

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.2.14](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.2.14)

УДК 539.3

## МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ТЕПЛОВЫХ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ ЯВЛЕНИЯ РЕЛАКСАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Л.А. Комар, А.Л. Свистков, А.Ю. Беляев

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

Предлагается метод вычислительного моделирования особенностей движения в материале тепловой волны в рамках линеаризованной задачи, возникающей при применении моделей переноса тепла с учетом релаксации теплового потока. Полагается, что пропорциональная зависимость между градиентом температуры и тепловым потоком (закон Фурье) не может возникать мгновенно при изменении поля температур в среде, на перестройку теплового потока требуется некоторое время. Подобный подход представлен в литературе. Так, модель Каттанео и Вернотте включает в себя уравнение поведения во времени теплового потока. Свойство инертности теплового потока отражено в большом количестве публикаций, однако главным образом рассматривается только перераспределение тепла в материале. Но есть задачи, в которых необходимо знать, как именно происходит изменение тепловых потоков в среде. Это особенно важно, когда получаемые данные используются при последующем определении полей напряжений в условиях зависимости последних не только от температуры и деформаций, но и от величины теплового потока. В работе показано, как построить удобную для вычислений систему уравнений для нахождения в материале поля температур и величины теплового потока. Установлено, что в линейной задаче исходные уравнения можно преобразовать в систему двух уравнений гиперболического типа, для которых имеются хорошо разработанные алгоритмы решения. В качестве примера рассматривается моделирование возникновения и движения тепловой волны во время ионно-плазменной обработки поверхности материала. Сформулированы условия для решения краевой задачи. Важными результатами вычислений стали картина формирования, отрыв от поверхности образца после завершения импульса ионов и начало движения в глубину материала тепловой волны в процессе ионно-плазменной обработки. Исследована зависимость решений от характерного времени релаксации теплового потока.

*Ключевые слова:* неравновесная термодинамика, релаксация теплового потока, тепловая волна, ионно-плазменная обработка, углеродный нанослой, вычислительное моделирование

## METHOD FOR SOLVING LINEARIZED THERMAL PROBLEMS TAKING INTO ACCOUNT THE PHENOMENON OF HEAT FLOW RELAXATION

L.A. Komar, A.L. Svistkov and A.Yu. Beliaev

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*

A method is proposed for computational modeling of the features of motion in a material of a thermal wave within the framework of a linearized problem. Such problems arise when applying heat transfer models with allowance for heat flux relaxation. It is assumed that the proportional relationship between the temperature gradient and the heat flux (Fourier's law) cannot appear instantly when the temperature field changes in the medium. It takes time to change the heat flow. This approach refers to the description of the time variations of the heat flux in the Cattaneo and Vernotte models. The method for solving thermal problems within this scope is reflected in a large number of publications, but they deal mainly with the redistribution of heat in the material. However, there are tasks the solution of which requires understanding of how exactly the change in heat fluxes in the medium occurs. This is especially important when the data are used to find solutions to the problems of determining stress (depending not only on temperature and strain, but also on the value of the heat flux) fields in media. The paper shows how to construct a system of equations convenient for calculations the temperature changes and heat flux fields. It has been established that in a linear problem the initial equations can be transformed into a system of two hyperbolic equations with developed solution algorithms. As an example, computational modeling of the emergence and movement of a thermal wave during the ion-plasma treatment of a material surface is considered. The conditions required for solving the boundary value problem are formulated. The important results of the calculations were the pattern of formation, detachment from the surface of the sample after the completion of the impulse, and the beginning of the movement of a thermal wave into the depth of the material during ion-plasma treatment. The dependence of solutions on the characteristic relaxation time of the heat flux is studied.

*Key words:* non-equilibrium thermodynamics, heat flow relaxation, thermal wave, ion-plasma treatment, carbon nanolayer, computational modeling

### 1. Введение

В современных технологиях существуют процессы, которые происходят на очень малых характерных размерах в течение очень коротких промежутков времени (лазерная обработка при изготовлении микросхем электроники, лазерная обработка тонких пленок толщиной в десятки нанометров, ионно-плазменная обработка полимерных изделий медицинского назначения и другие). Математическое моделирование таких процессов иногда требует использования расширенного математического аппарата неравновесной термодинамики. Тогда изменение теплового потока во времени рассматривается как релаксационный процесс. При этом наиболее известным вариантом описания теплового потока является закон Максвелла–Каттанео–Вернотте [1–4]. Существуют и более сложные формулировки эволюции теплового потока, например, см. [5–8]. Интересным результатом, полученным при моделировании тепловых процессов, служит появление тепловых волн. Подробный анализ соответствующих работ, выполненных в XX веке, приведен в обзорной статье [9].

Большое количество работ связано с решением задач в рамках линейного приближения. Как правило, в центре внимания находится формулирование уравнения теплопроводности с целью выявления новых особенностей перераспределения температуры в материале, которые не обнаруживаются на основе уравнения теплопроводности классического вида. Способы решения линейных уравнений с позиций расширенной неравновесной термодинамики широко представлены в литературе с использованием как аналитических, так и численных методов [10–16]. Например, авторы работы [10] применили закон сохранения энергии при отсутствии источника тепла и дифференциальную модель Каттанео–Вернотте [1–4], получили уравнение теплопроводности гиперболического типа и нашли несколько вариантов его точного аналитического решения. В [11] проведено исследование гиперболической задачи теплопроводности для бесконечного слоя, на который воздействует короткий лазерный импульс. Представлены результаты сравнения гиперболической и классической термоупругих постановок. В статье [12] разработан метод измерения времени тепловой релаксации в твердом теле. Показано, что найденное аналитическое решение гиперболической задачи теплопроводности с учетом инерционных и демпфирующих свойств тела не тождественно решению аналогичной классической задачи. Авторы [13–15] особое внимание уделяют оценке времени тепловой релаксации, при этом подчеркивают, что при обработке материалов сверхкороткими лазерными импульсами оно сопоставимо со временем протекания высокоинтенсивных нестационарных процессов. В [14, 16] построены простые аналитические выражения для значений максимумов и минимумов амплитуд колебаний, а также для частот, на которых эти максимумы имеют место. Изучение теплового переноса основано на гиперболической модели, связанной с уравнением Каттанео–Вернотте. Также полученные результаты позволили авторам разработать оригинальный метод определения времени термической релаксации. Формулировка одного из возможных вариантов определяющих уравнений с учетом конечных деформаций материала предложена в [17]. Важным здесь является то, что теплоемкость и напряжения в принятой к рассмотрению среде зависят также и от величины теплового потока.

В данной статье на обсуждение выносятся алгоритм построения системы линейных уравнений, дающий возможность с помощью стандартных программ, содержащихся в открытых вычислительных пакетах, определять как температуру, так и величину теплового потока при решении одномерных задач для эластомерных материалов.

## 2. Линейная система уравнений теплопроводности

Далее ограничимся рассмотрением только вопроса изменения температуры тела  $\theta$ ; положим, что деформации в материале малы, соответственно, ими можно пренебречь. Кроме того, предположим, что упругое сопротивление внешней нагрузке происходит за счет изменения энтропии без реакции на внешнее воздействие внутренней энергии. Данный подход справедлив при изучении поведения высокоэластичных материалов (эластомеров) при малых деформациях. Это означает, что массовая плотность свободной энергии  $f$  должна быть представлена в виде:

$$f = c_\theta \theta (1 - \ln \theta) + \frac{\tau(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})}{2\rho c_\theta \theta},$$

а изменение во времени теплового потока  $\mathbf{q}$  определяется уравнением:

$$\tau \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{q} - c_\theta \text{grad} \theta. \quad (1)$$

В работе [17] показано, что уравнение теплопроводности в этом случае принимает вид:

$$\rho c_\theta \left( 1 - \frac{\tau(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q})}{\rho c_\theta c_\theta \theta^2} \right) \dot{\theta} = -\frac{\tau}{c_\theta \theta} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) - \text{div} \mathbf{q} + \rho r, \quad (2)$$

где  $c_\theta$  — удельная теплоемкость,  $\tau$  — характерное время релаксации теплового потока,  $\rho$  — плотность материала,  $c_\theta$  — удельная теплоемкость,  $c_\theta$  — коэффициент теплопроводности,  $r$  — массовая плотность источников тепла. Точка над символами означает взятие материальной производной по времени. В практических приложениях могут встречаться ситуации, когда выражения  $\tau/(\rho c_\theta c_\theta \theta^2)$  и  $\tau/(c_\theta \theta)$  имеют малое значение (малое характерное время релаксации  $\tau$ ) и должны выполняться неравенства:

$$\frac{\tau}{\rho c_\theta c_\theta \theta^2} \ll \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}, \quad \frac{\tau}{c_\theta \theta} \ll (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}). \quad (3)$$

Тогда задачу можно решать в линейной постановке. Равенство (2) принимает вид:

$$\rho c_0 \dot{\theta} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r. \quad (4)$$

В литературе имеется много публикаций, связанных с поиском совместного решения уравнений (1) и (4). При этом все внимание уделяется нахождению температуры  $\theta$  в процессе перераспределения тепла по объему материала. В данной работе целью является создание эффективного алгоритма, позволяющего определять в материале тепловой поток  $\mathbf{q}$ . Это необходимо для того, чтобы контролировать выполнение условий (3) и в последующем иметь возможность анализировать возникающие поля напряжений. Как показано в работе [17], тензор напряжений Коши, в том числе, зависит от величины теплового потока.

Рассмотрим использование системы уравнений (1) и (2) при изучении процесса передачи тепла в полимерном материале при ионно-плазменной обработке. Ионы азота с кинетической энергией  $e$  внедряются в материал. При этом происходит торможение ионов, разрушение полимерных цепей, разогрев образца. Заметим, что на разогрев материала уходит только часть кинетической энергии ионов. Представим ее как  $\alpha$ . Другая часть кинетической энергии идет на разрушение полимерных цепей. Обработка производится импульсами продолжительностью  $\Delta t$ . Максимальную глубину, на которую могут проникнуть ионы, обозначим символом  $h$ . Не будем останавливаться на получении формулы, дающей возможность рассчитывать массовую плотность источников тепла в течение одного импульса обработки материала. Воспользуемся математическим выражением:

$$\rho r = \frac{2\alpha e N}{\Delta t h} \left(1 - \frac{x}{h}\right) H(h-x) H(\Delta t - t),$$

где  $H(\cdot)$  — функция Хэвисайда,  $N$  — количество ионов азота, которые во время одного импульса проходят через единицу площади поверхности образца,  $x$  — расстояние между рассматриваемой точкой полимерного материала и поверхностью образца. При значениях координаты  $x > h$  тепло не выделяется. Момент начала действия импульса будем считать начальным моментом времени  $t = 0$ .

В начальный момент времени температура во всех точках материала постоянна и в образце отсутствуют потоки тепла. Задача одномерная, рассматривается полубесконечный образец. Линейная система разрешающих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho c_0 \dot{\theta} &= -\frac{\partial q}{\partial x} + \rho r, \\ \tau \dot{q} &= -q - c_0 \frac{\partial \theta}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Символом  $q$  обозначена компонента теплового потока вдоль направления от границы в объем материала. В линеаризованной постановке материальная производная по времени равна частной производной по времени.

Задачу лучше решать численно, используя безразмерные величины. Перейдем к новым параметрам  $t_*$ ,  $x_*$ ,  $\theta_*$ ,  $q_*$  с помощью преобразований:

$$t = \tau t_*, \quad x = h x_*, \quad \theta = \frac{c_r \tau}{\rho c_0} \theta_*, \quad q = \frac{c_0 c_r \tau}{\rho c_0 h} q_*,$$

где  $c_r$  равно  $2\alpha e N / (\Delta t h)$ . Тогда система уравнений (5) примет вид:

$$\frac{\partial \theta_*}{\partial t_*} = -c_x \frac{\partial q_*}{\partial x_*} + (1 - x_*) H(1 - x_*) H(1 - t_*), \quad (6)$$

$$\frac{\partial q_*}{\partial t_*} = -q_* - \frac{\partial \theta_*}{\partial x_*}. \quad (7)$$

В уравнении (6) появилась безразмерная константа подобия  $c_x = c_0 \tau / (\rho c_0 h^2)$ .

Приведем систему уравнений (6) и (7) к виду, который даст возможность применить стандартные алгоритмы вычисления изменения во времени параметров  $\theta_*$ ,  $q_*$  в необходимых точках материала. Покажем, как уравнения (6) и (7) преобразуются в уравнения гиперболического вида, позволяющие воспользоваться готовыми пакетами программ. Предварительно сделаем следующее замечание: решение задачи будет состоять из двух шагов; на первом шаге решим систему уравнений (6) и (7) на интервале времени действия импульса во всем объеме материала, за исключением точки  $x_* = 1$  в момент времени  $t_* = 1$ ; полученные значения распределения температуры и теплового потока используем на следующем шаге как начальные условия для решения системы (6) и (7) при выключенном импульсе и отсутствии источника тепла.

Принимая во внимание это замечание, продифференцируем по времени уравнение (6). Придем к равенству:

$$\frac{\partial^2 \theta_*}{\partial t_*^2} = -c_x \frac{\partial^2 q_*}{\partial t_* \partial x_*}. \quad (8)$$

В свою очередь продифференцируем по координате уравнение (7):

$$\frac{\partial^2 q_*}{\partial t_* \partial x_*} = -\frac{\partial q_*}{\partial x_*} - \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial x_*^2}. \quad (9)$$

Исключим смешанную производную в (8) с помощью уравнения (9):

$$\frac{\partial^2 \theta_*}{\partial t_*^2} = c_x \frac{\partial q_*}{\partial x_*} + c_x \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial x_*^2}. \quad (10)$$

Учитывая (10), можно избавиться от частной производной  $\partial q_*/\partial x_*$  в уравнении (6). В результате имеем гиперболическое уравнение теплопроводности вида:

$$\frac{\partial^2 \theta_*}{\partial t_*^2} = -\frac{\partial \theta_*}{\partial t_*} + c_x \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial x_*^2} + (1-x_*)H(1-x_*)H(1-t_*). \quad (11)$$

Следующим шагом является получение гиперболического уравнения для потока тепла. Продифференцируем по времени уравнение (7):

$$\frac{\partial^2 q_*}{\partial t_*^2} = -\frac{\partial q_*}{\partial t_*} - \frac{\partial^2 \theta_*}{\partial t_* \partial x_*}, \quad (12)$$

и по координате равенство (6):

$$\frac{\partial^2 \theta_*}{\partial t_* \partial x_*} = -c_x \frac{\partial^2 q_*}{\partial x_*^2} - H(1-x_*)H(1-t_*). \quad (13)$$

Исключим с помощью (12) смешанную производную в уравнении (11). Имеем второе искомое гиперболическое уравнение:

$$\frac{\partial^2 q_*}{\partial t_*^2} = -\frac{\partial q_*}{\partial t_*} + c_x \frac{\partial^2 q_*}{\partial x_*^2} + H(1-x_*)H(1-t_*). \quad (14)$$

Прделанное преобразование позволяет перейти от системы двух уравнений к одному уравнению второго порядка. Такой подход эффективно используется в тех случаях, когда исследователей в большей степени интересует поведение, например, только теплового потока. При этом, из соображений целесообразности и экономии, решение задачи представляется в виде последовательного решения двух не зависимых друг от друга подзадач с меньшим числом искомых параметров в каждой из них. Благодаря этому требуются меньшие затраты машинного времени, снижаются вычислительные погрешности, связанные со скачкообразным изменением массовой плотности источника тепла.

В заключение осталось сформулировать граничные условия. Ионно-плазменная обработка материала осуществляется в вакууме. Отдавать тепло в полубесконечное пространство, свободное от вещества, можно

только с помощью излучения. Но этим процессом можно пренебречь по причине его незначительности. Поэтому считаем, что на границе образца в течение всего процесса обработки поток тепла отсутствует. Из этого следует, что на границе материала всегда выполняются равенства:  $q_* = 0$ ,  $\dot{q}_* = 0$ . С учетом этого, согласно уравнению (7), имеем:

$$\frac{\partial \theta_*}{\partial x_*} = 0.$$

Необходимое граничное условие для температуры получено.

### 3. Моделирование профилей тепловых потоков

Систему уравнений (11) и (14) применим для моделирования профилей тепловых потоков, возникающих за счет ионно-плазменной обработки полиуретанового материала со следующими свойствами: объемная плотность  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ , удельные теплоемкость  $c_0 = 1380 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{К}^{-1}$  и теплопроводность  $c_0 = 0,028 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{К}^{-1}$ . Распространение теплового потока рассматривалось при разных значениях кинетической энергии иона  $e$ . Глубина проникновения ионов равнялась 80 нм при  $e = 20$  кэВ и 40 нм при  $e = 10$  кэВ. Длительность импульса  $\Delta t$  задавалась равной 20 мкс. Эти данные соответствуют значениям величин в проводимых в ИМСС УрО РАН экспериментах. По имеющимся в литературе данным характерное время  $\tau$  меняется в очень широком диапазоне — от пикосекунд [18] до нескольких секунд [19, 20]. Для эластомерных материалов считаем, что наиболее правильным будет время, рассчитанное теоретически в работе [21] для наножидкостей. Поэтому для вычислений использовано время  $\tau = 10^{-4}$  с. Для сравнения проведены вычисления и для времен  $\tau$ , имеющих большие значения.

На рисунке 1 показаны профили изменения температуры в материале, вычисленные по модели с учетом релаксации теплового потока и по классическому уравнению, в котором связь между потоком тепла и градиентом температуры задавалась в виде закона Фурье. Расчеты осуществлены для случая, когда энергия ионов  $e$  в падающем на поверхность образца потоке равнялась 20 кэВ. В реальных процессах имеет место неоднородность концентрации распределения ионов в потоке. Оценим ситуацию, когда на рассматриваемый участок материала падает поток с концентрацией ионов в 5 раз большей, чем в среднем экспериментальном потоке. В расчетах количество ионов азота во время одного импульса, проходящего через единицу площади поверхности образца, составляло  $N = 2,5 \cdot 10^{11}$  ион/см<sup>2</sup>. Температура материала в начальный момент времени соответствовала 20°C. На рисунке хорошо видно принципиальное качественное отличие между результатами решения с использованием классической постановки задачи и по модели, учитывающей релаксацию теплового потока. В модели с релаксацией теплового потока ярко выражен характер формирования тепловой волны, которая распространяется от поверхности образца внутрь материала. После прекращения ионно-плазменной обработки (по истечению 20 мкс) волна отрывается от границы образца (Рис. 1а). В классической модели теплопроводности волна не формируется (Рис. 1б). Вид компоненты теплового потока  $q$  в задаче с учетом релаксации показан на рисунке 2. Несмотря на то, что в материале возникла тепловая волна, тепло всегда передается по направлению от границы внутрь образца.

Как и следовало ожидать, в рамках линеаризованной постановки задачи изменение кинетической энергии ионов  $e$  приводит к пропорциональному изменению величины  $\Delta\theta$  (Табл. 1). Однако зависимость  $\Delta\theta$  от значения характерного времени релаксации теплового потока  $\tau$  имеет более сложный характер. Увеличение параметра  $\tau$  приводит к повышению температуры. Это подтверждается данными,

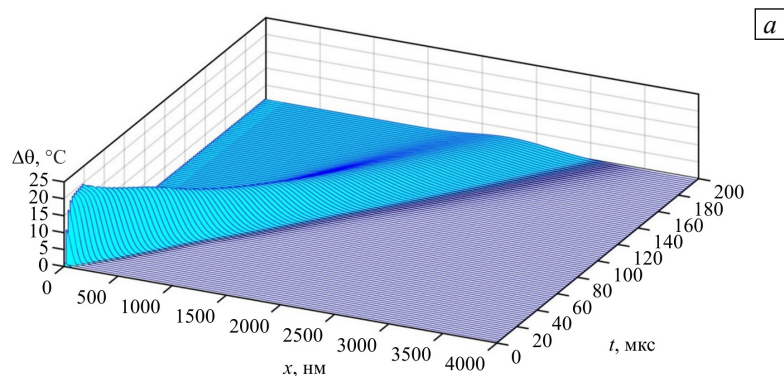


Рис. 1. Профили изменения температуры при характерном времени релаксации  $\tau = 10^{-4}$  с: численное решение (а); решение классического уравнения теплопроводности (б)

6

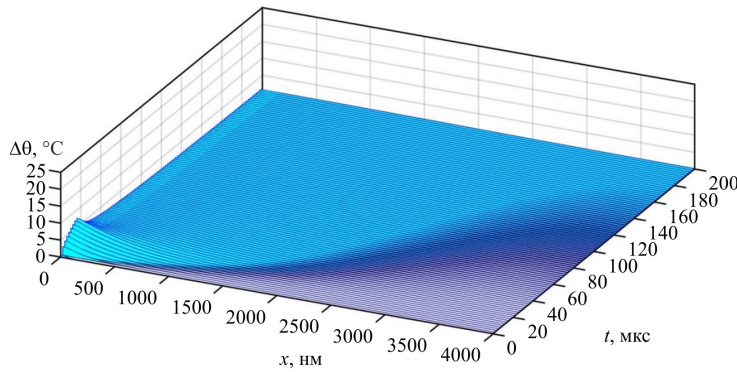
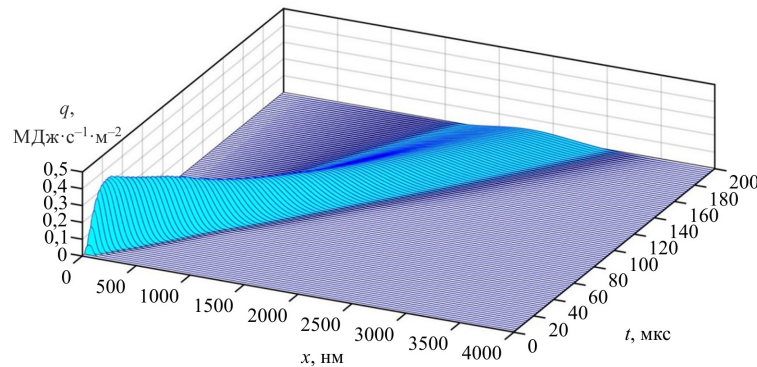


Рис. 1. Продолжение

Рис. 2. Профили компоненты теплового потока (численное решение) при характерном времени релаксации  $\tau = 10^{-4}$  сТаблица 1. Максимальное значение изменения температуры  $\Delta\theta$ , °C, вычисленное с учетом релаксации теплового потока

$e$ , кэВ	$\tau = 10^{-4}$ с	$\tau = 5 \cdot 10^{-4}$ с	$\tau = 10^{-3}$ с
10	10,1	21,1	29,6
20	20,0	41,9	57,3

Таблица 2. Отношения максимальных значений изменения температуры, вычисленных с учетом релаксации теплового потока и с помощью закона Фурье

$e$ , кэВ	$\tau = 10^{-4}$ с	$\tau = 5 \cdot 10^{-4}$ с	$\tau = 10^{-3}$ с
10	2,3	4,7	6,6
20	2,6	4,8	6,6

приведенными в таблицах 1 и 2. Полагаем, что наглядной иллюстрацией отличий классической теплопроводности от теплопроводности с релаксирующим потоком тепла служат отношения максимальных значений температуры, полученные при решении аналогичных задач (Табл. 2). В рамках осуществленных расчетов отличие достигало 6,6 раз, причем только при одном импульсе обработки материала. А таких импульсов в технологическом процессе может быть много.

Очевидно, что выявленная тенденция уменьшения значения величины  $\tau$  приводит к существованию ее предельного значения, при котором расхождение величин температур, полученных с помощью классической теории теплопроводности и теории с релаксирующим потоком тепла, сводится к минимуму. Предельным значением  $\tau$  является  $10^{-6}$  с.

Максимальное значение теплового потока при изменении характерного времени релаксации показано в таблице 3. Оно важно, так как может сказаться на виде и величине полей напряжений в материале,

Таблица 3. Максимальное значение теплового потока  $q$ ,  $\text{МДж} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$ , вычисленное с учетом релаксации

$e$ , кэВ	$\tau = 10^{-4}$ с	$\tau = 5 \cdot 10^{-4}$ с	$\tau = 10^{-3}$ с
10	0,194	0,158	0,127
20	0,388	0,327	0,255

влияющих на процесс формирования особых свойств на границе образца. Вывод следует из общих определяющих уравнений, приведенных в работе [17]. Однако этот момент требует специального анализа нелинейных задач.

#### 4. Заключение

Предложен способ получения двух независимых дифференциальных уравнений гиперболического типа, описывающих процесс формирования тепловой волны в полимерном материале, поверхность которого подвергается ионно-плазменной обработке. Построены профили температуры и теплового потока в материале, представляющие собой движущуюся волну от поверхности в глубину материала с отрывом от границы в момент времени прекращения действия внешнего нагружающего импульса. Сравнение авторского (численного) решения с решением задачи нагрева материала и перераспределения температуры в образце при классической постановке показало существенное отличие в распределении температуры.

Может создаться впечатление, что более высокая температура в тепловой волне передаваться как вглубь образца (на наступающем фронте волны), так и в сторону границы образца (на удаляющемся от поверхности образца фронте волны). Но расчеты не подтверждают это. Несмотря на появление тепловой волны, передача тепла в материале всегда происходит в направлении от границы, и волна тоже уходит в глубь материала.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА-А20-120022590044-7).

#### Литература

1. Maxwell J.C. On the dynamical theory of gases // Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1867. Vol. 157. P. 49-88.
2. Cattaneo C. Sulla Conduzione del Calore // Atti Del Seminario Matematico e Fisico Dell'università di Modena. 1948. Vol. 3. P. 83-101.
3. Cattaneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation // C. R. Acad. Sci. Paris. 1958. Vol. 247. P. 431-433.
4. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur // C. R. Acad. Sci. Paris. 1958. Vol. 246. P. 3154-3155.
5. Guyer R.A., Krumhansl J.A. Solution of the linearized phonon Boltzmann equation // Phys. Rev. 1966. Vol. 148. P. 766-777. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.148.766>
6. Guyer R.A., Krumhansl J.A. Thermal conductivity, second sound, and phonon hydrodynamic phenomena in nonmetallic crystals // Phys. Rev. 1966. Vol. 148. P. 778-788. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.148.778>
7. Guo Y., Wang M. Thermodynamic framework for a generalized heat transport equation // Commun. Appl. Ind. Math. 2016. Vol. 7. P. 167-176. <https://doi.org/10.1515/caim-2016-0012>
8. Guo Y., Jou D., Wang M. Macroscopic heat transport equations and heat waves in nonequilibrium states // Physica D. 2017. Vol. 342. P. 24-31. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2016.10.005>
9. Özişik M.N., Tzou D.Y. On the wave theory in heat conduction // J. Heat Transfer. 1994. Vol. 116. P. 526-535. <https://doi.org/10.1115/1.2910903>
10. Полянин А.Д., Вязьмин А.В. Дифференциально-разностные модели и уравнения теплопроводности и диффузии с конечным временем релаксации // ТОХТ. 2013. Т. 47, № 3. С. 271-278. <https://doi.org/10.7868/S0040357113030081>
11. Витохин Е.Ю., Бабенков М.Б. Численное и аналитическое исследование распространения термоупругих волн в среде с учетом релаксации теплового потока // ПМТФ. 2016. Т. 57, № 3. С. 171-185. <http://dx.doi.org/10.15372/PMTF20160318>
12. Курсанов Ю.А., Курсанов А.Ю., Юдахин А.Е. Метод измерения тепловой релаксации в твердом теле // ТВТ. 2018. Т. 56, № 3. С. 446-454. <https://doi.org/10.7868/S0040364418030183>
13. Курсанов Ю.А., Курсанов А.Ю. Описание кратковременного процесса уравнением теплопроводности с дробными производными // Труды Академэнерго. 2020. № 3. С. 7-19.
14. Ordóñez-Miranda J., Alvarado-Gil J.J. Thermal wave oscillations and thermal relaxation time determination in a hyperbolic heat transport model // Int. J. Therm. Sci. 2009. Vol. 48. P. 2053-2062. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2009.03.008>
15. Vedavarz A., Kumar S., Moallemi M.K. Significance of non-Fourier heat waves in conduction // J. Heat Transfer. 1994. Vol. 116. P. 221-224. <https://doi.org/10.1115/1.2910859>
16. Бабенков М.Б. Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 126-137. (English version <https://doi.org/10.1134/S0021894413020132>)
17. Комар Л.А., Свистков А.Л. Термодинамика упругого материала с релаксирующим потоком тепла // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 4. С. 152-157. <https://doi.org/10.31857/S0572329920040066>
18. Matsunaga R.H., dos Santos I. Measurement of the thermal relaxation time in agar-gelled water // 34th Annual International Conference of the IEEE EMBS. San Diego, California, USA, August 28 - September 1, 2012. P. 5722-5725. <https://doi.org/10.1109/EMBC.2012.6347294>
19. Mitra K., Kumar S., Vedavarz A., Moallemi M.K. Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat // J. Heat Transfer. 1995. Vol. 117. P. 568-573. <https://doi.org/10.1115/1.2822615>
20. Roetzel W., Putra N., Das S.K. Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure // Int. J. Therm. Sci. 2003. Vol. 42. P. 541-552. [https://doi.org/10.1016/S1290-0729\(03\)00020-6](https://doi.org/10.1016/S1290-0729(03)00020-6)

21. Khayat R.E., deBruyn J., Niknami M., Stranges D.F., Khorasany R.M.H. Non-Fourier effects in macro- and micro-scale non-isothermal flow of liquids and gases. Review // *Int. J. Therm. Sci.* 2015. Vol. 97. P. 163-177. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2015.06.007>

## References

1. Maxwell J.C. On the dynamical theory of gases. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 1867, vol. 157, pp. 49-88.
2. Cattaneo C. Sulla Conduzione del Calore. *Atti Del Seminario Matematico e Fisico Dell'università di Modena*, 1948, vol. 3, pp. 83-101.
3. Cattaneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1958, vol. 247, pp. 431-433.
4. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1958, vol. 246, pp. 3154-3155.
5. Guyer R.A., Krumhansl J.A. Solution of the linearized phonon Boltzmann equation. *Phys. Rev.*, 1966, vol. 148, pp. 766-777. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.148.766>
6. Guyer R.A., Krumhansl J.A. Thermal conductivity, second sound, and phonon hydrodynamic phenomena in nonmetallic crystals. *Phys. Rev.*, 1966, vol. 148, pp. 778-788. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.148.778>
7. Guo Y., Wang M. Thermodynamic framework for a generalized heat transport equation. *Commun. Appl. Ind. Math.*, 2016, vol. 7, pp. 167-176. <https://doi.org/10.1515/caim-2016-0012>
8. Guo Y., Jou D., Wang M. Macroscopic heat transport equations and heat waves in nonequilibrium states. *Physica D*, 2017, vol. 342, pp. 24-31. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2016.10.005>
9. Özişik M.N., Tzou D.Y. On the wave theory in heat conduction. *J. Heat Transfer*, 1994, vol. 116, pp. 526-535. <https://doi.org/10.1115/1.2910903>
10. Polyanin A.D., Vyazmin A.V. Differential-difference heat-conduction and diffusion models and equations with a finite relaxation time. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 47, 2013, pp. 217-224. <https://doi.org/10.1134/S0040579513030081>
11. Vitokhin E.Yu., Babenkov M.B. Numerical and analytical study of the propagation of thermoelastic waves in a medium with heat-flux relaxation. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2016, vol. 57, pp. 537-549. <https://doi.org/10.1134/S0021894416030184>
12. Kirsanov Yu.A., Kirsanov A.Yu., Yudakhin A.E. Method of measuring thermal relaxation in the solid state. *High Temp.*, 2018, vol. 56, pp. 425-432. <https://doi.org/10.1134/S0018151X18030112>
13. Kirsanov Yu.A., Kirsanov A.Yu. Description of the short-term process by the equation of heat conductivity with fractional derivatives. *Trudy Akademenergo – Transactions of Akademenergo*, 2020, no. 3, pp. 7-19.
14. Ordóñez-Miranda J., Alvarado-Gil J.J. Thermal wave oscillations and thermal relaxation time determination in a hyperbolic heat transport model. *Int. J. Therm. Sci.*, 2009, vol. 48, pp. 2053-2062. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2009.03.008>
15. Vedavarz A., Kumar S., Moallemi M.K. Significance of non-Fourier heat waves in conduction. *J. Heat Transfer*, 1994, vol. 116, pp. 221-224. <https://doi.org/10.1115/1.2910859>
16. Babenkov M.B. Propagation of harmonic perturbations in a thermoelastic medium with heat relaxation. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2013, vol. 54, pp. 277-286. <https://doi.org/10.1134/S0021894413020132>
17. Komar L.A., Svistkov A.L. Thermodynamics of elastic material with relaxing heat flux. *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, pp. 584-588. <https://doi.org/10.3103/S0025654420040056>
18. Matsunaga R.H., dos Santos I. *34th Annual International Conference of the IEEE EMBS. San Diego, California, USA, August 28 - September 1, 2012. Pp. 5722-5725.* <https://doi.org/10.1109/EMBC.2012.6347294>
19. Mitra K., Kumar S., Vedavarz A., Moallemi M.K. Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat. *J. Heat Transfer*, 1995, vol. 117, pp. 568-573. <https://doi.org/10.1115/1.2822615>
20. Roetzel W., Putra N., Das S.K. Experiment and analysis for non-Fourier conduction in materials with non-homogeneous inner structure. *Int. J. Therm. Sci.*, 2003, vol. 42, pp. 541-552. [https://doi.org/10.1016/S1290-0729\(03\)00020-6](https://doi.org/10.1016/S1290-0729(03)00020-6)
21. Khayat R.E., deBruyn J., Niknami M., Stranges D.F., Khorasany R.M.H. Non-Fourier effects in macro- and micro-scale non-isothermal flow of liquids and gases. Review. *Int. J. Therm. Sci.*, 2015, vol. 97, pp. 163-177. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2015.06.007>

Поступила в редакцию 14.02.2022; после доработки 17.05.2022; принята к опубликованию 14.06.2022

---

### Сведения об авторах

Комар Людмила Андреевна, кфмн, снс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: komar@icmm.ru  
Сvistkov Александр Львович, дфмн, зав. лаб., ИМСС УрО РАН; e-mail: svistkov@icmm.ru  
Беляев Антон Юрьевич, б/с, мнс, ИМСС УрО РАН; e-mail: belyaev@icmm.ru