

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.2.17](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.2.17)
УДК 532.546

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ СКВАЖИНЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КУСОЧНО-ГЛАДКИМ КОНТУРОМ ПИТАНИЯ В АНИЗОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

В.Ф. Пивень, Д.Г. Лекомцев

Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева, Орел, Российская Федерация

В настоящее время добыча флюидов (воды, нефти) в пластах сложной геологической структуры достигает значительных объемов. Этим обусловлена необходимость создания новых математических моделей фильтрационных течений. Численно изучается модель фильтрационного течения к скважине, находящейся в анизотропном неоднородном грунте при кусочно-гладком контуре ее питания. Проницаемость грунта, как пористой среды, характеризуется тензором второго ранга. В статье рассматривается частный случай слоя с раздельными анизотропией и неоднородностью, когда компоненты тензора проницаемости являются константами, а неоднородность моделируется степенной функцией одной из координат с положительным значением показателя степени. Решение поставленной граничной задачи о работе скважины в пористом пласте вызывает значительные математические трудности, связанные со сложной формой записи основного уравнения и наличием сингулярной линии, на которой это уравнение вырождается. С помощью гомеоморфного аффинного преобразования координат формулировка задачи приводится к каноническому виду, что значительно упрощает решение. При произвольном контуре питания определение дебита скважины редуцируется к системе, включающей сингулярное интегральное уравнение типа Фредгольма и некоторое интегральное соотношение. Система решается численно методом дискретных особенностей. Исследована сходимость численного решения при разных значениях степени в выражении функции, описывающей неоднородность. Оценено влияние на дебит анизотропии и неоднородности пород при прямоугольном контуре питания. Оказалось, что анизотропия и неоднородность грунта существенно сказываются на дебите скважины. Неоднородность может его увеличивать по отношению к дебиту скважины в однородном изотропном пласте, анизотропия, наоборот, уменьшать. С увеличением отношения недиагональных компонент тензора к диагональным анизотропия и неоднородность влияют слабее. Предложенный метод решения поставленной задачи может быть использован при изучении других проблем фильтрации в анизотропной неоднородной пористой среде.

Ключевые слова: фильтрация, ортотропный пласт, тензор проводимости, интегральное уравнение, дебит, прямоугольный контур, математическое моделирование

NUMERICAL MODELING OF THE PERFORMANCE OF A WELL WITH AN ARBITRARY PIECEWISE-SMOOTH EXTERNAL BOUNDARY IN AN ANISOTROPIC HETEROGENEOUS RESERVOIR

V.F. Piven and D.G. Lekomtsev

Orel State University, Orel, Russian Federation

The extraction of oil and gas from productive reservoirs of complex geological structures is constantly increasing. Thus, it is obvious that reliable mathematical models able to manage such porous media are of particular interest. In this paper, a model of filtration flow to a well located in an anisotropic heterogeneous soil formation, with a piecewise-smooth external contour, is numerically studied. The permeability of soil, as a porous medium, is characterized by a second-rank tensor. Soil heterogeneity is modeled by a power function of one of the coordinates. We consider a particular case with a positive exponent. The solution of the stated boundary problem of well operation in a porous reservoir causes significant mathematical difficulties associated with the complicated form of the basic equation. The formulation of the problem is reduced to a canonical form, which greatly simplifies the solution. To do this, we turn on the auxiliary plane using homeomorphic (affine) transformation. The problem is reduced to a system that includes a Fredholm type integral equation and an integral relation. The results were obtained using the discrete singularity method. It was found that the algorithm convergence is slightly better under weak anisotropy. The influence of anisotropy and heterogeneity of the soil on the production in the case of the productive reservoir with a rectangular boundary was assessed. The anisotropy can greatly change the production rate compared to the rate of a well in an isotropic soil. Permeability tensor components are located on the main diagonal and have a major impact on the rate of the flow in the anisotropic and heterogeneous soil. This method can be used to solve different problems of fluid filtration in an anisotropic porous medium.

Key words: filtration theory, orthotropic reservoir, conductivity tensor, integral equation, production, rectangular reservoir, mathematical modeling

1. Введение

Встречающиеся в реальных месторождениях нефтеносные породы–коллекторы обладают сложной геологической структурой. На текущий момент широко эксплуатируются месторождения, коллекторы которых демонстрируют анизотропию и неоднородность свойств, например, Астраханское месторождение в России или месторождение Тенгиз в Казахстане, что делает актуальным математическое моделирование новых задач течения флюида в таких условиях. Широкий набор экспериментальных сведений, установленных различными физическими методами как на лабораторных образцах [1–5], так и на действующих скважинах [6, 7], позволяет считать наличие анизотропии и неоднородности

у нефтеносных пород доказанным научным фактом. В известных работах [8–12] пористая среда чаще всего считается изотропной. В настоящее время активно разрабатываются математические модели фильтрации в анизотропно-неоднородных пластах [13–21]. В отличие от названных работ, данная статья посвящена решению граничной задачи работы скважины в анизотропном неоднородном грунте с произвольным гладким (кусочно-гладким) контуром питания, которое находится численно при контуре питания прямоугольной формы. Неоднородность моделируется степенной функцией одной из координат. Изучается влияние анизотропии и неоднородности грунта на дебит скважины. Представленная статья является обобщением авторских исследований [22, 23] на случай, когда анизотропный пласт неоднородный, а контур питания произвольный кусочно-гладкий.

2. Основные уравнения

Полагаем, что жидкость однофазная несжимаемая и ее течение стационарное. Движение жидкости происходит в неоднородной анизотропной несжимаемой пористой среде и описывается обобщенным законом Дарси [13]:

$$\mathbf{v} = \frac{K}{\mu} \cdot (\rho \mathbf{F} - \nabla p), \quad (1)$$

и уравнением неразрывности:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Здесь: \mathbf{v} — скорость фильтрации; p — давление, μ — вязкость, а ρ — плотность жидкости; \mathbf{F} — действующая на жидкость массовая сила; K — коэффициент, характеризующий физические свойства пористой среды (в общем случае анизотропной и неоднородной). В данной работе массовые силы в расчет не принимаются, то есть $\mathbf{F} = 0$.

Двумерное стационарное течение жидкости в анизотропном и неоднородном пласте (слое) грунта с проводимостью $P = P_{ij} = H(K_{ij})$, где H — толщина пласта, K_{ij} — тензор его проницаемости, $i, j = 1, 2$, описываем обобщенным потенциалом φ и функцией тока ψ . Здесь φ и ψ — функции декартовых координат (x, y) на плоскости основания пласта, всюду в области D , за исключением изолированных особых точек этих функций, удовлетворяют системе уравнений, следующей из законов (1) и (2) [13, 19]:

$$P_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad P_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3)$$

Система (3) относится к эллиптическому типу, если ее коэффициенты отвечают условиям:

$$P_{11} > 0, \quad P_{22} > 0, \quad D(\mathbf{P}_s) = P_{11}P_{22} - (P_{12} + P_{21})^2/4 > 0,$$

где $D(\mathbf{P}_s)$ — определитель симметричной части тензора \mathbf{P} : $\mathbf{P}_s = (\mathbf{P} + \mathbf{P}^T)/2$, при этом $\mathbf{P}^T = (P_{ji})$ — транспонированный тензор. Уравнения записаны в безразмерном виде (подобно [13]). Исключая из системы функцию ψ , имеем для функции φ уравнение эллиптического типа:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(P_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0. \quad (4)$$

В силу сложности уравнения (4) отыскание его решения вызывает значительные трудности. Поэтому преобразуем его к наиболее простому (каноническому) виду. Введем две комплексных плоскости: физическую $z = x + iy$ и вспомогательную $\zeta = \xi + i\eta$, которые взаимосвязаны гомеоморфным (взаимно-однозначным и непрерывным) преобразованием

$$\zeta = \zeta(z), \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (5)$$

которое удовлетворяет уравнению типа Бельтрами [13]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} - \mu(z) \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \quad \mu(z) = \frac{P_{22} - P_{11} - i(P_{12} + P_{21})}{P_{22} + P_{11} + 2\sqrt{D(P_s)}}, \quad |\mu(z)| < 1, \quad (6)$$

где $2 \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$, $2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$.

Рассмотрим ортотропный ($k_{12} = k_{21}$) слой с раздельными анизотропией и неоднородностью: $P = H(K_{ij}) = k\chi(z)$ (где $P_{ij} = k_{ij}\chi(z)$). Положим, что $H = \text{const}$, $k_{ij} = \text{const}$ и $\chi(z) = y^s$, $s > 0$ [18]. Такая закономерность изменения фильтрационных свойств пласта возможна в условиях, когда скважина располагается в области локального уменьшения его проводимости. В этом случае $\mu(z)$ — комплексная постоянная, и решение уравнения (6) имеет вид: $\zeta = z + \mu\bar{z}$. Отсюда, на основе (5), имеем

$$\xi = (1+a)x + by, \quad \eta = bx + (1-a)y \quad (7)$$

и обратные им координаты

$$x = \frac{(1-a)\xi - b\eta}{1-|\mu|^2}, \quad y = \frac{(1+a)\eta - b\xi}{1-|\mu|^2}, \quad (8)$$

где $a = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}$, $b = -\frac{2\beta}{\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha - \beta^2}}$, $|\mu|^2 = a^2 + b^2$, $\alpha = \frac{k_{22}}{k_{11}} > 0$, $\beta = \frac{k_{12}}{k_{11}}$.

Воспользуемся преобразованием координат (8). Уравнение (4) на плоскости ζ принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(P'(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(P'(\xi, \eta) \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (9)$$

где $P'(\xi, \eta) = k_0 \left[\frac{(1+a)\eta - b\xi}{1-a^2-b^2} \right]^s$, $k_0 = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2} > 0$.

Перейдем на плоскость $\zeta' = \xi' + i\eta'$, которая связана с плоскостью ζ конформным преобразованием поворота на угол ϑ_0 [13]:

$$\zeta' = \zeta e^{-i\vartheta_0}, \quad \xi' = \xi \cos \vartheta_0 + \eta \sin \vartheta_0, \quad \eta' = -\xi \sin \vartheta_0 + \eta \cos \vartheta_0. \quad (10)$$

Если угол поворота ϑ_0 удовлетворяет равенству $\text{tg } \vartheta_0 = b/(1+a)$, то проводимость $P'(\zeta')$, согласно преобразованиям (10), будет функцией одной переменной η' :

$$P'(\zeta') = k'_0 \eta'^s, \quad k'_0 = k_0 \left[\frac{(1+a) \cos \vartheta_0 + b \sin \vartheta_0}{1-a^2-b^2} \right]^s. \quad (11)$$

Характерной особенностью слоя с проводимостью (11) является наличие линии $\sigma'_0: \eta' = 0$, на которой $P' = 0$ при $s > 0$.

Уравнение (11) на плоскости ζ' , согласно преобразованию (10), принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi'} \left(k'_0 \eta'^s \frac{\partial \varphi}{\partial \xi'} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta'} \left(k'_0 \eta'^s \frac{\partial \varphi}{\partial \eta'} \right) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, задачу исследования двумерного течения в ортотропном и неоднородном пласте сводим к нахождению решений уравнения (12), а затем, согласно гомеоморфизму (7), с учетом преобразования (10) отыскиваем решение уравнения (4).

3. Постановка граничной задачи определения дебита скважины

На контуре $\Sigma = \sigma_{\Pi} \cup \sigma_C$ (σ_{Π} — контур питания, σ_C — контур скважины) заданы давления, то есть для обобщенного потенциала $\varphi(z)$ известны граничные условия [13]:

$$\varphi^+(z) = \alpha_{\Pi}(z), \quad z \in \sigma_{\Pi}, \quad (13)$$

$$\varphi(z) = \alpha_C(z), \quad z \in \sigma_C, \quad (14)$$

где $\alpha_{\Pi}(z)$ и $\alpha_C(z)$ — непрерывные периодические функции. Здесь и далее знаком «+» отмечено предельное значение функции при подходе к контуру питания изнутри области.

Область течения может быть ограничена сингулярной линией σ_0 , на которой проводимость (проницаемость) пласта $P = 0$. Полагаем, что на ней, согласно [13], выполняется условие:

$$\left(P_n(z) \frac{\partial \varphi(z)}{\partial \mathbf{v}_z} \right)^+ = 0, \quad z \in \sigma_0, \quad (15)$$

где $P_n(z) = H(z)K_n(z)$ — модуль вектора проводимости слоя $\mathbf{P}_n(z)$ в направлении орта \mathbf{n} .

Таким образом, имеем задачу: по заданным условиям (13) и (14) требуется найти решение $\varphi(z)$ уравнения (4), а затем определить дебит скважины.

Переформулируем задачу на вспомогательной плоскости ζ , на которой уравнение (4) принимает канонический вид (12). На плоскости ζ' область течения D' ограничена кривой $\Sigma' = \sigma'_{\Pi} \cup \sigma'_C$ ($\sigma'_{\Pi} \cup \sigma'_C$, при этом контур питания есть кусочно-гладкая кривая, а контур скважины — эллипс с центром в точке ζ_0), являющейся, согласно (6), образом кривой Σ .

Условия (13) и (14) на границе Σ' принимают вид:

$$\varphi^+(\zeta') = \alpha'_{\Pi}(\zeta'), \quad \zeta' \in \sigma'_{\Pi},$$

$$\varphi(\zeta') = \alpha'_C(\zeta'), \quad \zeta' \in \sigma'_C.$$

Учитывая это, положим $\alpha'_{\Pi} = 0$, $\alpha'_C = C$ ($C = \text{const}$) и запишем:

$$\varphi^+(\zeta') = 0, \quad \zeta' \in \sigma'_{\Pi}, \quad (16)$$

$$\varphi(\zeta') = C, \quad \zeta' \in \sigma'_C. \quad (17)$$

На плоскости ζ' условие (15) становится следующим:

$$\left(\eta'^s \frac{\partial \varphi(\zeta')}{\partial \eta'} \right)^+ = 0, \quad \zeta' \in \sigma'_0. \quad (18)$$

Таким образом, необходимо найти решения уравнения (12), удовлетворяющие условиям (16)–(18).

Так как рассматриваемый слой ортотропен, то возможно представить фундаментальное решение уравнения (12), которое моделирует работу скважины в слое с проводимостью (11). Согласно [18], имеем удовлетворяющее условию (18) фундаментальное решение:

$$\Phi(\zeta', \zeta'_0) = \frac{Q_{s/2-1}(\omega)}{2\pi k'_0 (\eta' \eta'_0)^{s/2}}, \quad s > 0, \quad (19)$$

где $Q_v(\omega)$ — функция Лежандра второго рода степени v ($v = s/2 - 1$) от аргумента $\omega = 1 + R'^2 / (2\eta' \eta'_0)$,

где $R' = |\zeta' - \zeta'_0| = \sqrt{(\xi' - \xi'_0)^2 + (\eta' - \eta'_0)^2}$, которая имеет в точке $\zeta' = \zeta'_0$ ($R' = 0$, $\omega = 1$) особенность логарифмического типа, а именно $Q_v(\omega) \rightarrow -\ln|\zeta' - \zeta'_0|$ при $\zeta' \rightarrow \zeta'_0$ [24].

Задачу о работе скважины в анизотропном ортотропном пласте с прямоугольным контуром питания можно решить численно. Следуя [13, 23] и используя обобщенный потенциал двойного слоя, представим решение в виде:

$$\varphi(M) = -\frac{qQ_{s/2-1}(\omega)}{2\pi k'_0(\eta'\eta'_0)^{s/2}} + \int_{\sigma_{\Pi}} f(N)\Omega(N, M)dl_N, \quad M = (\xi', \eta').$$

Найдем предельное значение $\varphi^+(M)$:

$$\varphi^+(M) = \frac{qQ_{s/2-1}(\omega)}{2\pi k'_0(\eta'\eta'_0)^{s/2}} + \int_{\sigma_{\Pi}} f(N)\Omega(N, M)dl_N + \frac{f(M)}{2}.$$

Усредним условие (17), воспользовавшись тем, что обобщенный потенциал $\varphi(\zeta')$ — гармоническая функция всюду в области течения D' . Эллиптический контур скважины σ'_C заменим окружностью «эффективного» радиуса R'_C такого, что площади круга радиуса R'_C и эллипса, ограниченного контуром σ'_C , равновеликие (равные). Тогда $R'_C = R_C\sqrt{1-\mu^2}$ [22].

Подставим $\varphi^+(M)$ и $\varphi(M)$ в условия (16) и (17) с учетом фундаментального решения (19). В результате получаем систему, состоящую из интегрального уравнения

$$f(M) + 2 \int_{\sigma_{\Pi}} f(N)\Omega(N, M)dl_N = -\frac{qQ_{s/2-1}(\omega)}{2\pi k'_0(\eta'\eta'_0)^{s/2}}, \quad M = (\xi'_M, \eta'_M) \in \sigma'_{\Pi}, \quad (20)$$

и интегрального соотношения

$$\int_{\sigma_{\Pi}} f(N)\Omega(N, M_0)dl_N = C + \frac{q}{2\pi k'_0\eta'^s_0} \ln\left(R_C\sqrt{1-|\mu|^2}\right), \quad M_0 = (\xi'_0, \eta'_0) \in \sigma'_C. \quad (21)$$

Здесь $\Omega(N, M) = -k'_0\eta'^s_0 \left[\frac{\partial\Phi(N, M)}{\partial\xi'_N} \frac{\partial\eta'_N}{\partial l_N} + \frac{\partial\Phi(N, M)}{\partial\eta'_N} \frac{\partial\xi'_N}{\partial l_N} \right]$, $\Phi(N, M) = \frac{Q_{s/2-1}(\omega)}{2\pi k'_0(\eta'\eta'_0)^{s/2}}$.

4. Дебит скважины в пласте с прямоугольным контуром питания при $s = 2$

Поставленную задачу решим для кусочно-гладкого (прямоугольного) контура питания, тогда как контур скважины имеет вид окружности σ_C : $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R_C^2$. Как видно на рисунке 1, контур питания σ_{Π} — прямоугольник $ABCD$ со сторонами A_{Π} и B_{Π} , центр которого расположен в точке (x_0, y_0) . Зададим σ_{Π} параметрически, в качестве параметра используем S — длину отрезка контура. С учетом направления обхода контура получаем:

$$\begin{aligned} AB: \quad x &= \frac{A_{\Pi}}{2} - S + x_0, & y &= \frac{B_{\Pi}}{2} + y_0, & S &\in [0, A_{\Pi}), & n &= -j, \\ BC: \quad x &= \frac{A_{\Pi}}{2} + x_0, & y &= \frac{B_{\Pi}}{2} - (S - A_{\Pi}) + y_0, & S &\in [A_{\Pi}, A_{\Pi} + B_{\Pi}), & n &= i, \\ CD: \quad x &= -\frac{A_{\Pi}}{2} + (S - (A_{\Pi} + B_{\Pi})) + x_0, & y &= -\frac{B_{\Pi}}{2} + y_0, & S &\in [A_{\Pi} + B_{\Pi}, 2A_{\Pi} + B_{\Pi}), & n &= j, \\ DA: \quad x &= -\frac{A_{\Pi}}{2} + x_0, & y &= -\frac{B_{\Pi}}{2} + (S - (2A_{\Pi} + B_{\Pi})) + y_0, & S &\in [2A_{\Pi} + B_{\Pi}, 2A_{\Pi} + 2B_{\Pi}), & n &= -i. \end{aligned}$$

Согласно преобразованию (5), прямоугольный контур питания σ_{Π} на вспомогательной плоскости ζ переходит в параллелограмм σ'_{Π} .

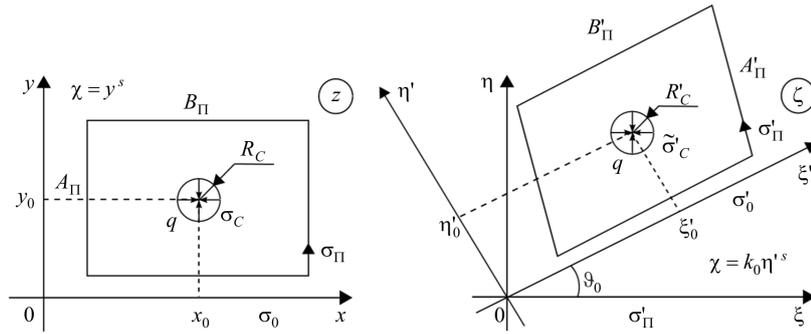


Рис. 1. К постановке задачи определения дебита скважины в пласте с прямоугольным контуром питания

Следуя [13] и учитывая (19), ядро $\Omega(N, M)$ интегрального уравнения (20) и соотношения (21) при условии $s = 2$ представим в виде:

$$\Omega(N, M) = -\eta'_M k'_0 \left[\frac{(\eta'_N - \eta'_M)(R^2 + 4\eta'_N \eta'_M) + R^2(\eta'_N + \eta'_M)}{\pi(2R^2 \eta'_N \eta'_M + 8\eta'^2_N \eta'^2_M) R^2} - \frac{1}{4\pi \eta'_N \eta'^2_M} \ln \left(1 + \frac{4\eta'_N \eta'_M}{R^2} \right) \right] \dot{\eta}'_N(t_N) - \frac{(\xi'_N - \xi'_M) 4\eta'_N \eta'_M}{\pi(2R^2 \eta'_N \eta'_M + 8\eta'^2_N \eta'^2_M) R^2} \dot{\xi}'_N(t_N) \cdot \mathbf{n}_\tau,$$

где $R^2 = (\xi'_N - \xi'_M)^2 + (\eta'_N - \eta'_M)^2$, $\dot{\xi}'_N(t_N)$ и $\dot{\eta}'_N(t_N)$ — производные $\xi'_N(t_N)$ и $\eta'_N(t_N)$ по параметру t в точке $N \in \sigma'_\Pi$, \mathbf{n}_τ — орт нормали к контуру σ'_Π (контур σ'_Π обходится против часовой стрелки).

Кривую σ'_Π на вспомогательной плоскости ζ тоже зададим параметрически: $\xi'_N = \zeta'(t_N)$, $\eta'_N = \zeta'(t_N)$, $\xi'_M = \zeta'(t_M)$, $\eta'_M = \zeta'(t_M)$, где t_N и t_M — значения параметра в точках $N \in \sigma'_\Pi$ и $M \in \sigma'_\Pi$. На вспомогательной плоскости ζ получаем множество точек $E = \{\zeta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Разобьем контур σ'_Π равномерно по длине, для чего интерполируем границу σ'_Π линейными сплайнами [23].

Решим систему (20), (21) численно относительно функции $f(N)$ и дебита q , используя метод дискретных особенностей [25].

Заменяем, согласно квадратурным формулам прямоугольника, интегралы в системе (20), (21) суммами, по аналогии с [23]. Используя эти соотношения, перейдем к системе из $n+1$ неоднородных линейных алгебраических уравнений:

$$f_i + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j \Omega_{ji} \Delta l_j = -\frac{q Q_0(\omega)}{\pi k'_0 \eta'_i \eta'^2_0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{22}$$

Здесь

$$\Omega_{ji} = -\eta'^2_j k'_0 \left[\frac{(\eta'_i - \eta'_j)(R_i^2 + 4\eta'_i \eta'_j) + R_i^2(\eta'_i + \eta'_j)}{\pi(2R_i^2 \eta'_i \eta'_j + 8\eta'^2_i \eta'^2_j) R_i^2} - \frac{1}{4\pi \eta'_i \eta'^2_j} \ln \left(1 + \frac{4\eta'_i \eta'_j}{R_i^2} \right) \right] \dot{\eta}'_j(t) - \frac{(\xi'_i - \xi'_j) 4\eta'_i \eta'_j}{\pi(2R_i^2 \eta'_i \eta'_j + 8\eta'^2_i \eta'^2_j) R_i^2} \dot{\xi}'_j(t), \quad R_i^2 = (\xi'_i - \xi'_j)^2 + (\eta'_i - \eta'_j)^2, \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^n f_j \Omega_{*j} \Delta l_j = C + \frac{q}{2\pi k'_0 \eta'^{2s}_0} \ln \left(R_C \sqrt{1 - |\mu|^2} \right),$$

где

$$\Omega_{*j} = -\eta'^2_j k'_0 \left[\frac{(\eta'_0 - \eta'_j)(R_0^2 + 4\eta'_0 \eta'_j) + R_0^2(\eta'_0 + \eta'_j)}{\pi(2R_0^2 \eta'_0 \eta'_j + 8\eta'^2_0 \eta'^2_j) R_0^2} - \frac{1}{4\pi \eta'_0 \eta'^2_j} \ln \left(1 + \frac{4\eta'_0 \eta'_j}{R_0^2} \right) \right] \dot{\eta}'_j(t) -$$

$$\left. \frac{(\xi'_0 - \xi'_j)4\eta'_0\eta'_j}{\pi(2R_0^2\eta'_0\eta'_j + 8\eta_0'^2\eta_j'^2)R_0^2} \dot{\xi}'_j(t) \right], \quad R_0^2 = (\xi'_0 - \xi'_j)^2 + (\eta'_0 - \eta'_j)^2.$$

Решая систему уравнений (22) и (23) методом Гаусса, находим значения функций f_j , $j = 1, 2, \dots, n$ и искомый дебит q .

Для изучения вклада анизотропии и неоднородности по аналогии с работой [23] введем понятие относительного дебита:

$$\varepsilon = q/q_0 - 1, \tag{24}$$

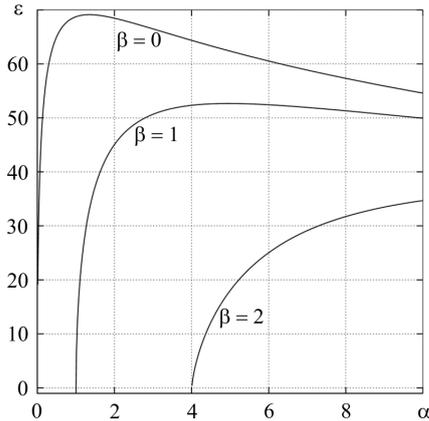


Рис. 2. Зависимости относительного дебита скважины ε с прямоугольным контуром питания от коэффициентов α и β при значении $s = 2$

где q_0 — дебит скважины радиуса R_c с круговым контуром питания, имеющим радиус R_{Π} , в однородном изотропном грунте.

На рисунке 2 представлены зависимости относительного дебита ε от коэффициентов α и β при числе точек разбиения $n = 200$ и $A_{\Pi} = \sqrt{\pi}/2$, $B_{\Pi} = 2\sqrt{\pi}$, $d = 10R_{\Pi}$. Соотношение сторон прямоугольника σ_{Π} выбрано так, чтобы площади, ограниченные им и круговым контуром в однородной изотропной среде были равновеликими. Видно, что анизотропия и неоднородность грунта могут заметно влиять на дебит q . На графике для $\beta = 0$ имеется максимум при параметрах, примерно соответствующих изотропной среде ($\alpha = 1$, $\beta = 0$). Это говорит о том, что в рассматриваемой задаче анизотропия может уменьшать дебит скважины по сравнению с изотропной средой.

5. Дебит скважины в пласте с прямоугольным контуром питания при $s = 4$

Следуя [13] и учитывая (17), ядро $\Omega(N, M)$ интегрального уравнения (20) и соотношения (21) при условии $s = 4$ представим в виде:

$$\begin{aligned} \Omega(N, M) = & -\eta_M'^4 k_0' \left[\frac{\xi'_N - \xi'_M}{4\pi k_0' \eta_N'^3 \eta_M'^3} \left(\frac{H_1}{H_2} \left(\frac{\eta'_N \eta'_M H_2}{R^2} - 1 \right) - (\xi'_N - \xi'_M) H_4 \right) \dot{\eta}'_N(t_N) + \right. \\ & + \left. \left(\frac{1}{2\pi k_0' \eta_N'^2 \eta_M'^2} \left(\frac{H_3 H_4}{2} + \frac{H_1}{2\eta'_M H_2} \left(\frac{2\eta'_M (\eta'_N - \eta'_M) H_2}{R^2} + \eta'_M H_3 + H_2 \right) \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\pi k_0' \eta_N'^2 \eta_M'^3} \left(\frac{H_1 H_4}{2} - 1 \right) \right) \dot{\xi}'_N(t_N) \right] \cdot \mathbf{n}_\tau, \end{aligned}$$

где $H_1 = \frac{R^2}{2\eta'_N \eta'_M} + 1$, $H_2 = \frac{R^2}{2\eta'_N \eta'_M} + 2$, $H_3 = -\frac{\eta'_N - \eta'_M}{\eta'_N \eta'_M} - \frac{R^2}{2\eta'_N \eta_M'^2}$, $H_4 = \ln \frac{2\eta'_N \eta'_M H_2}{R^2}$,

$R^2 = (\xi'_N - \xi'_M)^2 + (\eta'_N - \eta'_M)^2$, $\dot{\xi}'_N(t_N)$ и $\dot{\eta}'_N(t_N)$ — производные $\xi'_N(t_N)$ и $\eta'_N(t_N)$ по параметру t в точке $N \in \sigma'_{\Pi}$, \mathbf{n}_τ — орт нормали к контуру σ'_{Π} (контур σ'_{Π} обходится против часовой стрелки).

Кривую σ'_{Π} на вспомогательной плоскости ζ зададим параметрически: $\xi'_N = \zeta'(t_N)$, $\eta'_N = \zeta'(t_N)$, $\xi'_M = \zeta'(t_M)$, $\eta'_M = \zeta'(t_M)$, t_N и t_M — значения параметра в точках $N \in \sigma'_{\Pi}$ и $M \in \sigma'_{\Pi}$. Получаем на вспомогательной плоскости ζ множество точек $E = \{\zeta_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Разобьем контур σ'_{Π} равномерно по длине, для чего интерполируем границу σ'_{Π} линейными сплайнами [23].

Решим систему (20), (21) численно относительно функции $f(N)$ и дебита q , используя метод дискретных особенностей [25].

Заменим, согласно квадратурным формулам прямоугольника, интегралы в системе (20), (21) суммами, как это делается в [23]. Используя их, перейдем к системе из $n+1$ неоднородных линейных алгебраических уравнений:

$$f_i + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j \Omega_{ji} \Delta l_j = - \frac{q Q_1(\omega)}{\pi k'_0 (\eta'_i \eta'_0)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (25)$$

Здесь:

$$\Omega_{ji} = -\eta_j'^4 k'_0 \left[\frac{\xi'_i - \xi'_j}{4\pi k'_0 \eta_i'^3 \eta_j'^3} \left(\frac{H_1}{H_2} \left(\frac{\eta'_i \eta'_j H_2}{R_i^2} - 1 \right) - (\xi'_i - \xi'_j) H_4 \right) \dot{\eta}'_j(t) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2\pi k'_0 \eta_i'^2 \eta_j'^2} \left(\frac{H_3 H_4}{2} + \frac{H_1}{2\eta'_j H_2} \left(\frac{2\eta'_j (\eta'_i - \eta'_j) H_2}{R_i^2} + \eta'_j H_3 + H_2 \right) \right) - \frac{1}{\pi k'_0 \eta_i'^2 \eta_j'^3} \left(\frac{H_1 H_4}{2} - 1 \right) \right) \dot{\xi}'_j(t) \right], \\ H_1 = \frac{R_i^2}{2\eta'_i \eta'_j} + 1, \quad H_2 = \frac{R_i^2}{2\eta'_i \eta'_j} + 2, \quad H_3 = -\frac{\eta'_i - \eta'_j}{\eta'_i \eta'_j} - \frac{R_i^2}{2\eta'_i \eta_j'^2}, \quad H_4 = \ln \frac{2\eta'_i \eta'_j H_2}{R_i^2}, \quad R_i^2 = (\xi'_i - \xi'_j)^2 + (\eta'_i - \eta'_j)^2, \\ \sum_{j=1}^n f_j \Omega_{*j} \Delta l_j = C + \frac{q}{2\pi k'_0 \eta_0'^s} \ln \left(R_C \sqrt{1 - |\mu|^2} \right), \quad (26)$$

где

$$\Omega_{*j} = -\eta_j'^4 k'_0 \left[\frac{\xi'_0 - \xi'_j}{4\pi k'_0 \eta_0'^3 \eta_j'^3} \left(\frac{H_1}{H_2} \left(\frac{\eta'_0 \eta'_j H_2}{R_0^2} - 1 \right) - (\xi'_0 - \xi'_j) H_4 \right) \dot{\eta}'_j(t) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2\pi k'_0 \eta_0'^2 \eta_j'^2} \left(\frac{H_3 H_4}{2} + \frac{H_1}{2\eta'_j H_2} \left(\frac{2\eta'_j (\eta'_0 - \eta'_j) H_2}{R_0^2} + \eta'_j H_3 + H_2 \right) \right) - \frac{1}{\pi k'_0 \eta_0'^2 \eta_j'^3} \left(\frac{H_1 H_4}{2} - 1 \right) \right) \dot{\xi}'_j(t) \right], \\ H_1 = \frac{R_0^2}{2\eta'_0 \eta'_j} + 1, \quad H_2 = \frac{R_0^2}{2\eta'_0 \eta'_j} + 2, \quad H_3 = -\frac{\eta'_0 - \eta'_j}{\eta'_0 \eta'_j} - \frac{R_0^2}{2\eta'_0 \eta_j'^2}, \quad H_4 = \ln \frac{2\eta'_0 \eta'_j H_2}{R_0^2}, \\ R_0^2 = (\xi'_0 - \xi'_j)^2 + (\eta'_0 - \eta'_j)^2.$$

Решая систему уравнений (25) и (26) методом Гаусса, найдем значения функций f_j , $j = 1, 2, \dots, n$ и искомый дебит q .

Для изучения связи анизотропии и неоднородности породного пласта с процессом извлечения флюида аналогично [23] используем формулу для вычисления относительного дебита (24). На рисунке 3

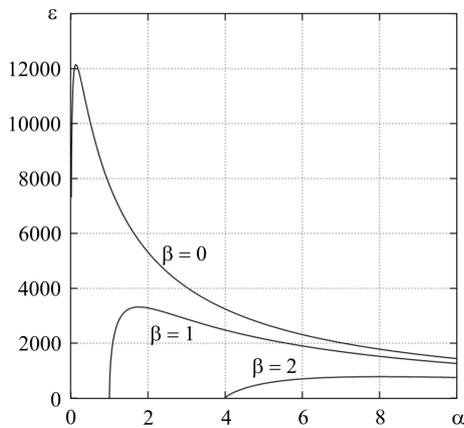


Рис. 3. Зависимости относительного дебита скважины ε с прямоугольным контуром питания от коэффициентов α и β при значении $s = 4$

представлены зависимости относительного дебита ε от значений коэффициентов α и β при числе точек разбиения $n = 200$ и $A_{\Pi} = \sqrt{\pi}/2$, $B_{\Pi} = 2\sqrt{\pi}$, $d = 10R_{\Pi}$. Соотношение сторон прямоугольника σ_{Π} выбрано так, чтобы площади, ограниченные им и круговым контуром скважины в изотропной однородной среде, были равновеликими. Видно, что анизотропия и неоднородность грунта могут сильно влиять на дебит q (способны увеличивать его более чем на три порядка по отношению к q_0). Для случаев $\beta = 0$ и $\beta = 1$ имеются максимумы при параметрах примерно соответствующих анизотропной среде, когда коэффициент α не превышает 2. При изотропной среде, когда $\alpha = 1$ и $\beta = 0$, сопоставление дебитов q при $s = 2$ и $s = 4$ показывает, что неоднородность среды также сказывается на дебите, а именно с ростом показателя степени он увеличивается на два порядка.

6. Исследование сходимости численного решения

При применении численного метода дискретных особенностей необходимо проведение проверки сходимости полученного решения. Для этого рассматривалась зависимость изменения относительного дебита ε от n — числа точек разбиения контура питания. Сходимость численного решения определялась по формуле:

$$\kappa = \left| 1 - \frac{\varepsilon_{n2}}{\varepsilon_{n1}} \right| \times 100,$$

где ε_{n1} , ε_{n2} — значения относительного дебита при n_1 и n_2 .

Результаты исследования представлены для $\alpha = 2$ и $\alpha = 10$ соответственно (см. Табл. 1 и 2) для прямоугольного контура σ_{Π} со сторонами $A_{\Pi} = \sqrt{\pi}/2$ и $B_{\Pi} = 2\sqrt{\pi}$ при $s = 2$ и $s = 4$. Видно, что с увеличением количества точек разбиения ($n_2 > n_1$), сходимость полученного численного решения улучшается. В случае $\alpha = 10$ сходимость численного решения незначительно хуже, по сравнению с моделью неоднородной анизотропной среды, в которой принято $\alpha = 2$.

Таблица 1. Зависимость изменения относительного дебита ε от числа n точек разбиения при $\alpha = 2$

Число точек разбиения n	$s = 2$		$s = 4$	
	Относительный дебит ε	Сходимость решения κ	Относительный дебит ε	Сходимость решения κ
50	70,18	–	5444,65	–
100	69,04	1,62	5357,18	1,61
200	68,46	0,84	5313,34	0,82
400	68,18	0,41	5291,39	0,41
800	68,03	0,22	5280,40	0,26

Таблица 2. Относительный дебит ε при различном числе n точек разбиения при $\alpha = 10$

Число точек разбиения n	$s = 2$		$s = 4$	
	Относительный дебит ε	Сходимость решения κ	Относительный дебит ε	Сходимость решения κ
50	60,17	–	1587,22	–
100	56,40	6,26	1490,18	6,11
200	54,59	3,21	1443,22	3,15
400	53,71	1,61	1420,13	1,60
800	53,27	0,82	1408,68	0,81

7. Заключение

Численно исследована двумерная граничная задача о работе совершенной скважины в анизотропном неоднородном пласте грунта со степенным законом изменения его проводимости (проницаемости). Когда контур питания — прямоугольник (на вспомогательной плоскости — параллелограмм) и показатель степени в выражении функции, описывающей неоднородность грунта, равен двум и четырем, решение найдено численно. Для численного моделирования методом дискретных особенностей применена модель, подобная использованной ранее для более простых задач в анизотропном однородном [22] и анизотропном неоднородном [23] пластах. Модель позволила установить, что при кусочно-гладком контуре питания в анизотропной и неоднородной среде или при гладком контуре в неоднородной анизотропной среде относительный дебит существенно другой по сравнению с однородным анизотропным случаем. При малых β на графике относительного дебита имеется пик, который постепенно «размывается» при увеличении недиагональных компонент тензора проницаемости. В существенно анизотропных средах (при больших значениях α и β) общий характер кривых качественно мало отличается от характера в анизотропной однородной среде.

Литература

1. *Абросимов А.А.* Применение рентгеномографии для изучения фильтрационно-емкостных систем коллекторов нефти и газа // Труды РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина. 2015. № 4(281). С. 5-15.
2. *Дмитриев Н.М., Мамедов М.Т., Максимов В.М.* Фильтрация с предельным градиентом в анизотропных средах. Теория и эксперимент // Вестник ННГУ. 2011. № 4(3). С. 749-750.
3. *Adams A.* Permeability anisotropy and resistivity anisotropy of mechanically compressed mudrocks / PhD Dissertation in Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2014. 561 p.
4. *Дмитриев Н.М., Мурадов А.А.* К определению коэффициента гидравлического сопротивления для фильтрационных течений в модельных пористых средах // Труды РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина. 2010. № 1(258). С. 45-57.
5. *Nordquist T.J.* Permeability anisotropy of resedimented mudrocks / MSc Dissertation in Civil and Environmental Engineering. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2015. 277 p.
6. *Zhao X., Toksoz M.N., Cheng C.H.* Stoneley wave propagation across borehole permeability heterogeneities // Earth Resources Laboratory Industry Consortia Annual Report. 1994-09. P. 227-270. <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/75232> (дата обращения: 04.07.2022)
7. *Дашевский Ю.А.* Изучение электрической анизотропии горных пород в скважинах методами стационарной геоэлектрики. Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та, 2008. 101 с.
8. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. 436 с.
9. *Арбе А.Г.* Физические основы фильтрации подземных вод. М.: Недра, 1984. 101 с.
10. *Маскет М.* Физические основы технологии добычи нефти. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 606 с.
11. *Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С.* Физико-механические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971. 452 с.
12. *Щелкачев В.Н., Ланук Б.Б.* Подземная гидравлика. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 736 с.
13. *Пивень В.Ф.* Математические модели фильтрации жидкости. Орёл: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2015. 408 с.
14. *Пивень В.Ф.* Исследование граничных задач плоскопараллельных течений жидкости в анизотропной пористой среде // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 9. С. 1286-1297. (English version <https://doi.org/10.1134/S0012266109090079>)
15. *Baron V., Coudière Y., Sochala P.* Comparison of DDFV and DG methods for flow in anisotropic heterogeneous porous media // Oil Gas Sci. Technol. – Rev. IFP Energies nouvelles. 2014. Vol. 69. P. 673-686. <https://doi.org/10.2516/ogst/2013157>
16. *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 628 с.
17. *Коллинз Р.* Течение жидкостей через пористые материалы. М.: Мир, 1964. 350 с.
18. *Пивень В.Ф.* Исследование двумерной фильтрации в анизотропно-неоднородном пористом слое // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2017. № 1. С. 14-24.
19. *Пивень В.Ф.* Обобщённый сингулярный интеграл Коши для граничных задач двумерных течений в анизотропно-неоднородном слое пористой среды // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1292-1307. (English version <https://doi.org/10.1134/S0012266112090078>)
20. *Губайдуллин Д.А., Никифоров А.И., Садовников Р.В.* Идентификация тензоров коэффициентов проницаемости неоднородного анизотропного трещиновато-пористого пласта // Вычисл. мех. сплош. сред. 2011. Т. 4, № 4. С. 11-19. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.35>
21. *Сираев Р.Р.* Фильтрация жидкости в пористой среде Форштеймера с пространственно неоднородными пористостью и проницаемостью // Вычисл. мех. сплош. сред. 2019. Т. 12, № 3. С. 281-292. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.24>
22. *Пивень В.Ф., Лekomцев Д.Г.* Исследование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Ученые записки Орловского государственного университета. 2014. № 3(59). С. 83-88.
23. *Пивень В.Ф., Лekomцев Д.Г.* Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта // Вычисл. мех. сплош. сред. 2016. Т. 9, № 4. С. 389-399. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.32>
24. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 297 с.
25. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.: Янус, 1995. 520 с.

References

1. Abrosimov A.A. X-ray tomography for study of oil and gas reservoir systems. *Trudy RGU nefiti i gaza im. I.M. Gubkina – Proceedings of Gubkin University*, 2015, no. 4(281), pp. 5-15.
2. Dmitriyev N.M., Mamedov M.T., Maksimov V.M. Fil'tratsiya s predel'nym gradiyentom v anizotropnykh sredakh. Teoriya i eksperiment [Flow with a limiting gradient in anisotropic porous media. Theory and experiment]. *Vestnik NNGU – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4(3), pp. 749-750.
3. Adams A. *Permeability anisotropy and resistivity anisotropy of mechanically compressed mudrocks*. PhD Dissertation in Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2014. 561 p.
4. Dmitriyev N.M., Muradov A.A. To determination of coefficient of hydraulic resistance for fluid flows in modeling porous media. *Trudy RGU nefiti i gaza im. I.M. Gubkina – Proceedings of Gubkin University*, 2010, no. 1(258), pp. 45-57.
5. Nordquist T.J. *Permeability anisotropy of resedimented mudrocks*. MSc Dissertation in Civil and Environmental Engineering, Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2015. 277 p.
6. Zhao X., Toksoz M.N., Cheng C.H. Stoneley wave propagation across borehole permeability heterogeneities. *Earth Resources Laboratory Industry Consortia Annual Report*, 1994-09, pp. 227-270. <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/75232> (accessed 4 July 2022)

7. Dashevskiy Yu.A. *Izucheniye elektricheskoy anizotropii gornykh porod v skvazhinakh metodami statsionarnoy geoelektriki* [Study of the electrical anisotropy of rocks in wells using the methods of stationary geoelectrics]. Novosibirsk, Publishing house of the Novosibirsk State University, 2008. 101 p.
8. Charnyy I.A. *Podzemnaya gidrogazodinamika* [Underground fluid dynamics]. Moscow-Izhevsk, Institute of Computer Science, 2006. 436 p.
9. Ar'ye A.G. *Fizicheskiye osnovy fil'tratsii podzemnykh vod* [Physical basis of groundwater filtration]. Moscow, Nedra, 1984. 101 p.
10. Muskat M. *Physical principles of oil production*. McGraw-Hill Book Company, 1949. 922 p.
11. Bear J., Zaslavsky D., Irmay S. *Physical principles of water percolation and seepage*. Unesco, 1968. 466 p.
12. Shchelkachev V.N., Lapuk B.B. *Podzemnaya gidravlika* [Underground hydraulics]. Moscow-Izhevsk, SIC "Regular and Chaotic Dynamics", 2001. 736 p.
13. Piven' V.F. *Matematicheskiye modeli fil'tratsii zhidkosti* [Mathematical models of fluid filtration]. Orel: Orel State University named after I.S. Turgenev, 2015. 408 p.
14. Piven' V.F. Investigation of boundary value problems for plane-parallel fluid flows in an anisotropic porous medium. *Diff. Equat.*, 2009, vol. 45, pp. 1313-1325. <https://doi.org/10.1134/S0012266109090079>
15. Baron V., Coudière Y., Sochala P. Comparison of DDFV and DG methods for flow in anisotropic heterogeneous porous media. *Oil Gas Sci. Technol. – Rev. IFP Energies nouvelles*, 2014, vol. 69, pp. 673-686. <https://doi.org/10.2516/ogst/2013157>
16. Muskat M. *The flow of homogeneous fluids through porous media*. Inc. Ann Arbor, 1946. 763 p.
17. Collins R.E. *Flow of fluids through porous materials*. Reinhold Publishing Corporation, 1961. 270 p.
18. Piven V.F. The study of two-dimensional filtering in anisotropic inhomogeneous porous layer. *Fundamental'nyye i prikladnyye problemy tekhniki i tekhnologii – Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology*, 2017, no. 1, pp. 14-24.
19. Piven' V.F., Generalized Cauchy singular integral for the boundary values of two-dimensional flows in an anisotropic-inhomogeneous layer of a porous medium. *Diff. Equat.*, 2012, vol. 48, pp. 1272-1287. <https://doi.org/10.1134/S0012266112090078>
20. Gubaidullin D.A., Nikiforov A.I., Sadovnikov R.V. Identification of permeability tensors of a heterogeneous anisotropic fractured porous reservoir. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 11-19. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.35>
21. Siraev P.P. Fluid transport in Forchheimer porous medium with spatially varying porosity and permeability. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2019, vol. 12, no. 3, pp. 281-292. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.24>
22. Piven V.F., Lekomtsev D.G. Issledovanie raboty sovershennoi skvazhiny v anizotropnom odnorodnom plaste grunta [Research work of a perfect well in an anisotropic homogeneous soil layer]. *Uchenyye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta – Scientific notes of Orel State University*, 2014, no. 3(59), pp. 83-88.
23. Piven V.F., Lekomtsev D.G. Analytical and numerical modeling of the work of a perfect well in anisotropic homogeneous soil formation]. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 389-399. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.32>
24. Bateman H., Erdelyi A. *Higher Transcendental Functions*. McGraw-Hill, 1953. Vol. 1. 302 p.
25. Lifanov I.K. *Metod singulyarnykh integral'nykh uravneniy i chislennyi eksperiment (v matematicheskoy fizike, aerodinamike, teorii uprugosti i difraktsii voln)* [Method of singular integral equations and numerical experiment (in mathematical physics, aerodynamics, theory of elasticity and wave diffraction)]. Moscow, Yanus, 1995. 520 p.

Поступила в редакцию 22.04.2022; после доработки 29.05.2022; принята к опубликованию 17.06.2022

Сведения об авторах

Пивень Владимир Федотович, дфмн, проф., Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева (ОГУ им. И.С. Тургенева), 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, д. 95; e-mail: PivenVF@gmail.com

Лekomтцев Денис Геннадьевич, б/с, ст. преп., ОГУ им. И.С. Тургенева; e-mail: lekomtcevdg@yandex.ru