

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.1.9](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.1.9)

УДК 532.529.5

К РАСЧЕТУ ТЕЧЕНИЙ ПАРОКАПЕЛЬНОЙ СМЕСИ С ВЗРЫВНЫМ МЕХАНИЗМОМ ВСКИПАНИЯ МНОГОМЕРНЫМ УЗЛОВЫМ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

В.С. Суров

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Российская Федерация

Представлена гиперболическая модель парокапельной смеси с учетом испарения капель по взрывному механизму, которая построена на основе ранее предложенной автором обобщенно-равновесной модели смеси. Для гиперболизации уравнений введены силы межфракционного взаимодействия. Жидкая фракция полагалась несжимаемой. В используемой модели считалось, что фазовый переход в процессе интенсивного испарения капель происходит в условиях перегретого состояния, когда температура жидкости превышает температуру насыщения. Проведен характеристический анализ уравнений модели и продемонстрирована их гиперболичность. Получена аналитическая формула для определения скорости звука в парокапельной смеси. Отмечено, что скорость звука в смеси при наличии фазовых превращений оказывается несколько меньшей, чем дает формула Вуда. Описан многомерный узловый метод характеристик, предназначенный для интегрирования гиперболических систем, который базируется на расщеплении исходной системы уравнений на ряд одномерных подсистем. Выведены дифференциальные соотношения, справедливые в характеристических направлениях для каждой из подсистем. При решении одномерных задач применен итерационный алгоритм обратного метода характеристик. Расчетный метод протестирован на ряде задач, имеющих автомодельные решения. С использованием выбранного метода интегрирования многомерной системы уравнений исследовано течение парокапельного потока около диска. Показано, что в ряде случаев необходимо учитывать взрывное вскипание капель жидкости, так как оно может существенно изменить картину обтекания диска.

Ключевые слова: парокапельная смесь, гиперболическая модель, многомерный узловый метод характеристик

CALCULATION OF STEAM DROP MIXTURE FLOWS WITH BOILING EXPLOSION MECHANISM USING A MULTIDIMENSIONAL NODAL METHOD OF CHARACTERISTICS

V.S. Surov

South Ural State University (NRU), Chelyabinsk, Russian Federation

A hyperbolic model of a vapor-drop mixture is presented which takes into account the evaporation of drops by highlighting an explosive mechanism. The model is developed on the basis of the generalized-equilibrium model of a mixture previously proposed by the author. In this early model, the equations were hyperbolized by adding interfractional-interaction forces, and the liquid fraction was assumed to be incompressible. In the model proposed here, we assume that the phase transition at intense droplet evaporation occurs in an overheated state, when the fluid temperature exceeds the saturation temperature. A characteristic analysis of the model equations is carried out and their hyperbolicity is shown. An analytical formula is obtained for calculating the speed of sound in a vapor-drop mixture. It is noted that the speed of sound in the mixture in the presence of phase transformations turns out to be somewhat lower than that given by Wood's formula. The multidimensional nodal method of characteristics for integrating hyperbolic systems, which is based on splitting the original system of equations into a number of one-dimensional subsystems, is described. Differential relations that hold true along the characteristic directions for each of the subsystems are derived. When calculating one-dimensional problems, an iterative algorithm of the inverse method of characteristics is applied. The computational method has been tested on a number of problems with self-similar solutions. Using the described method of integrating a multidimensional system of equations, the flow of a vapor-droplet flow near the disk was studied. It is shown that, in a number of cases, the explosive boiling of liquid droplets should be taken into account because it can significantly change the pattern of the flow around a disk.

Key words: vapor droplet mixture, hyperbolic model, multidimensional nodal method of characteristics

1. Введение

Представляется модель парокапельной смеси, в которой учтено испарение капель по механизму взрывного вскипания. За базу взята односкоростная обобщенно-равновесная (ОР) гиперболическая двухтемпературная модель из [1]. Ранее ОР-модель использовалась автором при моделировании волновых процессов во вспененных жидкостях и пузырьковых средах [2], при изучении течений вязких теплопроводных смесей (при этом вместо оригинальных законов Фурье и Стокса применялись их релаксационные аналоги [3]), а также для локализации контактных поверхностей в многожидкостной гидродинамике. Результаты, обсуждаемые в настоящей работе, свидетельствуют, что ОР-модель также приемлема для исследования многомерных течений при наличии фазовых превращений по механизму взрывного (объемного) вскипания жидкости; показывается, что тип системы уравнений не меняется — она остается гиперболической. Сохранение гиперболичности позволяет найти, в частности, аналитическое выражение для скорости перемещения звуковых волн в смеси в присутствии фазовых превращений. Решения одномерных задач в рамках этой модели осуществлены в [4]. Следует отметить, что ранее модель взрывного вскипания использовалась при моделировании перегретой жидкости в условиях резкого изменения внешнего давления, например, при разгерметизации трубопровода [5], но не для изучения

течений парокапельной смеси. Однако ОР-модель может быть использована для вычисления параметров течений и с другим механизмом фазового превращения — поверхностным испарением с границ раздела сред [6–8]. Для достаточно «мелких» капель, которые и являются далее главным объектом исследования, односкоростное приближение оправдано. Это подтверждается в работе [9], в которой проводилось непосредственное сравнение с результатами решения близкой к рассматриваемой в данной статье задаче, описываемой односкоростной моделью и моделью, учитывающей скоростную неравновесность. Интегрирование уравнений модели осуществлено методом характеристик (МХ), суть которого состоит в переходе от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые записываются вдоль характеристических направлений. Различные схемы многомерного МХ приведены в [10].

В представляемой вниманию читателя работе используется вариант многомерного МХ, основанный на расщеплении исходной системы уравнений по пространственным переменным на ряд одномерных подсистем с их последующим интегрированием с помощью одномерного узлового МХ [11]. Такой способ расщепления по направлениям аналогичен подходу из [12]. В отличие от известного метода дробных шагов [13], в алгоритме дробные временные шаги не применяются. Важно, что, несмотря на производимое в описанном ниже многомерном узловом МХ большее, чем у ряда конечноразностных или конечно-объемных методов число арифметических операций, общее расчетное время вследствие большего временного шага зачастую оказывается существенно меньшим. Кроме того, программная реализация многомерного узлового МХ гораздо проще, чем многих конечно-объемных методик, из-за отсутствия трудоемкой процедуры построения сеток в области вычислений с последующим решением задач Римана на гранях смежных ячеек, например, как в методе Годунова, что особенно актуально для задач со сложной геометрией расчетной области.

2. Модель парокапельной смеси

Уравнения, описывающие осесимметричное течение односкоростной парокапельной смеси, в которой для упрощения жидкость полагается несжимаемой (в [14] это приближение снято) при наличии фазовых превращений и выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии для каждой из составляющих смесь фракций в дивергентной форме имеют вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 u}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 v}{\partial r} + \frac{\alpha_{st} \rho_{st}^0 v}{r} = J, \\
 & \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 u}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{st} (p + \rho_{st}^0 u^2)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 uv}{\partial r} + \frac{\alpha_{st} \rho_{st}^0 uv}{r} = f_x + Ju, \\
 & \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 vu}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{st} (p + \rho_{st}^0 v^2)}{\partial r} + \frac{\alpha_{st} \rho_{st}^0 v^2}{r} = f_r + Jv, \\
 & \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 e_{st}}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{st} u (\rho_{st}^0 e_{st} + p)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{st} v (\rho_{st}^0 e_{st} + p)}{\partial r} + \frac{\alpha_{st} v (\rho_{st}^0 e_{st} + p)}{r} = f_x u + f_r v + J e_s, \\
 & \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0 u}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0 v}{\partial r} + \frac{\alpha_s \rho_s^0 v}{r} = -J, \\
 & \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0 u}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_s (p + \rho_s^0 u^2)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0 vu}{\partial r} + \frac{\alpha_s \rho_s^0 vu}{r} = -f_x - Ju, \\
 & \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0 v}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0 u^2}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_s (p + \rho_s^0 v^2)}{\partial r} + \frac{\alpha_s \rho_s^0 v^2}{r} = -f_r - Jv, \\
 & \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0 e_s}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_s u (\rho_s^0 e_s + p)}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_s v (\rho_s^0 e_s + p)}{\partial r} + \frac{\alpha_s v (\rho_s^0 e_s + p)}{r} = -f_x u - f_r v - J e_s.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь: p — давление; u и v — компоненты вектора скорости, соответственно, в направлении оси симметрии Ox и оси Or ; J — интенсивность парообразования на единицу объема смеси; \mathbf{f} — вектор плотности силы межфракционного взаимодействия с компонентами (f_x, f_r) , обеспечивающий отсутствие относительного проскальзывания фракций, которые заранее неизвестны и определяются в процессе интегрирования системы (1) [1]; α_i — объемная доля i -й фракции в смеси ($i = s, st$; индексами «s» и «st» отмечены несжимаемая фракция и пар), $\alpha_{st} + \alpha_s = 1$; ρ_i^0 — физическая плотность i -й составляющей; $e_i = \varepsilon_i + (u^2 + v^2)/2$ — удельная полная энергия; $\varepsilon_{st} = \varepsilon_{st}(p, \rho_{st}^0)$ и $\varepsilon_s = c_{v,s} \theta_s + \varepsilon_{s0}$ — удельные внутренние

энергии пара и несжимаемой фракции; $c_{v,s}$ — теплоемкость жидкости; θ_s — температура дисперсной фракции. Важно, что если не включать в уравнения модели силы межфракционного взаимодействия, то система (1) теряет свойство гиперболичности [1]. В работе исследовались процессы на достаточно малых временных интервалах, измеряемых миллисекундами, поэтому межфракционный теплообмен не учитывался. Интенсивность фазового перехода вода–пар рассчитывалась из соотношения [15]:

$$J = 2\pi a m \rho_{st}^0 D_s \text{Ja Nu}, \quad (2)$$

где безразмерные числа Якоба (Ja) и Нуссельта (Nu) определялись из выражений:

$$\text{Ja} = \frac{c_s \rho_s^0}{h \rho_{st}^0} [\theta_s - \theta_N(p)], \quad \text{Nu} = 2 + \left(\frac{6 \text{Ja}}{\pi} \right)^{1/3} + \frac{12 \text{Ja}}{\pi}.$$

В (2) приняты обозначения: $D_s = \lambda_s / (c_s \rho_s^0)$ — коэффициент температуропроводности; λ_s и c_s — теплопроводность и теплоемкость жидкости; h — удельная теплота парообразования; a — радиус капли (для упрощения считалось, что все капли имеют одинаковый размер); m — число капель в единице объема смеси. Последние два параметра связаны с объемной долей жидкой фракции в смеси соотношением $\alpha_s = (4/3)\pi m a^3$. Температура насыщения $\theta_N(p)$ определялась из выражения

$$\theta_N(p) = \theta_{**} - \theta_s / \ln(p/p_*),$$

где для воды $p_* = 20,2 \cdot 10^9$ Па, К, $\theta_{**} = 31$ К [16]. В расчетах полагалось, что фазовый переход в процессе взрывного вскипания капель происходит в условиях перегретого состояния, когда температура жидкости превышает температуру насыщения, то есть при $\theta_s - \theta_N(p) > \Delta\theta_s$, где $\Delta\theta_s$ — перегрев жидкости.

После суммирования соответствующих законов сохранения по составляющим смесь фракциям получают законы сохранения массы, импульса и энергии для смеси в целом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} &= 0, & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial r} + \frac{\rho u v}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial r} + \frac{\rho v^2}{r} &= 0, & (3) \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial u(\rho e + p)}{\partial x} + \frac{\partial v(\rho e + p)}{\partial r} + \frac{v(\rho e + p)}{r} &= 0, \end{aligned}$$

где $\rho = \alpha_{st} \rho_{st}^0 + \alpha_s \rho_s^0$ — плотность смеси, $\varepsilon = (1/\rho)(\alpha_{st} \rho_{st}^0 \varepsilon_{st} + \alpha_s \rho_s^0 \varepsilon_s)$ и $e = \varepsilon + (u^2 + v^2)/2$ — удельные внутренняя и полная энергии смеси на единицу объема. Уравнения (3) в квазилинейной форме имеют вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \quad \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = 0,$$

где $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial r}$. Соответствующие законы сохранения для пара и жидкости из (1) будут следующими:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho_{st}}{Dt} &= \frac{\rho_{st}}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + J, & \rho_{st} \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial \alpha_{st} p}{\partial x} &= f_x, \\ \rho_{st} \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial \alpha_{st} p}{\partial r} &= f_r, & \rho_{st} \frac{D\varepsilon_{st}}{Dt} - \frac{\alpha_{st} p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} &= J(\varepsilon_s - \varepsilon_{st}), \\ \frac{D\alpha_s}{Dt} &= \frac{\alpha_s}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - \frac{J}{\rho_s^0}, & \rho_s \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial \alpha_s p}{\partial x} &= -f_x, \\ \rho_s \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial \alpha_s p}{\partial r} &= -f_r, & \frac{D\varepsilon_s}{Dt} &= \frac{p}{\rho \rho_s^0} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{J}{2\rho_s} (u^2 + v^2), \end{aligned}$$

где $\rho_k = \alpha_k \rho_k^0$ — приведенная плотность k -й фракции ($k = s, st$). С учетом равенств:

$$\frac{D\varepsilon_{st}}{Dt} = \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} \frac{D\rho_{st}^0}{Dt}, \quad \frac{D\alpha_{st}}{Dt} = \frac{J}{\rho_s^0} - \frac{\alpha_s}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \quad \frac{D\rho_{st}^0}{Dt} = \frac{1}{\alpha_{st}} \left[\frac{D\rho}{Dt} - (\rho_s^0 - \rho_{st}^0) \frac{D\alpha_s}{Dt} \right],$$

закон сохранения энергии для смеси в целом может быть переписан как

$$\frac{Dp}{Dt} - c^2 \frac{D\rho}{Dt} = \Pi,$$

где

$$c^2 = \left(p - \frac{(\rho_{st}^0)^2}{\alpha_{st}} \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} \right) \left(\rho \rho_{st}^0 \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial p} \right)^{-1}, \quad (4)$$

$$\Pi = J \left[\varepsilon_s - \varepsilon_{st} + \frac{\rho_{st}^0}{\rho_s^0} \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} (\rho_s^0 - \rho_{st}^0) - \frac{u^2 + v^2}{2} \right] \left(\alpha_{st} \rho_{st}^0 \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial p} \right)^{-1}.$$

Здесь c — скорость звука в смеси. Таким образом, уравнения осесимметричного движения парокapельной смеси при наличии фазовых превращений в квазилинейной форме принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= \Pi, \quad (5) \\ \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha_s}{\partial x} + v \frac{\partial \alpha_s}{\partial r} + \alpha_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= -\frac{J}{\rho_s^0}, \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + u \frac{\partial \theta_s}{\partial x} + v \frac{\partial \theta_s}{\partial r} + \frac{p}{c_{v,s} \rho_s^0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= \frac{u^2 + v^2}{\alpha_s c_{v,s} \rho_s^0} J. \end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения системы (5) — действительные числа. Кроме того, собственные векторы, соответствующие собственным значениям системы, линейно независимы, поэтому система (5) относится к гиперболическому типу [17]. К тому же в (5) отсутствуют плотности сил межфракционного взаимодействия. В случае необходимости их можно найти из исходной системы уравнений (1).

В качестве калорического и термического уравнений состояния водяного пара использовались следующие [18]:

$$\varepsilon_{st} = \frac{(p + \gamma_{st} p_{st})(1 - \rho_{st}^0 b_{st})}{(\gamma_{st} - 1) \rho_{st}^0} + q_{st}, \quad \theta_{st} = \frac{(p + p_{st})(1 - \rho_{st}^0 b_{st})}{(\gamma_{st} - 1) \rho_{st}^0 c_{v,st}}, \quad (6)$$

где $\gamma_{st} = 1,47$, $p_{st} = 0$, $q_{st} = 2,077616 \cdot 10^6$ Дж/кг, $c_{v,st} = 0,955 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $b_{st} = 0$. Также применялись соотношения из [19]

$$\varepsilon_{st} = c_{v,st} \theta_{st} + \varepsilon_{st}^{ch}, \quad p = R_{st} \rho_{st}^0 \theta_{st}, \quad (7)$$

справедливые при давлениях менее 10 атм. Здесь: $c_{v,st}^* = 1,43 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К); $R_{st} = 461,7$ Дж/(кг·К); $\varepsilon_{st}^{ch} = 1,93 \cdot 10^6$ Дж/кг. Выражения для квадрата скорости звука из (4), в случае использования (6) и (7), принимают соответственно вид:

$$c^2 = \frac{p(\gamma_{st} + \alpha_s / \alpha_{st})}{\rho}, \quad c_*^2 = \frac{p(R_{st} / c_{v,st}^* + 1 / \alpha_{st})}{\rho}.$$

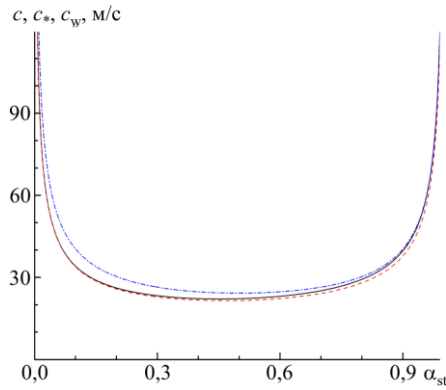


Рис. 1. Зависимости $c(\alpha_{st})$ – сплошная кривая, $c_*(\alpha_{st})$ – штриховая, $c_w(\alpha_{st})$ – штрихпунктирная

На рисунке 1 представлены зависимости от α_{st} скоростей звука c и c_* для пароводяной смеси ($\rho_s^0 = 1000 \text{ кг/м}^3$) при нормальных условиях, а также кривая $c_w(\alpha_{st})$, рассчитанная по формуле Вуда [20]

$$c_w^2 = c_{st}^2 \frac{\rho_{st}}{\alpha_{st} \rho}, \quad \text{где } c_{st}^2 = \frac{\gamma_{st}(p + p_{st})}{\rho_{st}^0 (1 - b_{st} \rho_{st}^0)}$$

скорости звука в жидкости при учете фазовых превращений, вычисленные с учетом соотношений (6) и (7), оказываются близкими, но несколько меньшими, чем дает формула Вуда.

3. Многомерный узловый метод характеристик

Рассмотрим малый временной интервал, а именно равный шагу интегрирования по времени для системы (5).

Изменения параметров, которые они претерпевают за это время, можно установить, суммируя локальные изменения, происходящие по отдельным координатным направлениям. Иными словами, для нахождения приближенного решения системы (5) в указанном промежутке времени сначала нужно решить подсистему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} \right) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} \right) &= \Pi, & \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha_s}{\partial x} + \alpha_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} \right) &= -\frac{J}{\rho_s^0}, & & (8) \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + u \frac{\partial \theta_s}{\partial x} + \frac{p}{c_{v,s} \rho_s^0} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} \right) &= J \frac{u^2 + v^2}{c_{v,s} \rho_s} \end{aligned}$$

получающуюся из (5) при оставленных слагаемых, изменяющих параметры течения в направлении оси симметрии Ox . Затем, после интегрирования (8), базирясь на новом распределении определяющих переменных, проинтегрировать следующую подсистему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial r} + \rho c^2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= \Pi, & & (9) \\ \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} + v \frac{\partial \alpha_s}{\partial r} + \alpha_s \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= -\frac{J}{\rho_s^0}, & \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + v \frac{\partial \theta_s}{\partial r} + \frac{p}{c_{v,s} \rho_s^0} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) &= J \frac{u^2 + v^2}{c_{v,s} \rho_s} \end{aligned}$$

в которой учитываются изменения вдоль координатного направления Or .

Характеристическое уравнение подсистемы (8) имеет только действительные корни: $\xi_1 = u - c$, $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = u$, $\xi_6 = u + c$. Соотношения совместности вдоль характеристических направлений $dx/dt = u \pm c$ представляются как

$$dp \pm \rho c du = \frac{1}{u \pm c} \left(\Pi - \rho c^2 \frac{v}{r} \right) dt. \quad (10)$$

На траекторной характеристике $dx/dt = u$ выполняются равенства:

$$dv = 0, \quad dp - c^2 d\rho = \Pi, \quad d\alpha_s - \frac{\alpha_s}{\rho} d\rho = -\frac{1}{\rho_s^0} J, \quad c_{v,s} \rho_s^0 d\theta_s - \frac{p}{\rho} d\rho = J \frac{u^2 + v^2}{\alpha_s}, \quad (11)$$

которые непосредственно следуют из подсистемы (8).

Аналогичные соотношения справедливы и для (9). Характеристическое уравнение подсистемы (9) обладает корнями $\xi_1 = v - c$, $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = v$, $\xi_6 = v + c$. Соотношения совместности вдоль

характеристических направлений $dr/dt = v \pm c$ имеют вид:

$$dp \pm \rho c dv = \frac{1}{v \pm c} \left(\Pi - \rho c^2 \frac{v}{r} \right) dt. \quad (12)$$

На траекторной характеристике $dr/dt = v$ выполняются равенства:

$$du = 0, \quad dp - c^2 d\rho = \Pi, \quad d\alpha_s - \frac{\alpha_s}{\rho} d\rho = -\frac{1}{\rho_s^0} J, \quad d\theta_s - \frac{p}{\rho c_{v,s} \rho_s^0} d\rho = J \frac{u^2 + v^2}{\alpha_s c_{v,s} \rho_s^0}. \quad (13)$$

На основании вышеизложенного при переходе с t^n -го временного шага на шаг $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ процесс вычислений разбивается на ряд промежуточных расчетов, в каждом из которых узлы расчетной области перебираются сначала вдоль оси Ox , и в них производятся вычисления по итерационной процедуре одномерного узлового МХ [11]:

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p_L^{(\sigma)} + (\rho c)_L^{(\sigma)} [\tilde{u}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - u_L^{(\sigma)}] &= \left(\frac{\Pi - \rho c^2 v/r}{u + c} \right)_L^{(\sigma)} \Delta t, \\ \tilde{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p_R^{(\sigma)} - (\rho c)_R^{(\sigma)} [\tilde{u}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - u_R^{(\sigma)}] &= \left(\frac{\Pi - \rho c^2 v/r}{u - c} \right)_R^{(\sigma)} \Delta t, \\ \tilde{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p_C^{(\sigma)} - (c_C^{(\sigma)})^2 [\tilde{\rho}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - \rho_C^{(\sigma)}] &= \Pi_C^{(\sigma)}, \\ \tilde{\alpha}_s^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - \alpha_{sC}^{(\sigma)} - \left(\frac{\alpha_s}{\rho_C^{(\sigma)}} \right)_C^{(\sigma)} [\tilde{\rho}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - \rho_C^{(\sigma)}] &= -\frac{1}{\rho_s^0} J_C^{(\sigma)}, \\ \tilde{\theta}_s(x_k, t^{n+1})^{(\sigma+1)} - (\theta_s)_C^{(\sigma)} + \left(\frac{p}{c_{v,s} \rho_s^0} \right)_C^{(\sigma)} [\tilde{\rho}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - \rho_C^{(\sigma)}] &= \frac{1}{c_{v,s} \rho_s^0} \left(J \frac{u^2 + v^2}{\alpha_s} \right)_C^{(\sigma)}, \\ \tilde{v}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) &= v_C^{(\sigma)}, \end{aligned} \quad (14)$$

где σ — номер итерации, индексами L, C и R отмечены точки пересечения характеристик $dx/dy = u + c$, $dx/dy = c$ и $dx/dy = u - c$, выпущенных из узла $((x_k, t^{n+1}))$ с временным уровнем $t = t^n$. В результате на $(n+1)$ -м шаге по времени определяются промежуточные значения параметров смеси $(\tilde{p}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\rho}, \tilde{\alpha}_s, \tilde{\theta}_s)^{n+1}$ во внутренних узлах расчетной области. Выражения (14) представляют собой конечноразностные аналоги соотношений (10), (11). Затем с использованием этих величин перебором узлов вдоль оси Or рассчитываются окончательные значения $(p, u, v, \rho, \alpha_s, \theta_s)^{n+1}$ согласно процедуре одномерного узлового МХ в направлении оси Or :

$$\begin{aligned} p^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - \tilde{p}_L^{(\sigma)} + (\tilde{\rho} \tilde{c})_L^{(\sigma)} [\tilde{v}^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - \tilde{v}_L^{(\sigma)}] &= \left(\frac{\tilde{\Pi} - \tilde{\rho} \tilde{c}^2 \tilde{v}/r}{\tilde{v} + \tilde{c}} \right)_L^{(\sigma)} \Delta t, \\ p^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - \tilde{p}_R^{(\sigma)} - (\tilde{\rho} \tilde{c})_R^{(\sigma)} [\tilde{v}^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - \tilde{v}_R^{(\sigma)}] &= \left(\frac{\tilde{\Pi} - \tilde{\rho} \tilde{c}^2 \tilde{v}/r}{\tilde{v} - \tilde{c}} \right)_R^{(\sigma)} \Delta t, \\ p^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - \tilde{p}_C^{(\sigma)} - (\tilde{c}_C^{(\sigma)})^2 [\tilde{\rho}^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - \tilde{\rho}_C^{(\sigma)}] &= \tilde{\Pi}_C^{(\sigma)}, \\ \alpha_s^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - (\tilde{\alpha}_s)_C^{(\sigma)} - \left(\frac{\tilde{\alpha}_s}{\tilde{\rho}} \right)_C^{(\sigma)} [\tilde{\rho}^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - \tilde{\rho}_C^{(\sigma)}] &= -\frac{1}{\rho_s^0} \tilde{J}_C^{(\sigma)}, \\ \theta_s(r_m, t^{n+1})^{(\sigma+1)} - (\tilde{\theta}_s)_C^{(\sigma)} + \left(\frac{\tilde{p}}{c_{v,s} \rho_s^0 \tilde{\rho}} \right)_C^{(\sigma)} [\tilde{\rho}^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - \tilde{\rho}_C^{(\sigma)}] &= \frac{1}{c_{v,s} \rho_s^0} \left(\tilde{J} \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{\tilde{\alpha}_s} \right)_C^{(\sigma)}, \\ u^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) &= \tilde{u}_C^{(\sigma)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Соотношения (15) есть конечноразностное представление равенств (12), (13).

В приложении к конкретным задачам, например, к обтеканию диска, параметры смеси в граничных узлах, расположенных на левом торце диска (с наветренной стороны), обеспечивающие выполнение условия непротекания, определяются из выражений:

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p_R^{(\sigma)} + (\rho c u)_R^{(\sigma)} &= \left(\frac{\Pi - \rho c^2 u/r}{u - c} \right)_R^{(\sigma)} \Delta t, \\ \tilde{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p_C^{(\sigma)} - (c_C^{(\sigma)})^2 [\tilde{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p_C^{(\sigma)}] &= \Pi_C^{(\sigma)}, \\ \tilde{\alpha}_s^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - (\alpha_s)_C^{(\sigma)} - \left(\frac{\alpha_s}{\rho_C^{(\sigma)}} \right)_C^{(\sigma)} [\tilde{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p_C^{(\sigma)}] &= -\frac{1}{\rho_s^{(\sigma)}} J_C^{(\sigma)}, \\ \tilde{\theta}_s(x_k, t^{n+1})^{(\sigma+1)} - (\theta_s)_C^{(\sigma)} + \left(\frac{p}{c_{v,s} \rho_s^0 \tilde{\rho}} \right)_C^{(\sigma)} [\tilde{p}(x_k, t^{n+1})^{(\sigma+1)} - p_C^{(\sigma)}] &= \frac{1}{c_{v,s} \rho_s^0} \left(J \frac{u^2 + v^2}{\alpha_s} \right)_C^{(\sigma)}, \\ \tilde{v}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) &= v_C^{(\sigma)}. \end{aligned}$$

Для граничных узлов на тыльной стороне диска справедливы аналогичные соотношения, кроме первого. Его следует заменить следующим:

$$\tilde{p}^{(\sigma+1)}(x_k, t^{n+1}) - p_L^{(\sigma)} - (\rho c u)_L^{(\sigma)} = \left(\frac{\Pi - \rho c^2 u/r}{u + c} \right)_L^{(\sigma)} \Delta t.$$

В узлах на ребре диска параметры смеси находятся из выражений:

$$\begin{aligned} p^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - \tilde{p}_R^{(\sigma)} + (\tilde{\rho} \tilde{c} \tilde{v})_R^{(\sigma)} &= \left(\frac{\tilde{\Pi} - \tilde{\rho} \tilde{c}^2 \tilde{v}/r}{\tilde{v} - \tilde{c}} \right)_R^{(\sigma)} \Delta t, \\ p^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - \tilde{p}_C^{(\sigma)} - (\tilde{c}_C^{(\sigma)})^2 [p^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - \tilde{p}_C^{(\sigma)}] &= \tilde{\Pi}_C^{(\sigma)}, \\ \alpha_s^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - (\tilde{\alpha}_s)_C^{(\sigma)} - \left(\frac{\tilde{\alpha}_s}{\tilde{\rho}} \right)_C^{(\sigma)} [p^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) - \tilde{p}_C^{(\sigma)}] &= -\frac{1}{\rho_s^{(\sigma)}} \tilde{J}_C^{(\sigma)}, \\ \theta_s(r_m, t^{n+1})^{(\sigma+1)} - (\tilde{\theta}_s)_C^{(\sigma)} + \left(\frac{\tilde{p}}{c_{v,s} \rho_s^0 \tilde{\rho}} \right)_C^{(\sigma)} [p(r_m, t^{n+1})^{(\sigma+1)} - \tilde{p}_C^{(\sigma)}] &= \frac{1}{c_{v,s} \rho_s^0} \left(\tilde{J} \frac{u^2 + \tilde{v}^2}{\tilde{\alpha}_s} \right)_C^{(\sigma)}, \\ u^{(\sigma+1)}(r_m, t^{n+1}) &= \tilde{u}_C^{(\sigma)}. \end{aligned}$$

4. Результаты численного моделирования

Для тестирования предложенного в обсуждаемой модели паракапельной смеси метода интегрирования сопоставим результаты численных расчетов, полученные с использованием многомерного узлового МХ с данными решений ряда автомодельных задач.

Задача 1. Рассмотрим течение с центрированной волной разрежения при обтекании плоской пластинки под углом $\delta > 0$ однородным потоком газожидкостной смеси с $J = 0$, $\varepsilon_s = \text{const}$ (Рис. 2а). На рисунке *BC* — это непроницаемая пластинка, на остальных границах (*AB*, *CD*, *DE* и *EA*) граничные условия мягкие, то есть такие, что через эти границы смесь может свободно втекать или вытекать. Для рассматриваемой задачи параметры течения могут быть найдены из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\xi} &= -\frac{\rho[u(v-u\xi) + c^2\xi]}{(v-u\xi)^2 + \frac{c^2(1+\xi^2)}{2} \left(\frac{\alpha_s}{1-\alpha_s} + \frac{\rho c^2}{p} - 1 \right)} \equiv \Omega, \\ \frac{dp}{d\xi} &= c^2 \Omega, \quad \frac{du}{d\xi} = \frac{(v-u\xi)\xi}{\rho(1+\xi^2)} \Omega, \\ \frac{dv}{d\xi} &= -\frac{(v-u\xi)}{\rho(1+\xi^2)} \Omega, \quad \frac{d\alpha_s}{d\xi} = \frac{\alpha_s}{\rho} \Omega, \end{aligned} \quad (16)$$

которая получается из плоского варианта системы (5) после введения переменной $\xi = r/x$ [21]. Эта система интегрировалась от $\xi = \xi_0 = (M_0^2 - 1)^{-1/2}$ до такого значения $\xi = \xi_1$, при котором поток становится коллинеарным поверхности пластины. Здесь $M_0 = u_0/c_0$ и c_0 — число Маха и скорость звука в невозмущенной смеси.

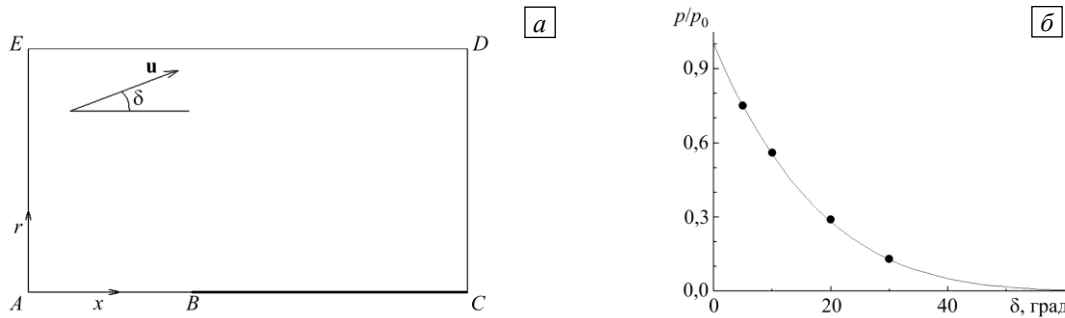


Рис. 2. Течение с центрированной волной разрежения: схема течения (а); зависимость от δ отношения p/p_0 у преграды (б)

На рисунке 2б изображена зависимость $p = p_0(\delta)$, следующая из системы (16). Точками на этом рисунке отмечены относительные давления вблизи твердой стенки, рассчитанные согласно описанному выше плоскому варианту многомерного узлового МХ по достижению раствором режима установившегося течения при $p_0 = 0,1$ МПа, $\alpha_{s0} = 0,02$ для водно–воздушной смеси ($\gamma = 1,4$; $\rho_{st}^0 = 1,16$ кг/м³; $\rho_s^0 = 1000$ кг/м³) на сетке, имеющей 300×300 узлов. Наблюдается совпадение результатов численных расчетов с автомодельным решением (сплошная кривая).

Если же угол $\delta < 0$, то в этом случае реализуется режим течения с присоединенным ударным скачком (с углом наклона β к оси Ox присоединенной ударной волны). Параметры течения за ударным скачком, имеющие индекс «sh», как и сам угол β , могут быть найдены из системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_{sh} &= \rho_0 \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\beta - \delta)}, & \frac{\alpha_{s,sh}}{\alpha_{s0}} &= \frac{\rho_{sh}}{\rho_0}, \\ p_{sh} &= p_0 + \rho_0 c_0^2 M_0^2 \sin^2 \beta \left[1 - \frac{\operatorname{tg}(\beta - \delta)}{\operatorname{tg} \beta} \right], & & (17) \\ \frac{\rho_0}{\rho_{sh}} &= 1 - \frac{2(1 - \alpha_{s0})(p_{sh} - p_0)}{p_0(\gamma - 1) + p_{sh}(\gamma + 1)}, \end{aligned}$$

которые представляют собой соотношения Ренкина–Гюгонио, отвечающие направлению, ортогональному к фронту присоединенного ударного скачка, рассматриваемые совместно с выражением для ударной адиабаты смеси [22].

На рисунке 3 сплошными кривыми показаны зависимости $\beta(M_0)$, $p = p_0(M_0)$, полученные из системы уравнений (17) при $p = 0,1$ МПа, $\alpha_{s0} = 0,02$, $\delta = -3$ град для водно–воздушной смеси. На этих же графиках точками отмечены результаты численного моделирования, рассчитанные с использованием многомерного узлового МХ на сетке с 500×500 узлами при числе Куранта 1,19. Видно, что имеет место совпадение расчетных данных с автомодельным решением.

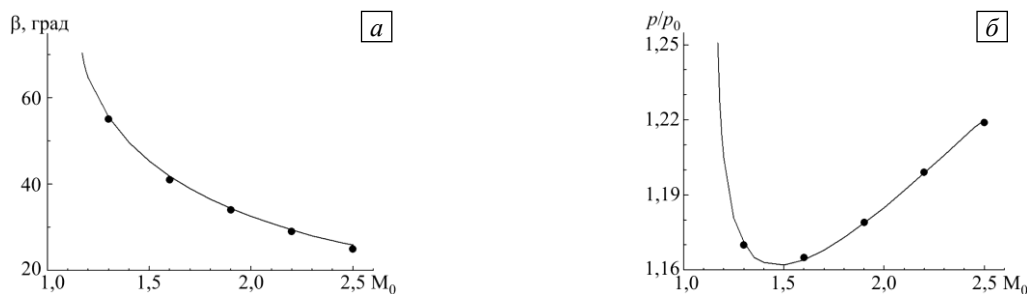


Рис. 3. Течение с присоединенным ударным скачком: $\beta(M_0)$ (а) и $p/p_0(M_0)$ (б); сплошные кривые – автомодельное решение, точки – данные численных расчетов

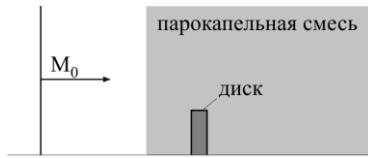


Рис. 4. Схема к задаче о взаимодействии ударной волны с диском в парок капельной смеси

в газовой фракции (с индексом «sh») рассчитывается из соотношений:

$$\rho_{st,sh}^0 = \rho_{st,0}^0 \frac{R_{st} + 2c_{v,st}}{R_{st} + \frac{2c_{v,st}}{M_0^2}}, \quad u_{sh} = \frac{2c_{v,st}c_0}{R_{st} + 2c_{v,st}} \left(M_0 - \frac{1}{M_0} \right), \quad p_{sh} = \frac{p_0}{R_{st} + 2c_{v,st}} \left[2M_0^2 (R_{st} + c_{v,st}) - R_{st} \right],$$

где c_0 и $M_0 = D/c_0$, соответственно, скорость звука в невозмущенном паре и число Маха (D — скорость фронта ударной волны). Ударный скачок, перемещающийся в парок капельной смеси, формируется в результате взаимодействия движущейся по паре ударной волны с контактной границей, разделяющей пар и парок капельную смесь.

На рисунке 5а, б приведены распределения параметров, вычисленные на сетке, содержащей 400×100 узлов. Имеет место отсутствие испарения капель в течение всего расчетного промежутка времени, в том числе и за диском. Это связано с тем, что в этой задаче давление во всей расчетной области всегда превышает исходное значение p_0 , поэтому и температура насыщения всегда превышает температуру жидкости, вследствие чего вскипание капель отсутствует. Отметим также наличие затухающих колебаний давления на торце диска с его наветренной стороны у оси симметрии (Рис. 5в).

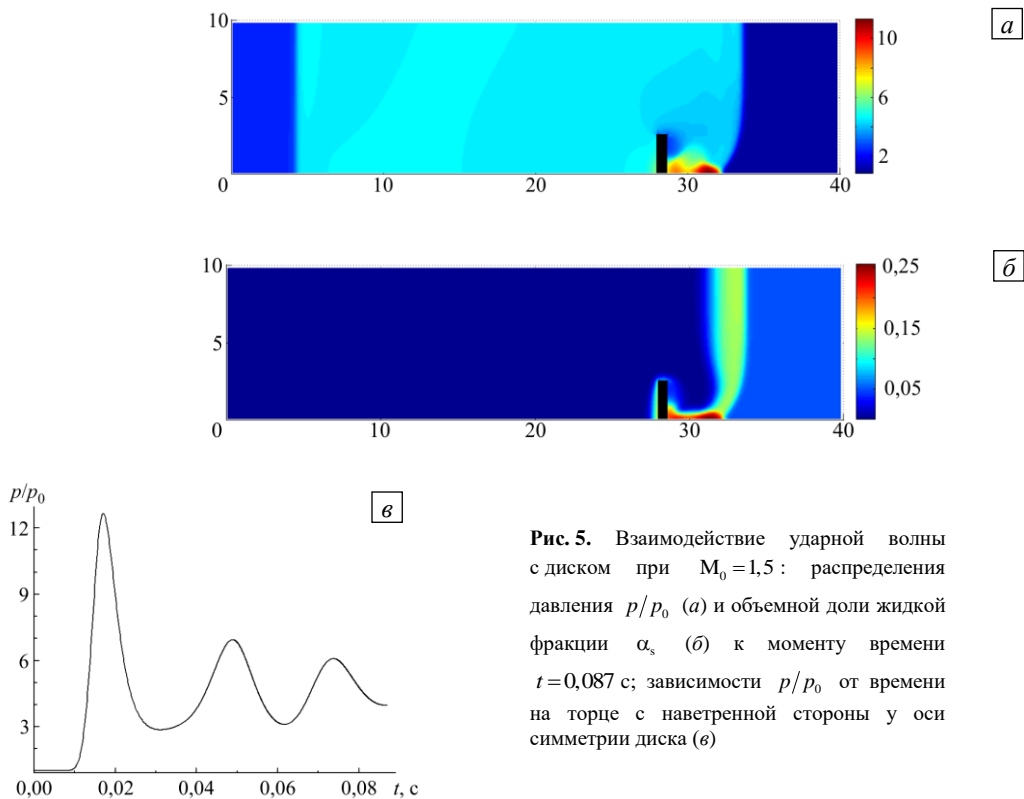


Рис. 5. Взаимодействие ударной волны с диском при $M_0 = 1,5$: распределения давления p/p_0 (а) и объемной доли жидкой фракции α_s (б) к моменту времени $t = 0,087$ с; зависимости p/p_0 от времени на торце с наветренной стороны у оси симметрии диска (в)

Задача 3. В качестве задачи, в которой наблюдается взрывное испарение капель, рассмотрено течение парок капельной смеси около диска. Диск мгновенно помещается в однородный поток дисперсной среды с параметрами: $p_0 = 0,1$ МПа; $\alpha_{s0} = 0,01$; $n = 10^9$ м⁻³; $\theta_{s0} = 375$ К, и движется вдоль оси симметрии Ox со скоростью $u_0 = 20$ м/с. Вычисления проведены на сетке с числом узлов 100×100.

На рисунке 6 представлены рассчитанные данные по распределению относительного давления p/p_0 и объемной доли жидкой фракции α_s , а также температуры насыщения θ_N около диска, полученные к моменту времени $t = 0,045$ с. Поскольку температура капле выше температуры насыщения, которая, как видно из рисунка 6в, имеет значение 374 К, за диском наблюдается интенсивное испарение капеле.

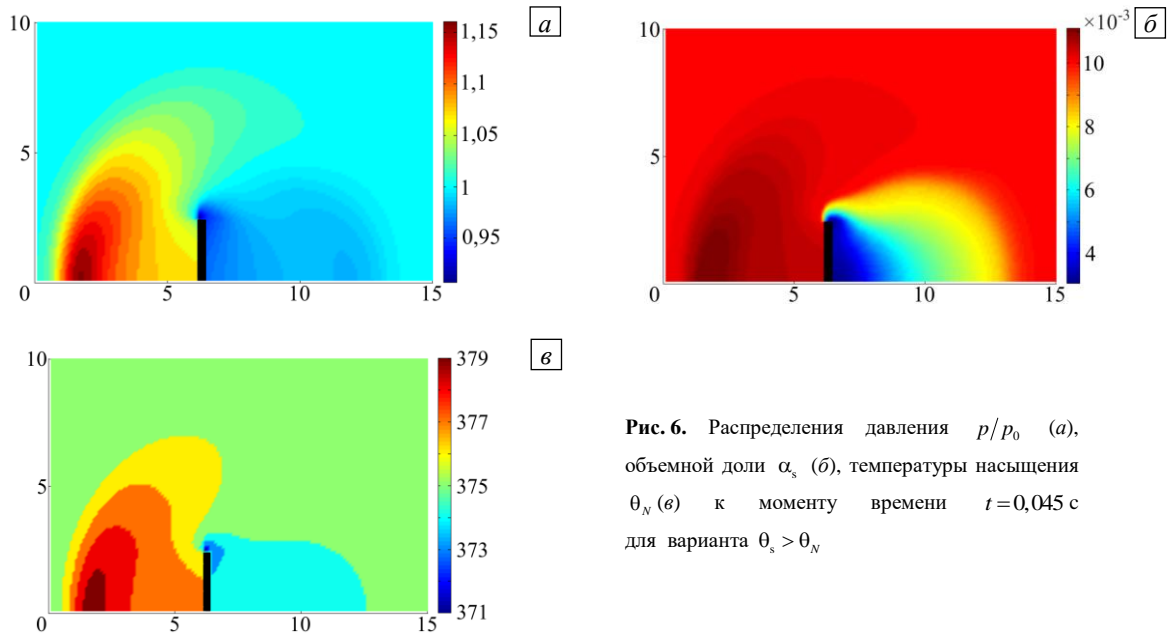


Рис. 6. Распределения давления p/p_0 (а), объемной доли α_s (б), температуры насыщения θ_N (в) к моменту времени $t = 0,045$ с для варианта $\theta_s > \theta_N$

Задача 4. На рисунке 7 приведены результаты расчета обтекания диска при тех же начальных данных, что и в задаче 3, но с начальной температурой капле $\theta_{s0} = 315$ К. В этом случае температура капле ниже отмеченного уровня в 374 К, поэтому испарение капле отсутствует, и течение существенно отличается от рассмотренного выше с взрывным испарением капле за диском.

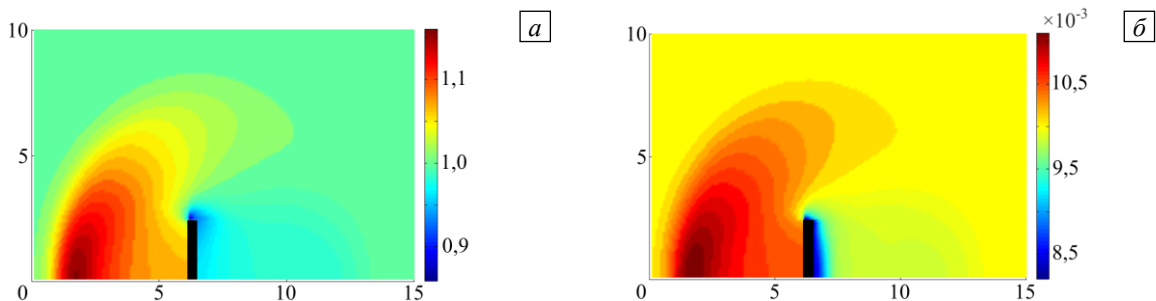


Рис. 7. Распределения давления p/p_0 (а) и объемной доли α_s (б) для варианта $\theta_s < \theta_N$

5. Заключение

Представлена гиперболическая модель парок капельной смеси, в которой учтено испарение капле по взрывному механизму. Она является развитием обобщенно-равновесной модели смеси. Жидкая фракция полагается несжимаемой. В используемой модели считается, что фазовый переход в процессе интенсивного испарения капле происходит в условиях перегретого состояния, когда температура жидкости превышает температуру насыщения. Проведен характеристический анализ уравнений модели и показана их гиперболичность. Получена аналитическая формула для расчета скорости звука в парок капельной смеси. Отмечается, что величина скорости звука в смеси при наличии фазовых превращений оказывается несколько меньшей, чем дает формула Вуда.

Описан многомерный узловый метод характеристик, предназначенный для интегрирования гиперболических систем, согласно которому исходная система уравнений расщепляется на ряд одномерных подсистем. Для каждой из подсистем выведены дифференциальные соотношения, справедливые в характеристических направлениях. При решении одномерных задач применен итерационный алгоритм обратного метода характеристик. Алгоритм протестирован на имеющихся автомодельные решения плоских задачах, таких как течение однородного потока около пластины

с присоединенным ударным скачком; течение с централизованной волной разрежения. С использованием этого расчетного метода исследовано течение парокапельного потока около диска.

Продемонстрировано, что при взаимодействии ударного скачка с диском, окруженным парокапельной смесью, испарение капель по механизму взрывного вскипания не наблюдается. Интенсивное вскипание капель за диском имеет место в случае, когда диск мгновенно помещается в парокапельный поток с начальной температурой капель, превышающей температуру насыщения. При этом взрывное вскипание капель жидкости существенно меняет картину обтекания диска, что необходимо учитывать при решении задач с таким физическим явлением.

Литература

1. Сузов В.С. Об уравнениях односкоростной гетерогенной среды // ИФЖ. 2009. Т. 82, № 1. С. 75-84. (English version <https://doi.org/10.1007/s10891-009-0163-3>)
2. Сузов В.С. Анализ волновых явлений в газожидкостных средах // ТВТ. 1998. Т. 36, № 4. С. 624-630.
3. Сузов В.С. О гиперболизации ряда моделей механики сплошной среды // ИФЖ. 2019. Т. 92, № 5. С. 2341-2357. (English version <https://doi.org/10.1007/s10891-019-02046-x>)
4. Сузов В.С. Гиперболическая модель вскипающей жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. 2019. Т. 12, № 2. С. 185-191. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.16>
5. Сузов В.С. К расчету квазиодномерных течений вскипающей жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. 2019. Т. 12, № 3. С. 325-333. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.28>
6. Wang Y., Yang V. Vaporization of liquid droplet with large deformation and high mass transfer rate, I: Constant-density, constant-property case // J. Comput. Phys. 2019. Vol. 392. P. 56-70. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.03.013>
7. Pinhasi G.A., Ullmann A., Dayan A. 1D plane numerical model for boiling liquid expanding vapor explosion (BLEVE) // Int. J. Heat Mass Trans. 2007. Vol. 50. P. 4780-4795. <https://doi.org/10.1016/j.jheatmasstransfer.2007.03.016>
8. Schlotke J., Weigand B. Direct numerical simulation of evaporating droplets // J. Comput. Phys. 2008. Vol. 227. P. 5215-5237. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.01.042>
9. Сузов В.С. Численное моделирование взаимодействия воздушной ударной волны с приповерхностным газопылевым слоем // ИФЖ. 2018. Т. 91, № 2. С. 393-399. (English version <https://doi.org/10.1007/S10891-018-1758-3>)
10. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988. 287 с.
11. Сузов В.С. Многомерный узловый метод характеристик для гиперболических систем // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т. 13, № 1. С. 19-32. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2021-13-1-19-32>
12. Nakamura T., Tanaka R., Yabe T., Takizawa K. Exactly conservative semi-lagrangian scheme for multi-dimensional hyperbolic equations with directional splitting technique // J. Comput. Phys. 2001. Vol. 174. P. 171-207. <https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6888>
13. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.
14. Сузов В.С. Модель вскипающей жидкости // Вычислительные технологии. 2020. Т. 25, № 1. С. 39-48. <https://doi.org/10.25743/ict.2020.25.1.003>
15. Ивашинов О.Е. Скачки кипения в соплах // Изв. РАН. МЖГ. 2009. № 5. С. 81-93. (English version <https://doi.org/10.1134/s0015462809050081>)
16. Болотнова Р.Х., Бузина В.А., Галимзянов М.Н., Шаганов В.Ш. Гидродинамические особенности процессов истечения вскипающей жидкости // Т и А. 2012. Т. 19, № 6. С. 719-730.
17. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 608 с.
18. Saurel R., Boivin P., Lemetayer O. A general formulation for cavitating, boiling and evaporating flows // Comput. Fluid. 2016. Vol. 128. P. 53-64. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2016.01.004>
19. Нигматуллин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // ТВТ. 2011. Т. 49, № 2. С. 310-313. (English version <https://doi.org/10.1134%2FS0018151X11020106>)
20. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. М: Мир, 1972. 436 с.
21. Сузов В.С. О некоторых автомодельных задачах течения односкоростной гетерогенной среды // ИФЖ. 2007. Т. 80, № 6. С. 164-172. (English version <https://doi.org/10.1007/S10891-007-0160-3>)
22. Сузов В.С. Ударная адиабата односкоростной гетерогенной среды // ИФЖ. 2006. Т. 79, № 5. С. 46-52. (English version <https://doi.org/10.1007/S10891-006-0179-X>)

References

1. Surov V.S. On equations of a one-velocity heterogeneous medium. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2009, vol. 82, pp. 75-84. <https://doi.org/10.1007/s10891-009-0163-3>
2. Surov V.S. Analysis of wave phenomena in gas-liquid media. *High Temp.*, 1998, vol. 36, no. 4, pp. 600-606.
3. Surov V.S. On hyperbolization of a number of continuum mechanics models. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2019, vol. 92, pp. 1302-1317. <https://doi.org/10.1007/s10891-019-02046-x>
4. Surov V.S. A hyperbolic model of boiling liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2020, vol. 61, pp. 1153-1159. <https://doi.org/10.1134/S0021894420070160>
5. Surov V.S. Calculation of quasi-dimensional flows of boiling liquid. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2019, vol. 12, no. 3, pp. 325-333. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.28>
6. Wang Y., Yang V. Vaporization of liquid droplet with large deformation and high mass transfer rate, I: constant-density, constant-property case. *J. Comput. Phys.*, 2019, vol. 392, pp. 56-70. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.03.013>

7. Pinhasi G.A., Ullmann A., Dayan A. 1D plane numerical model for boiling liquid expanding vapor explosion (BLEVE). *Int. J. Heat Mass Trans.*, 2007, vol. 50, pp. 4780-4795. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.03.016>
8. Schlottke J., Weigand B. Direct numerical simulation of evaporating droplets. *J. Comput. Phys.*, 2008, vol. 227, pp. 5215-5237. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.01.042>
9. Surov V.S. Numerical simulation of the interaction of an air shock wave with a surface gas–dust layer. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2018, vol. 91, no. 2, pp. 370-376. <https://doi.org/10.1007/S10891-018-1758-3>
10. Magomedov K.M., Kholodov A.S. *Setochno-kharakteristicheskiye chislennyye metody* [Grid-characteristic numerical methods]. Moscow, Nauka, 1988. 287 с.
11. Surov V.S. Multidimensional nodal method of characteristics for hyperbolic systems. *Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovaniye – Computer Research and Modeling*, 2021, vol. 13, no. 1, pp. 19-32. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2021-13-1-19-32>
12. Nakamura T., Tanaka R., Yabe T., Takizawa K. Exactly conservative semi-Lagrangian scheme for multi-dimensional hyperbolic equations with directional splitting technique. *J. Comput. Phys.*, 2001, vol. 174, pp. 171-207. <https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6888>
13. Yanenko N.N. *Metod drobnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoy fiziki* [Method of fractional steps to solve multidimensional problems of mathematical physics]. Novosibirsk, Nauka, 1967. 196 с.
14. Surov V.S. Boiling liquid model. *Vychislitel'nyye tekhnologii – Computational technologies*, 2020, vol. 25, no. 1, pp. 39-48. <https://doi.org/10.25743/ict.2020.25.1.003>
15. Ivashnev O.E. Boiling spokes in nozzles. *Fluid Dyn.*, 2009, vol. 44, pp. 698-717. <https://doi.org/10.1134/s0015462809050081>
16. Bolotnova R.Kh., Buzina V.A., Galimzyanov M.N., Shagapov V.Sh. Gidrodinamicheskiye osobennosti protsessov istecheniya vskipayushchey zhidkosti [Hydrodynamic features of efflux of boiling liquid]. *T i A – T and A*, 2012, vol. 19, no. 6, pp. 719-730.
17. Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Matematicheskiye voprosy chislennogo resheniya gi-perbolicheskikh sistem uravneniy* [Mathematical problems in the numerical solution of hyperbolic systems of equations]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 608 p.
18. Saurel R., Boivin P., Lemétayer O. A general formulation for cavitating, boiling and evaporating flows. *Comput. Fluid.*, 2016, vol. 128, pp. 53-64. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2016.01.004>
19. Nigmatulin R.I., Bolotnova R.Kh. Wide-range equation of state of water and steam: Simplified form. *High Temp.*, 2011, vol. 49, pp. 303-306. <https://doi.org/10.1134%2FS0018151X11020106>
20. Wallis G.B. *One-dimensional two-phase flow*. McGraw-Hill Book Company, 1969. 408 p.
21. Surov V.S. Certain self-similar problems of flow of a one-velocity heterogeneous medium. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2007, vol. 80, pp. 1237-1246. <https://doi.org/10.1007/S10891-007-0160-3>
22. Surov V.S. Shock adiabat of a one-velocity heterogeneous medium. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2006, vol. 79, pp. 886-892. <https://doi.org/10.1007/S10891-006-0179-X>

Поступила в редакцию 22.01.2022; после доработки 18.03.2022; принята к опубликованию 31. 03.2022