/10.1007/BF02428251>
12. Wang P., Xu L.R. Convex interfacial joints with least stress singularities in dissimilar materials. *Mech. Mater.*, 2006, vol. 38, pp. 1001-1011. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2005.10.002>
13. Baladi A., Arezoodar A.F. Dissimilar materials joint and effect of angle junction on stress distribution at interface. *Int. J. Mech. Ind. Aerosp. Sci.*, 2011, vol. 5, pp. 1184-1187. <https://doi.org/10.5281/zenodo.1331703>
14. Lang T.P., Mallick P.K. Effect of spew geometry on stresses in single lap adhesive joints. *Int. J. Adhes. Adhes.*, 1998, vol. 18, pp. 167-177. [https://doi.org/10.1016/S0143-7496\(97\)00056-0](https://doi.org/10.1016/S0143-7496(97)00056-0)
15. Tsai M.Y., Morton J. The effect of a spew fillet on adhesive stress distributions in laminated composite single-lap joints. *Compos. Struct.*, 1995, vol. 32, pp. 123-131. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(95\)00059-3](https://doi.org/10.1016/0263-8223(95)00059-3)

16. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P. Optimization of geometry and mechanical characteristics of elastic bodies in the vicinity of singular points. *Acta Mech.*, 2018, vol. 229, pp. 645-658. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1990-5>
17. Radaj D. State-of-the-art review on extended stress intensity factor concepts. *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.*, 2014, vol. 37, pp. 1-28. <https://doi.org/10.1111/ffe.12120>
18. Park J.-K., Hur B., Kim S.-K. Stress distribution of Class V composite resin restorations: A three-dimensional finite element study. *J. Korean Acad. Conserv. Dent.*, 2008, vol. 33, pp. 28-38. <https://doi.org/10.5395/JKACD.2008.33.1.028>
19. Narayanaswamy S., Meena N., Shetty A., Kumari A., Naveen D.N. Finite element analysis of stress concentration in Class V restorations of four groups of restorative materials in mandibular premolar. *J. Conserv. Dent.*, 2008, vol. 11, pp. 121-126. <https://doi.org/10.4103/0972-0707.45251>
20. Dikova T., Vasilev T., Hristova V., Panov V. Finite element analysis of V-shaped tooth defects filled with universal nanohybrid composite using incremental technique. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 2021, vol. 118, 104425. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2021.104425>
21. Chen G., Zhou J., Zhao Q. Crack treatment at Linhekou dam. *Int. Water Power Dam Constr.*, 2006. <https://www.waterpowermagazine.com/features/featurecrack-treatment-at-linhekou-dam>
22. Zheng K., Shi C., Lin Y., Lei M., Liu J. Transfer station cracks induced by cutting anchor cables and crack stabilization: A case study. *Eng. Fail. Anal.*, 2021, vol. 126, 105460. <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2021.105460>
23. Kadhim B.M., Oweed K.M. Study the effect of different additives on crack repair epoxy. *J. Eng. Sustain. Dev.*, 2021, vol. 25, pp. 74-80. <https://doi.org/10.31272/jeasd.25.3.8>
24. Fowkes N., Teixeira de Freitas J.A., Stacey R. Crack repair using an elastic filler. *J. Mech. Phys. Solids.*, 2008, vol. 56, pp. 2749-2758. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.06.001>
25. Chen L., Zhou Z., Liu G., Cui X., Dong Q., Cao H. Effects of substrate materials and liner thickness on the adhesive strength of the novel thin spray-on liner. *Adv. Mech. Eng.*, 2020, vol. 12, 1687814020904574. <https://doi.org/10.1177/1687814020904574>
26. Bogy D.B. Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading. *J. Appl. Mech.*, 1968, vol. 35, pp. 460-466. <https://doi.org/10.1115/1.3601236>
27. Dempsey J.P., Sinclair G.B. On the singular behavior at the vertex of a bi-material wedge. *J. Elasticity*, 1981, vol. 11, pp. 317-327. <https://doi.org/10.1007/BF00041942>
28. Bogy D.B., Wang K.C. Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials. *Int. J. Solids Struct.*, 1971, vol. 7, pp. 993-1005. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(71\)90077-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90077-1)
29. Chen D.-H., Nisitani H. Singular stress field near the corner of jointed dissimilar materials. *J. Appl. Mech.*, 1993, vol. 60, pp. 607-613. <https://doi.org/10.1115/1.2900847>
30. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P. Numerical and applied results of the analysis of singular solutions for a closed wedge consisting of two dissimilar materials. *Acta Mech.*, 2020, vol. 231, pp. 2711-2721. <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02668-w>
31. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. Appl. Mech.*, 1952, vol. 19, pp. 526-528. <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140730-111744170>
32. Parton P., Perlin V. *Mathematical methods of the theory of elasticity*. Moscow, Mir Publishers, 1984.
33. Leguillon D., Sanchez-Palencia E. *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. Wiley, 1987. 200 p.
34. Dundurs J. Discussion: "Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading" (Bogy, D.B., 1968, ASME J. Appl. Mech., 35, pp. 460-466). *J. Appl. Mech.*, 1969, vol. 36, pp. 650-652. <https://doi.org/10.1115/1.3564739>
35. Mihailov S.E. Stress singularity in the vicinity of an angle edge in an anisotropic composite and some applications to fibrous composites. *Izv. Acad. Sci. USSR. Mechanics twerdogo tela – Mech. Solids*, 1979, no. 5, pp. 103-110.
36. Huang C.S., Leissa A.W. Stress singularities in bimaterial bodies of revolution. *Compos. Struct.*, 2008, vol. 82, pp. 488-498. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.01.026>
37. Raju I., Crews J.H. Interlaminar stress singularities at a straight free edge in composite laminates. *Comput. Struct.*, 1981, vol. 14, pp. 21-28. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90079-1](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90079-1)
38. Becker E.B., Dunham R.S., Stern M. *Finite element methods in engineering: proc. of the 1974 Int. Conf. on Finite Element Methods in Engineering*, ed. V.A. Pulmans, A.P. Kabaila. Kensington: Unisearch Ltd., 1974. P. 117-138.
39. Korepanov V.V., Matveenko V.P., Fedorov A.Yu., Shardakov I.N. Numerical analysis of singular solutions of two-dimensional problems of asymmetric elasticity. *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, pp. 397-404. <https://doi.org/10.3103/S0025654413040067>
40. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials. *Int. J. Civ. Eng. Technol.*, 2018, vol. 9, pp. 1062-1075.
41. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P. Investigation of stress behavior in the vicinity of singular points of elastic bodies made of functionally graded materials. *J. Appl. Mech.*, 2018, vol. 85, 061008. <https://doi.org/10.1115/1.4039619>

Поступила в редакцию 26.08.2022; после доработки 15.09.2022; принята к опубликованию 15.09.2022

#### Сведения об авторах

Матвеенко Валерий Павлович, акад., дир., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: mvr@icmm.ru

Фёдоров Андрей Юрьевич, кфмн, нс, ИМСС УрО РАН; e-mail: fedorov@icmm.ru

Галкина Елизавета Борисовна, б/с, инж, ИМСС УрО РАН; e-mail: galkina.e@icmm.ru