

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.3.23](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.3.23)

УДК 539.3

## МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ АМОРТИЗАЦИОННОГО УЗЛА

Д.А. Бояршинов, О.Ю. Сметанников

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация*

Существуют конструкции, к динамическим характеристикам которых предъявляются высокие требования во многих отраслях промышленности: авиационной, военной, приборостроительной, автомобильной и других. Удовлетворение практическим потребностям связано, в частности, с функционированием входящих в состав конструкций систем демпфирования. Работа последних определяется комплексом нелинейных процессов (контактным взаимодействием, сухим трением, большими деформациями и так далее), что делает актуальной задачу построения их математических моделей. Используемые в настоящее время подходы к их моделированию не позволяют в полной мере учесть нелинейные эффекты, свойственные названным выше процессам, или требуют значительных вычислительных ресурсов, а также могут нуждаться в проведении большого числа экспериментов. Целью данного исследования является построение и идентификация модели деформирования специального амортизатора с учетом трения, температуры, вязкоупругого и гиперупругого поведения материала, а также определение при различных условиях нагружения интегральных термомеханических характеристик, таких как зависимость реакции демпфера от перемещения, количество выделяемого за один цикл деформирования тепла, величина силы трения. На первом этапе строится модель вязко-гиперупругого поведения материала и вычисляются ее параметры на основе информации из натуральных экспериментов. Для нахождения гиперупругих характеристик осуществлены испытания на свободное растяжение–сжатие и стесненное сжатие, а вязкоупругие параметры установлены из экспериментов с гармоническим возбуждением и варьируемой температурой. Сформирован массив исходных данных для конечно-элементной модели демпфера из программного пакета ANSYS и рассчитаны параметры трения при контактном взаимодействии с учетом поправок, которые установлены по результатам сравнения с испытаниями на деформирование амортизатора в осевом и поперечном направлениях. С помощью построенной авторами модели оценено термомеханическое поведение амортизатора при циклическом деформировании, которое реализуется при вибрации. Получены зависимости выделяемой за цикл энергии вязкого и сухого трения от коэффициента трения, скорости и температуры.

*Ключевые слова:* гиперупругость, вязкоупругость, амортизация, контактное взаимодействие, численное моделирование

## MODEL OF THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF A SHOCK-ABSORBING UNIT

D.A. Boyarshinov and O.Yu. Smetannikov

*Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation*

Modern industries use structures that should meet strict requirements for dynamic characteristics specified in many branches, such as aviation, military, instrument-making, automotive, etc. The fulfillment of these requirements is associated, in particular, with the use of the damping systems of structures, the operation of which is determined by a complex of nonlinear processes (contact interaction, dry friction, large deformations, etc.), thus making the task of constructing their mathematical models relevant. The currently used approaches to modeling these systems do not fully take into account the nonlinear effects intrinsic to the above processes, or require significant computational resources, and may also require a large number of experiments. The purpose of this study is to construct and identify a model of deformation of a shock absorber, taking into account friction, temperature, viscoelastic and hyperelastic behavior of the material and to determine the following integral thermomechanical characteristics of a shock absorber under various loading conditions: a shock absorber response to displacement, the amount of heat released during one deformation cycle, the magnitude of the friction force. At the first stage, a model of visco-hyperelastic behavior of a material is constructed and its parameters are calculated based on the real experiment data. The hyperelastic characteristics were determined using the results of free tension-compression and constrained compression tests, and the parameters of the viscoelastic model were found in the harmonic load and variable temperature experiments. Then, a finite element model of the damper is constructed using the ANSYS software package and the parameters of friction due to contact interaction are determined by making comparison with the results of deformation tests of the shock absorber under the conditions of axial and transverse loading. At the last stage, the constructed model is used to evaluate the thermomechanical behavior of the shock absorber under cyclic deformation, which is also realized during vibration. As a result, the dependencies of viscous and dry friction energy released during one deformation cycle on the friction coefficient, velocity and temperature are obtained.

*Key words:* hyperelasticity, viscoelasticity, shock absorption, contact interaction, numerical simulation

### 1. Введение

В последнее время ставятся все более жесткие требования к динамическим характеристикам конструкций, создаваемых и используемых в различных отраслях промышленности: авиационной, военной, приборостроительной, автомобильной и других. Например, может быть необходимым уменьшение амплитуд линейных и угловых ускорений, достижение надежности и точности при значительном увеличении амплитуд внешних нагрузок, уменьшение величины отношения отклика к внешнему воздействию.

Одним из основных типов динамических нагрузок, которым подвергаются проектируемые конструкции, являются вибрации. Они возникают вследствие дисбаланса вращающихся узлов, движения конструкции, ветровых нагрузок. Достигнув критического уровня, вибрации оказывают чрезвычайное

влияние на исправность, производительность и долговечность конструкций, нередко становятся причиной их нестабильной работы и даже отказа. Выполнение нормативных требований в условиях вибрационного воздействия обеспечивается использованием в необходимых местах конструкций виброзащитных систем, снижающих уровень их колебаний до безопасного уровня. Затухание колебаний происходит за счет рассеивания энергии, которое обуславливается внутренними и внешними источниками. Выделяют четыре основных типа рассеивания энергии, применяемых в системах амортизации. К первому, наиболее распространенному, типу относят демпфирование, возникающее из-за внутренних вязких сил трения [1, 2]. Вторым типом рассеивания энергии считают сухое трение между подвижными частями конструкции [3]. Аэродинамические и гидродинамические силы представляют собой третий тип демпфирования, который встречается довольно редко [4, 5]. Четвертый тип [6] появился относительно недавно, — это системы пьезоэлементов, которые встраиваются в конструкцию и соединяются с внешними электрическими цепями. Это позволяет превращать механическую энергию в электрическую и далее — в тепловую, или путем подачи электрического напряжения создавать колебания пьезоэлементов противоположной основным колебаниям фазы.

Стоит отметить, что реальные системы амортизации демонстрируют различную степень нелинейного поведения, которое обуславливается различными источниками. Учет нелинейного поведения систем виброзащиты играет ключевую роль в качестве проектирования конструкций, в которых эти системы применяются. Источником нелинейности может выступать и вязкоупругое поведение материала, из которого изготавливается сама защитная система [7–10]. В этом случае отклик системы на внешнее воздействие будет нелинейным, а ее жесткость — зависящей от частоты внешнего воздействия. Причиной нелинейного поведения системы также может стать температурная зависимость свойств материала защитной системы [11], которая проявляется, если конструкция эксплуатируется в условиях высоких и низких температур внешней среды или нагреваются ее элементы в результате трения и работы электроники. Нелинейное поведение наблюдается и в условиях больших деформаций, если материал системы гиперупругий [12–14]. Для этих материалов характерна нелинейная связь между напряжениями и деформациями в условиях упругого деформирования. Стоит назвать еще один источник, вызывающий нелинейное поведение движущихся механизмов, — сухое трение [15, 16]. Конструкторы по всему миру зачастую стремятся к наибольшему снижению сухого трения, но в присутствии демпфирующего эффекта управление этой причиной нелинейности представляет собой актуальную задачу. Хотя сегодня в массовом производстве систем виброзащиты, как и раньше, используются линейные подходы к расчетам из-за их простоты, отработанных методов, вычислений и экспериментальных исследований, но в последние десятилетия ведется активная разработка и развитие методов компьютерного моделирования динамического поведения конструкций, которые учитывают различные характерные для них нелинейные эффекты.

Из-за усложнения проектируемых систем амортизации увеличивается степень проявляющейся в них нелинейности, что делает необходимым математическое моделирование как конструкций с такими системами, так и самих систем. Ко множеству работ в данной области применяются разные классификации. Например, в работе [17] подходы к математическому моделированию нелинейных систем демпфирования разделяются на следующие типы: моделирование на основе линеаризованных методов; рассмотрение только в частотной или временной области; на основе модального анализа, с помощью частотно-временных методов. Линеаризованные подходы [18–20] используют идею о пренебрежимо малой нелинейности на некотором малом приращении внешнего воздействия или вблизи некоторой области. Пример подхода, относящегося к данному классу, является метод Крылова–Боголюбова. Идея моделирования в рамках частотной области [21–23] заключается в представлении данных в виде спектров или зависимостей от частоты, что позволяет выделить диапазон рассматриваемых частот и существенно понизить требуемую вычислительную мощность. Подходы во временной области [24–26] сводятся к решению нелинейных уравнений в последовательные моменты времени, что позволяет описать все переходные процессы и получить всю историю изменения состояния системы за рассматриваемое время. Хотя распространенными методами модального анализа задача определения собственных частот и форм колебаний исключительно с линейными характеристиками разрешима, но в последнее время активно разрабатываются методы нелинейного модального анализа [27, 28]. Согласно частотно-временному моделированию [29–31] исходная задача рассматривается как в частотном, так и во временном диапазоне, например, с помощью непрерывного вейвлет-преобразования. Также стоит выделить подходы, использующие нейронные сети [32].

Однако перечисленные подходы не позволяют в полной мере учитывать присущие процессу демпфирования нелинейные эффекты, особенно при динамических воздействиях на конструкции.

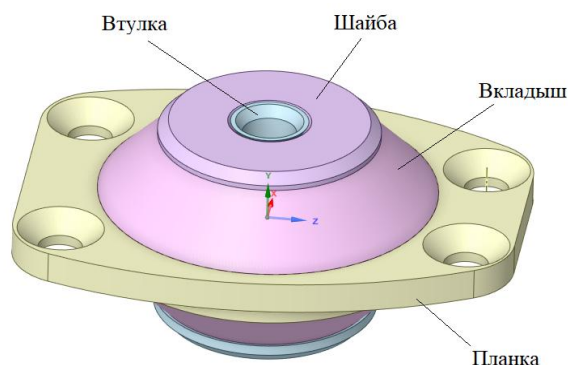


Рис. 1. Геометрия амортизатора

Поэтому построение модели динамического поведения амортизационного узла с учетом разного рода нелинейностей по-прежнему актуально. Первым этапом на этом пути является построение модели статического деформирования демпфера. В данной работе рассматривается амортизатор, предназначенный для подавления вибраций в блоке датчиков навигационной системы конструкции, которая движется при различной температуре окружающей среды. Его геометрия приведена на рисунке 1. Начало системы координат находится на середине оси вращения втулки, а ось  $y$  и, соответственно, ось амортизатора сонаправлены с ней. Амортизатор крепится к блоку датчиков навигационной системы винтом, который проходит через центральное отверстие втулки и прилегает головкой к шайбе, а с помощью четырех винтов и планки фиксируется на внешнем корпусе конструкции.

## 2. Определение материальных свойств

### 2.1. Математическая постановка

Так как далее рассматривается процесс деформирования материала, проявляющего вязкоупругие и гиперупругие свойства, то математическая постановка включает в себя общие соотношения механики сплошных сред, а также определяющие соотношения гиперупругого и вязкоупругого поведения. В качестве общих соотношений механики сплошных сред применяются уравнения равновесия:

$$\tilde{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{F} = 0,$$

где  $\tilde{\nabla}$  — оператор Гамильтона в конечной конфигурации,  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений Коши,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{F}$  — вектор объемных нагрузок.

Гиперупругое поведение материала вводится в виде нелинейного соотношения связи напряжений и деформаций:

$$S_{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}}. \quad (1)$$

Здесь:  $W$  — потенциал энергии деформации;  $S_{ij}$  — компоненты тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода;  $C_{ij}$  — компоненты тензора мер деформаций Коши–Грина.

Для описания вязкоупругих свойств материала используется модель Прони, в которой релаксационное ядро представляется в виде суммы экспонент при условии постоянства модуля объемного сжатия. Связь напряжений и деформаций во времени записывается следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t 2G(t-\tau) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau} d\tau + \mathbf{I}K\theta, \quad (2)$$

где  $t$  — время,  $G$  — модуль сдвига,  $\mathbf{e}$  — девиатор тензора деформаций,  $\theta$  — объемная деформация,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $K$  — модуль объемного сжатия.

В данной модели модуль сдвига зависит от времени:

$$G(t) = G_0 \left[ \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \right].$$

Здесь:  $G_0$  — мгновенный модуль сдвига;  $\alpha_i$  — относительные модули сдвига для времен сдвиговой релаксации  $\tau_i$ ;  $n_G$  — количество времен сдвиговой релаксации. Если ввести длительный модуль сдвига  $G_\infty = G|_{t=\infty}$ , то можно записать следующие соотношения для относительных модулей сдвига:

$$\alpha_0 = \frac{G_\infty}{G_0}, \quad \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0}.$$

Для описания вязкоупругого поведения материала при разных температурах используется функция сдвига Вильямса–Ландела–Ферри:

$$\log(a_T(T)) = \frac{C_1(T-T_r)}{C_2+(T-T_r)},$$

где  $a_T(T)$  — функция сдвига,  $C_1, C_2$  — параметры модели,  $T$  — текущая температура,  $T_r$  — базовая температура (температура, при которой функция сдвига равна единице).

Приведенные соотношения позволяют записать выражение для тензора напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}_{el}^D(t) - \sum_{i=1}^{n_G} \frac{\alpha_i}{\tau_i} \int_0^t \boldsymbol{\sigma}_{el}^D(t-\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_i}\right) d\tau + \boldsymbol{\sigma}^H(t).$$

Здесь:  $\boldsymbol{\sigma}_{el}^D(t) = 2G(t)\mathbf{e}(t)$  — девиаторная часть, вычисляемая согласно закону Гука;  $\tau_i = \tau_i/a_T$  — приведенные времена релаксации;  $\boldsymbol{\sigma}^H(t)$  — шаровая часть.

Показанное выражение построено для линейного упругого материала. Для учета гиперупругих свойств выражение необходимо переписать в терминах напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода. Это даст соотношения, аналогичные работе [33] и реализованные в стандартной модели ANSYS для материалов с вязкоупругими и гиперупругими свойствами:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}_{el}^D(t) - \sum_{i=1}^{n_G} \frac{\alpha_i}{\tau_i} \int_0^t \mathbf{S}_{el}^D(t-\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_i}\right) d\tau + \mathbf{S}^H(t),$$

где  $\mathbf{S}_{el}^D(t)$  и  $\mathbf{S}^H(t)$  — девиаторная часть тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода, вычисляемая согласно выражению (1), и его шаровая часть.

## 2.2. Идентификация гиперупругих свойств

Для построения модели динамического поведения амортизатора необходимо знать физические свойства гиперупругого материала. Соответствующие константы определялись по результатам натуральных экспериментов в условиях одноосного напряженного и одноосного деформированного состояний. Для идентификации свойств найдено аналитическое решение задачи деформирования гиперупругого образца в рассматриваемых состояниях.

При построении модели материала использовался потенциал энергии деформации Муни–Ривлина с двумя параметрами, учитывающий сжимаемость материала и имеющий широкое и частое применение для описания поведения резин [12, 14]:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{1}{d}(J - 1)^2. \quad (3)$$

Здесь:  $C_{10}, C_{01}, d = 2/K$  — материальные константы;  $\bar{I}_i$  — инварианты девиатора тензора меры деформаций Коши–Грина ( $i=1,2$ );  $J$  — определитель тензора градиента места,  $J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ , где  $\lambda_i = l_i(t)/l_i(0)$  ( $l_i(0)$  и  $l_i(t)$  — длины рассматриваемого образца в  $i$ -м направлении, соответственно, в начальный момент времени и в момент  $t$ ). Кроме этого, вводились вспомогательные соотношения:

$$\bar{\lambda}_i = J^{-1/3}\lambda_i, \quad (4)$$

здесь  $\bar{\lambda}_i$  — модифицированные главные растяжения,  $\lambda_i$  — главные растяжения;

$$C_{ij} = F_{ki}F_{kj},$$

здесь  $F_{ki}$  — компоненты тензора градиента места.

Тогда компоненты тензора напряжений и главные растяжения могут быть представлены в виде:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} F_{ik} S_{kl} F_{jl},$$

$$\partial \lambda_i^2 = \frac{\partial \lambda_i^2}{\partial \lambda_i} \partial \lambda_i = 2 \lambda_i \partial \lambda_i,$$

или

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} S_{ik}^* F_{jk}, \quad (5)$$

где  $S_{ik}^*$  — компоненты тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа первого рода. Отсюда следует, что

$$\bar{I}_1 = \bar{\lambda}_1^2 + \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_3^2, \quad (6)$$

$$\bar{I}_2 = \bar{\lambda}_1^2 \bar{\lambda}_2^2 + \bar{\lambda}_2^2 \bar{\lambda}_3^2 + \bar{\lambda}_1^2 \bar{\lambda}_3^2. \quad (7)$$

Подстановка (4) в (6), (7), а новых формул далее в (3), дает для потенциала энергии деформации выражение через главные растяжения:

$$\begin{aligned} W &= C_{10} \left( \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{2/3}} - 3 \right) + C_{01} \left( \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{4/3}} - 3 \right) + \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1)^2}{d} = \\ &= C_{10} \left( \lambda_1^{4/3} \lambda_2^{2/3} \lambda_3^{-2/3} + \lambda_1^{-2/3} \lambda_2^{4/3} \lambda_3^{-2/3} + \lambda_1^{-2/3} \lambda_2^{-2/3} \lambda_3^{4/3} \right) + C_{01} \left( \lambda_1^{2/3} \lambda_2^{2/3} \lambda_3^{4/3} + \lambda_1^{-4/3} \lambda_2^{2/3} \lambda_3^{2/3} + \lambda_1^{2/3} \lambda_2^{4/3} \lambda_3^{2/3} \right) + \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 1)^2}{d}. \quad (8) \end{aligned}$$

Запись напряжений Коши через главные растяжения и упругий потенциал имеет вид:

$$\sigma_{ii} = \frac{\lambda_i}{J} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}. \quad (9)$$

В случае одноосного деформированного состояния:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $J = \lambda_3$ . Учет этих главных растяжений при подстановке (8) в (9) приводит к главным истинным напряжениям:

$$\sigma_{11,22} = C_{10} \frac{2}{3} (\lambda_3^{-5/3} - \lambda_3^{1/3}) + C_{01} \frac{2}{3} (\lambda_3^{-7/3} - \lambda_3^{-1/3}) + \frac{2}{d} (\lambda_3 - 1), \quad (10)$$

$$\sigma_{33} = C_{10} \frac{4}{3} (\lambda_3^{1/3} - \lambda_3^{-5/3}) + C_{01} \frac{4}{3} (\lambda_3^{-1/3} - \lambda_3^{-7/3}) + \frac{2}{d} (\lambda_3 - 1). \quad (11)$$

После подстановки (10), (11) в (5) получаются главные значения тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа первого рода:

$$\begin{aligned} S_{11,22}^* &= C_{10} \frac{2}{3} (\lambda_3^{-2/3} - \lambda_3^{4/3}) + C_{01} \frac{2}{3} (\lambda_3^{-4/3} - \lambda_3^{2/3}) + \frac{2\lambda_3}{d} (\lambda_3 - 1), \\ S_{33}^* &= C_{10} \frac{4}{3} (\lambda_3^{1/3} - \lambda_3^{-5/3}) + C_{01} \frac{4}{3} (\lambda_3^{-1/3} - \lambda_3^{-7/3}) + \frac{2}{d} (\lambda_3 - 1) = \frac{P(t)}{S_0}, \end{aligned}$$

где  $P(t)$  — усилие сжатия в направлении 3,  $S_0$  — начальная площадь поперечного сечения.

В случае одноосного напряженного состояния:  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ . Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} J &= \lambda_1^2 \lambda_3, \\ \bar{\lambda}_1 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1^{2/3} \lambda_3^{1/3}} = \frac{\lambda_1^{1/3}}{\lambda_3^{1/3}}, \quad \bar{\lambda}_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_1^{2/3} \lambda_3^{1/3}} = \frac{\lambda_3^{2/3}}{\lambda_1^{2/3}}. \end{aligned}$$

Учет (8) и приведенных главных растяжений в (9) дает следующие выражения для главных истинных напряжений:

$$\sigma_{11,22} = C_{10} \frac{2}{3} (\lambda_1^{-4/3} \lambda_3^{-5/3} - \lambda_1^{-10/3} \lambda_3^{1/3}) + C_{01} \frac{2}{3} (\lambda_1^{-2/3} \lambda_3^{-7/3} - \lambda_1^{-8/3} \lambda_3^{-1/3}) + \frac{2}{\lambda_3 d} (\lambda_1^2 \lambda_3 - 1) = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_{33} = C_{10} \frac{4}{3} (\lambda_1^{-10/3} \lambda_3^{1/3} - \lambda_1^{-4/3} \lambda_3^{-5/3}) + C_{01} \frac{4}{3} (\lambda_1^{-8/3} \lambda_3^{-1/3} - \lambda_1^{-2/3} \lambda_3^{-7/3}) + \frac{2}{d} (\lambda_1^2 \lambda_3 - 1). \quad (13)$$

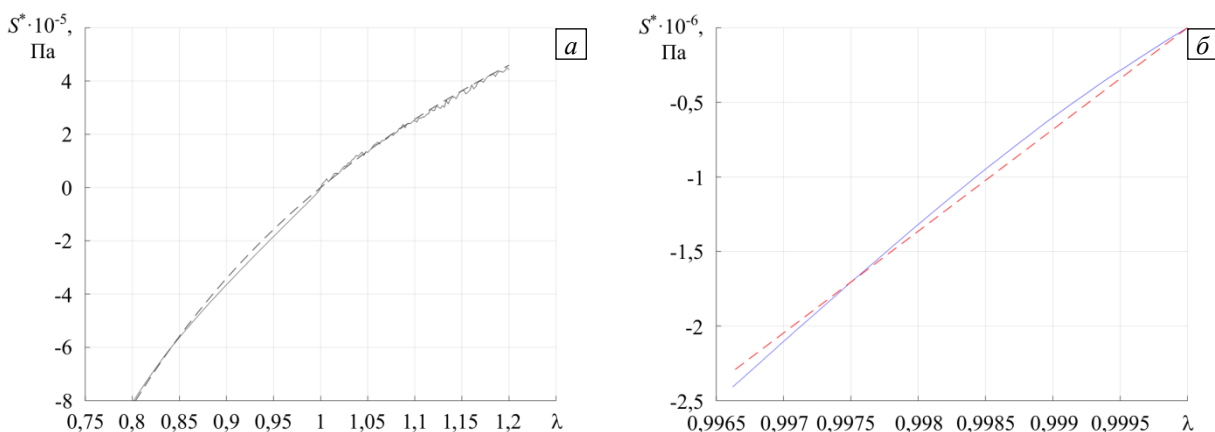
Подстановка (12), (13) в (5) дает компоненты тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа первого рода:

$$\begin{aligned} S_{11,22}^* &= C_{10} \frac{2}{3} (\lambda_1^{-1/3} \lambda_3^{-2/3} - \lambda_1^{-7/3} \lambda_3^{4/3}) + C_{01} \frac{2}{3} (\lambda_1^{1/3} \lambda_3^{-4/3} - \lambda_1^{-5/3} \lambda_3^{2/3}) + \frac{2\lambda_1}{d} (\lambda_1^2 \lambda_3 - 1) = 0, \\ S_{33}^* &= C_{10} \frac{4}{3} (\lambda_1^{-4/3} \lambda_3^{1/3} - \lambda_1^{2/3} \lambda_3^{-5/3}) + C_{01} \frac{4}{3} (\lambda_1^{-2/3} \lambda_3^{-1/3} - \lambda_1^{4/3} \lambda_3^{-7/3}) + \frac{2\lambda_1^2}{d} (\lambda_1^2 \lambda_3 - 1) = \frac{P(t)}{S_0}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для определения компонент напряжений в направлении 3 необходимо вычислить главные растяжения в направлении 1 или 2. Они находятся в результате решения нелинейного уравнения (14) методом половинного деления.

Итак, уравнения (14) есть не что иное, как соотношения, описывающие физические свойства гиперупругого материала. Присутствующие в них константы определялись по результатам натурных экспериментов. Испытывались следующие образцы: лопатки с длиной рабочей части 40 мм и поперечным сечением 10,2 мм при свободном растяжении; цилиндры высотой 12,5 мм и диаметром 20 мм при свободном и стесненном сжатии (при этом для снижения трения использовалась графитовая смазка). Натурные эксперименты выполнялись на испытательной машине Instron 5969. Скорость деформирования равнялась: при стесненном сжатии 0,3 мм/мин, при свободном растяжении 50 мм/мин, при свободном сжатии 12 мм/мин. Константы материала находились из решения задачи минимизации разницы между результатами экспериментов и аналитическим решением с подобранными коэффициентами.

На рисунке 2 приведены зависимости напряжений Пиолы–Кирхгофа первого рода от относительного растяжения в направлении действия нагрузки, построенные по данным натурных экспериментов и полученные аналитически из решения с подобранными параметрами:  $C_{10} = 2,88 \cdot 10^5$  Па,  $C_{01} = 1,99 \cdot 10^5$  Па,  $d = 2,94 \cdot 10^{-9}$  1/Па, при разных видах нагружения.



**Рис. 2.** Зависимость напряжений Пиолы–Кирхгофа первого рода от относительного растяжения в случаях свободного растяжения–сжатия (а) и стесненного сжатия (б); сплошные кривые – натурный эксперимент, штриховые – аналитическое решение с подобранными параметрами

Осцилляции на экспериментальной кривой при растяжении (см. Рис. 2) объясняются его более высокой скоростью, которая задавалась для схожести со скоростью деформирования при сжатии, поскольку итоговая длина образца при растяжении много больше длины образца при сжатии.

### 2.3. Вычисление вязкоупругих материальных констант

В данной работе предполагается, что релаксация затрагивает только сдвиговую часть тензора напряжений, а шаровая часть остается постоянной. Так как для определения параметров вязкоупругости используются результаты испытаний на растяжение–сжатие, а не на сдвиг, то следует записать аналог соотношения (2) для рассматриваемого напряженного состояния:

$$\sigma(t) = \int_0^t \left[ E_\infty + E_0 \sum_{i=1}^{N_e} c_i \exp\left(-\frac{t-\tau}{\beta'_i}\right) \right] d\varepsilon(\tau), \quad (15)$$

где  $E_0$  — мгновенный модуль растяжения–сжатия,  $E_\infty$  — длительный модуль растяжения–сжатия,  $c_i$  — относительные модули растяжения–сжатия для времен релаксации  $\tau_i$ ,  $N_e$  — количество времен релаксации растяжения–сжатия.

В эксперименте задаются деформации, которые изменяются по гармоническому закону:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_a \sin(\omega t) \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad \text{и } T = \text{var},$$

где  $\varepsilon_a$  — амплитуда деформаций,  $\omega$  — круговая частота возбуждения,  $\omega = \text{const}$ . С учетом этого выражение (15) для напряжений приобретает новый вид:

$$\sigma(t) = \varepsilon_a \left\{ \sin(\omega t) \left[ E_\infty + \omega^2 E_0 \sum_{i=1}^{n_G} \frac{\beta_i'^2 c_i}{1 + \beta_i'^2 \omega^2} \right] + \cos(\omega t) \omega E_0 \sum_{i=1}^{n_G} \frac{\beta_i' c_i}{1 + \beta_i'^2 \omega^2} \right\}.$$

Можно выделить действительную и мнимую части комплексного модуля:

$$E' = E_\infty + \omega^2 E_0 \sum_{i=1}^{n_G} \frac{\beta_i'^2 c_i}{1 + \beta_i'^2 \omega^2}, \quad E'' = \omega E_0 \sum_{i=1}^{n_G} \frac{\beta_i' c_i}{1 + \beta_i'^2 \omega^2}.$$

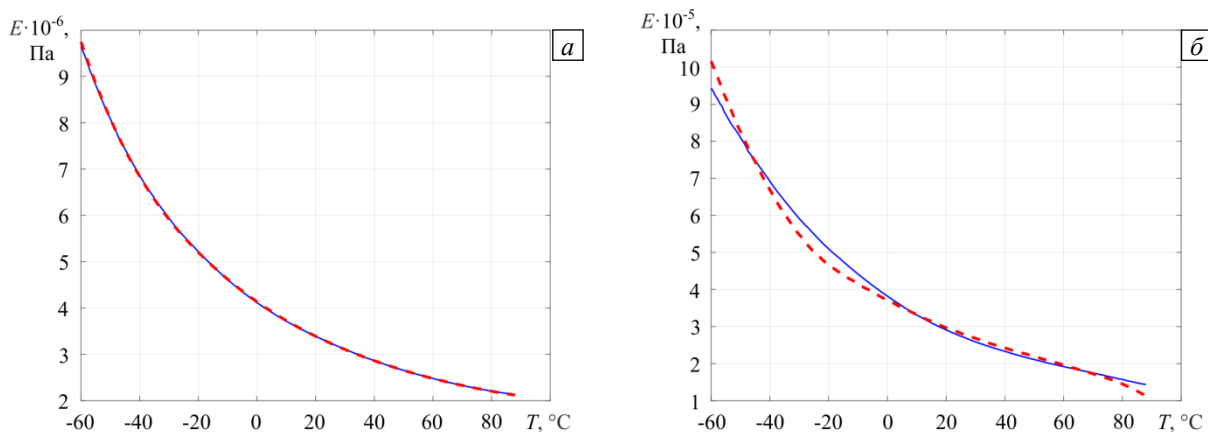
Так как приведенное соотношение строится на основе связи между деформациями и напряжениями в форме закона Гука, а модель демпфера должна учитывать гиперупругие свойства материала, то мгновенный модуль заменяется на начальный приведенный модуль упругости, вычисляемый с помощью констант гиперупругой модели по следующей формуле:

$$E_0 = 2(3 - d(C_{10} + C_{01}))(C_{10} + C_{01}).$$

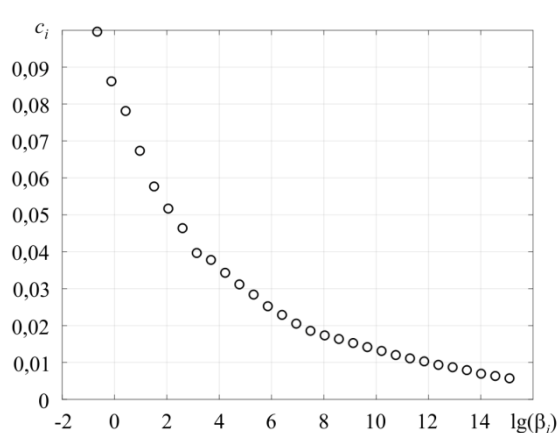
Поскольку при определении параметров гиперупругого поведения не учитывались вязкоупругие свойства, то величины гиперупругих констант соответствуют не мгновенному модулю, а модулю упругости при температуре выполнения экспериментов для идентификации гиперупругих свойств. Предполагается, что соотношение между константами при разной температуре остается неизменным, тогда новые гиперупругие параметры можно вычислить путем их умножения на отношение найденного мгновенного модуля к модулю при температуре проведения экспериментов из подраздела 2.2.

Вязкоупругие константы устанавливались по данным испытаний с использованием динамического механического анализатора DMA Q800. Образцы длиной 20,23 мм, шириной 6,5 мм, толщиной 2,06 мм подвергались гармонической нагрузке в виде растяжения–сжатия с частотой 1 Гц. Растяжение–сжатие производилось при изменении температуры образца в диапазоне от  $-80$  до  $+90^\circ\text{C}$  со скоростью  $2^\circ\text{C}/\text{мин}$  с переходом от положительной температуры к отрицательной и обратно. Константы вязкоупругого поведения находились из решения задачи минимизации разности между результатами эксперимента и аналитическим решением с подобранными параметрами. Удерживалось 30 членов экспоненциального ряда, описывающего в модели демпфера вязкоупругие свойства. На рисунке 3 приведена зависимость действительной и мнимой частей комплексного модуля от температуры для натуральных экспериментов и из аналитического решения с подобранными параметрами, а на рисунке 4 — зависимость относительных модулей от соответствующих им времен релаксации.

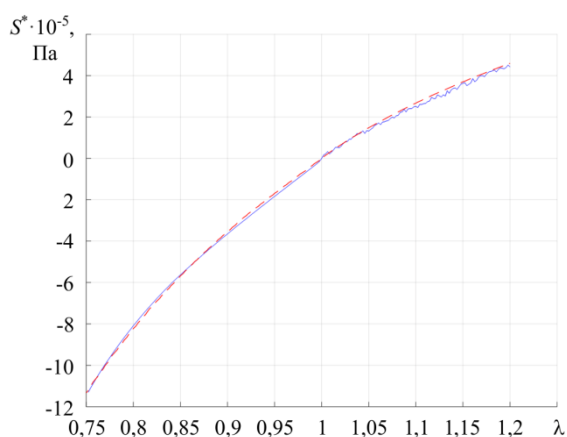
Далее полученный набор материальных констант дополнительно модифицировался, а именно: гиперупругие константы умножались на коэффициент, который оценивает близость экспериментальной кривой и кривой, рассчитанной по модели в ANSYS с учетом вязкоупругих и гиперупругих свойств материала. Дополнительная калибровка требуется из-за того, что вязкие и гиперупругие свойства определялись отдельно друг от друга. В результате значения параметров стали следующими:  $C_{10} = 2,19 \cdot 10^6$  Па;  $C_{01} = 1,51 \cdot 10^6$  Па. На рисунке 5 показаны зависимости напряжений Пиолы–Кирхгофа первого рода от относительного растяжения в направлении действия нагрузки для натуральных экспериментов и численного решения с учетом вязко-гиперупругих свойств.



**Рис. 3.** Зависимость действительной (а) и мнимой (б) частей комплексного модуля от температуры; сплошная кривая – натурный эксперимент, штриховая – аналитическое решение с подобранными параметрами



**Рис. 4.** Зависимость относительных модулей от соответствующих им времен релаксации

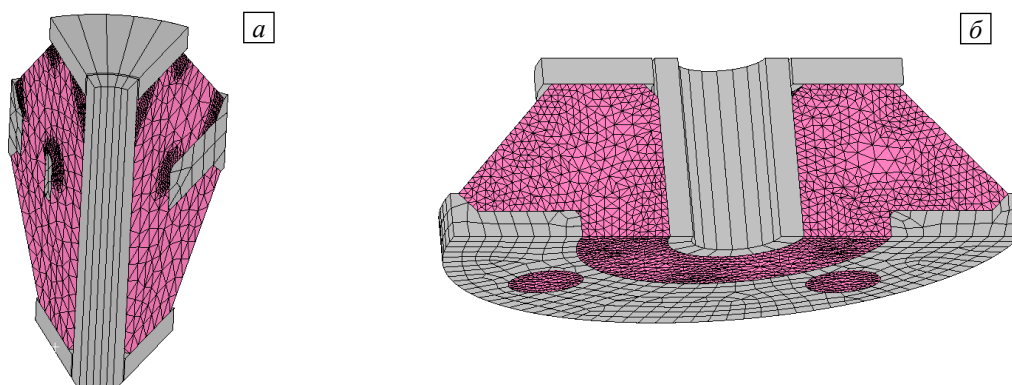


**Рис. 5.** Зависимость напряжений Пиолы–Кирхгофа первого рода от относительного растяжения в случае свободного растяжения–сжатия; сплошная кривая – натурный эксперимент, штриховая – численное решение с подобранными параметрами

### 3. Модель термомеханического поведения амортизатора

#### 3.1. Построение модели и ее верификация

В модуле Mechanical программного комплекса ANSYS Workbench авторами построена конечно-элементная модель амортизатора, приведенного на рисунке 1. Так как реакцию демпфера на нагрузку (то есть перемещение) необходимо определять в радиальном и осевом направлениях, то строились две конечно-элементные модели (см. Рис. 6). Одна из них (Рис. 6а) имела 42244 элемента второго порядка, а другая (Рис. 6б) — 20523.



**Рис. 6.** Конечно-элементные модели амортизатора при деформировании в осевом (а) и поперечном (б) направлениях



Из-за наличия плоскостей симметрии рассматривается только часть амортизатора: при осевом деформировании — одна восьмая, при поперечном — четверть. На плоскостях симметрии задаются нулевые перемещения в направлении нормали к ним. Втулка, шайба и планка полагаются стальными с модулем Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$ , а вкладыш считается изготовленным из вязко-гиперупругого материала (резины) со свойствами, найденными в предыдущем разделе.

Между металлическими деталями и вкладышем реализуется контактное взаимодействие с трением. Коэффициенты трения подбираются такими, что результаты численного моделирования максимально близки к натурному эксперименту. За счет разных условий контакта и качества обработки поверхностей коэффициент трения у разных деталей демпфера различный: 0,3 у втулки; 0,4 у планки; 0,5 у шайбы. Планка и втулка, в отличие от шайбы, подвергаются предварительному электрохимическому полированию, а за счет особенностей сборки на соприкасающихся поверхностях возникает разное контактное давление. Так, в процессе сборки имеет место поджатие сначала втулкой в радиальном направлении (внешний диаметр втулки больше внутреннего диаметра вкладыша), а далее поджатие шайбой и втулкой в осевом направлении. На первом шаге нагрузки поджатие резины в радиальном направлении происходит за счет нагрева втулки до температуры, которая вследствие температурного расширения вызывает увеличение радиуса втулки на 0,15 мм. Второй шаг заключается в поджатии вкладыша в осевом направлении с помощью задания перемещений 0,4 мм шайбы и нижней части втулки в направлении центральной оси амортизатора. Как видно на рисунке 6а, нижняя часть втулки отделена от центральной части, через которую проходит ось амортизатора. Это делается для того, чтобы сохранить симметричность преднапряженного состояния резины при поджатии в осевом направлении. В результате поджатия планка перемещается на 1 мм в радиальном или осевом направлении, а шайбе и втулке движение запрещено во всех направлениях.

Для верификации модели демпфера проведены натурные испытания 8 образцов на испытательной машине Instron 5969. Планка жестко закреплялась, а втулка и шайба перемещались на 1 мм в радиальном и осевом направлениях со скоростью 3 мм/мин. На рисунке 7 приведены кривые «реакция–перемещение» в поперечном и осевом направлениях, полученные численно с различными коэффициентами трения и из натурных экспериментов. Экспериментальные кривые отвечают средним значениям реакций 8 амортизаторов. Чтобы показать чувствительность численной модели к внешнему трению, проведены вычислительные эксперименты не только с приведенными выше коэффициентами трения, но и с коэффициентами трения на 25% выше и ниже их.

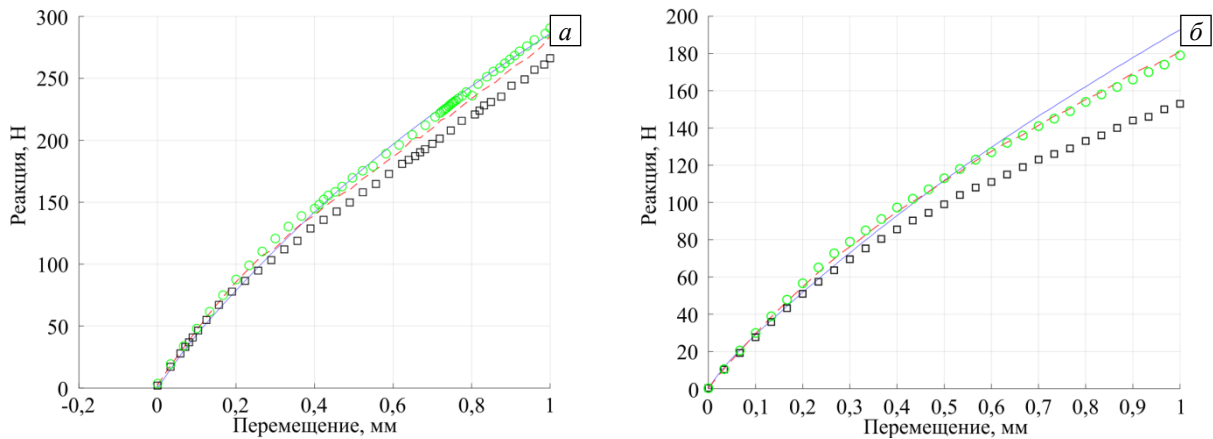


Рис. 7. Зависимость реакции амортизатора от перемещения в осевом (а) и поперечном (б) направлениях; сплошная кривая — натурный эксперимент, пунктирная — основное численное решение; символами показано численное решение с коэффициентами трения, увеличенными на 25% (кружки) и уменьшенными на 25% (квадратики)

Построенные численные модели амортизатора проверены на сходимость. Увеличение количества элементов с 42244 до 54434 в модели с осевым направлением деформирования приводит к изменению максимальной реакции менее чем на 0,5%, а повышение количества элементов с 20523 до 29023 в модели с поперечным направлением деформирования — к изменению максимальной реакции на 1%.

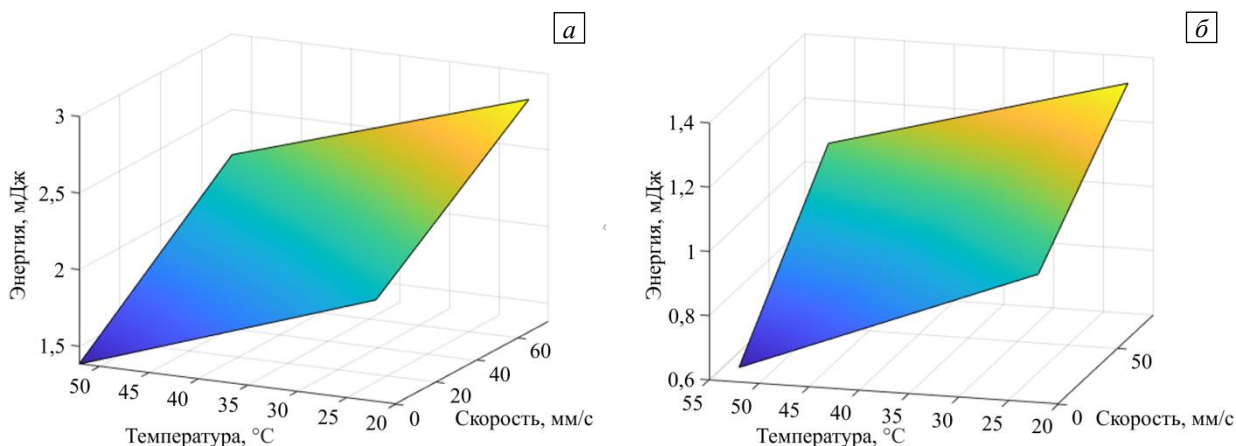
### 3.2. Определение термомеханических характеристик амортизационного узла

Интерес представляет исследование термомеханического поведения амортизатора в течение одного цикла деформирования, который заключается в приложении перемещения амплитудой  $A$  в порядке  $A \rightarrow 0 \rightarrow -A \rightarrow 0$ ; цикл реализуется при вибрационном воздействии. Основой для проведения вычислительных экспериментов при различных температурах, скоростях и коэффициентах трения является построенная в предыдущем подразделе численная термомеханическая модель. Так как исследуется

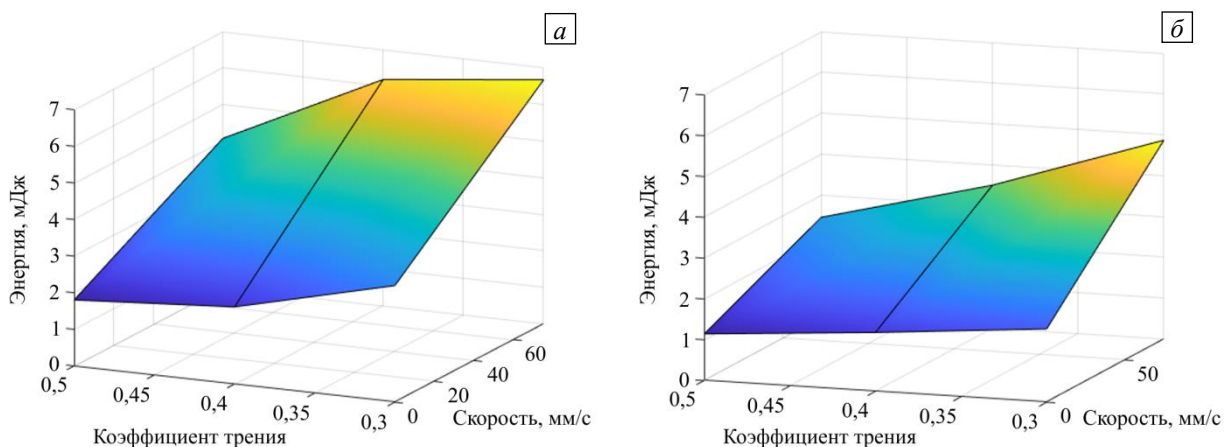
установившейся режим деформирования, то рассматриваются два его цикла, а данные берутся только с последнего, поскольку каждый последующий цикл все ближе к установившемуся режиму.

Амплитуда деформирования составляет 0,2 мм и задается исходя из максимальных перемещений амортизатора на резонансной частоте при его вибрационных испытаниях с амплитудой внешнего воздействия  $3g$ . Такая величина внешнего воздействия наиболее часто указывается в технических требованиях к виброиспытаниям навигационных систем. Наибольший интерес представляет количество энергии, которое выделяется за цикл деформирования в результате сухого и вязкого трения. Энергия трения переходит в тепловую и может вызывать существенный нагрев амортизатора, и следовательно, значительное изменение его механических свойств. Так как на энергию сухого и вязкого трения можно влиять разными способами, то зависимость от параметров каждой энергии будет находиться по отдельности. Количество выделяемой энергии вычисляется путем определения разности интегралов от верхней и нижней реакций, приведенных на рисунке 8.

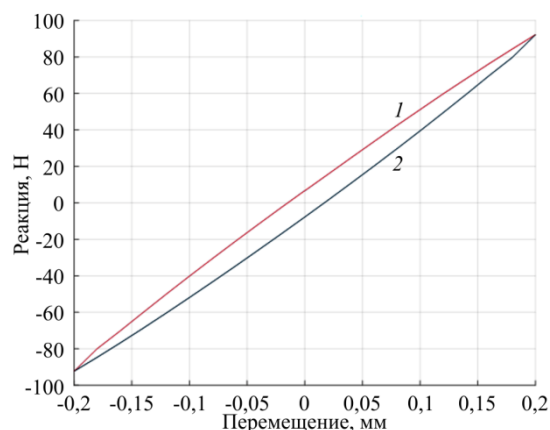
Для вычисления доли вязкого и сухого трения сначала проводится численный эксперимент при нулевом коэффициенте трения, при этом вся выделяемая энергия является энергией вязкого трения. Далее, при других коэффициентах трения, снова рассчитывается энергия и из полученной величины вычитается энергия при отсутствии трения. На рисунке 9 приведена зависимость энергии вязкого трения в осевом и поперечном направлениях от скорости деформирования и температуры.



**Рис. 9.** Энергия вязкого трения в осевом (а) и поперечном (б) направлениях в зависимости от скорости деформирования и температуры



**Рис. 10.** Зависимость энергии сухого трения от скорости и коэффициента трения при различной температуре, °C: 22 (а) и 52 (б); деформирование в осевом направлении



**Рис. 8.** Зависимость реакции от перемещения в установившемся режиме деформирования при температуре 22°C, скорости 0,05 мм/с и коэффициентах трения из подраздела 3.1; кривые отличаются направлением деформирования (1 – при деформировании от –0,2 до 0,2 мм; 2 – при деформировании от 0,2 до –0,2 мм)

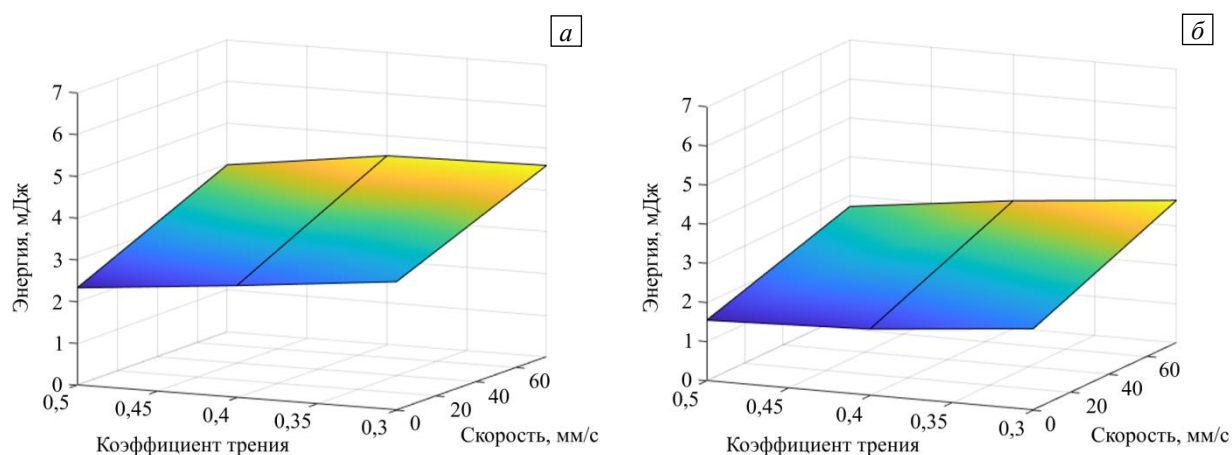


Рис. 11. Зависимость энергии сухого трения от скорости и коэффициента трения при различной температуре, °С: 22 (а) и 52 (б); деформирование в поперечном направлении

Рисунки 10, 11 демонстрируют зависимость энергии сухого трения от коэффициента трения и скорости деформирования при различной температуре в осевом и поперечном направлениях.

#### 4. Заключение

Описаны и использованы методики определения гиперупругих и вязкоупругих свойств материала на основе результатов натуральных экспериментов. Построена конечно-элементная модель деформирования амортизатора в осевом и поперечном направлениях с учетом вязко-гиперупругого поведения материала и контактного взаимодействия с трением, которая дает близкие к проведенным натурным испытаниям результаты. На основе модели оценены термомеханические характеристики материала в течение цикла деформирования демпфера при действии вибрационных нагрузок. В результате получена зависимость выделяемой за цикл энергии вязкого и сухого трения от коэффициента трения, скорости и температуры. Наибольший интерес вызывает зависимость от сухого трения, так как она поддается изменению за счет применения смазки в конструкции. Отличительной особенностью графика выделяемой за цикл энергии как функции коэффициента трения является наличие максимума. Это объясняется тем, что при недостаточно высоком коэффициенте трения контактирующие поверхности дольше остаются в условиях скольжения, а не сцепления. Для условий скольжения характерны большие потери энергии.

#### Литература

1. Kulkarni P., Bhattacharjee A., Nanda B.K. Study of damping in composite beams // *Materials Today: Proceedings*. 2018. Vol. 5. P. 7061-7067. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.11.370>
2. Ватульян А.О., Дударев В.В. К исследованию колебаний цилиндра с вязкоупругим покрытием // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2021. Т. 14, № 3. С. 312-321. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.3.26>
3. Chatterjee A., Chintia H.P. Identification and parameter estimation of cubic nonlinear damping using harmonic probing and Volterra series // *Int. J. Non Lin. Mech.* 2020. Vol. 125. 103518. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103518>
4. Zhang X., Du X., Brownjohn J. Frequency modulated empirical mode decomposition method for the identification of instantaneous modal parameters of aeroelastic systems // *J. Wind Eng. Ind. Aerod.* 2012. Vol. 101. P. 43-52. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2011.12.005>
5. Иванцов А.О., Клименко Л.С., Любимова Т.П., Ру Б. Численное моделирование выпускной трубы двигателя с системой активного шумоподавления // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2021. Т. 14, № 4. С. 389-397. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.4.32>
6. Матвеевко В.П., Ошмарин Д.А., Севодина Н.В., Юрлова Н.А. Задача о собственных колебаниях электровязкоупругих тел с внешними электрическими цепями и конечно-элементные соотношения для ее численной реализации // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 4. С. 476-485. <http://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.40>
7. Бегалиев У.Т. Моделирование вязкоупругих демпферов для конструктивного применения // *Наука и инновационные технологии*. 2016. № 1(1). С. 201-209.
8. Белкин А.Е., Даишвиев И.З., Лонкин Б.В. Моделирование вязкоупругости полиуретана при умеренно высоких скоростях деформирования // *Математическое моделирование и численные методы*. 2014. № 3. С. 39-54.
9. Семенов В.К., Белкин А.Е. Математическая модель вязкоупругого поведения резины при циклическом нагружении // *Изв. вузов. Машиностроение*. 2014. № 2. С. 46-51.
10. Zhu H., Yang J., Zhang Y., Feng X. A novel air spring dynamic model with pneumatic thermodynamics, effective friction and viscoelastic damping // *J. Sound Vib.* 2017. Vol. 408. P. 87-104. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2017.07.015>
11. Егоров А.В. Определение динамической жесткости резинового слоя демпфера внутреннего трения // *Фундаментальные исследования*. 2011. № 12-1. С. 108-111.
12. Поздняков И.В. Анализ моделей гиперупругого материала с использованием данных одного деформированного состояния // *Изв. вузов. Нефть и газ*. 2011. № 3. С. 52-57.

13. Коробейников С.Н., Ларичкин А.Ю., Ротанова Т.А. Модели гиперупругости, пролонгирующие закон Гука в область больших деформаций и экспериментальная проверка пределов их применимости // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник трудов. Уфа, 19-24 августа 2019 г. Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. С. 124-126.
14. Мохирева К.А., Свистков А.Л., Шадрин В.В. Определение формы образцов для экспериментов на двухосное растяжение // Вычисл. мех. сплош. сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 353-362. <http://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.34>
15. Wu Z., Liu H., Liu L., Yuan D. Identification of nonlinear viscous damping and Coulomb friction from the free response data // J. Sound Vib. 2007. Vol. 304. P. 407-414. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.02.026>
16. Scheel M., Weigle T., Krack M. Challenging an experimental nonlinear modal analysis method with a new strongly friction-damped structure // J. Sound Vib. 2020. Vol. 485. 115580. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115580>
17. Al-hababi T., Cao M., Saleh B., Alkayem N.F., Xu H. A Critical review of nonlinear damping identification in structural dynamics: Methods, applications, and challenges // Sensors. 2020. Vol. 20. 7303. <https://doi.org/10.3390/s20247303>
18. Elliott S.J., Tehrani M.G., Langley R.S. Nonlinear damping and quasi-linear modelling // Phil. Trans. R. Soc. A. 2015. Vol. 373. 20140402. <https://doi.org/10.1098/rsta.2014.0402>
19. Hieu D.V., Hai N.Q., Hung D.T. The equivalent linearization method with a weighted averaging for solving undamped nonlinear oscillators // J. Appl. Math. 2018. Vol. 2018. 7487851. <https://doi.org/10.1155/2018/7487851>
20. Wang Y., Low K.H. Damped response analysis of nonlinear cushion systems by a linearization method // Comput. Struct. 2005. Vol. 83. P. 1584-1594. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.02.004>
21. Parrinello A., Ghiringhelli G.L. Evaluation of damping loss factor of flat laminates by sound transmission // J. Sound Vib. 2018. Vol. 424. P. 112-119. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.03.017>
22. Schoukens J., Ljung L. Nonlinear system identification: A user-oriented roadmap // IEEE Contr. Syst. Mag. 2019. Vol. 39. P. 28-99. <https://doi.org/10.1109/MCS.2019.2938121>
23. Xu L. The damping iterative parameter identification method for dynamical systems based on the sine signal measurement // Signal Processing. 2016. Vol. 120. P. 660-667. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.10.009>
24. Jin M., Brake M.R.W., Song H. Comparison of nonlinear system identification methods for free decay measurements with application to jointed structures // J. Sound Vib. 2019. Vol. 453. P. 268-293. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.04.021>
25. Jang T.S. A method for simultaneous identification of the full nonlinear damping and the phase shift and amplitude of the external harmonic excitation in a forced nonlinear oscillator // Comput. Struct. 2013. Vol. 120. P. 77-85. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2013.02.008>
26. Jacobson K.E., Kiviahio J.F., Kennedy G.J., Smith M.J. Evaluation of time-domain damping identification methods for flutter-constrained optimization // J. Fluid. Struct. 2019. Vol. 87. P. 174-188. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2019.03.011>
27. Raze G., Kerschen G. Multimodal vibration damping of nonlinear structures using multiple nonlinear absorbers // Int. J. Non Lin. Mech. 2020. Vol. 119. 103308. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103308>
28. Moore K.J. Characteristic nonlinear system identification: A data-driven approach for local nonlinear attachments // Mech. Syst. Signal Process. 2019. Vol. 131. P. 335-347. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.05.066>
29. Mojahed A., Moore K., Bergman L.A., Vakakis A.F. Strong geometric softening–hardening nonlinearities in an oscillator composed of linear stiffness and damping elements // Int. J. Non Lin. Mech. 2018. Vol. 107. P. 94-111. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.09.004>
30. Mihalec M., Slavič J., Boltežar M. Synchrosqueezed wavelet transform for damping identification // Mech. Syst. Signal Process. 2016. Vol. 80. P. 324-334. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.05.005>
31. Staszewski W.J., Robertson A.N. Time-frequency and time-scale analyses for structural health monitoring // Phil. Trans. R. Soc. A. 2007. Vol. 365. P. 449-477. <https://doi.org/10.1098/rsta.2006.1936>
32. Khalid M., Yusof R., Joshani M., Selamat H., Joshani M. Nonlinear identification of a magneto-rheological damper based on dynamic neural networks // Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng. 2014. Vol. 29. P. 221-233. <https://doi.org/10.1111/mice.12005>
33. Simo J.C. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1987. Vol. 60. P. 153-173. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(87\)90107-1](https://doi.org/10.1016/0045-7825(87)90107-1)

## References

1. Kulkarni P., Bhattacharjee A., Nanda B.K. Study of damping in composite beams. *Materials Today: Proceedings*, 2018, vol. 5, pp. 7061-7067. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.11.370>
2. Vatulyan A.O., Dudarev V.V. A study of vibrations of a cylinder with a viscoelastic coating. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2021, vol. 14, no. 3, pp. 312-321. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.3.26>
3. Chatterjee A., Chintha H.P. Identification and parameter estimation of cubic nonlinear damping using harmonic probing and Volterra series. *Int. J. Non Lin. Mech.*, 2020, vol. 125, 103518. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103518>
4. Zhang X., Du X., Brownjohn J. Frequency modulated empirical mode decomposition method for the identification of instantaneous modal parameters of aeroelastic systems. *J. Wind Eng. Ind. Aerod.*, 2012, vol. 101, pp. 43-52. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2011.12.005>
5. Ivantsov A.O., Klimenko L.S., Lyubimova T.P., Roux B. Numerical modeling of an active noise reduction system in the engine exhaust pipe. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2021, vol. 14, no. 4, pp. 389-397. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.4.32>
6. Matveenko V.P., Oshmarin D.A., Sevodina N.V., Yurlova N.A. Problem on natural vibrations of electroviscoelastic bodies with external electric circuits and finite element relations for its implementation. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 476-485. <http://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.40>
7. Begaliyev U.T. Modelirovaniye vyazkoupругikh dempferov dlya konstruktivnogo primeneniya [Modeling of viscoelastic dampers for constructive use]. *Nauka i innovatsionnyye tekhnologii – Science and innovative technologies*, 2016, no. 1(1), pp. 201-209.

8. Belkin A.E., Dashtiyev I.Z., Lonkin B.V. Modelirovaniye vyzkoupugosti poliuretana pri umerenno vysokikh skorostyakh deformirovaniya [Modeling of the viscoelasticity of polyurethane at moderately high deformation rates]. *Matematicheskoye modelirovaniye i chislennyye metody – Mathematical modeling and computational methods*, 2014, no. 3, pp. 39-54.
9. Semenov V.K., Belkin A.E. Mathematical model of viscoelastic behavior of rubber under cyclic loading. *Izv. vuzov. Mashinostroyeniye – BMSTU Journal of Mechanical Engineering*, 2014, no. 2, pp. 46-51.
10. Zhu H., Yang J., Zhang Y., Feng X. A novel air spring dynamic model with pneumatic thermodynamics, effective friction and viscoelastic damping. *J. Sound Vib.*, 2017, vol. 408, pp. 87-104. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2017.07.015>
11. Egorov A.V. Determination of the dynamic stiffness of the rubber layer of the internal friction damper. *Fundamentalnyye issledovaniya – Fundamental research*, 2011, no. 12-1, pp. 108-111.
12. Pozdnyakov I.V. Analiz modeley giperuprugogo materiala s ispol'zovaniyem dannykh odnogo deformirovannogo sostoyaniya [Analysis of hyperelastic material models using data from a single deformed state]. *Izv. vuzov. Neft' i gaz – Oil and Gas Studies*, 2011, no. 3, pp. 52-57.
13. Korobeynikov S.N., Larichkin A.Yu., Rotanova T.A. XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. 19-24 August 2019, Ufa, Bashkir State University, 2019. Vol. 3, pp. 124-126.
14. Mokhireva K.A., Svistkov A.L., Shadrin V.V. Designing of specimen shape for biaxial stretching experiments. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 353-362. <http://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.34>
15. Wu Z., Liu H., Liu L., Yuan D. Identification of nonlinear viscous damping and Coulomb friction from the free response data. *J. Sound Vib.*, 2007, vol. 304, pp. 407-414. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.02.026>
16. Scheel M., Weigele T., Krack M. Challenging an experimental nonlinear modal analysis method with a new strongly friction-damped structure. *J. Sound Vib.*, 2020, vol. 485, 115580. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115580>
17. Al-hababi T., Cao M., Saleh B., Alkayem N.F., Xu H. A Critical review of nonlinear damping identification in structural dynamics: Methods, applications, and challenges. *Sensors*, 2020, vol. 20, 7303. <https://doi.org/10.3390/s20247303>
18. Elliott S.J., Tehrani M.G., Langley R.S. Nonlinear damping and quasi-linear modelling. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 2015, vol. 373, 20140402. <https://doi.org/10.1098/rsta.2014.0402>
19. Hieu D.V., Hai N.Q., Hung D.T. The equivalent linearization method with a weighted averaging for solving undamped nonlinear oscillators. *J. Appl. Math.*, 2018, vol. 2018, 7487851. <https://doi.org/10.1155/2018/7487851>
20. Wang Y., Low K.H. Damped response analysis of nonlinear cushion systems by a linearization method. *Comput. Struct.*, 2005, vol. 83, pp. 1584-1594. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.02.004>
21. Parrinello A., Ghiringhelli G.L. Evaluation of damping loss factor of flat laminates by sound transmission. *J. Sound Vib.*, 2018, vol. 424, pp. 112-119. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.03.017>
22. Schoukens J., Ljung L. Nonlinear system identification: A user-oriented roadmap. *IEEE Contr. Syst. Mag.*, 2019, vol. 39, pp. 28-99. <https://doi.org/10.1109/MCS.2019.2938121>
23. Xu L. The damping iterative parameter identification method for dynamical systems based on the sine signal measurement. *Signal Processing*, 2016, vol. 120, pp. 660-667. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.10.009>
24. Jin M., Brake M.R.W., Song H. Comparison of nonlinear system identification methods for free decay measurements with application to jointed structures. *J. Sound Vib.*, 2019, vol. 453, pp. 268-293. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.04.021>
25. Jang T.S. A method for simultaneous identification of the full nonlinear damping and the phase shift and amplitude of the external harmonic excitation in a forced nonlinear oscillator. *Comput. Struct.*, 2013, vol. 120, pp. 77-85. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2013.02.008>
26. Jacobson K.E., Kiviaho J.F., Kennedy G.J., Smith M.J. Evaluation of time-domain damping identification methods for flutter-constrained optimization. *J. Fluid. Struct.*, 2019, vol. 87, pp. 174-188. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2019.03.011>
27. Raze G., Kerschen G. Multimodal vibration damping of nonlinear structures using multiple nonlinear absorbers. *Int. J. Non Lin. Mech.*, 2020, vol. 119, 103308. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103308>
28. Moore K.J. Characteristic nonlinear system identification: A data-driven approach for local nonlinear attachments. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2019, vol. 131, pp. 335-347. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.05.066>
29. Mojahed A., Moore K., Bergman L.A., Vakakis A.F. Strong geometric softening-hardening nonlinearities in an oscillator composed of linear stiffness and damping elements. *Int. J. Non Lin. Mech.*, 2018, vol. 107, pp. 94-111. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2018.09.004>
30. Mihalec M., Slavič J., Boltežar M. Synchrosqueezed wavelet transform for damping identification. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2016, vol. 80, pp. 324-334. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.05.005>
31. Staszewski W.J., Robertson A.N. Time-frequency and time-scale analyses for structural health monitoring. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 2007, vol. 365, pp. 449-477. <https://doi.org/10.1098/rsta.2006.1936>
32. Khalid M., Yusof R., Joshani M., Selamat H., Joshani M. Nonlinear identification of a magneto-rheological damper based on dynamic neural networks. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.*, 2014, vol. 29, pp. 221-233. <https://doi.org/10.1111/mice.12005>
33. Simo J.C. On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1987, vol. 60, pp. 153-173. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(87\)90107-1](https://doi.org/10.1016/0045-7825(87)90107-1)

Поступила в редакцию 03.07.2022; после доработки 03.08.2022; принята к опубликованию 26.08.2022

---

Сведения об авторах

Бояршинов Дмитрий Альбертович, асп., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29а; e-mail: houston707@mail.ru

Сметанников Олег Юрьевич, дтн, доц., ПНИПУ; e-mail: sou2009@mail.ru