

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.3.22](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.3.22)

УДК 532.5

СОВМЕСТНОЕ ВЛИЯНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВИБРАЦИЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ СЛОЕВ ЖИДКОСТИ

Е.С. Садилов

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Статья посвящена исследованию совместного влияния нормальных вибраций и нормального электрического поля на устойчивость системы, состоящей из двух плоских горизонтальных слоев жидкости. Слои имеют одинаковую толщину. Обсуждаются два случая. В первом из них систему образуют две диэлектрических жидкости, во втором система включает слой диэлектрической жидкости и слой идеально электропроводной жидкости. Результаты для этих двух систем оказались качественно подобными. Рассмотрены два приближения: приближение малой вязкости и высокочастотных вибраций. В приближении малой вязкости анализируются так называемая электрическая мода неустойчивости и резонансная мода. При этом изучаются коротковолновые и длинноволновые режимы неустойчивости. В приближении малой вязкости появляется вязкий пограничный слой, для описания которого вводится быстрая координата. Проблема исследуется с использованием метода многих масштабов. Обнаружено, что вибрации увеличивают критическое значение напряженности электрического поля для коротковолновой неустойчивости в присутствии электрической моды, а при длинноволновой неустойчивости под их воздействием растет кривизна нейтральной кривой вблизи нулевого значения волнового числа. Что же касается влияния электрического поля на резонансные моды, то оно может приводить к расщеплению первого резонанса на две или три моды в зависимости от значений числа Вебера. Когда расщепление не наблюдается, электрическое поле уменьшает критическую амплитуду первой резонансной моды. В противном случае влияние электрического поля носит более сложный характер. В высокочастотном пределе выражения, описывающие критическое значение напряженности электрического поля, совпадают с таковыми для электрической моды в приближении малой вязкости для конечных частот вибрации, а резонансные возмущения отсутствуют.

Ключевые слова: нормальные вибрации, электрическое поле, устойчивость, граница раздела, параметрический резонанс

THE JOINT INFLUENCE OF NORMAL VIBRATIONS AND ELECTRIC FIELD ON THE STABILITY OF A TWO-LAYER FLUID SYSTEM

E.S. Sadilov

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The article focuses on the joint influence of normal vibrations and normal electric field on the stability of a system consisting of two flat horizontal fluid layers. Two cases are considered. In the first one, the system is formed by two layers of dielectric fluids (both layers have the same thickness) and, in the second, the system includes a dielectric fluid layer and an ideal electrically conductive fluid layer. The results obtained for these two cases are qualitatively similar. We study two approximations: the low-viscosity approximation and high-frequency vibrations. For the low-viscosity approximation, the so-called electric instability mode and the resonant mode are analyzed. In this case, the short-wavelength and long-wavelength instability modes are considered. In the low viscosity approximation, there occurs a viscous boundary layer, which is analyzed using a fast coordinate. The problem is studied by applying a multiscale method. It is demonstrated that vibrations increase the critical value of the electric field strength for short-wave instability in the presence of an electric mode. In the case of the long-wave instability, vibrations increase the curvature of the neutral curve near the zero value of the wave number. As for the influence of the electric field on resonant modes, it can lead to the splitting of the first resonance into two or three modes, depending on the values of the Weber number. When splitting is absent, the electric field reduces the critical amplitude of the first resonant mode. Otherwise, the effect of the electric field is more complex. In the high-frequency limit, the expressions describing the critical value of the electric field strength are similar to those for the electric mode considered in the low-viscosity approximation for finite vibration frequencies, and no resonant perturbations occur in this case.

Key words: normal vibrations, electric field, stability, interface boundary, parametric resonance

1. Введение

Влияние электрического поля на устойчивость границы электрически проводящей жидкости впервые исследовалось Тонксом [1] и Френкелем [2]. Неустойчивость системы двух диэлектрических жидкостей со слоями бесконечной толщины рассматривали Зайцев и Шлиомис в статье [3]. Неустойчивости заряженной поверхности жидкого гелия посвящена работа Горькова и Черниковой [4]. Более современные результаты представлены в [5, 6].

Влияние нормальных вибраций без электрического поля на неустойчивость свободной границы жидкого слоя впервые экспериментально изучал Фарадей [7]. Релей проверил эксперименты Фарадея [8] и построил линейную теорию для невязкой жидкости [9]. Впервые влияние вязкости в рамках феноменологического подхода анализировалось Сорокиным [10]. Нефеноменологический учет вязкости произведен Черепановым в [11]. Обзор этих и других результатов содержится в [12]. Более современные достижения излагаются в работе [13].

Автором предлагаемой вниманию читателя статьи уже рассматривалось совместное влияние электрического поля и нормальных вибраций. Так, в [14] оценивалась неустойчивость двухслойной системы для случая, когда верхняя жидкость являлась диэлектриком, а нижняя имела идеальную электропроводность, в [15] предметом изучения была неустойчивость жидкого диэлектрического слоя с верхней свободной границей. В данной статье, во-первых, исследуется совместное влияние электрического поля и нормальных вибраций на неустойчивость двухслойной системы при условии, что обе жидкости диэлектрики, а во-вторых, обобщаются результаты статьи [14]. В прикладном плане актуальность этой задачи связана с тем, что неустойчивость границ раздела жидкостей в электрическом поле используют в технологиях разбрызгивания различных жидкостей, а также для атомизации вещества — превращения простого вещества в состояние свободных, не взаимодействующих друг с другом атомов. Вибрации же, в зависимости от частоты, могут как усиливать эти процессы, так ослаблять их.

2. Определяющие уравнения

Рассмотрим систему двух горизонтальных плоских слоев жидкости. В невозмущенном состоянии граница раздела между ними плоская и горизонтальная, толщины слоев одинаковые. На систему оказывают воздействие нормальные вибрации, нормальное электрическое поле и гравитация.

Запишем систему определяющих уравнений и граничных условий (в безразмерной форме в декартовых координатах, ось z перпендикулярна плоскости $\{x, y\}$) для случая двух диэлектрических жидкостей:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + A(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 = -\nabla p'_1 + \frac{2(1-\bar{\rho})}{\bar{\varepsilon} A We} F \left((\mathbf{E}_1 \cdot \nabla) \mathbf{E}_1 - \frac{1}{2} \nabla E_1^2 \right) + \frac{N}{\sqrt{We}} \nabla^2 \mathbf{v}_1 - \left(\frac{1}{A We} - 4 \cos(2t) \right) \mathbf{e}_z, \quad (1)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} + A(\mathbf{v}_2 \cdot \nabla) \mathbf{v}_2 \right) = -\nabla p'_2 + \frac{2(1-\bar{\rho})}{\bar{\varepsilon} A We} F \left((\mathbf{E}_2 \cdot \nabla) \mathbf{E}_2 - \frac{1}{2} \nabla E_2^2 \right) + \frac{\bar{\nu} \bar{\rho} N}{\sqrt{We}} \nabla^2 \mathbf{v}_2 - \bar{\rho} \left(\frac{1}{A We} - 4 \cos(2t) \right) \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad (3)$$

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, \quad \nabla^2 \varphi_2 = 0, \quad (4)$$

где

$$p'_1 = p_1 - \frac{2(1-\bar{\rho})}{\bar{\varepsilon} A We} \frac{\rho_1}{\varepsilon_1} \left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \rho_1} \right)_T, \quad p'_2 = p_2 - \frac{2(1-\bar{\rho})}{\bar{\varepsilon} A We} \frac{\rho_2}{\varepsilon_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \rho_2} \right)_T;$$

$$z = -H: \quad \mathbf{v}_1 = 0, \quad \varphi_1 = \bar{\varepsilon} H, \quad (5)$$

$$z = H: \quad \mathbf{v}_2 = 0, \quad \varphi_2 = -H, \quad (6)$$

$$z = \zeta: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}} = \bar{\varepsilon} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \quad 1$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + A(\mathbf{v}_{1\perp} \cdot \nabla) \zeta = A v_{1z}, \quad 2 \quad (7)$$

$$p'_1 - p'_2 + \frac{(1-\bar{\rho}) F}{\bar{\varepsilon} A We} \left[\bar{\varepsilon} (\nabla \varphi_2)^2 - (\nabla \varphi_1)^2 \right] + \frac{2N}{\sqrt{We}} (\bar{\rho} \bar{\nu} \sigma_{2nn} - \sigma_{1nn}) = \frac{1-\bar{\rho}}{A We} \nabla \cdot \mathbf{n},$$

$$\sigma_{1n\tau} = \bar{\rho} \bar{\nu} \sigma_{2n\tau}, \quad 3$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_z - \nabla_{\perp} \zeta}{\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} \zeta)^2}}$, $\sigma_{1ik} = \nabla_i v_{1k} + \nabla_k v_{1i}$, $\sigma_{2ik} = \nabla_i v_{2k} + \nabla_k v_{2i}$ в координатной форме записи. Индексы n и τ

в выражениях (7₃) означают нормальную и тангенциальную проекции тензора $\boldsymbol{\sigma}$. В выражениях (1)–(7) также приняты обозначения: t — время; \mathbf{v}_i — скорости перемещения жидкости ($i = 1, 2$, индексы относятся к нижнему и верхнему слоям жидкостей соответственно); $\mathbf{E}_j = -\nabla \varphi_j$; $\mathbf{v}_{j\perp} = (v_{jx}, v_{jy}, 0)$

($j = 1, 2$); $\nabla_{\perp} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right)$; ζ — отклонение границы раздела слоев от невозмущенного состояния ($\zeta = 0$);

$\varphi_{1,2}$ — потенциалы электрического поля слоев; граничные условия (7) представляют собой условие потенциалов, напряженности электрического поля и скоростей (7₁), кинематическое (7₂) и динамические (7₃) условия. Нужно еще добавить условие отсутствия потока жидкости в горизонтальном направлении:

$$\left\langle \int_{-H}^{\zeta} v_{1x} dz + \int_{\zeta}^H v_{2x} dz \right\rangle_y = 0, \quad \left\langle \int_{-H}^{\zeta} v_{1y} dz + \int_{\zeta}^H v_{2y} dz \right\rangle_x = 0.$$

В (1)–(7) для физических величин используются масштабы: $1/\omega$ — для времени (2ω — частота вибраций); $a\omega$ — для скорости (a — амплитуда вибраций); $l_c = \sqrt{\alpha/(g(\rho_1 - \rho_2))}$ — для пространственных координат и отклонения границы раздела от невозмущенного состояния (l_c — капиллярная длина, α — коэффициент поверхностного натяжения, g — ускорение свободного падения, ρ_1, ρ_2 — плотности нижней и верхней жидкостей); E_* — для напряженности электрического поля; E_*h — для электрического потенциала (E_* — напряженность внешнего приложенного электрического поля), $\rho_1 a \omega^2 l_c$ — для давления. Вследствие этого в уравнениях появляются следующие безразмерные комплексы — это, соответственно, отношение плотностей, отношение кинематических вязкостей, безразмерная амплитуда вибраций, число Вебера, характеристика интенсивности электрического поля, соотношение диэлектрических проницаемостей жидкостей, безразмерная вязкость и безразмерная толщина слоев:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \bar{v} = \frac{v_2}{v_1}, \quad A = \frac{a}{l_c}, \quad We = \frac{\omega^2 l_c}{g}, \quad F = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_* l_c}{8\pi\alpha}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad N = \frac{v_1}{\sqrt{g l_c^{3/2}}}, \quad H = \frac{h}{l_c},$$

где ε_0 — электрическая постоянная, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — относительные диэлектрические проницаемости жидкостей, α — коэффициент поверхностного натяжения.

Если нижняя жидкость идеально электропроводная, имеем отличия в записи определяющих уравнений. Так, для нее выглядят следующим образом:

– электрический потенциал

$$\varphi_1 = 0;$$

– уравнение движения

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} + A(\mathbf{v}_2 \cdot \nabla) \mathbf{v}_2 \right) = -\nabla p'_2 + \frac{2(1-\bar{\rho})}{A We} F \left((\mathbf{E}_2 \cdot \nabla) \mathbf{E}_2 - \frac{1}{2} \nabla E_2^2 \right) + \frac{\bar{v} \bar{\rho} N}{\sqrt{We}} \nabla^2 \mathbf{v}_2 - \bar{\rho} \left(\frac{1}{A We} - 4 \cos(2t) \right) \mathbf{e}_z;$$

– граничные условия на границе раздела

$$\begin{aligned} z = \zeta: \quad \varphi_1 &= 0, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + A(\bar{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \nabla) \zeta &= A v_{1z}, \\ p'_1 - p'_2 - \frac{(1-\bar{\rho}) F}{A We} (\nabla \varphi_1)^2 + \frac{2N}{\sqrt{We}} (\bar{\rho} \bar{v} \sigma_{2mn} - \sigma_{1mn}) &= \frac{1-\bar{\rho}}{A We} \nabla \cdot \mathbf{n}, \\ \sigma_{1nr} &= \bar{\rho} \bar{v} \sigma_{2nr}. \end{aligned}$$

Другие уравнения, граничные условия и обозначения записываются аналогично случаю двух диэлектрических жидкостей.

Основное состояние системы из двух диэлектрических жидкостей описывается следующим решением:

$$\begin{aligned} p'_1 &= P_1 = P - z \left(\frac{1}{A We} - 4 \cos(2t) \right), \\ p'_2 &= P_2 = P + \frac{(1-\bar{\varepsilon})(1-\bar{\rho}) F}{A We} - \bar{\rho} z \left(\frac{1}{A We} - 4 \cos(2t) \right), \\ \varphi_1 &= \Phi_1 = -\bar{\varepsilon} z, \quad \varphi_2 = \Phi_2 = -z, \quad \mathbf{v}_{1,2} = 0, \quad \zeta = 0. \end{aligned}$$

где P — константа. Для системы, в которой нижняя жидкость идеально электропроводная, решение имеет вид:

$$p'_1 = P_1 = P - z \left(\frac{1}{A We} - 4 \cos(2t) \right),$$

$$p'_2 = P_2 = P + \frac{(1-\bar{\rho})F}{A We} - \bar{\rho}z \left(\frac{1}{A We} - 4 \cos(2t) \right),$$

$$\varphi_1 = \Phi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \Phi_2 = -z, \quad \mathbf{v}_{1,2} = 0, \quad \zeta = 0.$$

Введем малые возмущения:

$$p'_j = P_j + p'_j, \quad \mathbf{v}_{1,2} = 0 + \mathbf{u}_{1,2}, \quad \zeta = 0 + \varsigma,$$

$$\varphi_1 = \Phi_1 + \phi_1, \quad \varphi_2 = \Phi_2 + \phi_2,$$

$$w_{1,2} \equiv u_{1,2}.$$

Если нижняя жидкость идеально электропроводная, отличие от решения для системы из двух диэлектрических жидкостей будет состоять только в том, что

$$\phi_2 = 0.$$

Все возмущения предполагаются пропорциональными $\cos(kx)$, где k — волновое число.

После линеаризации уравнений (1)–(4), граничных условий (5)–(7) и исключения давления получаем следующие уравнения и граничные условия для системы из двух диэлектрических жидкостей:

$$\frac{\partial \nabla^2 w_1}{\partial t} = \frac{N}{\sqrt{We}} \nabla^4 w_1, \quad \frac{\partial \nabla^2 w_2}{\partial t} = \frac{\bar{v}N}{\sqrt{We}} \nabla^4 w_2,$$

$$\nabla^2 \phi_1 = 0, \quad \nabla^2 \phi_2 = 0,$$

$$z = H: \quad w_2 = 0, \quad \phi_2 = 0,$$

$$z = -H: \quad w_1 = 0, \quad \phi_1 = 0,$$

$$z = 0: \quad \phi_1 - \bar{\epsilon}\varsigma = \phi_2 - \varsigma, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \bar{\epsilon} \frac{\partial \phi_2}{\partial z},$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial \varsigma}{\partial t} = w_j, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{\partial w_2}{\partial z},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) w_1 = \bar{v} \bar{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) w_2,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{N}{\sqrt{We}} \nabla^2 \right) \frac{\partial w_1}{\partial z} - \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\bar{v}N}{\sqrt{We}} \nabla^2 \right) \frac{\partial w_2}{\partial z} - \frac{2(1-\bar{\rho})F}{A We} k^2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right) - \frac{2N}{\sqrt{We}} \left(\bar{v} \bar{\rho} \frac{\partial w_2}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) =$$

$$= -\frac{1-\bar{\rho}}{A We} k^4 \varsigma + (\bar{\rho}-1) \left(\frac{1}{A We} - 4 \cos(2t) \right) k^2 \varsigma,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2.$$

Проанализируем эти системы уравнений и граничных условий, прибегнув к методу многих масштабов. Положим, что имеют место два приближения. В одном из них считается, что велико число Вебера (высокочастотный случай), в другом — предполагается малая вязкость. Эти приближения позволяют рассмотреть вязкие пограничные слои. Для изучения пограничных слоев, согласно методу многих масштабов, потребуется введение быстрой координаты.

3. Теория возмущений для случая малой вязкости

3.1. Электрическая мода

Прежде чем анализировать возмущения системы при малой вязкости слоев, поговорим об «электрической» моде неустойчивости, которая описывает влияние вибраций на неустойчивость Тонкса–Френкеля (неустойчивость под воздействием электрического поля без вибраций). Для этого сделаем следующие разложения по формальному малому параметру δ :

$$\begin{aligned}
A &= \delta A^{(1)}, \\
N &= \delta^2 N^{(2)}, \\
F &= F^{(0)} + \delta^2 F^{(2)} + \dots, \\
\zeta &= \delta \zeta^{(1)} + \delta^2 \zeta^{(2)} + \dots, \\
w_1 &= \delta w_1^{(1)} + \delta^2 w_1^{(2)} + \dots, \\
w_2 &= \delta w_2^{(1)} + \delta^2 w_2^{(2)} + \dots, \\
\phi_1 &= \delta \phi_1^{(1)} + \delta^2 \phi_1^{(2)} + \dots, \\
\phi_2 &= \delta \phi_2^{(1)} + \delta^2 \phi_2^{(2)} + \dots, \\
z_{-1} &= \delta^{-1} z, \quad z_0 = z, \\
\frac{\partial}{\partial z} &= \delta^{-1} \frac{\partial}{\partial z_{-1}} + \frac{\partial}{\partial z_0}.
\end{aligned}$$

Здесь z_{-1} — быстрая координата. Использование «глобальных» быстрой или медленной координат вместо «локальных» — характерная черта метода многих масштабов. Эта идея независимо предложена Кокраном [16] и Махони [17]. Достаточно полное описание метода многих масштабов можно найти в книге Найфе [18].

Но при рассмотрении электрической моды принятое приближение вязкого пограничного слоя не влияет на границу неустойчивости (оно важно для резонансных мод). Итак, предполагаем, что

$$\frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial z_{-1}} = \frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial z_{-1}} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z_{-1}} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z_{-1}} = 0.$$

Это условие учитывается во всех дальнейших уравнениях и граничных условиях.

Для величин порядка малости δ^0 получаем следующие уравнения и граничные условия:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) w_1^{(2)} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\bar{v}N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) w_2^{(2)} = 0, \quad (9)$$

$$z = 0: \quad \frac{1 - \bar{\rho}}{A^{(1)} We} k^2 \zeta^{(1)} + \frac{2(1 - \bar{\rho})}{A^{(1)} We} F^{(0)} k^2 \left(\frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial z_0} - \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial z_0} \right) = -\frac{1 - \bar{\rho}}{A^{(1)} We} k^4 \zeta^{(1)}. \quad (10)$$

Уравнения (8), (9) описывают течение внутри пограничного слоя. Они имеют решения:

$$w_1^{(2)} = \left\{ \left(b_1 e^{\kappa_1 z_{-1}} + c_1 e^{-\kappa_1(z_{-1} - z_*)} \right) e^{it} + \text{к.с.} \right\} \cos(kx) + W_1(z_0, t) \cos(kx), \quad (11)$$

$$w_2^{(2)} = \left\{ \left(b_2 e^{-\kappa_2 z_{-1}} + c_2 e^{\kappa_2(z_{-1} + z_*)} \right) e^{it} + \text{к.с.} \right\} \cos(kx) + W_2(z_0, t) \cos(kx), \quad (12)$$

из которых можно понять, каким образом с помощью одной глобальной переменной $z_{-1} = z/\varepsilon$ возможен анализ нескольких пограничных слоев. В (11), (12) приняты обозначения: к.с. — комплексно-сопряженное выражение предыдущих слагаемых (не выходящих за пределы внешних, в данном случае фигурных скобок); $\kappa_1 = (1+i)\sqrt[4]{We}/\sqrt{2N^{(2)}}$; $\kappa_2 = (1+i)\sqrt[4]{We}/\sqrt{2\bar{v}N^{(2)}}$; $z_* = 1/\varepsilon$.

Для описания пограничного слоя вблизи верхней границы ($z=1$) имеется слагаемое $c_1 e^{-\kappa_1(z_{-1} - z_*)}$, зависящее от разности $(z_{-1} - z_*)$, которое конечно, если она конечна: $z_{-1} - z_* = (z-1)/\varepsilon$, и стремится к нулю, если $|z_{-1} - z_*| \rightarrow \infty$ (при этом $|z-1|$ конечно). Для описания же пограничного слоя вблизи нижней границы ($z=-1$) есть слагаемое $c_2 e^{\kappa_2(z_{-1} + z_*)}$, которое конечно для конечной суммы $z_{-1} + z_* = (z+1)/\varepsilon$ и стремится к нулю, если $|z_{-1} + z_*| \rightarrow \infty$ (при этом $|z+1|$ конечно). Что касается пограничных слоев на границе раздела, то они описываются слагаемыми $b_1 e^{\kappa_1 z_{-1}}$, $b_2 e^{-\kappa_2 z_{-1}}$, которые конечны для конечного $|z_{-1}| = |z_{-1}|/\varepsilon$ и стремятся к нулю, первое — при $z_{-1} \rightarrow -\infty$, а второе — при $z_{-1} \rightarrow +\infty$ (при этом z конечно).

Уравнения (8), (9) и решения (11), (12) нужны для удовлетворения условию прилипания на твердых границах, но на конечном результате — критическом значении электрического поля — они не сказываются (в исследуемом приближении). А вот граничное условие (10), содержащее электрические потенциалы, такое влияние оказывает. При обсуждении конечного результата этот момент будет прокомментирован.

Перейдем к рассмотрению более высоких порядков малости. При δ получаются следующие уравнения и граничные условия:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) w_1^{(3)} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_{-1} \partial z_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) w_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - k^2 \right) w_1^{(1)} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\bar{v}N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) w_2^{(3)} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_{-1} \partial z_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2\bar{v}N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) w_2^{(2)} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - k^2 \right) w_2^{(1)} = 0, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - k^2 \right) \phi_1^{(1)} = 0, \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - k^2 \right) \phi_2^{(1)} = 0, \quad (16)$$

$$z = -H: \quad w_1^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial z_0} + \frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial z_{-1}} = 0, \quad \phi_1^{(1)} = 0, \quad (17)$$

$$z = H: \quad w_2^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial z_0} + \frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial z_{-1}} = 0, \quad \phi_2^{(1)} = 0, \quad (18)$$

$$z = 0: \quad w_1^{(1)} = w_2^{(1)}, \quad \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial z_0} = \bar{\varepsilon} \frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial z_0},$$

$$\phi_1^{(1)} - \bar{\varepsilon} \zeta^{(1)} = \phi_2^{(1)} - \zeta^{(1)},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) \frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial z_{-1}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial z_0} - \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\bar{v}N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) \frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial z_{-1}} - \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial z_0} + \frac{1-\bar{\rho}}{A^{(1)} We} k^2 \zeta^{(2)} - \quad (19)$$

$$-4k^2 (1-\bar{\rho}) \zeta^{(1)} \cos(2t) + \frac{2(1-\bar{\rho})}{A^{(1)} We} F^{(0)} k^2 \left(\frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial z_0} - \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial z_0} \right) = -\frac{1-\bar{\rho}}{A^{(1)} We} k^4 \zeta^{(2)},$$

$$\bar{v}\bar{\rho} \left(\frac{\partial^2 w_2^{(3)}}{\partial z_{-1}^2} + 2 \frac{\partial^2 w_2^{(2)}}{\partial z_{-1} \partial z_0} \right) - \left(\frac{\partial^2 w_1^{(3)}}{\partial z_{-1}^2} + 2 \frac{\partial^2 w_1^{(2)}}{\partial z_{-1} \partial z_0} \right) = 0.$$

При величинах порядка малости δ^2 необходимая для анализа часть уравнений и граничных условий имеет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - k^2 \right) \phi_1^{(2)} = 0, \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - k^2 \right) \phi_2^{(2)} = 0, \quad (21)$$

$$z = -H: \quad \phi_1^{(2)} = 0, \quad (22)$$

$$z = H: \quad \phi_2^{(2)} = 0, \quad (23)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \zeta^{(2)}}{\partial t} = A^{(1)} w_1^{(1)}, \quad \frac{\partial \phi_1^{(2)}}{\partial z_0} = \varepsilon \frac{\partial \phi_2^{(2)}}{\partial z_0},$$

$$\phi_1^{(2)} - \bar{\varepsilon} \zeta^{(2)} = \phi_2^{(2)} - \zeta^{(2)},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial z_0} - \frac{3N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2 w_1^{(2)}}{\partial z_{-1} \partial z_0} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) \frac{\partial w_1^{(3)}}{\partial z_{-1}} - \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial z_0} + \frac{3\bar{\rho}\bar{v}N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^3 w_2^{(2)}}{\partial z_{-1}^2 \partial z_0} - \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\bar{v}N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) \frac{\partial w_2^{(3)}}{\partial z_{-1}} + \quad (24)$$

$$+ \frac{1-\bar{\rho}}{A^{(1)} We} k^2 \zeta^{(3)} - 4k^2 (1-\bar{\rho}) \zeta^{(2)} \cos(2t) + \frac{2(1-\bar{\rho})}{A^{(1)} We} F^{(0)} k^2 \left(\frac{\partial \phi_2^{(3)}}{\partial z_0} - \frac{\partial \phi_1^{(3)}}{\partial z_0} \right) + \frac{2(1-\bar{\rho})}{A^{(1)} We} F^{(2)} k^2 \left(\frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial z_0} - \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial z_0} \right) =$$

$$= -\frac{1-\bar{\rho}}{A^{(1)} We} k^4 \zeta^{(3)}.$$

Исследуем решение уравнений (15), (16) и часть граничных условий (17)–(19) в форме:

$$\begin{aligned}\phi_1^{(1)} &= (G_1 e^{kz_0} + J_1 e^{-kz_0}) \cos(kx), \\ \phi_2^{(1)} &= (G_2 e^{kz_0} + J_2 e^{-kz_0}) \cos(kx), \\ \zeta^{(1)} &= K_s \cos(kx).\end{aligned}$$

Это стационарное решение описывает неустойчивость Тонкса–Френкеля, а вибрационные поправки, в том числе зависящие от времени, появляются при следующих порядках малости. Здесь для констант G_1, J_1, G_2, J_2 получаем выражения:

$$G_1 = -\frac{\bar{\varepsilon}(1-\bar{\varepsilon})}{1+\bar{\varepsilon}} \frac{1}{e^{2kH}-1} K_s, \quad J_1 = \frac{\bar{\varepsilon}(1-\bar{\varepsilon})}{1+\bar{\varepsilon}} \frac{e^{2kH}}{e^{2kH}-1} K_s, \quad G_2 = -\frac{1-\bar{\varepsilon}}{1+\bar{\varepsilon}} \frac{1}{e^{2kH}-1} K_s, \quad J_2 = \frac{1-\bar{\varepsilon}}{1+\bar{\varepsilon}} \frac{e^{2kH}}{e^{2kH}-1} K_s.$$

Из динамического граничного условия для нормальных напряжений, содержащегося в (24), вытекает формула:

$$F^{(0)} = \frac{1+\bar{\varepsilon}}{2(1-\bar{\varepsilon})^2} \left(k + \frac{1}{k} \right) \text{th}(kH).$$

Для вертикальной компоненты скорости первого порядка малости и для отклонения границы раздела второго порядка малости будем отыскивать решение в виде:

$$\begin{aligned}w_1^{(1)} &= \left((B_1 e^{kz_0} + C_1 e^{-kz_0}) e^{2it} + \text{к.с.} \right) \cos(kx), \\ w_2^{(1)} &= \left((B_2 e^{kz_0} + C_2 e^{-kz_0}) e^{2it} + \text{к.с.} \right) \cos(kx), \\ \phi_1^{(2)} &= (G_{1s} e^{kz_0} + J_{1s} e^{-kz_0}) \cos(kx) + \left[(G_{1a} e^{kz_0} + J_{1a} e^{-kz_0}) e^{2it} + \text{к.с.} \right] \cos(kx), \\ \phi_2^{(2)} &= (G_{2s} e^{kz_0} + J_{2s} e^{-kz_0}) \cos(kx) + \left[(G_{2a} e^{kz_0} + J_{2a} e^{-kz_0}) e^{2it} + \text{к.с.} \right], \\ \zeta^{(2)} &= (K^{(2)} e^{2it} + K^{(2)*} e^{-2it} + K_s^{(2)}) \cos(kx).\end{aligned}$$

Как видно, электрические потенциалы второго порядка малости начинают зависеть от времени.

Из уравнений (13), (14), (20), (21) и части граничных условий (17)–(19), (22)–(24) для констант $B_1, C_1, B_2, C_2, K^{(2)}$ следуют формулы:

$$\begin{aligned}B_1 &= \frac{2i}{A^{(1)}} \frac{e^{2kH}}{e^{2kH}-1} K^{(2)}, \quad C_1 = -\frac{2i}{A^{(1)}} \frac{1}{e^{2kH}-1} K^{(2)}, \\ B_2 &= -\frac{2i}{A^{(1)}} \frac{1}{e^{2kH}-1} K^{(2)}, \quad C_2 = \frac{2i}{A^{(1)}} \frac{e^{2kH}}{e^{2kH}-1} K^{(2)}, \\ K^{(2)} &= -\frac{A^{(1)}}{2} \frac{1-\bar{\rho}}{1+\bar{\rho}} k K_s \text{th}(kH).\end{aligned}$$

Выражения для констант $G_{1s}, J_{1s}, G_{1a}, J_{1a}, G_{2s}, J_{2s}, G_{2a}, J_{2a}$ не приводим, так как они нужны только в промежуточных вычислениях.

При отсутствии резонансных членов в динамическом граничном условии (24) для нормальных напряжений порядка малости δ^2 на границе неустойчивости (в случае двух диэлектрических жидкостей) приходим к выражению:

$$F - F^{(0)}(k) = \frac{1-\bar{\rho}}{1+\bar{\rho}} \frac{1+\bar{\varepsilon}}{(1-\bar{\varepsilon})^2} \text{We} A^2 \text{th}^2(kH), \quad (25)$$

($F - F^{(0)}(k) \approx \delta^2 F^{(2)}$, $A = \delta A^{(1)}$). Как видно, в выражение (25) не входит вязкость, и это та самая причина, по которой решения (11), (12) не влияют на конечный результат, и которую выше обещано

прокомментировать. Заметим, что слагаемые в динамическом условии (24) для нормальных напряжений порядка малости δ^2 , зависящие от времени, уходят в члены, содержащие производные по времени $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial z_0}$, $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial z_0}$.

В случае, когда одна жидкость идеально электропроводная, получаем условие только с одним отличием: следует заменить $F(1-\bar{\epsilon})^2/(1+\bar{\epsilon})$ на F .

Из (25) видно, что вибрации ($\bar{\rho} < 1$) увеличивают критическое значение напряженности электрического поля, если коротковолновая неустойчивость более опасна (значение волнового числа в точке минимума ненулевое), чем длинноволновая (значение волнового числа в точке минимума нулевое). Вибрации подавляют возмущения основного состояния, за исключением длинноволновых возмущений. В случае, когда более опасны длинноволновые возмущения, вибрации увеличивают кривизну нейтральной кривой для $k = 0$.

В качестве примера рассмотрим систему жидкостей «вода–декан» при температуре 20°C, нормальном атмосферном давлении и безразмерных характеристиках $\bar{\rho} = 0.731214$, $N \approx 0.00113369$, $\bar{\epsilon} \approx 0.02476337$, $\bar{\nu} \approx 1.23769$. Нейтральные кривые $F(k)$ показаны на рисунке 1 (см. линии 0, 1, 2).

Рассмотрим зависимость $A(k)$ для фиксированного значения F вместо фиксированного значения амплитуды вибраций A . Зависимости $A(k)$ приведены на рисунке 2.

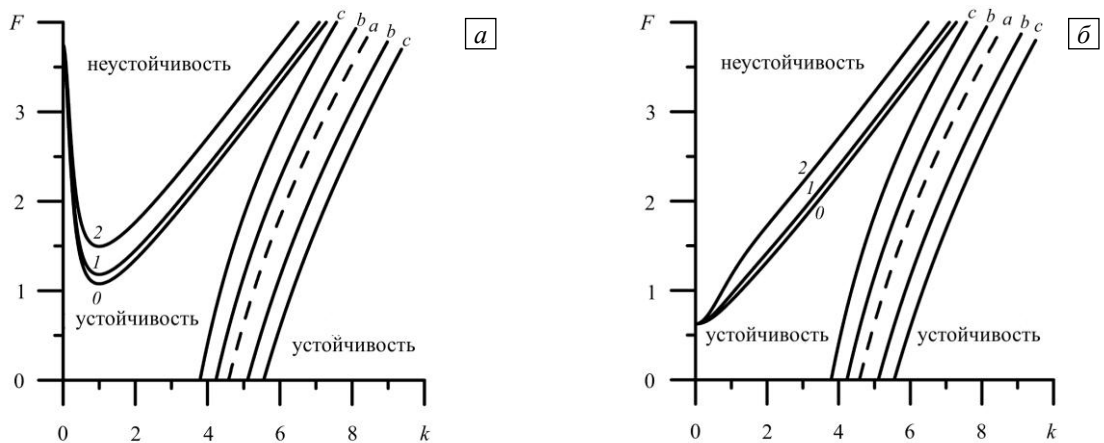


Рис. 1. Зависимость F от волнового числа k для электрических коротковолновых (а) и длинноволновых (б) мод (кривые 0, 1, 2, при этом $A=0; 0.2; 0.4$), а также для резонансных мод (кривые b, c, $A=0.2; 0.4$) при $\omega/(2\pi) = 30$ Гц ($We \approx 15.6241$) и (а) $h = 0.03$ м ($H \approx 6.96151$), (б) $h = 0.005$ м ($H \approx 1.16025$); штриховая линия (кривая a) – дисперсионное соотношение для капиллярно-гравитационных волн; резонансные моды неустойчивы между кривыми b и b и между кривыми c и c

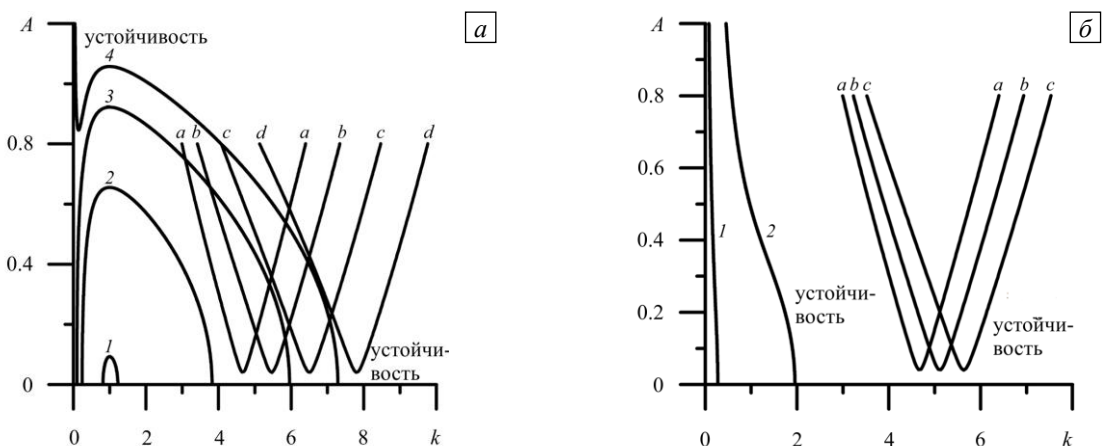


Рис. 2. Зависимость A от волнового числа k при $\omega/(2\pi) = 30$ Гц ($We \approx 15.6241$), (а) $h = 0.03$ м ($H \approx 6.96151$) и (б) $h = 0.005$ м ($H \approx 1.16025$) для резонансных (а) – кривые a, b, c, d (при $F=0; 1.1; 2.2; 3.3$ соответственно), (б) – кривые a, b, c (при $F=0; 0.65; 1.3$) и электрических коротковолновых мод (а) – кривые 1, 2, 3, 4 при $F=1.1; 2.2; 3.3; 4.0$ и электрических длинноволновых мод (б) – кривые 1, 2 при $F=0.65; 1.3$; для резонансных мод неустойчивость выше нейтральных кривых, для электрических мод – ниже нейтральных кривых

3.2. Резонансная мода

Рассмотрим только первую резонансную (субгармоническую) моду, которая наиболее опасна. В этом случае будем использовать следующие разложения по малому параметру δ :

$$\begin{aligned} A &= \delta A^{(1)}, \\ N &= \delta^2 N^{(2)}, \\ F &= F^{(0)} + \delta F^{(1)} + \dots, \\ \zeta &= \delta^2 \zeta^{(2)} + \delta^3 \zeta^{(3)} + \dots, \\ w_1 &= \delta w_1^{(1)} + \delta^2 w_1^{(2)} + \dots, \\ w_2 &= \delta w_2^{(1)} + \delta^2 w_2^{(2)} + \dots, \\ \phi_1 &= \delta^2 \phi_1^{(2)} + \delta^3 \phi_1^{(3)} + \dots, \\ \phi_2 &= \delta^2 \phi_2^{(2)} + \delta^3 \phi_2^{(3)} + \dots, \\ z_{-1} &= \delta^{-1} z, \quad z_0 = z, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \delta^{-1} \frac{\partial}{\partial z_{-1}} + \frac{\partial}{\partial z_0}. \end{aligned}$$

Для изучения резонансной моды введение быстрой координаты так же важно, как и моды электрической, поскольку становится возможным учет влияния вязкости на границу неустойчивости. После проведения вычислений, подобных выполненным в [14], [19], для системы из двух диэлектрических жидкостей получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} F^{(0)}(k) &= \frac{1 + \bar{\varepsilon}}{2(1 - \bar{\varepsilon})^2} \left[\left(\frac{1}{k} + k \right) \text{th}(kH) - \frac{1 + \bar{\rho}}{1 - \bar{\rho}} \frac{\text{We}}{k^2} \right], \\ A &= \pm \sqrt{\left[\gamma + \mu (F - F^{(0)}(k)) \right]^2 + \gamma^2}, \\ \mu &\equiv \frac{1}{\text{We}} \frac{(1 - \bar{\varepsilon})^2}{1 + \bar{\varepsilon}} k \text{cth}(kH), \quad \gamma \equiv \frac{1}{2(1 - \bar{\rho})} \frac{\sqrt{2N}}{\sqrt[4]{\text{We}}} \left(\frac{2\sqrt{\bar{\rho}}}{\sqrt{\bar{\rho}} + 1} \text{cth}^2(kH) + \frac{\sqrt{\bar{\rho}} + 1}{2\text{sh}^2(kH)} \right), \end{aligned}$$

где $A = \delta A^{(1)}$, $F - F^{(0)} \approx \delta F^{(1)}$, $N = \delta^2 N^{(2)}$.

Для идеально электропроводной нижней жидкости в двухслойной системе в уравнения следует внести одну поправку — заменить $F(1 - \bar{\varepsilon})^2 / (1 + \bar{\varepsilon})$ на F .

Заметим, что в статье [14] исследуется такая же система жидкостей (нижняя жидкость идеально электропроводная, а верхняя диэлектрик), но в ряд по малому параметру раскладывается волновое число ($k = k_0 + \delta k_1$), а не F ($F = F^{(0)} + \delta F^{(1)} + \dots$). Эти приемы эквивалентны, за исключением одного специального случая. Ниже покажем это.

Раскладываем $F^{(0)}$ в ряд Тейлора в терминах волнового числа:

$$F^{(0)} = F^{(0)}(k_0) + \left. \frac{dF^{(0)}}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 F^{(0)}}{dk^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)^2 + \dots$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} k_0 \left[(1 + k_0^2) \text{th}(k_0 H) - 2F'(k_0) \right] &= \frac{1 + \bar{\rho}}{1 - \bar{\rho}} \text{We}, \\ A &= \pm \sqrt{\left[\beta (k - k_0) - \gamma \right]^2 + \gamma^2}, \\ \beta &\equiv \left. \frac{dF^{(0)}}{dk} \right|_{k=k_0} = \frac{1 + \bar{\rho}}{2k_0^2 (1 - \bar{\rho})} \left(\frac{k_0 H}{\text{sh}^2(k_0 H)} - \text{cth}(k_0 H) \right) + \frac{F'}{\text{We}} \left(\frac{k_0 H}{\text{sh}^2(k_0 H)} - 3\text{cth}(k_0 H) \right) + \frac{1}{\text{We}} \left(\frac{1}{k_0} + 2k_0 \right), \end{aligned} \tag{26}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{2(1-\bar{\rho})} \frac{\sqrt{2N}}{\sqrt[4]{We}} \left(\frac{2\sqrt{\bar{\rho}}}{\sqrt{\bar{\rho}}+1} \operatorname{cth}^2(k_0 H) + \frac{\sqrt{\bar{\rho}}+1}{2\operatorname{sh}^2(k_0 H)} \right),$$

$$F^{(0)} \equiv \frac{(1-\bar{\epsilon})^2}{1+\bar{\epsilon}} F^{(0)},$$

где малый параметр исключен с помощью выражений: $A \approx \delta A^{(1)}$, $k - k_0 \approx \delta k_1$, $F' \approx F'^{(0)}$. Заметим, что в [14] в выражении для коэффициента γ для случая конечных толщин допущено несколько ошибок, которые здесь исправлены. При бесконечных толщинах в [14] выражение для γ правильное, но в коэффициенте β потеряно число We . Итак, в пределе $H \rightarrow \infty$, с учетом (26), имеем:

$$\beta = \frac{3}{2k_0^2} \frac{1+\bar{\rho}}{1-\bar{\rho}} + \frac{1}{We} \left(F' - \frac{1}{k_0} \right),$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2N}}{\sqrt[4]{We}(1-\bar{\rho})(\sqrt{\bar{\rho}}+1)},$$

$$k_0 \left[(1+k_0^2) - 2F'k_0 \right] = \frac{1+\bar{\rho}}{1-\bar{\rho}} We.$$

В качестве примера снова рассмотрим систему «вода–декан» при температуре 20°C и нормальном атмосферном давлении.

Зависимости $A(k)$ для фиксированных значений параметров F , We , H показаны на рисунке 2 (см. кривые 0, 1, 2, 3 на (а) и кривые 0, 1, 2 на (б)). Зависимости $F(k)$ для фиксированных значений параметров A , We , H содержит рисунок 1 (см. на (а) кривые b, c). Кривая a на рисунке 1 описывает дисперсионное соотношение для капиллярно-гравитационных волн в отсутствие вибраций (но для ненулевого значения напряженности электрического поля).

Перейдем теперь к специальному случаю, о котором было упомянуто выше. Заметим, что при некоторых значениях числа Вебера We и параметра F дисперсионное уравнение для капиллярно-гравитационных волн в отсутствие вибраций и вязкости имеет три или два решения (для волнового числа). Это означает, что в первой резонансной зоне также возможны три или два решения (для волнового числа). Проверим, этот факт. Рассмотрим зависимость $F(k)$ для половины частоты вибраций $\omega/(2\pi) = 1 \text{ Гц}$ ($We \approx 0.0173601$) при толщинах слоев $h = 0.04 \text{ м}$ ($H \approx 9.28202$). Как видно из рисунка 3, на графиках $F(k)$ (на обеих кривых b) присутствует по одному максимуму и одному минимуму. В точках, в которых

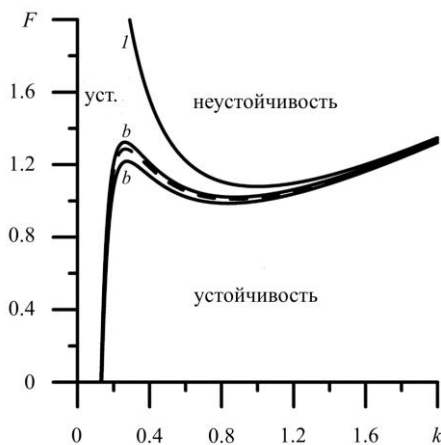


Рис. 3. Зависимость F от волнового числа k для электрической коротковолновой (кривая 1) и резонансной мод (кривые 2); штриховая линия – дисперсионное соотношение для капиллярно-гравитационных волн; $A = 0.8$; $h = 0.04 \text{ м}$ ($H \approx 9.28202$), $\omega/(2\pi) = 3 \text{ Гц}$ ($We \approx 0.156241$); для резонансной моды неустойчивость между крайними кривыми 1 и 2

наблюдаются экстремумы, коэффициент β равен нулю, поэтому, если работать в рамках подхода статьи [14], требуется учет вторых производных $d^2 F^{(0)}/dk^2$. Кроме того, для значений F , не лежащих на кривую $F^{(0)}(k_0)$ (превышающих максимальные или меньших минимальных значений), требуется осуществлять разложение для $F = F^{(0)} + \delta F^{(1)} + \dots$,

а не для волнового числа $k = k_0 + \delta k_1$. Если из промежутка между экстремумами F взять некоторое значение F_* , то, как видно на рисунке 3, ему соответствуют три резонансных зоны. Зависимости $A(k)$ для специальных значений F показаны на рисунке 4.

Для значений числа Вебера, при которых наблюдается субгармонический резонанс с одним минимумом, электрическое поле уменьшает критическое значение амплитуды вибраций, но этот эффект достаточно мал. В случае трех минимумов эффект сложнее.

Заметим, что когда $\bar{\rho} = 0$ и $H \rightarrow \infty$, A стремится к нулю в принятом в данной работе приближении. Значит, необходимо рассматривать A следующего порядка малости. Это сделано в статье [15] при свободной верхней границе.

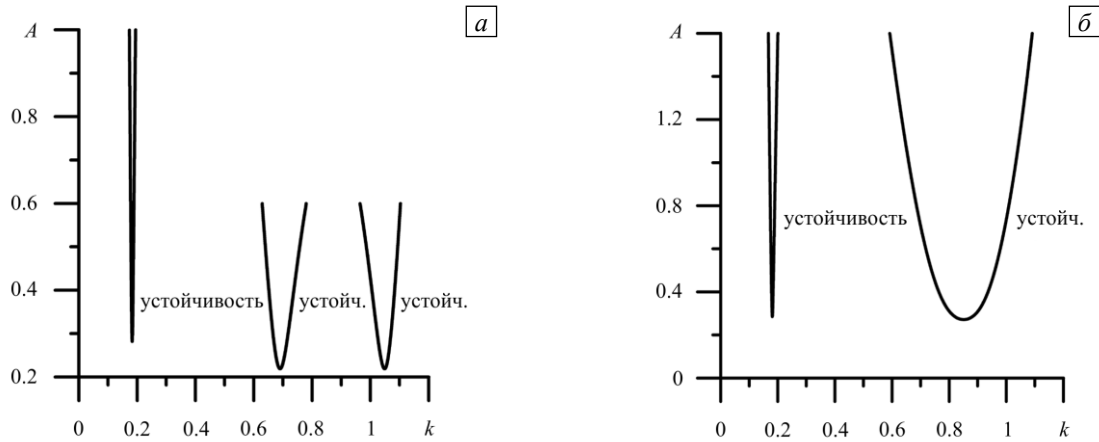


Рис. 4. Зависимость A от волнового числа k для резонансной моды при $h = 0.04$ м ($H \approx 9.28202$), $\omega/(2\pi) = 1$ Гц ($We \approx 0.0173601$) и различных значениях F : (а) – $F = 1.02$; (б) – $F = 1.00$

4. Теория возмущений в высокочастотном приближении

Перейдем к рассмотрению высокочастотного случая. Как и выше, применим разложение по малому параметру δ :

$$\begin{aligned} We &= \delta^{-4} We^{(-4)}, \quad A = \delta^5 A^{(5)}, \quad N = \delta^2 N^{(2)}, \\ F &= F^{(0)} + \delta^6 F^{(6)} + \dots, \\ \zeta &= \delta \zeta^{(1)} + \delta^6 \zeta^{(6)} + \dots, \\ w_1 &= \delta w_1^{(1)} + \delta^2 w_1^{(2)} + \dots, \\ w_2 &= \delta w_2^{(1)} + \delta^2 w_2^{(2)} + \dots, \\ \phi_1 &= \delta \phi_1^{(1)} + \delta^6 \phi_1^{(6)} + \dots, \\ \phi_2 &= \delta \phi_2^{(1)} + \delta^6 \phi_2^{(6)} + \dots, \\ z_{-1} &= \delta^{-1} z, \quad z_0 = z. \end{aligned}$$

Предполагаем, что

$$\frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial z_{-1}} = \frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial z_{-1}} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z_{-1}} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z_{-1}} = 0.$$

При порядке малости δ^0 получаем уравнения и граничные условия:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) w_1^{(2)} = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\bar{v} N^{(2)}}{\sqrt{We}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) w_2^{(2)} = 0, \tag{28}$$

$$z = 0: \quad \frac{1 - \bar{\rho}}{A^{(5)} We^{(-4)}} k^2 \zeta^{(1)} + \frac{2(1 - \bar{\rho})}{A^{(5)} We^{(-4)}} F^{(0)} k^2 \left(\frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial z_0} - \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial z_0} \right) = - \frac{1 - \bar{\rho}}{A^{(5)} We^{(-4)}} k^4 \zeta^{(1)}. \tag{29}$$

Уравнения (27), (28) описывают течение в пограничном слое и нужны для удовлетворения условию прилипания на твердых границах.

При следующем порядке малости — δ , уравнения и граничные условия имеют вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) w_1^{(3)} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_{-1} \partial z_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) w_1^{(2)} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - k^2 \right) w_1^{(1)} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\bar{v}N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) w_2^{(3)} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_{-1} \partial z_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2\bar{v}N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) w_2^{(2)} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - k^2 \right) w_2^{(1)} = 0, \quad (31)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - k^2 \right) \phi_1^{(1)} = 0, \quad (32)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - k^2 \right) \phi_2^{(1)} = 0, \quad (33)$$

$$z = -H: \quad w_1^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial z_0} + \frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial z_{-1}} = 0, \quad \phi_1^{(1)} = 0, \quad (34)$$

$$z = H: \quad w_2^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial z_0} + \frac{\partial w_2^{(2)}}{\partial z_{-1}} = 0, \quad \phi_2^{(1)} = 0, \quad (35)$$

$$z = 0: \quad w_1^{(1)} = w_2^{(1)}, \quad \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial z_0} = \bar{\varepsilon} \frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial z_0},$$

$$\phi_1^{(1)} - \bar{\varepsilon} \zeta^{(1)} = \phi_2^{(1)} - \zeta^{(1)},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^2 w_1^{(2)}}{\partial z_{-1}^2} \right) \frac{\partial w_1^{(2)}}{\partial z_{-1}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial z_0} - \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\bar{v}N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) - \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial z_0} - 4k^2 (1 - \bar{\rho}) \zeta^{(1)} \cos(2t) = 0, \quad (36)$$

$$\bar{v}\bar{\rho} \left(\frac{\partial^2 w_2^{(3)}}{\partial z_{-1}^2} + 2 \frac{\partial^2 w_2^{(2)}}{\partial z_{-1} \partial z_0} \right) - \left(\frac{\partial^2 w_1^{(3)}}{\partial z_{-1}^2} + 2 \frac{\partial^2 w_1^{(2)}}{\partial z_{-1} \partial z_0} \right) = 0.$$

Рассмотрение промежуточных порядков малости ($\delta^2, \dots, \delta^4$) не важно для получения конечного результата. Перейдем к более высоким порядкам. При δ^5, δ^6 необходимая для анализа часть уравнений и граничных условий будет следующей:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - k^2 \right) \phi_1^{(6)} = 0, \quad (37)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_0^2} - k^2 \right) \phi_2^{(6)} = 0, \quad (38)$$

$$z = -H: \quad \phi_1^{(6)} = 0, \quad (39)$$

$$z = H: \quad \phi_2^{(6)} = 0, \quad (40)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_1^{(5)}}{\partial z_0} - \frac{3N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^3 w_1^{(5)}}{\partial z_{-1}^2 \partial z_0} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) \frac{\partial w_1^{(6)}}{\partial z_{-1}} - \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_2^{(5)}}{\partial z_0} + \frac{3\bar{v}N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^3 w_2^{(5)}}{\partial z_{-1}^2 \partial z_0} - \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\bar{v}N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) \frac{\partial w_2^{(6)}}{\partial z_{-1}} + \frac{(1 - \bar{\rho})k^2}{A^{(5)} We^{(-4)}} \zeta^{(6)} + \frac{2(1 - \bar{\rho})}{A^{(5)} We^{(-4)}} F^{(0)} k^2 \left(\frac{\partial \phi_2^{(6)}}{\partial z_0} - \frac{\partial \phi_1^{(6)}}{\partial z_0} \right) = - \frac{1 - \bar{\rho}}{A^{(5)} We^{(-4)}} k^4 \zeta^{(6)}, \quad (41)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \zeta^{(6)}}{\partial t} = A^{(5)} w_1^{(1)}, \quad \frac{\partial \phi_1^{(6)}}{\partial z_0} = \bar{\varepsilon} \frac{\partial \phi_2^{(6)}}{\partial z_0},$$

$$\phi_1^{(6)} - \bar{\varepsilon} \zeta^{(6)} = \phi_2^{(6)} - \zeta^{(6)},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_1^{(6)}}{\partial z_0} - \frac{3N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^3 w_1^{(6)}}{\partial z_{-1}^2 \partial z_0} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) \frac{\partial w_1^{(7)}}{\partial z_{-1}} - \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial w_2^{(6)}}{\partial z_0} + \frac{3\bar{v}N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^3 w_2^{(6)}}{\partial z_{-1}^2 \partial z_0} - \bar{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\bar{v}N}{\sqrt{We^{(-4)}}} \frac{\partial^2}{\partial z_{-1}^2} \right) \frac{\partial w_2^{(7)}}{\partial z_{-1}} + \frac{(1 - \bar{\rho})k^2}{A^{(5)} We^{(-4)}} \zeta^{(7)} - 4k^2 (1 - \bar{\rho}) \zeta^{(6)} \cos(2t) \quad (42)$$

$$+ \frac{2(1 - \bar{\rho})}{A^{(5)} We^{(-4)}} F^{(0)} k^2 \left(\frac{\partial \phi_2^{(7)}}{\partial z_0} - \frac{\partial \phi_1^{(7)}}{\partial z_0} \right) + \frac{2(1 - \bar{\rho})}{A^{(5)} We^{(-4)}} F^{(6)} k^2 \left(\frac{\partial \phi_2^{(1)}}{\partial z_0} - \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial z_0} \right) = - \frac{1 - \bar{\rho}}{A^{(5)} We^{(-4)}} k^4 \zeta^{(7)}.$$

Решение уравнений (32), (33) и граничных условий (34)–(36) будем искать в виде:

$$\begin{aligned}\phi_1^{(1)} &= (G_1 e^{kz_0} + J_1 e^{-kz_0}) \cos(kx), \\ \phi_2^{(1)} &= (G_2 e^{kz_0} + J_2 e^{-kz_0}) \cos(kx), \\ \zeta^{(1)} &= K_s \cos(kx).\end{aligned}$$

Для констант G_1, J_1, G_2, J_2 получаем:

$$G_1 = -\frac{\bar{\varepsilon}(1-\bar{\varepsilon})}{1+\bar{\varepsilon}} \frac{1}{e^{2kH}-1} K_s, \quad J_1 = \frac{\bar{\varepsilon}(1-\bar{\varepsilon})}{1+\bar{\varepsilon}} \frac{e^{2kH}}{e^{2kH}-1} K_s, \quad G_2 = -\frac{1-\bar{\varepsilon}}{1+\bar{\varepsilon}} \frac{1}{e^{2kH}-1} K_s, \quad J_2 = \frac{1-\bar{\varepsilon}}{1+\bar{\varepsilon}} \frac{e^{2kH}}{e^{2kH}-1} K_s.$$

Из динамического граничного условия для нормальных напряжений (29) следует:

$$F^{(0)} = \frac{1+\bar{\varepsilon}}{2(1-\bar{\varepsilon})^2} \left(k + \frac{1}{k} \right) \text{th}(kH).$$

Для вертикальной компоненты скорости первого порядка малости и для отклонения границы раздела сред шестого порядка малости решение ищем в виде:

$$\begin{aligned}w_1^{(1)} &= \left((B_1 e^{kz_0} + C_1 e^{-kz_0}) e^{2it} + \text{к.с.} \right) \cos(kx), \\ w_2^{(1)} &= \left((B_2 e^{kz_0} + C_2 e^{-kz_0}) e^{2it} + \text{к.с.} \right) \cos(kx), \\ \phi_1^{(6)} &= (G_{1s} e^{kz_0} + J_{1s} e^{-kz_0}) \cos(kx) + \left[(G_{1a} e^{kz_0} + J_{1a} e^{-kz_0}) e^{2it} + \text{к.с.} \right] \cos(kx), \\ \phi_2^{(6)} &= (G_{2s} e^{kz_0} + J_{2s} e^{-kz_0}) \cos(kx) + \left[(G_{2a} e^{kz_0} + J_{2a} e^{-kz_0}) e^{2it} + \text{к.с.} \right], \\ \zeta^{(6)} &= (K^{(6)} e^{2it} + K^{(6)*} e^{-2it} + K_s^{(6)}) \cos(kx).\end{aligned}$$

Из уравнений (30), (31), (37), (38) и граничных условий (34)–(36), (39)–(42) вытекают выражения для констант B_1, C_1, B_2, C_2 :

$$\begin{aligned}B_1 &= \frac{2i}{A^{(5)}} \frac{e^{2kH}}{e^{2kH}-1} K^{(6)}, \quad C_1 = -\frac{2i}{A^{(5)}} \frac{1}{e^{2kH}-1} K^{(6)}, \quad B_2 = -\frac{2i}{A^{(5)}} \frac{1}{e^{2kH}-1} K^{(6)}, \quad C_2 = \frac{2i}{A^{(5)}} \frac{e^{2kH}}{e^{2kH}-1} K^{(6)}, \\ K^{(6)} &= -\frac{A^{(5)}(1-\bar{\rho})}{2(1+\bar{\rho})} k K_s \text{th}(kH).\end{aligned}$$

Выражения для констант $G_{1s}, J_{1s}, G_{1a}, J_{1a}, G_{2s}, J_{2s}, G_{2a}, J_{2a}$ не приводим, так как они нужны только для промежуточных вычислений.

При учете отсутствия резонансных членов в динамическом граничном условии (42) для нормальных напряжений порядка малости δ^6 получается следующее условие для границы неустойчивости системы двух диэлектрических жидкостей:

$$F - F^{(0)}(k) = \frac{1-\bar{\rho}}{1+\bar{\rho}} \frac{1+\bar{\varepsilon}}{(1-\bar{\varepsilon})^2} \text{We} A^2 \text{th}^2(kH), \quad (43)$$

где $A \approx \delta^5 A^{(5)}$, $F - F^{(0)}(k) \approx \delta^6 F^{(6)}$.

Если нижняя жидкость идеально электропроводная, результат отличается от предыдущего случая двух диэлектрических жидкостей только тем, что нужно заменить $F(1-\bar{\varepsilon})^2/(1+\bar{\varepsilon})$ на F . Формула (43) совпадает с формулой (25), которая описывает систему в приближении конечной частоты вибраций. В поле же высокочастотных вибраций отсутствуют резонансные возмущения при конечных значениях отношения амплитуды вибрационного ускорения к ускорению свободного падения.

5. Заключение

Анализ результатов, приведенных в данной статье, позволяет прийти к выводу, что нормальные вибрации увеличивают критическое значение напряженности электрического поля в случае, когда

неустойчивость носит коротковолновый характер (волновое число в точке минимума нейтральной кривой ненулевое). При длинноволновом характере электрической неустойчивости вибрации увеличивают кривизну нейтральной кривой (зависимость напряженности электрического поля от волнового числа). Что касается резонансных мод неустойчивости, то показано, что электрическое поле для первого резонанса при некоторых значениях числа Вебера может приводить к расщеплению резонансной моды на две или три. Для чисел Вебера, при которых расщепление резонансной моды не происходит, электрическое поле уменьшает критическую амплитуду вибраций, но эффект незначительный. При расщеплении же резонансной моды эффект воздействия на критическую амплитуду вибраций более сложный.

Литература

1. Tonks L. A theory of liquid surface rupture by uniform electric field // *Phys. Rev.* 1935. Vol. 48. P. 562-568. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.48.562>
2. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // *ЖЭТФ*. 1936. Т. 6, № 4. С. 348-350.
3. Зайцев В., Шлиomis М. Характер неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей в постоянном поле // *ДАН СССР*. 1969. Т. 188, № 6. С. 1261-1262.
4. Горьков Л.П., Черникова Д.М. К вопросу о структуре заряженной поверхности жидкого гелия // *Письма в ЖЭТФ*. 1973. Т. 18, № 2. С. 119-122.
5. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоношко Д.Ф. Капиллярные колебания и неустойчивость Тонкса-Френкеля слоя жидкости конечной толщины // *ЖТФ*. 1997. Т. 67, № 8. С. 27-33. (English version <https://doi.org/10.1134/1.1258749>)
6. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Критерий неустойчивости заряженной капли в электростатическом подвесе // *Электронная обработка материалов*. 2015. Т. 51, № 3. С. 44-50. (English version <https://doi.org/10.3103/S1068375515030084>)
7. Faraday M. XVII. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // *Phil. Trans. R. Soc.* 1831. Vol. 121. P. 299-340. <https://doi.org/10.1098/rstl.1831.0018>
8. Lord Rayleigh D.C.L. F.R.S. VII. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support // *Phil. Mag.* 1883. Vol. 16(97). P. 50-58. <https://doi.org/10.1080/14786448308627392>
9. Rayleigh J.W.S.B. The theory of sound. Vol. I. London: Macmillan and Co., 1894. 496 p.
10. Сорокин В.И. Об эффекте фонтанирования капель с поверхности вертикально колеблющейся жидкости // *Акуст. журн.* 1957. Т. 3, № 3. С. 262-273.
11. Черепанов А.А. Влияние переменных внешних полей на неустойчивость Рэлея-Тейлора // *Некоторые задачи устойчивости поверхности жидкости*. Свердловск, 1984. С. 29-53.
12. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 216 с.
13. Gadikota G., Chatain D., Amiroudine S., Lyubimova T., Beysens D. Faraday instability in a near-critical fluid under weightlessness // *Phys. Rev. E*. 2014. Vol. 48. 013022. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.48.013022>
14. Sadilov E.S. Influence of the electric field on parametric instability of two-layer system // *Microgravity Sci. Technol.* 2018. Vol. 30. P. 361-367. <https://doi.org/10.1007/s12217-018-9608-7>
15. Sadilov E.S. Joint influence of electric field and vibrations on the instability of fluid dielectric layer with free boundary // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. Vol. 1809. 012027. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1809/1/012027>
16. Cochran J. A new approach to singular perturbation problems. PhD Dissertation, Stanford, Stanford University, 1962. 226 p.
17. Mahony J.J. An expansion method for singular perturbation problems // *J. Aust. Math. Soc.* 1962. Vol. 2. P. 440-463. <https://doi.org/10.1017/S1446788700027452>
18. Nayfeh A.H. Introduction to perturbation techniques. Wiley, 1993. 533 p.
19. Sadilov E.S. The effect of normal vibrations on the stability of a three-layer fluid system in zero gravity // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. 2019. Vol. 7. P. 227-338. <https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2019030977>

References

1. Tonks L. A theory of liquid surface rupture by uniform electric field. *Phys. Rev.*, 1935, vol. 48, pp. 562-568. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.48.562>
2. Frenkel' Ya.I. K teorii Tonksa o razryve poverkhnosti zhidkosti postoyannym elektricheskim polem v vakuume [On the Tonks theory of surface rupture by uniform electric field in vacuum]. *ZhETF – JETP*, 1936, vol. 6, no. 4, pp. 348-350.
3. Zaytsev V., Shliomis M. Kharakter neustoychivosti poverkhnosti razdela dvukh zhidkostey v postoyannom pole [Instability character of two fluids in uniform field]. *DAN SSSR – Sov. Phys. Dokl.*, 1969, vol. 188, no. 6, pp. 1261-1262.
4. Gor'kov L.P., Chernikova D.M. K voprosu o strukture zaryazhennoy poverkhnosti zhidkogo geliya [Concerning the structure of a charged surface of liquid helium]. *Pis'ma v ZhETF – JETP Letters*, 1973, vol. 18, pp. 119-122.
5. Grigor'ev A., Shiryaeva S., Koromyslova V., Belonozhko D. Capillary oscillations and Tonks-Frenkel instability of a liquid layer of finite thickness. *Tech. Phys.*, 1997, vol. 42, pp. 877-883. <https://doi.org/10.1134/1.1258749>
6. Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O. Criterion of instability of a charged drop in an electrostatic suspension. *Surf. Engin. Appl. Electrochem.*, 2015, vol. 51. pp. 246-252. <https://doi.org/10.3103/S1068375515030084>
7. Faraday M. XVII. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Phil. Trans. R. Soc.*, 1831, vol. 121, pp. 299-340. <https://doi.org/10.1098/rstl.1831.0018>
8. Lord Rayleigh D.C.L. F.R.S. VII. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. *Phil. Mag.*, 1883, vol. 16(97), pp. 50-58. <https://doi.org/10.1080/14786448308627392>

9. Rayleigh J.W.S.B. *The theory of sound. Vol. I.* London: Macmillan and Co., 1894. 496 p.
10. Sorokin V.I. The effects of fountain formation at the surface of a vertically oscillating liquid. *Soviet Physics, Acoustic*, 1957, vol. 3, pp. 281-291.
11. Cherepanov A.A. Vliyaniye peremennykh vneshnikh poley na neustoychivost' Releya-Teylora [*Influence of alternating fields on the Rayleigh-Taylor instability*]. Nekotoryye zadachi ustoychivosti poverkhnosti zhidkosti [Some problems of fluid surface stability]. Sverdlovsk, 1984. Pp. 29-53.
12. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. *Dinamika poverkhnostey razdela v vibratsionnykh polyakh* [Dynamics of fluid interfaces in vibrational fields]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 216 p.
13. Gadikota G., Chatain D., Amiroudine S., Lyubimova T., Beysens D. Faraday instability in a near-critical fluid under weightlessness. *Phys. Rev. E*, 2014, vol. 48, 013022. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.013022>
14. Sadilov E.S. Influence of the electric field on parametric instability of two-layer system. *Microgravity Sci. Technol.*, 2018, vol. 30, pp. 361-367. <https://doi.org/10.1007/s12217-018-9608-7>
15. Sadilov E.S. Joint influence of electric field and vibrations on the instability of fluid dielectric layer with free boundary. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1809, 012027. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1809/1/012027>
16. Cochran J. *A new approach to singular perturbation problems*. PhD Dissertation, Stanford, Stanford University, 1962. 226 p.
17. Mahony J.J. An expansion method for singular perturbation problems. *J. Aust. Math. Soc.*, 1962, vol. 2, pp. 440-463. <https://doi.org/10.1017/S1446788700027452>
18. Nayfeh A.H. *Introduction to perturbation techniques*. Wiley, 1993. 533 p.
19. Sadilov E.S. The effect of normal vibrations on the stability of a three-layer fluid system in zero gravity. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2019, vol. 7, pp. 227-338. <https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2019030977>

Поступила в редакцию 20.05.2022; после доработки 21.08.2022; принята к опубликованию 26.08.2022