

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.3.28](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.3.28)
УДК 532.526.4

КАСКАДНАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Д.Г. Селуков¹, Р.А. Степанов^{1,2}

¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

²Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

Задача численного моделирования развитых турбулентных течений обычно сводится к формулировке того или иного замыкания уравнений среднего поля. Универсальное решение этого вопроса вряд ли существует, тем не менее разработка подхода исходя из общих принципов остается актуальной темой исследований. В данной статье предлагается модель, в которой турбулентная вязкость описывается через характеристики пульсаций поля скорости, рассчитываемые на основе каскадных моделей турбулентности. Эти модели корректно воспроизводят распределение энергии турбулентности по масштабам и спектральные потоки энергии для гидродинамических течений различной физической природы. При построении каскадных моделей используются такие свойства полной системы уравнений, как симметрия и соблюдение законов сохранения, а также приближение однородной и изотропной турбулентности. Феноменологические соотношения, предполагающие конкретные спектральные законы, не привлекаются. В разработанном подходе сделана попытка определить турбулентную вязкость при сохранении универсальности и гибкости каскадных моделей. Выполненная математическая постановка является совокупностью моделей крупного (уравнение среднего поля), мелкого (каскадная модель) масштабов и замыкающих соотношений. В модели осуществлено энергетическое сопряжение переменных различных масштабов, которое обеспечивает нелинейную связь полей разного уровня. Учет влияния среднего поля на распределение энергии турбулентных пульсаций – отличительная черта предлагаемого подхода. Получены численные решения для течения в плоском бесконечном канале при различных числах Рейнольдса. Показано, что результаты согласуются с современными представлениями о логарифмическом профиле поля скорости в пристеночном слое. Обоснован физический смысл параметров модели. Найдены асимптотические решения, качественно соответствующие модели Прандтля.

Ключевые слова: слова: численное моделирование турбулентности, каскадные модели, пограничный слой

SHELL MODEL OF TURBULENT VISCOSITY FOR THE BOUNDARY LAYER

D.G. Selukov¹ and R.A. Stepanov^{1,2}

¹Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

²Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

The problem of numerical simulation of developed turbulent flows is usually reduced to the choice of one or another closure of the mean field equations. It is hardly possible to find a universal solution to this issue; nevertheless, the development of an approach based on general principles remains an active research topic. This paper proposes a model of turbulent viscosity described in terms of the characteristics of velocity field fluctuations calculated on the basis of shell models. These models reproduce correctly the scale distribution of the turbulent energy and the spectral energy fluxes for hydrodynamic flows of various physical nature. Shell models are constructed using symmetry properties and conservation laws of the complete system of equations, as well as an assumption on homogeneity and isotropy of turbulence. Phenomenological relations implying specific spectral laws are not involved. In the developed approach, we did an attempt to determine the turbulent viscosity, while maintaining the universality and flexibility of shell models. The resulting mathematical formulation is a set of models for large (mean field equation) and small (cascade model) scales, as well as closing relations. The model implements energy conjugation of variables of different scales, which provides a nonlinear relation of fields at different levels. Taking into account the influence of the mean field on the energy distribution of turbulent fluctuations is a distinctive feature of the proposed approach. Numerical solutions are obtained for the flow in a plane infinite channel at various Reynolds numbers. It is shown that the obtained results are consistent with modern concepts of the logarithmic profile of the velocity field in the boundary layer. The physical meaning of model parameters is substantiated. Asymptotic solutions that qualitatively correspond to the Prandtl model are found.

Key words: numerical simulation of turbulence, shell models, boundary layer

1. Введение

Задача моделирования турбулентных газо- и гидродинамических течений востребована в различных областях науки и техники. Использование прямого численного моделирования уравнений движения жидкости или газа при больших числах Рейнольдса ограничено вычислительными ресурсами и по сути дела избыточно в случаях, когда практический интерес представляет расчет только среднего поля. Теория турбулентности уже объединяет широкий набор подходов и методов описания турбулентности [1], многие из которых влились из смежных областей нелинейной физики и вычислительной математики. Возможности современных компьютерных вычислений и экспериментальных измерений позволяют совершенствовать теоретические модели и численные алгоритмы. Их эффективное комбинирование для моделирования турбулентного пограничного слоя показывает, что средняя скорость, напряжения Рейнольдса, а также качественные и количественные характеристики когерентных структур могут быть хорошо воспроизведены при разумных вычислительных затратах [2]. Экспериментальные наблюдения

обычно служат для калибровки соотношений замыкания и повышения точности вычислений. Применение стратегий машинного обучения на данных численного моделирования и лабораторных измерений дает новые перспективы для классической проблемы математического описания турбулентности [3].

При всем многообразии подходов к моделированию турбулентных течений общим местом остается разложение полей на средние и пульсационные составляющие и вывод уравнений, определяющих их совместную эволюцию. В уравнениях среднего поля скорости \mathbf{V} неизбежно появляется осредненный вклад турбулентных пульсаций \mathbf{v}' в виде тензора напряжений Рейнольдса $\boldsymbol{\tau} = \langle \mathbf{v}'\mathbf{v}' \rangle$. Поиск выражений $\boldsymbol{\tau}$ через среднее поле сводится к известной проблеме замыкания, которая пока что не имеет универсального решения. Введение турбулентности в математическую постановку основывается на том или ином выражении тензора Рейнольдса через модельные представления о турбулентном поле. В простейшем случае для несжимаемой жидкости дивергентная часть тензора напряжения Рейнольдса зависит от тензора деформации поля средней скорости (то есть принимается гипотеза Буссинеска). При этом влияние турбулентных пульсаций вводится через турбулентную вязкость ν_t , которая не связана с параметрами жидкости:

$$\boldsymbol{\tau} = \langle \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' \rangle \mathbf{I} / 3 - \nu_t (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T), \quad (1)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор. Для вычисления ν_t необходимо знать статистические свойства \mathbf{v}' . Начиная с некоторого масштаба, спектр пульсаций может быть представлен спектральным законом Колмогорова « $-5/3$ »

$$E(k) = C_K D^{2/3} k^{-5/3}, \quad (2)$$

который хорошо работает в условиях однородности и изотропности (здесь $E(k)$ — спектральная плотность энергии турбулентных пульсаций с волновым числом k , C_K — константа Колмогорова, D — скорость диссипации энергии, которая в инерционном интервале считается не зависящей от волнового числа). Однако соотношение скорости диссипации и энергии на турбулентном масштабе может стать существенно другим под действием дополнительных факторов, таких как магнитное поле, глобальное вращение или силы плавучести. Управляющие параметры, отвечающие за эти факторы, также могут меняться на много порядков. Поэтому в общем случае необходимо решить задачу нахождения $E(k)$ и прибегнуть к выражению для турбулентной вязкости [4]:

$$\nu_t : c_t \int_{k_0}^{\infty} k^{-3/2} E(k)^{1/2} dk. \quad (3)$$

Применение каскадных моделей турбулентности представляется универсальным и относительно простым подходом, позволяющим получить спектральные распределения энергии в инерционном и диссипативном диапазоне масштабов для различных турбулентных систем. Основная идея каскадных моделей турбулентности состоит в построении цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений относительно некоторых коллективных переменных, которые описывают динамику мод Фурье в некотором интервале изменения волнового числа. Наиболее привлекательная сторона использования моделей этого вида заключается в том, что при малом числе неизвестных удается ввести нелинейные взаимодействия турбулентных структур различных масштабов с привлечением лишь базовых свойств исходных уравнений гидродинамики, а именно типа нелинейности и законов сохранения. В результате становится возможным численное моделирование каскадного процесса спектрального переноса энергии во всевозможных физических конфигурациях без ввода какой-либо феноменологической связи типа (2).

Первые варианты каскадных моделей гидродинамики предложены еще в 70-х годах прошлого века (см. [5–9]) и включали в себя системы малой размерности, воспроизводящие главные особенности турбулентности. Можно выделить три наиболее известных каскадных модели, в которых описывались локальные взаимодействия двух соседних оболочек [8], или трех ближайших оболочек, как в модели, называемой GOY [7, 10], или в модели Sabra [11–13]. Еще более усложненная модель строится в [14] с помощью вейвлет-преобразования. Развитие аппарата каскадных моделей происходило параллельно с обнаружением различных «тонких» свойств турбулентности, например, аномального скейлинга структурных функций, характеризующего перемежающуюся динамику каскадных процессов [15–18]. Позднее особое внимание обращалось на каскадные модели магнитогидродинамической турбулентности [19], которая выделяется разнообразием возможных решений и их приложениями к задачам гео- и астрофизики.

Идея использования каскадных моделей для оценки турбулентной вязкости ранее предлагалась в ряде работ [20–23]. В одной из работ этого плана [24] представлен способ построения двухмасштабной модели для турбулентного магнитного поля во вращающемся диске. Модель включает уравнение среднего магнитного поля и каскадную модель МГД-турбулентности, позволяющую вычислить коэффициенты турбулентного переноса в уравнении среднего поля. В работе [25] предложена модель пристеночных турбулентных течений. Область вблизи стенки разбивается на зоны, чем дальше от стенки, тем больше размер зоны. По сути, введено разложение поля скорости по иерархическому вейвлет-базису. Роль каскадных моделей в названных публикациях заключалась в учете взаимодействий пульсаций скорости течения в его разных по величине зонах с различными масштабами турбулентности и вычислении плотности турбулентной энергии. Этот подход получил название «мультизональная каскадная (оболочечная) модель».

Цель данной работы состоит в построении двухуровневой модели пристеночного пограничного слоя, непосредственно связывающей конечно-разностные уравнения среднего поля и уравнения каскадных моделей турбулентности, записываемых для каждого узла сетки. При этом желательно сохранить простоту построения, имея в виду дальнейшую перспективу обобщения модели на случай спиральной турбулентности. Свойства спиральной турбулентности и связанные с ними гидродинамические эффекты, в первую очередь обратный каскад энергии, привлекают внимание в актуальных исследованиях [26–29].

2. Двухуровневая модель турбулентного пограничного слоя

В двухуровневой модели крупномасштабный уровень описывает эволюцию средних полей. Рассмотрим течение в плоском бесконечном канале толщиной $2h$ с границами, которым перпендикулярна ось z , под действием однородного градиента давления, действующего вдоль оси канала x . Уравнение Навье–Стокса для средней по величине x -компоненты поля скорости $V(t, z)$ преобразуем к безразмерному виду:

$$\partial_t V(t, z) = -p + \partial_z \left((\text{Re}^{-1} + \nu_t(t, z)) \partial_z V(t, z) \right), \quad (4)$$

где $\text{Re} = hV_c/\nu$ — число Рейнольдса, p — градиент давления, $\nu_t(t, z)$ — турбулентная вязкость, заданная в единицах hV_c (V_c — характерная скорость в середине канала).

Мелкомасштабный уровень модели отвечает за описание мелкомасштабной структуры течения. В турбулентном течении энергия пульсаций поля скорости неоднородно распределена как в физическом, так и в спектральном пространстве. Поэтому спектральную плотность энергии пульсации скорости полагаем функцией z , которая должна удовлетворять уравнению баланса:

$$\partial_t E(t, z, k) = T(t, z, k) - D(t, z, k) + I(t, z, k), \quad (5)$$

где T — слагаемое, отвечающее за обмен энергией между масштабам, соответствующим волновому числу k , с другими масштабами за счет их нелинейных взаимодействий, D — спектральная плотность скорости диссипации энергии, I — спектральная плотность притока энергии, «стекающей» из среднего поля.

Уравнения двух уровней модели (4) и (5) расщеплены не полностью. Переменные мелкомасштабного уровня входят в (4) через $\nu_t(t, z)$, а переменные крупномасштабного уровня — в (5) через $I(t, z, k)$. Можно использовать физические соображения, чтобы связать уровни модели. Для крупномасштабной части диапазона масштабов L закон сохранения энергии означает, что

$$\int_{k < L} I(t, z, k') dk' = \nu_t(t, z) (\partial_z V(t, z))^2. \quad (6)$$

Связь (6) и выражение для турбулентной вязкости (3) являются определяющими соотношениями, обеспечивающими сопряжение двух уровней модели.

Поскольку далее все полевые переменные зависят от времени, соответствующий аргумент опускается.

3. Численная модель

В данном разделе введем дискретный аналог уравнений, входящих в модель, и рассмотрим расчетную схему для численного моделирования.

3.1. Дискретизация уравнений среднего поля

В силу симметрии задачи относительно центра канала уравнение (4) решаем для одной половины. Разобьем диапазон изменения пространственной переменной $z \in [0; 1]$ (граница $z = 0$ соответствует стенке, а $z = 1$ — середине канала) на M интервалов. В пристеночной области будем сгущать сетку так, что координаты ее узлов изменяются по степенному закону:

$$z_m = \Delta z_{\min} 2^{m-1}, \quad 1 \leq m \leq M_c, \quad (7)$$

где Δz_{\min} — минимальный шаг у стенки, M_c — число интервалов до достижения максимального шага Δz_{\max} , которое определяется как

$$M_c = \lceil \log_2 \frac{\Delta z_{\max}}{\Delta z_{\min}} \rceil + 1. \quad (8)$$

Для узлов z_m при $m > M_c$ используем постоянный шаг сетки размером Δz_{\max} вплоть до $z = 1$. Таким образом, полное число интервалов равняется

$$M = M_c + \lfloor \frac{1 - z_{M_c}}{\Delta z_{\max}} \rfloor. \quad (9)$$

Тогда длина произвольного интервала вычисляется по формуле:

$$\Delta z_m = z_m - z_{m-1}, \quad 1 \leq m \leq M, \quad (10)$$

с учетом того, что $z_0 = 0$.

Введем в интервале m значение средней скорости V_m :

$$V_m \equiv \Delta z_m^{-1} \int_{z_{m-1}}^{z_m} V(z) dz, \quad (11)$$

и запишем конечно-разностный аналог уравнения (4) в виде:

$$\partial_t V_m = -p + \Delta z_m^{-1} (F_m - F_{m-1}). \quad (12)$$

Здесь поток импульса на границе интервала m определяется как

$$F_m \equiv (\text{Re}^{-1} + \nu_{tm}) \partial_z V_m. \quad (13)$$

Предлагаемая схема расчета является консервативной, так как интегральное изменение импульса зависит от потоков на границах. Конечно-разностная аппроксимация пространственной производной скорости первого порядка точности на границах интервалов m и $m+1$ имеет вид:

$$\partial_z V_m = \frac{2(V_{m+1} - V_m)}{\Delta z_{m+1} + \Delta z_m} + O(\max(\Delta z_m, \Delta z_{m+1})). \quad (14)$$

3.2. Дискретизация уравнений спектрального переноса

Аппарат каскадных моделей турбулентности представляется подходящей основой для описания эволюции спектральной плотности энергии пульсаций. В рамках этого подхода трехмерное пространство волновых векторов разобьем на сферические оболочки и применим гипотезу об однородной и изотропной турбулентности. Введем одну коллективную переменную, отвечающую за полную энергию всех пульсаций из диапазона волновых чисел заданной оболочки. Также примем гипотезу об изотропности, но при этом будем рассматривать случай локальной однородности, то есть описывать турбулентность независимой каскадной моделью в окрестности каждого узла сетки z_m .

Будем считать, что n -я оболочка каскадной модели в точке z_m содержит все пульсации в диапазоне волновых чисел $[k_{m,n-1/2}; k_{m,n+1/2}]$, энергия которых есть

$$E_{m,n} = \Delta z_m \int_{k_{m,n-1/2}}^{k_{m,n+1/2}} E(z_m, k) dk, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (15)$$

Здесь: $E(z_m, k)$ — плотность энергии в спектральном пространстве при волновом числе k и в физическом пространстве на расстоянии от стенки z_m ; N — число оболочек. Разбиение волновых чисел $k_{m,n} = \kappa z_m^{-1} \lambda^n$ производим с учетом того, что по мере приближения к стенке максимально возможный масштаб пульсаций ограничен расстоянием до стенки. Параметр модели κ должен подчиняться соображениям сопряжения с пространственной сеткой, где λ — параметр разбиения. Число оболочек N берем таким, чтобы масштаб, соответствующий волновому числу $k_{m,N}$, был заведомо меньше диссипативного масштаба $\propto \text{Re}^{-3/4}$.

Каскадные переменные $U_{m,n}$ принимают комплексные значения, которые связаны с энергией как

$$E_{m,n} = \Delta z_m |U_{m,n}|^2 / 2. \quad (16)$$

Эволюционное уравнение для каскадной переменной может быть представлено в общем виде:

$$\partial_t U_{m,n} = W_{m,n}(U) - \text{Re}^{-1} k_{m,n}^2 U_{m,n} + f_{m,n}, \quad (17)$$

где $W_{m,n}$ — билинейная форма, отвечающая за описание нелинейных взаимодействий различных масштабов течения, приводящих к каскадным процессам (именно билинейная форма отличает одну каскадную модель от другой, конкретный выбор этой формы будет представлен в разделе расчетов), $f_{m,n}$ — спектральная сила, обеспечивающая приток энергии в каскадную модель (далее будем называть ее турбулентной силой).

3.3. Дискретизация соотношений связи

Турбулентная вязкость (3) может быть выражена через каскадные переменные $U_{m,n}$ следующим образом:

$$\nu_{tm} = c_t \sqrt{\ln \lambda} \sum_{n=1}^{N_t} k_{m,n}^{-1} |U_{m,n}|, \quad (18)$$

где c_t — параметр модели, N_t — число «вязких» оболочек, которое задает степень перекрытия масштабов крупномасштабной сетки и каскадной модели.

Обратное влияние среднего поля на эволюцию турбулентной составляющей поля зададим как баланс энергии (6). Скорость притока энергии в каскадную модель из крупного масштаба в окрестности z_m , приходящегося на n -ю оболочку, должна быть равна скорости диссипации энергии среднего поля за счет турбулентности:

$$(f_{m,n} U_{m,n}^* + f_{m,n}^* U_{m,n}) / 2 = c_t \sqrt{\ln \lambda} k_{m,n}^{-1} |U_{m,n}| (\partial_z V_m)^2. \quad (19)$$

Тогда выражение для турбулентной силы, обеспечивающей это равенство, примет вид:

$$f_{m,n} = \begin{cases} c_t \sqrt{\ln \lambda} k_{m,n}^{-1} \frac{U_{m,n}}{|U_{m,n}|} (\partial_z V_m)^2, & n \leq N_t, \\ 0, & n > N_t. \end{cases} \quad (20)$$

Отметим, что в центрах ячеек пространственной сетки задается среднее поле, на их границах — амплитуда пульсаций.

4. Результаты вычислений

В этом разделе продемонстрируем численные результаты применения предложенной модели турбулентной вязкости с акцентом на масштабирование профиля средней скорости и энергии турбулентности при различных числах Рейнольдса. Также проанализируем характер изменения спектральных свойств турбулентности по мере удаления от стенки.

Для численной реализации используем каскадную модель, получившую в последнее время широкое применение в исследованиях. Ее отличительная черта заключается в том, что модель позволяет корректно описывать одновременно каскад как энергии, так и спиральности [29]. Ее билинейная форма имеет вид:

$$W_n(U) = ik_n \left(U_{n-1}^2 - U_{n-1}^{*2} + \lambda U_n^* (U_{n+1} - U_{n+1}^*) - \lambda^2 U_n (U_{n+1} + U_{n+1}^*) \right) / 2 + \\ + ik_n \gamma \left(U_n (U_{n-1} + U_{n-1}^*) + \lambda U_n^* (U_{n-1}^* - U_{n-1}) - \lambda^2 (U_{n+1}^2 + U_{n+1}^{*2}) \right) / 2, \quad (21)$$

где параметр модели равен $\gamma = \lambda^{-5/2}$, а переменные за пределами расчетного интервала фиксируются: $U_{0,m} = 0$ и $U_{N+1,m} = 0$.

Для выполнения граничных условий симметрии поля скорости на середине канала и прилипания на стенке значения среднего поля в соответствующих узлах сетки должны быть следующими:

$$V_0 = 0, \quad V_M = V_{M-1}. \quad (22)$$

При этом необходимо формально считать, что $\Delta z_0 = 0$ и $\Delta z_{M+1} = \Delta z_M$. Тогда для турбулентной вязкости на границах исследуемой области будут справедливы равенства: $v_{i0} = 0$ и $v_{iM} = 0$.

Все численные расчеты для полученной дискретной модели течения Пуазейля произведены при следующих исходных данных: $p = -1$; параметры сетки, зависящие от задаваемого значения числа Рейнольдса, $\delta'_{\min} = 10^{-1} \text{Re}^{-1}$, $\delta'_{\max} = 0.1$; параметр разбиения оболочек $\lambda = 1.7555$; количество оболочек каскадных моделей, обеспечивающее покрытие диссипативного масштаба для всего рассматриваемого диапазона чисел Рейнольдса, $N = 17$; число ячеек, в которых действует турбулентная сила, $N_t = 2$. Эволюционные уравнения интегрировались неявным методом Рунге–Кутты девятого порядка в пакете Wolfram Mathematica 12. Расчеты проводились до установления в турбулентном течении квазистационарного состояния.

Первое, что представляет интерес в характере полученных решений, это профили средней скорости. Известно [30], что для турбулентных течений в области максимального сдвига профиль скорости имеет логарифмическую зависимость от расстояния до стенки:

$$V(z^+) = q \log(z^+) + \tilde{V}, \quad (23)$$

где $z^+ = z \text{Re}$ — вспомогательная переменная, q и \tilde{V} — параметры профиля скорости в логарифмических координатах.

На рисунке 1 показаны распределения среднего поля скорости для нескольких значений числа Рейнольдса из диапазона $\text{Re} \in [10, 10^5]$ при параметрах модели $c_t = 1$ и $\kappa = 1$. Видно, что выраженный логарифмический профиль формируется при $\text{Re} = 10^5$. В области значений $1 \leq z^+ \leq 10$ происходит переход к вязкому подслою. При больших z^+ профиль скорости отклоняется от логарифмического вида в силу выбранного граничного условия (22).

Развиваемая модель турбулентной вязкости позволяет исследовать структуру турбулентного поля на разных уровнях. Так, на мелкомасштабном уровне модели можно наблюдать изменение характера каскадных процессов по мере приближения к стенке. На рисунке 2 показана временная эволюция энергии турбулентности. Статистически стационарные квазипериодические колебания ярко выражены в области турбулентного слоя.

Фиксируя значение z и осредняя по времени, получим спектральные распределения энергии (Рис. 3). Формирование каскадного переноса энергии проявляется в наличии на графиках инерционного интервала участка спектра с законом $k^{-2/3}$, что соответствует закону « $-5/3$ » для спектральной плотности энергии.

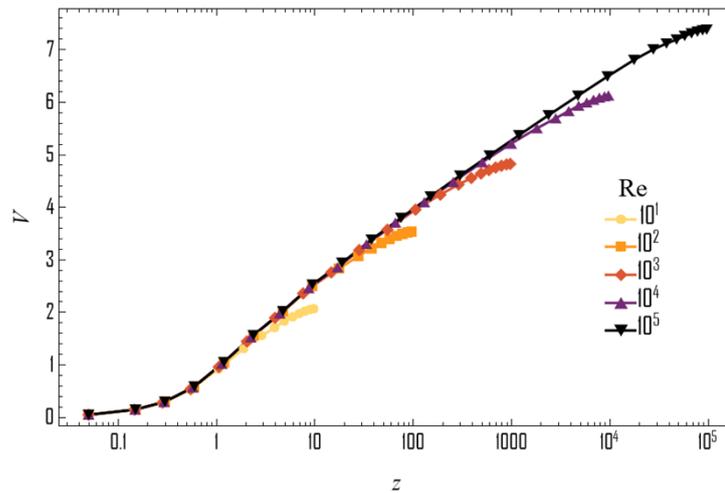


Рис. 1. Профили среднего поля скорости при различных значениях числа Рейнольдса и фиксированных параметрах модели $c_t = 1$ и $\kappa = 1$

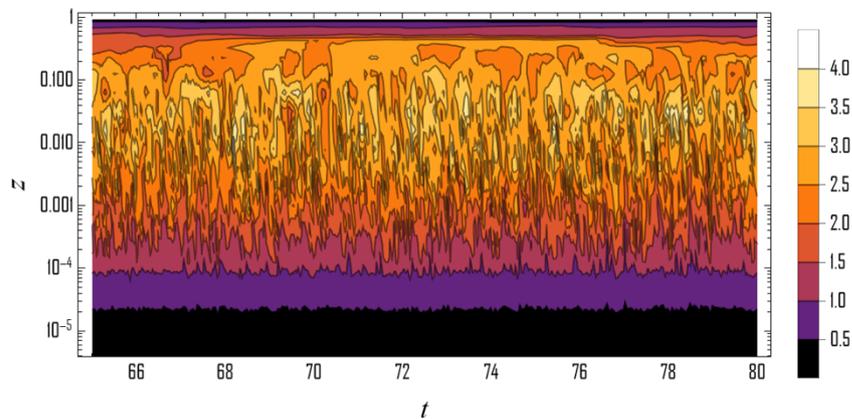


Рис. 2. Зависимость энергии пульсаций от времени и расстояния до стенки при фиксированном $Re = 10^5$

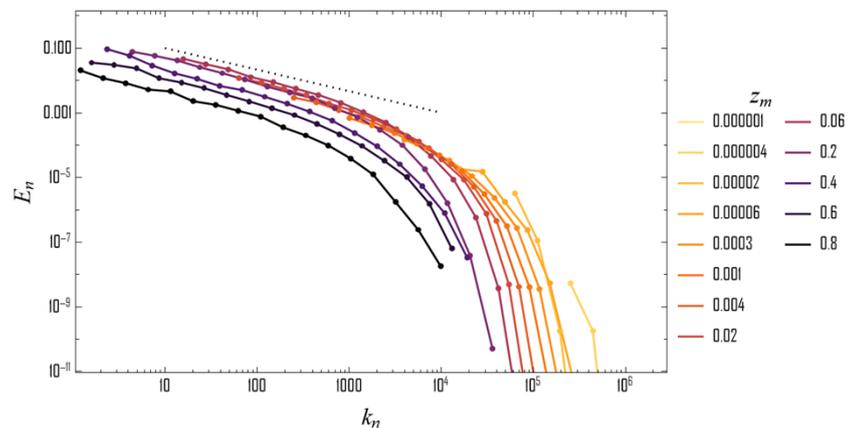


Рис. 3. Спектры пульсаций при $Re = 10^5$ на разных расстояниях до стенки z_m ; пунктирная линия соответствует закону $E_n \sim k_n^{-2/3}$

Интерес представляет распределение турбулентной вязкости и скорости диссипации среднего поля, так как они играют ключевую роль в сопряжении уровней модели. Профили турбулентной вязкости показаны на рисунке 4а. Видно, что имеется ламинарный слой с пренебрежимо малой турбулентной вязкостью, которая нарастает при отдалении от стенки. Такое поведение ярко выражено при больших значениях числа Рейнольдса. Для течений с малыми Re турбулентная вязкость не значительно превышает значение кинематической вязкости. Рисунок 4б демонстрирует скорость диссипации энергии среднего поля, которая имеет максимум при $z^+ \approx 1$ и достаточно строго нормируется по числу Рейнольдса.

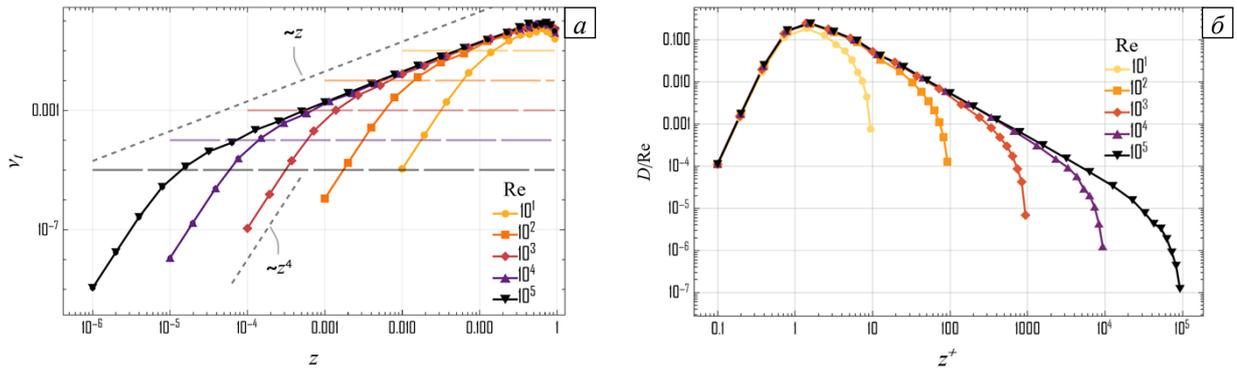


Рис. 4. Пространственные распределения турбулентной вязкости (а) и скорости диссипации турбулентной энергии (б) для различных чисел Рейнольдса; штриховыми линиями обозначены соответствующие уровни вязкости ν

5. Связь констант и параметров каскадной модели турбулентной вязкости и модели Прандтля

В данном разделе проводится сравнение разработанной каскадной модели турбулентной вязкости с хорошо известной моделью Прандтля, основанной на идее о пути смешивания [1]:

$$v_t^p(z) = c_p z^2 |\partial_z V|, \tag{24}$$

c_p — константа Прандтля.

Для турбулентной вязкости, отнесенной к некоторой оболочке, в окрестности z_m (далее индекс m опускается для компактности записи формул) из (3) после подстановки соответствующих пределов волновых чисел получим выражение:

$$v_{tm} : c_t \int_{k_{n-1/2}}^{k_{n+1/2}} k^{-3/2} E^{1/2} dk : c_t \ln \lambda k_n^{-1/2} E^{1/2}. \tag{25}$$

Используя для выражения (25) закон Колмогорова (2) и суммируя вклады в турбулентную вязкость каждой оболочки (считаем, что $v_t = \sum_n v_{tm}$), а также учитывая выражение для диссипации из правой части уравнения (6), приходим к математической формулировке теоретического предсказания турбулентной вязкости для настоящей модели:

$$v_t(z) = (c_t \alpha_\lambda \sqrt{C_K})^{3/2} \kappa^{-2} z^2 |\partial_z V|, \tag{26}$$

где $\alpha_\lambda = \ln \lambda \sum_{n=1}^{N_t} \lambda^{-4(n-1)/3}$.

Выражение (26) эквивалентно модели Прандтля (24) с константой

$$c_p = (c_t \alpha_\lambda \sqrt{C_K})^{3/2} \kappa^{-2}. \tag{27}$$

Найдем связь c_p с параметром q логарифмического профиля (23). Рассмотрим уравнение среднего поля без кинематической вязкости (пренебрегаем ν):

$$\partial_t V(z) = -p + \partial_z (v_t^p(z) \partial_z V(z)). \tag{28}$$

Из уравнений (24) и (28) аналитическое решение для поля скорости с условием $\partial_t V(z=1)$ имеет вид:

$$V(z) = 2\sqrt{-p/c_p} \left(\sqrt{1-z} - \text{arth}(\sqrt{1-z}) + C \right). \tag{29}$$

Разложение этого решения в ряд Тейлора около нуля дает выражение:

$$V(z) = \sqrt{-p/c_p} \left(\log z + (2 - 2 \log 2 + C) - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{16} - \frac{z^3}{48} - \frac{5z^4}{512} + o(z^5) \right), \quad (30)$$

в котором содержится логарифмическая составляющая. Получается, что около стенки имеем $q: c_p^{-1/2}$, а с использованием для каскадных моделей соотношения (27) формула принимает вид:

$$q: (c_t \sqrt{C_K})^{-3/4} \kappa. \quad (31)$$

Вблизи стенки есть слой, где турбулентная вязкость мала по сравнению с кинематической, так как турбулентные вихри ограничены в своем масштабе расстоянием до стенки. Определим толщину этого вязкого слоя через расстояние Δz_v , на котором турбулентная вязкость равна кинематической:

$$v_t(\Delta z_v) = \text{Re}^{-1}. \quad (32)$$

Внутри вязкого слоя вследствие малой турбулентной вязкости мал и турбулентный поток. Это подтверждается результатами расчетов (см. Рис. 3). Будем считать, что большая часть притекающей в каскадные оболочки энергии сразу же диссипирует, то есть

$$v_{tm} |\partial V_m|^2 = \text{Re}^{-1} k_{m,1}^2 |U_{m,1}|^2. \quad (33)$$

Подставляя в (33) выражение (18), получаем оценку для турбулентной вязкости в пристеночной области:

$$v_t = c_t^2 \kappa^{-4} \text{Re}(\partial_z V)^2. \quad (34)$$

Скейлинг турбулентной вязкости представляется в каскадной модели у стенки как $v_t(z): z^4$, а в модели Прандтля, в соответствии с (24), — зависимостью вида $v_t^p(z): z^2$. Для области с логарифмическим профилем скорости масштабная инвариантность для обеих моделей составляет $v_t(z): z$. Окончательно для зависимости толщины вязкого пограничного слоя имеем выражение:

$$\Delta z_v: \kappa (c_t \text{Re} |\partial_z V|)^{-1/2}. \quad (35)$$

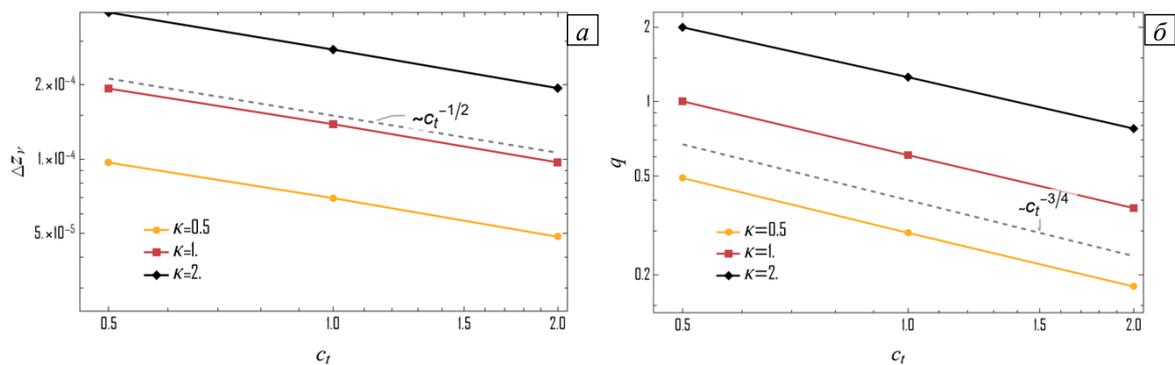


Рис. 5. Зависимости от c_t толщины вязкого слоя (а) и наклона логарифмического профиля (б) для $\text{Re} = 10^4$ при различных значениях параметра каскадной модели κ

Проведен ряд численных расчетов для $\text{Re} = 10^5$ и всех возможных пар параметров модели: $\kappa \in \{0.5, 1, 2\}$, $c_t \in \{0.5, 1, 2\}$. Для каждого расчета вычислен коэффициент q в соответствии с формулой (23) и толщина пограничного слоя согласно определению (32). На рисунке 5 показаны рассчитанные зависимости толщины вязкого пограничного слоя и наклона логарифмического профиля скорости от параметра модели c_t при различных фиксированных значениях κ . Видно, что численно выявленные степенные закономерности хорошо согласуются с теоретическими оценками (31) и (35).

6. Обсуждение результатов и выводы

Рассмотренная задача течения с образованием турбулентного пограничного слоя при решении в полном объеме включает учет анизотропии и неоднородности свойств пульсаций поля скорости. Анизотропия возникает вследствие преимущественного движения жидкости вдоль канала, а неоднородность — наличия твердой стенки с условием прилипания. С использованием каскадно-сеточного подхода построена модель, в которой неоднородность учитывается за счет введения пространственной зависимости каскадных переменных так, что описываемая ими турбулентность остается локально однородной. Это достигается путем увеличения числа оболочек N до такого количества, что масштаб неоднородности среднего поля становится много больше масштабов, представляемых каскадными переменными. Строгий учет анизотропии требует разработки новых анизотропных каскадных моделей. Успешные попытки моделирования анизотропной турбулентности уже имели место, а именно рассмотрено влияние на турбулентное течение электропроводящей жидкости силы Кориолиса [31, 32], силы плавучести [33], а также внешнего магнитного поля [34].

Полученные результаты показывают, что существующие каскадные модели могут быть применены как для изучения режима развитой турбулентности, так и при переходе течения к условиям, когда диссипация начинает преобладать над нелинейностью. При отсутствии или низком уровне притока энергии каскадная модель вырождается — каскад не формируется. Помимо этого, работоспособность каскадной модели может ухудшаться и при наличии притока энергии, но уже как следствие малости масштаба, в который осуществляется приток. Для текущей постановки задачи анализа каскадной турбулентной вязкости поток энергии в каскадных моделях обуславливается градиентом среднего поля. На рисунке 4 можно видеть слабо наполненные энергией каскадные модели около стенки, несмотря на высокий градиент скорости в пристеночной области течений. Это обусловлено ограничением масштабов турбулентных пульсаций расстоянием до стенки. Понятно, что эти два фактора могут быть включены в локальное число Рейнольдса, зависящее от z . Критическое значение этого числа будет определять наличие или отсутствие каскадного процесса.

Каскадная модель, расположенная в самом центре потока, вырождается в силу нулевого градиента средней скорости. В реальных течениях имеется механизм переноса энергии турбулентности по пространству, так что пульсации присутствуют и при локально нулевом сдвиге средней скорости. Тем не менее получены качественно согласующиеся с экспериментами графики поля скорости. В данной работе представляется важным описание пристеночного слоя и логарифмического поля скорости, а вопрос о применимости каскадных моделей с учетом всех факторов требует дальнейшего исследования.

Найден теоретический профиль турбулентной вязкости (26), результаты вычисления с использованием которого соответствует результатам по модели Прандтля. Показано, что предложенная модель по сути является двухпараметрической и позволяет независимо контролировать наклон логарифмического профиля среднего поля скорости и толщину вязкого подслоя. Модель Прандтля содержит лишь один параметр, так что упомянутые характеристики этой модели оказываются связанными.

Еще одним преимуществом предложенной модели можно считать физичность выполненного сопережения крупномасштабного и мелкомасштабного уровней. Вся феноменология в каскадных моделях перенесена в адекватное воспроизведение статистических свойств турбулентности. Учитывая гибкость и широкую применимость каскадных моделей, можно надеяться на относительно эффективный переход к таким из них, которые будут способны описать турбулентность гидродинамических течений в присутствии дополнительных физических полей.

С вычислительной точки зрения проведение расчетов на основе предложенной модели требует значительных вычислительных ресурсов. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, на каждый узел пространственной сетки необходимо вводить десятки дополнительных (каскадных) переменных. Во-вторых, шаг интегрирования всей системы уравнений ограничен сверху минимальным характерным временем эволюции турбулентного спектра. Это существенный недостаток предлагаемого подхода, и в практическом плане он будет проигрывать ставшим уже традиционными в численном моделировании турбулентности подходам RANS и LES. Однако в задачах расчета турбулентного пограничного слоя эти подходы могут давать значительные систематические ошибки, например в результате эффекта, называемого Log-Layer Mismatch (LLM) [35]. LLM связан с тем, что не удается реализовать гладкий переход от области с разрешенными и неразрешенными масштабами турбулентности. Путем тщательного сравнения LES с экспериментальными измерениями и прямым численным моделированием за счет последних можно добавлять «заплаты», снижающие влияние LLM [36]. При решении задач, в которых априори не известны спектральные свойства турбулентности, предлагаемая в данной работе полуэмпирическая модель, разрешающая произвольный нестационарный спектр турбулентности, будет давать более адекватный результат.

Авторы благодарны рецензенту за полезные комментарии относительно применимости предложенной модели в практических расчетах.

Литература

1. Фрик П.Г. Турбулентность: подходы и модели. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. 332 с.
2. Tazraei P., Girmaji S.S. Scale-resolving simulations of turbulence: Equilibrium boundary layer analysis leading to near-wall closure modeling // *Phys. Rev. Fluids*. 2019. Vol. 4. 104607. <http://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.104607>
3. Duraisamy K., Iaccarino G., Xiao H. Turbulence modeling in the age of data // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2019. Vol. 51. P. 357-377. <http://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010518-040547>
4. Yokoi N. Turbulence, transport and reconnection // *Topics in magnetohydrodynamic topology, reconnection and stability theory* / Ed. D. MacTaggart, A. Hillier. Springer, 2020. P. 177-265. http://doi.org/10.1007/978-3-030-16343-3_6
5. Обухов А.М. О некоторых общих характеристиках уравнений динамики атмосферы // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1971. Т. 7, № 7. С. 695-704.
6. Lorenz E.N. Low order models representing realizations of turbulence // *J. Fluid Mech.* 1972. Vol. 55. P. 545-563. <http://doi.org/10.1017/S0022112072002009>
7. Гледзер Е.Б. Система гидродинамического типа, допускающая два квадратичных интеграла движения // *ДАН СССР*. 1973. Т. 209, № 5. С. 1046-1048.
8. Деснянский В.Н., Новиков Е.А. Эволюция спектров турбулентности к режиму подобия // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1974. Т. 10, № 2. С. 127-136.
9. Siggia E.D. Origin of intermittency in fully developed turbulence // *Phys. Rev. A*. 1977. Vol. 15. P. 1730-1750. <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.15.1730>
10. Yamada M., Ohkitani K. Lyapunov spectrum of a chaotic model of three-dimensional turbulence // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1987. Vol. 56. P. 4210-4213. <http://doi.org/10.1143/JPSJ.56.4210>
11. L'vov V.S., Podivilov E., Pomlyalov A., Procaccia I., Vandembroucq D. Improved shell model of turbulence // *Phys. Rev. E*. 1998. Vol. 58. P. 1811-1822. <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.1811>
12. L'vov V.S., Podivilov E., Procaccia I. Hamiltonian structure of the Sabra shell model of turbulence: Exact calculation of an anomalous scaling exponent // *EPL*. 1999. Vol. 46. P. 609-612. <http://doi.org/10.1209/epl/i1999-00307-8>
13. Ditlevsen P.D. Symmetries, invariants, and cascades in a shell model of turbulence // *Phys. Rev. E*. 2000. Vol. 62. P. 484-489. <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.484>
14. Benzi R., Biferale L., Tripiccone R., Trovatore E. (1+1)-dimensional turbulence // *Phys. Fluids*. 1997. Vol. 9. P. 2355-2363. <http://doi.org/10.1063/1.869356>
15. Frisch U. Turbulence. Cambridge University Press, 1995. 296 p.
16. Bohr T., Jensen M.H., Vulpiani A., Paladin G. Dynamical systems approach to turbulence. Cambridge University Press, 1998. 350 p.
17. Pope S.B. Turbulent flows. Cambridge University Press, 2000. 771 p.
18. Biferale L. Shell models of energy cascade in turbulence // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2003. Vol. 35. P. 441-468. <http://doi.org/10.1146/annurev.fluid.35.101101.161122>
19. Plunian F., Stepanov R., Frick P. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence // *Phys. Rep.* 2013. Vol. 523. P. 1-60. <http://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.09.001>
20. Frick P., Reshetnyak M., Sokoloff D. Combined grid-shell approach for convection in a rotating spherical layer // *EPL*. 2002. Vol. 59. P. 212-217. <http://doi.org/10.1209/epl/i2002-00228-6>
21. Фрик П.Г., Реуштыняк М.Ю., Соколов Д.Д. Каскадные модели турбулентности для жидкого ядра Земли // *ДАН*. 2002. Т. 387, № 2. С. 253-257.
22. Реуштыняк М.Ю., Штеффен Б. Каскадные модели в быстровращающихся динамо-системах // *Выч. мет. программирование*. 2006. Т. 7, № 1. С. 85-92.
23. Frick P., Stepanov R., Sokoloff D. Large- and small-scale interactions and quenching in an α^2 -dynamo // *Phys. Rev. E*. 2006. Vol. 74. 066310. <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.066310>
24. Степанов Р.А., Фрик П.Г., Соколов Д.Д. Сопряжение уравнений динамо средних полей и каскадной модели турбулентности на примере задачи галактического динамо // *Вычисл. мех. сплош. сред*. 2008. Т. 1, № 4. С. 97-108. <http://doi.org/10.7242/1999-6691/2008.1.4.43>
25. L'vov V.S., Pomyalov A., Tiberkevich V. Multizone shell model for turbulent wall bounded flows // *Phys. Rev. E*. 2003. Vol. 68. 046308. <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.046308>
26. Plunian F., Teimurazov A., Stepanov R., Verma M.K. Inverse cascade of energy in helical turbulence // *J. Fluid Mech.* 2020. Vol. 895. A13. <http://doi.org/10.1017/jfm.2020.307>
27. Sadhukhan S., Samuel R., Plunian F., Stepanov R., Samtaney R., Verma M.K. Enstrophy transfers in helical turbulence // *Phys. Rev. Fluids*. 2019. Vol. 4. 084607. <http://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.084607>
28. Stepanov R., Golbraikh E., Frick P., Shestakov A. Helical bottleneck effect in 3D homogeneous isotropic turbulence // *Fluid Dyn. Res.* 2018. Vol. 50. 011412. <http://doi.org/10.1088/1873-7005/aa782e>
29. Stepanov R., Golbraikh E., Frick P., Shestakov A. Hindered energy cascade in highly helical isotropic turbulence // *Phys. Rev. Lett.* 2015. Vol. 115. 234501. <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.234501>
30. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
31. Шестаков А.В., Степанов Р.А., Фрик П.Г. Влияние вращения на каскадные процессы в спиральной турбулентности // *Вычисл. мех. сплош. сред*. 2012. Т. 5, № 2. С. 193-198. <http://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.2.23>
32. Шестаков А.В., Степанов Р.А., Фрик П.Г. О механизмах каскадного переноса энергии в конвективной турбулентности // *Вычисл. мех. сплош. сред*. 2016. Т. 9, № 2. С. 125-134. <http://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.2.11>
33. Гледзер Е.Б. Эффекты вращения и спиральности в каскадных моделях турбулентности // *ДАН*. 2008. Т. 416, № 4. С. 488-492. (English version <https://doi.org/10.1134/S1028335808040101>)
34. Plunian F., Stepanov R. Cascades and dissipation ratio in rotating magnetohydrodynamic turbulence at low magnetic Prandtl number // *Phys. Rev. E*. 2010. Vol. 82. 046311. <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.046311>

35. Nikitin N.V., Nicoud F., Wasistho B., Squires K.D., Spalart P.R. An approach to wall modeling in large-eddy simulations // *Phys. Fluids*. 2000. Vol. 12. P. 1629-1632. <http://doi.org/10.1063/1.870414>
36. Yang X.I.A., Park G.I., Moin P. Log-layer mismatch and modeling of the fluctuating wall stress in wall-modeled large-eddy simulations // *Phys. Rev. Fluids*. 2017. Vol. 2. 104601. <http://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.2.104601>.

References

1. Frisk P.G. *Turbulentnost': podkhody i modeli*. M.-Izhevsk: Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2010. 332 p.
2. Tazraei P., Girimaji S.S. Scale-resolving simulations of turbulence: Equilibrium boundary layer analysis leading to near-wall closure modeling. *Phys. Rev. Fluids*, 2019, vol. 4, 104607. <http://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.104607>
3. Duraisamy K., Iaccarino G., Xiao H. Turbulence modeling in the age of data. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2019, vol. 51, pp. 357-377. <http://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010518-040547>
4. Yokoi N. Turbulence, transport and reconnection. *Topics in magnetohydrodynamic topology, reconnection and stability theory*, ed. D. MacTaggart, A. Hillier. Springer, 2020. P. 177-265. http://doi.org/10.1007/978-3-030-16343-3_6
5. Obukhov A.M. O nekotorykh obshchikh kharakteristikakh uravneniy dinamiki atmosfery [Some general characteristic equations of the dynamics of the atmosphere]. *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Atmospheric and Oceanic Physics*, 1971, vol. 7, no. 7, pp. 695-704.
6. Lorenz E.N. Low order models representing realizations of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 55, pp. 545-563. <http://doi.org/10.1017/S0022112072002009>
7. Gledzer E.B. System of hydrodynamic type admitting two quadratic integrals of motion. *Sov. Phys. Dokl.*, 1973, vol. 18, pp. 216-217.
8. Desnyansky V.N., Novikov E.A. The evolution of turbulence spectra to the similarity regime. *Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Atmospheric and Oceanic Physics*, 1974, vol. 10, pp. 127-136.
9. Siggia E.D. Origin of intermittency in fully developed turbulence. *Phys. Rev. A*, 1977, vol. 15, pp. 1730-1750. <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.15.1730>
10. Yamada M., Ohkitani K. Lyapunov spectrum of a chaotic model of three-dimensional turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1987, vol. 56, pp. 4210-4213. <http://doi.org/10.1143/JPSJ.56.4210>
11. L'vov V.S., Podivilov E., Pomlyalov A., Procaccia I., Vandembroucq D. Improved shell model of turbulence. *Phys. Rev. E*, 1998, vol. 58, pp. 1811-1822. <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.1811>
12. L'vov V.S., Podivilov E., Procaccia I. Hamiltonian structure of the Sabra shell model of turbulence: Exact calculation of an anomalous scaling exponent. *EPL*, 1999, vol. 46, pp. 609-612. <http://doi.org/10.1209/epl/i1999-00307-8>
13. Ditlevsen P.D. Symmetries, invariants, and cascades in a shell model of turbulence. *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 62, pp. 484-489. <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.484>
14. Benzi R., Biferale L., Tripiccione R., Trovatore E. (1+1)-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 1997, vol. 9, pp. 2355-2363. <http://doi.org/10.1063/1.869356>
15. Frisch U. *Turbulence*. Cambridge University Press, 1995. 296 p.
16. Bohr T., Jensen M.H., Vulpiani A., Paladin G. *Dynamical systems approach to turbulence*. Cambridge University Press, 1998. 350 p.
17. Pope S.B. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000. 771 p.
18. Biferale L. Shell models of energy cascade in turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 2003, vol. 35, pp. 441-468. <http://doi.org/10.1146/annurev.fluid.35.101101.161122>
19. Plunian F., Stepanov R., Frick P. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence. *Phys. Rep.*, 2013, vol. 523, pp. 1-60. <http://doi.org/10.1016/j.physrep.2012.09.001>
20. Frick P., Reshetnyak M., Sokoloff D. Combined grid-shell approach for convection in a rotating spherical layer. *EPL*, 2002, vol. 59, pp. 212-217. <http://doi.org/10.1209/epl/i2002-00228-6>
21. Frick P., Reshetnyak M., Sokoloff D. Cascade models of turbulence for the Earth's liquid core. *Dokl. Earth Sci.*, 2002, vol. 387, pp. 988-991.
22. Reshetnyak M.Yu., Shteffen B. Kaskadnyye modeli v bystrovrashchayushchikhsya dinamo-sistemakh [Cascade models in rapidly rotating dynamo systems]. *Vych. met. programirovaniye – Numerical Methods and Programming*, 2006, vol. 7, no. 1, pp. 85-92.
23. Frick P., Stepanov R., Sokoloff D. Large- and small-scale interactions and quenching in an α^2 -dynamo. *Phys. Rev. E*, 2006, vol. 74, 066310. <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.066310>
24. Stepanov R.A., Frick P.G., Sokoloff D.D. Coupling of mean-field equation and shell model of turbulence in the context of galactic dynamo problem. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2008, vol. 1, no. 4, pp. 97-108. <http://doi.org/10.7242/1999-6691/2008.1.4.43>
25. L'vov V.S., Pomyalov A., Tiberkevich V. Multizone shell model for turbulent wall bounded flows. *Phys. Rev. E*, 2003, vol. 68, 046308. <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.68.046308>
26. Plunian F., Teimurazov A., Stepanov R., Verma M.K. Inverse cascade of energy in helical turbulence. *J. Fluid Mech.*, 2020, vol. 895, A13. <http://doi.org/10.1017/jfm.2020.307>
27. Sadhukhan S., Samuel R., Plunian F., Stepanov R., Samtaney R., Verma M.K. Enstrophy transfers in helical turbulence. *Phys. Rev. Fluids*, 2019, vol. 4, 084607. <http://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.084607>
28. Stepanov R., Golbraikh E., Frick P., Shestakov A. Helical bottleneck effect in 3D homogeneous isotropic turbulence. *Fluid Dyn. Res.*, 2018, vol. 50, 011412. <http://doi.org/10.1088/1873-7005/aa782e>
29. Stepanov R., Golbraikh E., Frick P., Shestakov A. Hindered energy cascade in highly helical isotropic turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 2015, vol. 115, 234501. <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.234501>
30. Schlichting H. *Grenzschicht-Theorie* [Boundary Layer Theory]. Verlag G. Braun. Karlsruhe, 1958. 603 p.

31. Shestakov A.V., Stepanov R.A., Frick P.G. Influence of rotation on cascade processes in helical turbulence. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 193-198. <http://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.2.23>
32. Shestakov A.V., Stepanov R.A., Frick P.G. On cascade energy transfer in convective turbulence. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2017, vol. 58, pp. 1171-1180. <https://doi.org/10.1134/S0021894417070094>
33. Gledzer E.B. Rotation and helicity effects in cascade models of turbulence. *Dokl. Phys.*, 2008, vol. 53, pp. 216-220. <https://doi.org/10.1134/S1028335808040101>
34. Plunian F., Stepanov R. Cascades and dissipation ratio in rotating magnetohydrodynamic turbulence at low magnetic Prandtl number. *Phys. Rev. E*, 2010, vol. 82, 046311. <http://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.046311>
35. Nikitin N.V., Nicoud F., Wasistho B., Squires K.D., Spalart P.R. An approach to wall modeling in large-eddy simulations. *Phys. Fluids*, 2000, vol. 12, pp. 1629-1632. <http://doi.org/10.1063/1.870414>
36. Yang X.I.A., Park G.I., Moin P. Log-layer mismatch and modeling of the fluctuating wall stress in wall-modeled large-eddy simulations. *Phys. Rev. Fluids*, 2017, vol. 2, 104601. <http://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.2.104601>

Поступила в редакцию 25.09.2022; после доработки 03.10.2022; принята к опубликованию 04.10.2022

Сведения об авторах

Селуков Дмитрий Григорьевич, асп., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: selukov.d@icmm.ru

Степанов Родион Александрович, дфмн, внс, ИМСС УрО РАН; e-mail: rodion@icmm.ru